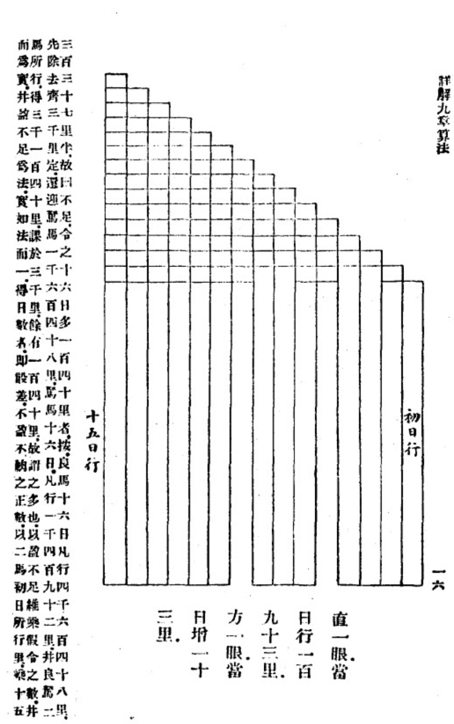
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2021 年第 10 卷第 7 期



《详解九章算法》书影

《上海 HPM 通讯》编委会

刊首新语

高中数学教学中实施课程思政的路径*

汪晓勤　邹佳晨

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

“数学课程思政”不应简单地被理解成“数学课程中的思想政治”，而应该被定义为“数学课程在立德树人的落实上所具有的独特的德育价值”。因此，实施数学课程思政，就是充分挖掘数学课程的育人价值，特别是德育价值，并在教学实践中加以实现。那么，数学学科有哪些价值呢？从古希腊开始直到 20 世纪初，人们相继对这个问题作过讨论，许多历史文化名人都提出了各自的数学教育价值观，概括起来有思维训练、推理习惯、智力开发、现实应用、心灵美化、品质升华、浮躁惩戒、人格独立等[1]。可见，除了智育价值，数学学科还有着丰富多彩的德育价值。然而，以应试为唯一目的数学教学重考试结果而轻学习过程、重知识传授而轻情感体验、重解题技巧而轻文化涵养，因而难以实现数学的多元育人价值。

数学文化融入数学教学，可以揭示知识的发生和发展过程，丰富学生的情感体验，提升学生的文化涵养，因而可以充分发挥数学课程的德育价值，从而为课程思政的实施提供有效的路径。本文通过具体的案例，探讨数学文化在中学数学教学中的运用方式以及达成的课程思政目标，为数学课程思政的研究与实践提供参考。

2 高中数学教学中的文化主题

关于数学文化，国内不同学者有不同的界定。为使数学文化融入数学教学具有可操作性、课堂中运用的数学文化具有可观察性，本文将数学教学中所运用的数学文化分成知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐和多元文化五个维度[2]。

* 上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”系列论文之一。

2.1 知识源流

“知识源流”指的是数学知识发生和发展的历史，包括知识发生的动因、演进的过程、涉及的数学人物和思想方法等。中学数学中的任何一个主题都有其源和流。

以对数概念为例，其历史由简化计算的四个阶段组成：

第一阶段是将正整数指数幂与正整数指数对应，如 2，4，8，16，…与 1，2，3，4，…对应，将幂的乘除运算转化为相应指数的加减运算，该阶段由 15-16 世纪的数学家完成；

第二阶段是将任意正整数与正整数指数对应，后者即为前者的对数，可将任意两个正整数的乘除运算转化为其对数的加减运算，该阶段由 17 世纪英国数学家纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）完成；

第三阶段是将任意正整数与小数指数对应，后者即为前者的常用对数，可以化任意两个整数的乘除运算为其对数的加减运算，该阶段由英国数学家布里格斯（H. Briggs, 1561-1630）完成；

第四阶段是将任意一个幂的指数定义为这个幂的对数，这个阶段主要由 18 世纪瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）完成。

教师可以对上述四个阶段进行重构，运用发生教学法来实施对数概念的教学，如图 1 所示。

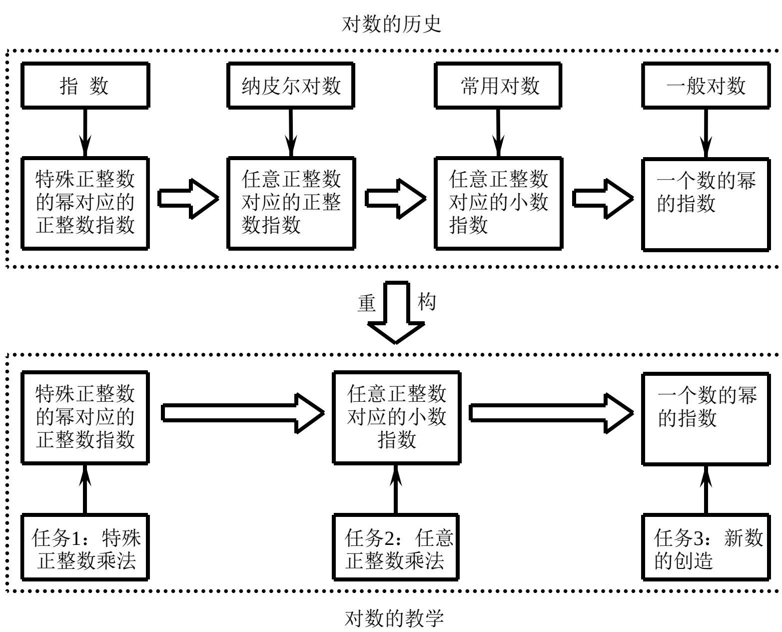


图 1 对数历史的重构

在完成探究任务 3 之后，引入对数的幂指数定义。教师可以制作微视频，追溯对数的历史，讲述纳皮尔和布里格斯的精彩故事[3]，让学生在古今对照中走进 17 世纪数学家们的心灵之中。

2.2 学科联系

“学科联系”指的是数学与自然科学、人文科学、社会科学、艺术等其他知识领域之间的关联。

以数列概念为例。公元前 7 世纪（新亚述时期）两河流域泥版上记录了一张月相表[4]，从初一至十五，月面可见部分的相对大小构成一个递增数列：

5，10，20，40，80，96，112，128，144，160，176，192，208，224，240

该数列揭示了数学与天文学之间的联系。

犹太智慧经典《塔木德经》说：“任何一个看望病人的人能消除其疾病的六十分之一。”[5]据此，我们可以编制以下问题：第 60 个人看望病人之后，其病情变得如何？第 1，2，⋯，n 个人看望病人之后，病情构成等比数列

$$\frac{59}{60}, \left(\frac{59}{60}\right)^2, \left(\frac{59}{60}\right)^3, \cdots, \left(\frac{59}{60}\right)^n$$

该数列呈现了数学与文学之间的联系。

教师在课堂上可以将上述例子作为数列概念的引例。

2.3 社会角色

“社会角色”指的是数学在现实生活、生产实践中的应用。

在“均值不等式”的教学中，常见的引入方式有不等臂天平、赵爽弦图、欧几里得半圆模型等，尽管赵爽弦图和欧几里得半圆模型属于数学史素材，但仅仅属于“借用”，两者原本用于勾股定理的证明和几何中项的作图，而非用于均值不等式的证明，不能反映均值不等式产生的真正动因。

实际上，均值不等式与历史上人们对面积和周长关系的误解息息相关。公元前 5 世纪，古希腊历史学家修昔底德（Thucydides, 约公元前 469-公元前 396）通过乘船绕西西里岛一周，来估计该岛的面积；公元 1 世纪，博物学家普林尼（G. Plinius. Secundus, 23-79）根据周长的大小来比较不同地区面积的大小；根据普罗克拉斯（Proclus, 411-485）的记载，在他所生活时代的公有

制社会里，有人将周长大的土地分给他人，被视为大公无私。[6]显然，古时候人们误以为周长越大面积就越大。

那么，究竟能否通过周长来判断面积呢？考虑最简单的长方形的情形。设长方形的长和宽分别为 a 和 b，周长 $C=2(a+b)$ 保持不变，面积为 ab，与之等周的正方形面积为 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，于是，根据不等式 $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$（当且仅当 $a=b$ 时等式成立），即可推翻古人的错误认识。该等式即等价于均值不等式 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$。

可见，均值不等式解决了人们在生活中遇到的实际问题，告诉人们，通过周长来判断面积的做法是错误的。

2.4 审美娱乐

“审美娱乐”指的是数学美与趣味数学。

在“二项式定理”的教学中，教师采用较多的是求特定的二项式的系数，和高中数学其他主题的教学一样，几乎并不涉及趣味数学问题。17 世纪法国数学家奥泽南（J. Ozanam, 1640-1718）在《趣味数理》（1694）中运用二项式系数解决了以下趣味问题[7]：

赌技相当的甲、乙二人进行一场赌博，约定先赢五局者获胜；现在，甲已赢了 3 局，乙只赢了 1 局，但赌局因故半途而废，未能最终决出胜负。试问：甲、乙如何分配赌金？

这类问题史称“点数问题”，历史上许多数学家都给出了错误的解法。17 世纪法国数学家帕斯卡（B. Pascal, 1623-1662）和费马（P. de Fermat, 1601-1665）各自提出了正确的解法，标志着概率论的诞生。奥泽南沿用了费马的思路，但不同的是，他运用了二项式定理。根据规则，甲需要再赢 2 局、乙需要再赢 4 局，才能最终胜出，因此，要决出胜负，双方需要再赌 4+2–1=5 局。假设赌博继续进行，a 表示甲胜，b 表示乙胜，则五局所有可能的结果见下表：

表 1　点数问题中剩下五局所有可能的结果

最终结果	甲胜局数	具体情况	组合数
甲赢	5	*aaaaa*	C_5^5
	4	*aaaab, aaaba, aabaa, abaaa, baaaa*	C_5^4
	3	*aaabb, aabba, abbaa, bbaaa, aabab, abaab, baaab, ababa, baaba, babaa*	C_5^3
	2	*aabbb, abbba, bbbaa, ababb, baabb, babba, abbab, bbaab, bbaba, babab,*	C_5^2
乙赢	1	*abbbb, bbbba, bbbab, babbb, bbabb*	C_5^1
	0	*bbbbb*	C_5^0

从上表可见，甲胜局数与$\left(a+b\right)^5$展开式中 a 的指数是完全一致的，相应的二项式系数就是甲胜的可能情形数目。

因此，甲、乙获得的赌金之比为$\left(C_5^5+C_5^4+C_5^3+C_5^2\right):\left(C_5^1+C_5^0\right)=26:6=13:3$。

这样，一个经典的趣味数学问题，就可以借助二项式定理加以解决。

2.5 多元文化

“多元文化”指的是不同时空数学家在同一个数学主题上的贡献。

在“等差数列前 n 项和公式”的教学中，教师常用高斯求“1+2+3+⋯+100”的故事引入“倒序相加法”。但如果一位中国教师认为高斯是最早知道“倒序相加法”的数学家，那么他就有“数典忘祖”之嫌了。事实上，早在 13 世纪，我国南宋数学家杨辉在其《详解九章算法》中给出了汉代《九章算术》中的一道行程问题的解法，其中已涉及等差数列的求和。该问题说：“今有良马与驽马发长安至齐，齐去长安三千里。良马初日行一百九十三里，日增一十三里；驽马初日行九十七里，日减半里。良马先至齐，复还迎驽马，问几何日相逢及各行几何。”在《九章算术》中，该问题是通过两次假设（假设 15 日相遇、假设 16 日相遇），采用“盈不足术”来解决的。因此，需要计算良马和驽马 15 日和 16 日所行里数。为了计算良马 15 日行程，杨辉构造了一个“阶梯形”[8]：每一个狭小矩形的宽为 1，长为良马日行里数，如图 2 所示。于是，杨辉将等差数列求和问题转化为求“阶梯形”面积问题。

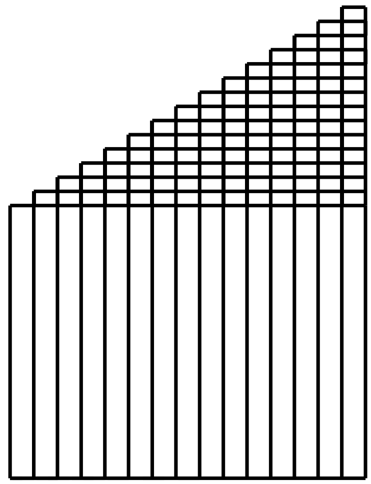


图 2 杨辉的良马图

考虑首、末项分别为a_1和a_n（$a_1>0$，$a_n>0$）、项数为n、公差为d（$d>0$）的等差数列，用杨辉的方法构造“阶梯形”，将两个同样的“阶梯形”拼成一个长方形，如图 3，（“阶梯形”被横放），长方形面积为$n\left(a_1+a_n\right)$，故一个“阶梯形”面积为

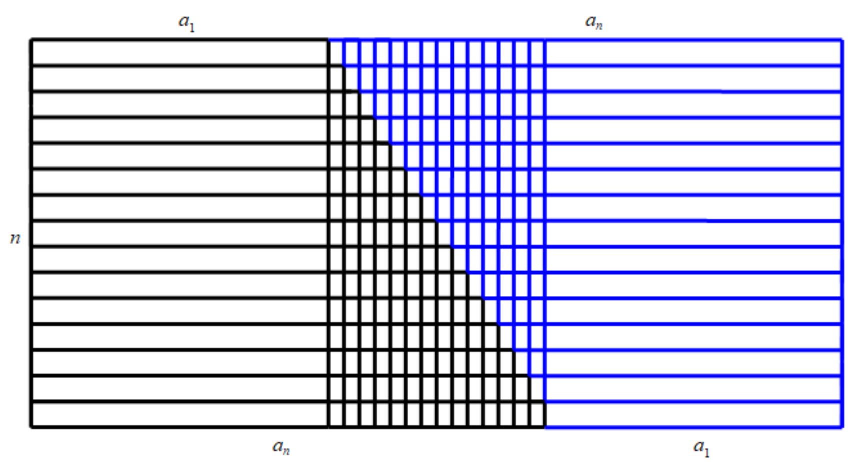


图 3 等差数列前 n 项和公式的图形表征之一

$$S_n=\frac{n\left(a_1+a_n\right)}{2}$$

此即等差数列前 n 项和公式的第一种形式。

如图 4（“阶梯形”被横放），“阶梯形”由两部分组成，其中一部分为长方形，其面积为na_1；

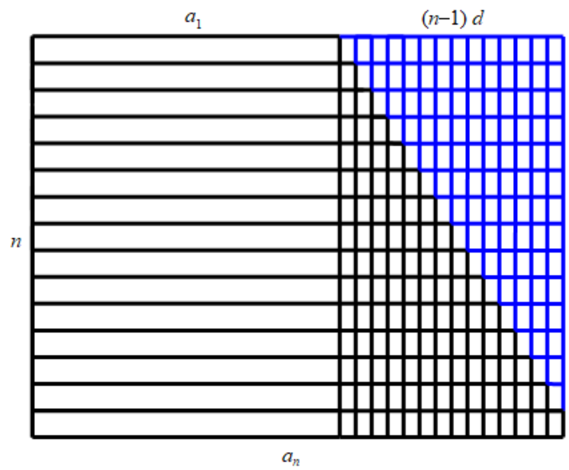


图 4 等差数列前 n 项和公式的图形表征之二

另一部分的面积为相应长方形面积之半，即 $\frac{1}{2}n(n-1)d$，故整个“阶梯形”面积为

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d$$

此即等差数列前 n 项和公式的第二种形式。

可见，我们耳熟能详的“倒序相加法”在 13 世纪的中国已经有了几何“版本”；等差数列求和公式的两种形式，也都有相应的图形表征。在等差数列这个主题上，古代东西方数学家都做出了各自的贡献，因而它是多元文化的精彩例子。

3 数学文化与课程思政

“知识源流”对于数学课程思政的实施具有重要意义。首先，数学知识并非凭空产生，其背后既有外因也有内因；数学概念、命题、公式、法则、思想、方法并非在产生的时候就成熟和完善，而是经历漫长甚至曲折艰辛的演进过程，因此，让学生经历、了解和感悟知识的发生发展历史，可以培养他们的理性思维，让他们形成正确的数学信念。其次，数学历史是人创造的，教学中呈现数学的历史，就是在数学中增加“人”的元素；让数学人性化，可以激发学生积极的数学情感。再次，学生从数学的历史中可以感受数学家在做出创造性工作时所展示的勤奋、执着、专注、坚韧、纯粹等优秀品质，从中汲取精神的力量，获得人生的启迪。

“学科联系”对于数学课程思政有以下意义。首先，可以改变学生对于数学的刻板印象，

让他们走出数学的“孤岛”，开阔视野，增加兴趣，让他们学会倾听、尊重、包容、合作与交流；其次，可以让他们体会数学学科的巨大价值，改善自己的数学信念；再次，通过学科的联系，培养他们的理性思维。

“社会角色”对于数学课程思政的意义在于：首先，让学生看到，数学推动了人类文明的发展，数学与现实生活息息相关，数学学习可以为未来的职业打下坚实的基础，从而改善他们的数学信念和情感；其次，通过实际问题的解决，培养学生的理性思维和应用意识；再次，通过呈现数学的广泛应用和巨大价值，培养学生服务社会、报效祖国的责任感。

“审美娱乐”让学生感受数学之趣，欣赏数学之美，从而激发他们对数学的兴趣、提升他们的审美能力；同时，促进他们思考：经典的趣味数学问题何以隽永？何以历久弥新？何以为人们所喜爱？

数学美的依据是什么？如何刻画？因此，数学文化的“审美娱乐”维度可以在理性、情感、信念等方面助力课程思政。

“多元文化”在开阔学生的视野、树立学生的国际意识的前提下，提升学生的文化自信。早在五十年代之初，为了提升国人的民族自信心，科学史家开始努力探寻中国古代科学史上的“世界第一”；但今日中国的综合国力、国际地位、文化影响力已大大提升，纯粹的“世界第一”已不再是建立文化自信的必要条件。就数学教学而言，在新时代，我们除了在课堂上介绍中算家的生平事迹，更重要的是在多元文化背景下呈现中国传统数学中独特的、富有教育意义的思想方法，这样，就能从理性、信念、情感、品质等多方面达成课程思政的目标。

图 5 给出了数学文化与课程思政之间的联系。

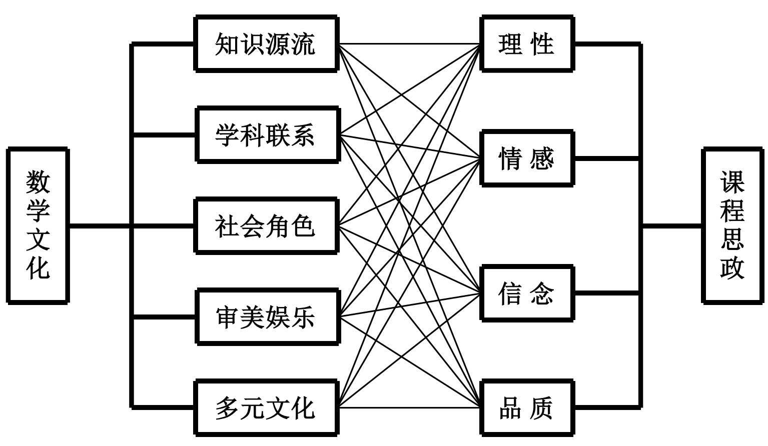


图 5 数学文化与课程思政之间的联系

4 数学文化的运用

数学文化素材在课堂中的运用方式有附加式、复制式、顺应式和重构式。

附加式指的是数学家生平业绩、趣闻轶事的介绍，教学中可以利用 HPM 微视频。如，对数概念中对于数学家纳皮尔和布里格斯的介绍。

复制式是数学史上的数学问题、实例、方法、思想等的直接运用。如，两河流域月相表中的数列、奥泽南《趣味数理》中的赌金分配问题、杨辉求等差数列之和的几何方法等，都直接取自原始文献。

顺应式是指对数学文化素材进行适当改编使之适合课堂教学，或根据数学文化素材编制用于教学的数学问题。图 6 给出了基于数学文化素材的数学问题形成过程，其中情境式策略是指改变原始材料中的情境而保持条件和目标不变提出新问题，条件式策略是指改变原始材料中的条件而保持目标不变提出新问题，目标式策略是指改变原始材料中的目标而保持条件不变提出新问题，对称式策略是将原始材料中的条件和目标互换形成新问题，链接式策略是将原问题的目标作为新问题的条件提出新问题，自由式策略是指将原始材料中的条件、目标都加以改变（且不符合前面各种策略）提出新问题。

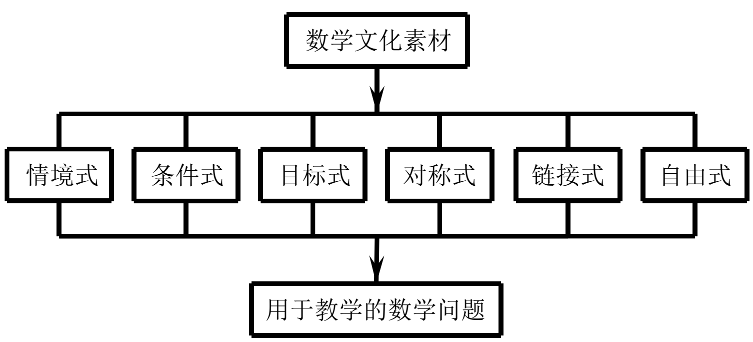


图 6 根据数学文化素材编制数学问题

如，根据《塔木德经》中的话编制一个等比数列问题，根据历史上人们对于面积和周长关系的误解，提出探究任务，都属于自由式策略。

重构式是根据一个主题的历史，从中确定该主题发展的关键步骤，然后，设计问题串，让学生在探究过程中经历知识的发生和演进过程，如图 7 所示。

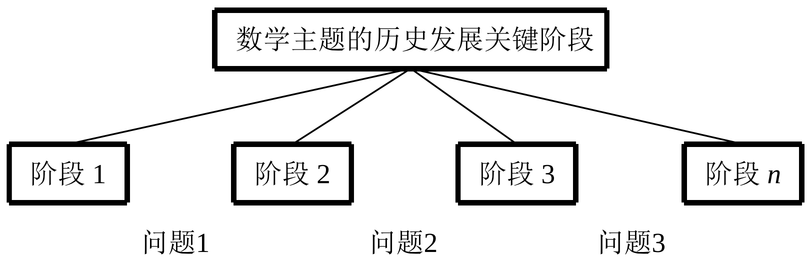


图 7 数学主题的重构式教学

图 1 呈现的就是对数概念的重构式教学。

数学文化融入数学教学的各种方式虽有难易之别，但就课程思政这一目标而言，它们却并无主次之分。

5 结 语

关于中学数学教学中的课程思政，目前尚无统一、成熟的路径，但从以上讨论中我们看到，将数学文化融入数学教学，有助于实现多元的德育价值。在数学课堂教学中借鉴和运用有关主题的历史，揭示数学与人类其他知识领域之间的联系，彰显数学在生活中的广泛应用和巨大价值，呈现数学的美与趣，并在多元文化的视野下展示优秀传统数学文化，有助于培养理性思维、改善情感信念、提升个性品质、树立远见卓识。我们有理由相信，沿着“数学文化融入数学教学”这条路径，数学教师必能书写出课程思政的精彩篇章。

参考文献

[1] 汪晓勤, 栗小妮. 数学史与初中数学教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019.

[2] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019, (2): 37-43.

[3] 汪晓勤. 你需要数学史吗？[J]. 数学教学，2002(4): 3-5.

[4] 汪晓勤. 泥版上的数列问题[J]. 数学教学, 2009(12): 1-2; 45; 封 2.

[5] 汪晓勤. 犹太数学文献中的数列问题[J]. 数学教学, 2010(4): 31-33.

[6] Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics* [M]. Oxford: The Clarendon Press, 1921.

[7] Ozanam, J. *Recreations Mathématiques et Physiques* (T.1) [M]. Paris: Jean Jombert,1694.

[8] 杨辉. 详解九章算法[M]. 见: 郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇(数学卷一), 沈阳: 辽宁教育出版社, 1994.

目 录

CONTENT

历史研究

19 世纪末 20 世纪初美国几何教科书中的数学史

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海，200241）

1 引 言

19 世纪末，美国著名数学史家、HPM 先驱者史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）和卡约黎（F. Cajori, 1859-1930）开始关注并介入数学教育领域。1891 年，史密斯在密歇根州立师范学院开设数学史课；20 世纪初，数学史成了哥伦比亚大学师范学院数学教育方向最重要的博士学位课程；1892 年，卡约黎成为美国中学数学课程标准“十人委员会”下属“数学分委员会”的十位委员之一；1908 年，史密斯参与创立国际数学教育委员会，并相继担任该委员会的副主席（1908-1920）和主席（1928-1932）；1908 和 1909 年，全美数学与自然科学教师联合会和全美教育协会相继任命了一个几何大纲“十五人委员会”，卡约黎和史密斯成为十五位成员之一。两位数学史家利用自己在数学史方面的学术优势，在各自参编的数学教科书中较多地运用了数学史素材，改变了数学史与数学教科书隔阂的现状，他们的著述对同时代的其他教科书编写者产生了一定的影响。从 1890 年代开始，少数几何教科书开始零星地使用数学史素材。

我们选择 1890-1919 三十年间在美国出版的 13 种几何教科书（Beman & Smith, 1899；Gore, 1899；Failor, 1906；Robbins, 1907；Durell, 1911；Hart & Feldman, 1912；Betz & Webb, 1912；Wentworth & Smith, 1913；Betz & Webb, 1916；Wells & Hart, 1916；Wentworth, Smith & Brown, 1917；Palmer & Taylor, 1918；Slaught & Lennes, 1919），对其中的数学史材料进行考察。13 种教科书中，几何教科书有 12 种，综合性教科书 1 种；2 种出版于 19 世纪末，11 种出版于 1900 和 1910 年代。

与符号代数相比，几何学拥有更悠久的历史和更丰富的历史文化内涵，因此，19 世纪末，使用数学史素材的几何教科书要多于代数教科书。笔者希望通过几何教科书的考察，回答以下研究问题：13 种几何教科书运用了哪些数学史料？它们又是如何运用这些史料的？数学史料的运用有何特点？

2 数学史内容分析

2.1 数学人物

Beman & Smith（1899）在附录中，在扼要介绍几何学历史之后，收录了书中出现的从古埃及的阿莫斯（Ahmes, 约公元前 1650 年）到奥地利的维加（G. Vega, 1756-1802）共 34 位数学家的生卒年和简介。这一做法是编写者贝曼（W. W. Beman, 1850-1922）和史密斯的一项创举。

Durell（1911）在扉页上使用了泰勒斯、柏拉图、毕达哥拉斯和欧几里得的画像，并称他们为“几何学的创始人和发现者。”（图 1）

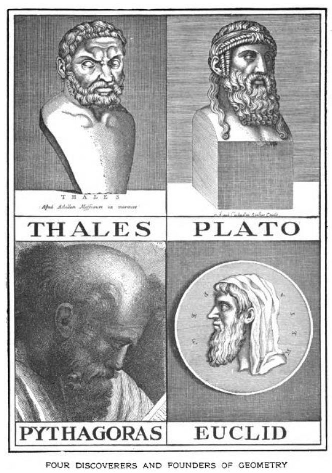
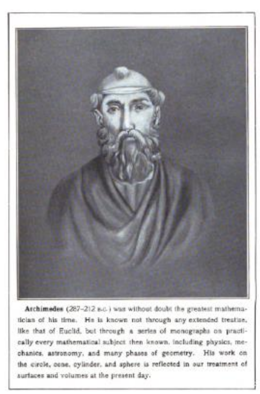


图 1 Durell（1911）扉页上的数学家画像

Slaught & Lennes（1919）使用了泰勒斯、阿基米德、卡瓦列里、勒让德的画像。（图 2）






卡瓦列里　泰勒斯　阿基米德　勒让德

图 2　Slaught & Lennes（1919）中的数学家画像

除了数学家的画像外，还有教科书在知识点的历史注解中介绍有关数学家的生平事迹、故事传说，其中也含有画像。表 1 给出了 Hart & Feldman（1912）的部分历史注解的信息。

表 1　Hart & Feldman（1912）中的部分历史注解

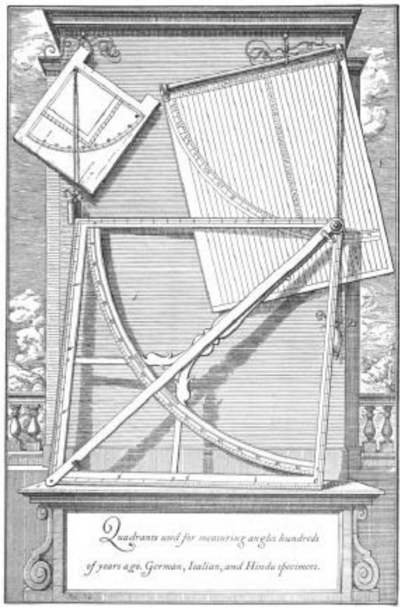
栏目	内 容	数学家	生平/轶事	画 像
习题	证明“驴桥定理”：等腰三角形底角相等。	欧几里得	名言：“几何无王者之道”； 故事：一位学生问欧几里得，学了几何学能获得什么实利，他叫奴隶取来几个硬币丢给这名学生，让他走人。	 EUCLID
习题	给定两条相互垂直的轴，找出满足条件的点的轨迹。	笛卡儿	故事：在荷兰的一个小镇街头，笛卡儿看到一张海报上写着一道几何难题，他很快将其解出，并因此发现自己对于军队生活没有兴趣。	 DESCARTES
正文	圆周角的性质（同弧、半圆、大于半圆、小于半圆的弧所对的圆周角）	泰勒斯	故事：一天，泰勒斯在观星时跌入阴沟，一位老妪对他说：“你连脚底下都看不见，又怎能知道天上在发生什么事呢？”	 THALES
正文	勾股定理	毕达哥拉斯	生平：早年师从泰勒斯，游历小亚细亚、埃及，可能还去过巴比伦和印度。回萨莫斯后创建学派，后去意大利南部的克罗顿，建立秘密会社。以五角星为会徽，以服从、克制和纯洁为理想。	 PYTHAGORAS

正文	正多边形	高斯	生平：十五岁进卡洛琳学院学习，但教授们都承认，他们所能教的他都已经会了。后就读于哥廷根大学，在数论方面做了重要工作。1807 年成为该大学的天文学教授。	 Gauss
正文	圆的周长与面积	阿基米德	名言：“给我一个支点，我能撬动整个世界。” 故事：当叙拉古被罗马人攻陷时，阿基米德正在沙地上画图。当罗马士兵走向他时，他请求他们不要弄坏了他的圆。士兵不认识他，便用刺刀杀害了他。罗马主将马塞留斯为他立碑，碑上刻有一个球和外切圆柱。	 Archimedes
正文	立方体的体积	柏拉图	名言：“不懂几何者免入。” 传说：遭受瘟疫的雅典人赴得罗斯岛祈求神谕，问如何阻止瘟疫。阿波罗神回答说，得罗斯人必须将立方祭坛改大一倍。得罗斯人建造了边长两倍大的新立方祭坛，结果，瘟疫更严重了。于是，他们只好求助于柏拉图。	 Plato

2.2 图片资料

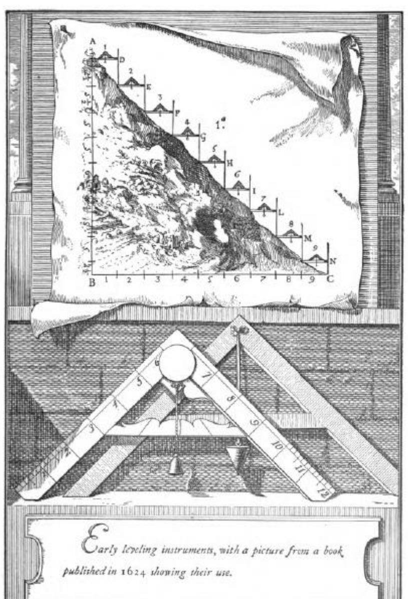
图片资料指的是历史上数学书（包括手稿）的书影、历史上数学家所使用的测量工具、反映数学主题的绘画作品等。

Wentworth, Smith & Brown（1917）在几何部分，给出了很多关于历史上各种测量工具和测量方法的图片：如四分仪、17 世纪数学书中的水准仪、古代星盘、天球仪、16 世纪的测量方法，此外还有《几何原本》最早的英译版书影等（图 3）。这充分体现了数学史家史密斯的风格：无论是教学，还是著书，史密斯都十分重视有关数学家和数学历史文献的图片。

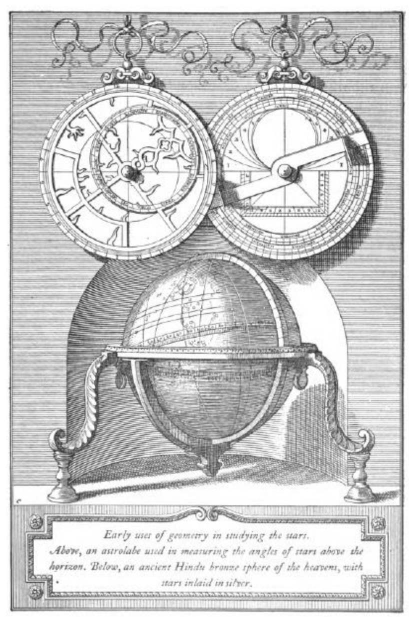


四分仪

四分仪的应用

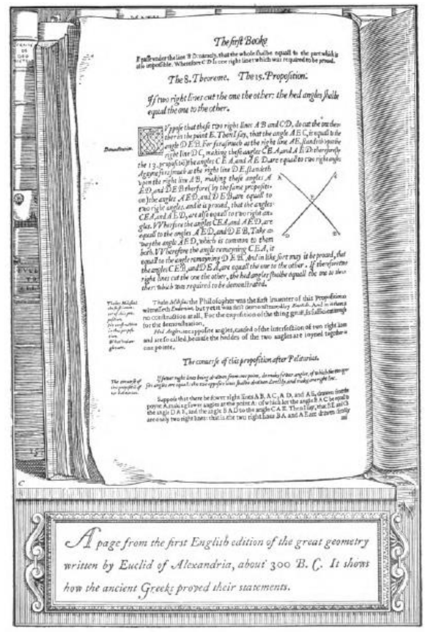


水准仪及其应用



星盘与天球仪

河宽与塔高的测量



《几何原本》最早的英译版书影

塔高与海岛距离的测量

高度测量

图 3 《初中数学》中的插图

Betz & Webb（1916）也采用了一些插图，如丢勒《画家手册》（1525）中反映透视画画法的木刻画，如图 4。

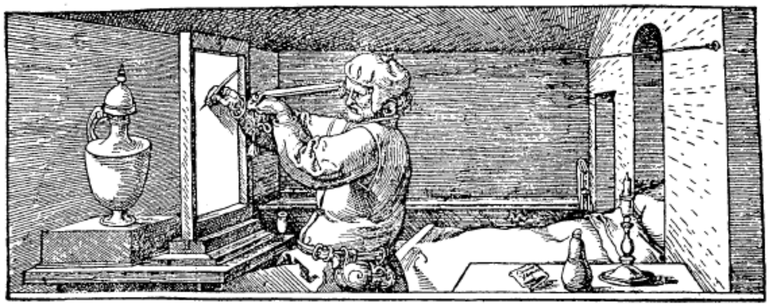


图 4 艺术家在作花瓶的透视画

2.3 术语词源

Beman & Smith（1899）通过构词法，对 130 多个数学名词的词源进行了分析。表 2 给出了部分例子。

表 1 Beman & Smith（1900）中的部分数学术语词源

术语	词源	分析	中文译名
commensurable	拉丁语	com：一起；mensurare，测量	可公度的
corollary	拉丁语	corollarium：礼物；购买花环的钱	推论
cylinder	希腊语	kyliein：卷	圆柱
diagonal	希腊语	dia：穿过；gonia：角	对角线
dihedral	希腊语	di：二；hedra：座位	二面角
geometry	希腊语	ge：土地；metron：测量	几何学
hypotenuse	希腊语	hypo：在下方；teinein：伸长	斜边
isosceles	希腊语	isos：相等的；skelos：腿	等腰的
obtuse	拉丁语	ob：在上方；tundere：敲打	钝的
parallel	希腊语	para：在旁边；allelon：彼此	平行的
parallelogram	希腊语	parallelos：平行的；gramma：线	平行四边形
perpendicular	拉丁语	per：通过；pendere：悬挂	垂直的
prism	希腊语	prisma：锯掉的东西	棱柱
projection	拉丁语	pro：向前；jacere：投掷	投影
radius	拉丁语	rod：轮辐	半径
scalene	希腊语	skalenos：不平衡的	不等边的
tangent	拉丁语	tangere：接触	切线
trapezoid	希腊语	trapezion：桌子	梯形
vertex	拉丁语	vertere：翻转	顶点

在数学教科书中补充数学名词的词源分析，这也是编写者贝曼和史密斯的一项创举。

2.4 数学问题

数学史是一个巨大的宝藏，不仅提供了丰富多彩的数学问题，而且也为数学问题的编制提供了丰富的素材。早期教科书中的大量习题就是根据历史上的数学问题或材料编制而成的。

Gore（1899）利用古埃及的数学史料来编制数学问题：

- 古埃及人说："作一个正方形，使其边长等于圆的直径的 8/9 倍，则正方形的面积等于圆的面积。"请据此计算圆周率的值。

Robbins（1907）利用希波克拉底定理和阿基米德关于鞋匠刀形的一个命题编制成证明题：

- 试证明：若在直角三角形三边上各作半圆，则两个弓月形面积之和等于直角三角形的面积。（图 5）
- 试证明：若从半圆上一点向直径引垂线，以垂足分直径所得两线段为直径分别作半圆，则三个半圆所围区域的面积等于以垂线为直径的圆的面积。（图 6）

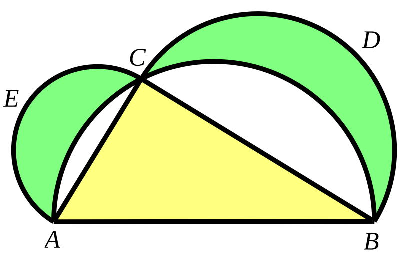


图 5 希波克拉底定理

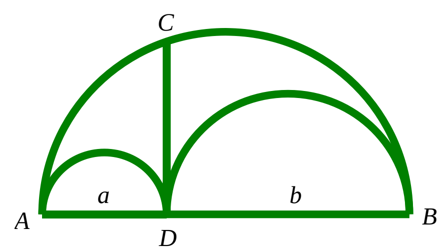


图 6 阿基米德"鞋匠刀形"

Hart & Feldman（1912）利用各种数学史料来编制练习题，如：

- 利用图 7，证明等腰三角形底角相等。（图 7 为欧几里得证明命题 I.5 所用的图形）

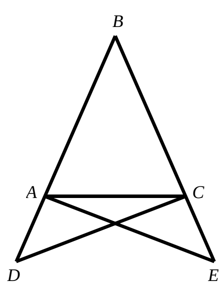


图 7 驴桥定理的欧氏证明

- 如图 8，将含有 64 个小方格的正方形剪成 I、II、III、IV 四片，再将它们重新拼成含有 65 个小方格的长方形。试利用相似三角形知识，解释构图中的谬误。（19 世纪的几何谬论：64

= 65）

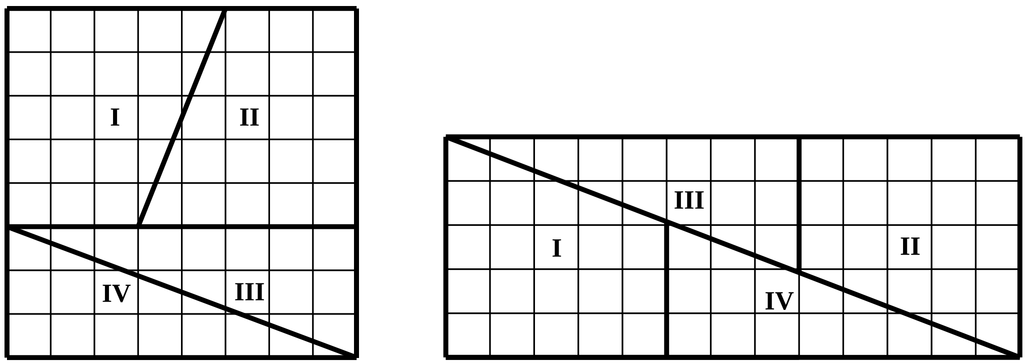


图 8 几何谬论：64=65

Betz & Webb（1912）根据数学史料编制了许多数学问题作为习题。如：

- 今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问水深、葭长各几何。（中国汉代《九章算术》）
- 作一个正方形，使其与已知长方形面积相等。（《几何原本》命题 II.14）

作者没有采用欧几里得在《几何原本》卷 2 命题 14 中的作图法，而采用了欧几里得证明勾股定理的方法。如图 9，延长 AD 至 E，使得 $AE=AB$，以 AE 为直径作半圆，交 CD 的延长线于 F。于是，则以 AF 为边长的正方形即为所求。

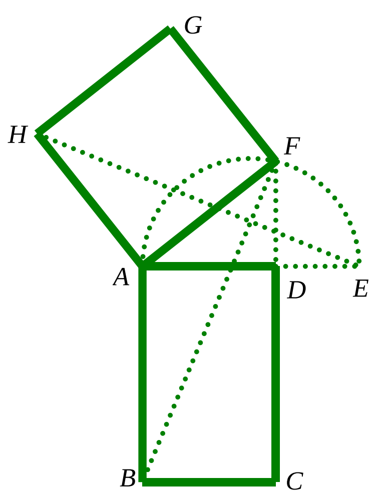


图 9 长方形转化为正方形

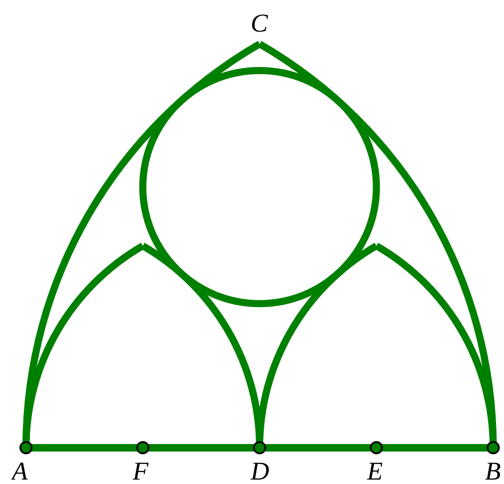


图 10 哥特窗的设计

- 图 10 是哥特式建筑中的拱券和圆花窗设计图案，试用尺规作出这幅图形，并对作图法作出解释。

• 据说，米利都的泰勒斯（公元前 6 世纪）发明了一种测量轮船与海岸距离的方法。他的方法被认为是以角边角定理为依据的：如图 11，有两根杆子 m 和 n 连接于点 A 处，将 m 握于垂直方向，n 指向轮船。然后，以 m 为轴旋转该工具，使 n 指向岸上的目标物 S'，则 $BS = BS'$。试作出解释。

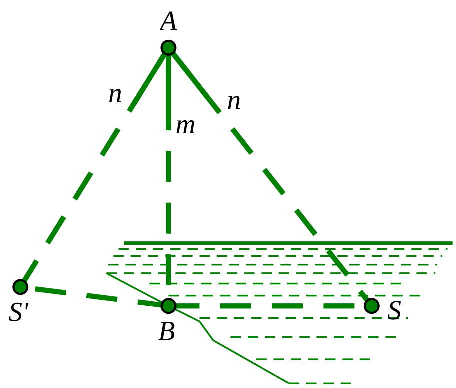


图 11 泰勒斯远距离测量法

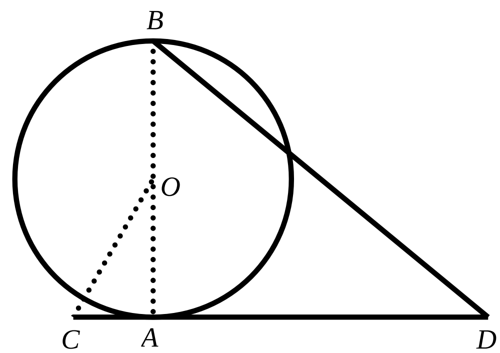


图 12 科赞斯基作图法

• 据说，古罗马土地丈量员用下述方法来测河宽：A、B 分别位于河两岸，在岸上取 $AD \perp AB$，取 AD 的中点 E，取 $DF \perp AD$，使得三点 B、E、F 共线。试作图说明上述方法，并说明其正确性。

• 古希腊历史学家修昔底德（Thucydides，公元前 5 世纪）通过绕西西里岛航行一周所花的时间来估计岛的面积。他错在哪里？

• 17 世纪波兰数学家科赞斯基（A. A. Kochansky, 1631-1700）给出一种圆周长的近似作图法：如图 12，AB 为圆 O 的直径，$AB = 2R$，过点 A 作圆 O 的切线 CD，作$\angle AOC = 30°$，$CD = 3R$。证明：BD 约等于圆 O 的周长之半。

• 阿基米德曾给出命题：圆面积等于一个三角形的面积，三角形的底边长等于圆周长，高等于半径。利用科赞斯基的作图法，作出这个三角形。

• 古希腊杰出的数学家希波克拉底（Hippocrates, 430 B.C.）给出化圆为方的方法：如图 13，以圆内接正方形的边长为直径分别作半圆，得到的四个弓月形面积之和等于圆内接正方形的面积。试证明之。

• 马蹄拱是摩尔建筑的重要特点之一，其作图法如图 14 所示。以 A 为圆心，AC 为半径作四分之一圆，取其三等分点 D，连接 AD 并延长，交 AB 的垂直平分线于 H。以 H 为圆心，HA

为半径作圆弧，交 HC 的延长线于 O。以 O 为圆心，OA 为半径作圆弧，即得马靴拱。已知 $AB=2a$，求马靴拱的弧长、高和面积。

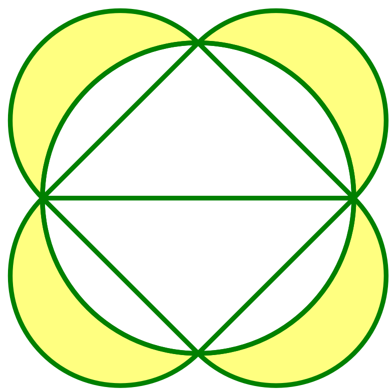


图 13 希波克拉底的化圆为方法

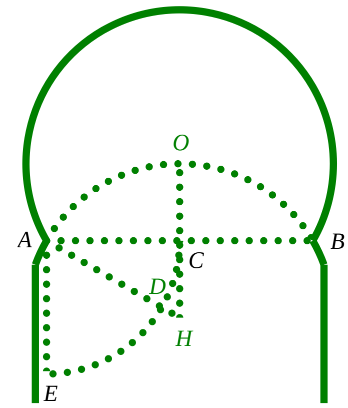


图 14 马靴拱的设计

Betz & Webb（1916）中的一些习题也根据历史材料编制而成，如：

● 归功于瑞士大数学家欧拉的一个立体几何定理说的是：在任一多面体中，棱数等于面数与顶点数之和减去 2。试说明：迄今学过的多面体都满足欧拉定理。

● 已知古埃及大金字塔（即胡夫金字塔）原来是高为 156.4 米、底面边长为 232.2 米的正四棱锥，后来塔顶颓坏，成了高为 147.8 米的正四棱台。不计不规则部分，求棱台上底的面积、侧面积。

Wentworth & Smith（1913）为了说明证明的必要性，在引入部分的习题中运用了德国天体物理学家佐尔湼（J. K. F. Zöllner, 1834-1882）和德国物理学家波根多夫（J. C. Poggendorf, 1796-1877）的错觉图形。如：图 15 中，线段 AC 和 BD 在两端是否等距？图 16 中，阴影部分下方的三条直线中，哪一条是 AB 的延长线？

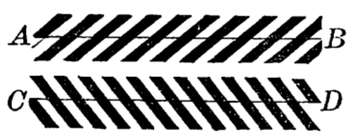


图 15 佐尔湼错觉图形

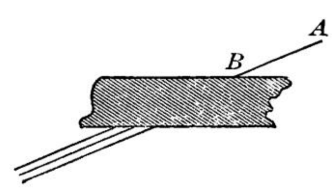


图 16 波根多夫错觉图形

同书附录以习题的形式介绍了 19 世纪盛行于欧洲的几何谬论：

- 任意三角形均为等腰三角形；
- 直角等于钝角；

- 线段部分等于整体；
- 线段上任意一点将线段平分；
- 过直线外一点可以向直线引两条垂线；
- ……

Wentworth, Smith & Brown（1917）根据历史材料编制了部分习题，例如：

- 根据图 3 中“塔高与海岛距离的测量”的上半部分示意图，试解释：如何运用四分仪测量塔高？
- 图 17 是中世纪意大利教堂的镂花窗图案，用尺规准确作出这个图案；
- 图 18 是 16 世纪意大利数学书中的展示泰勒斯测量方法的插图，在图的上半部分，一个人按帽沿方向目测对岸；然后转身按帽沿方向在岸上目测。问：这个人是如何得出河宽的？

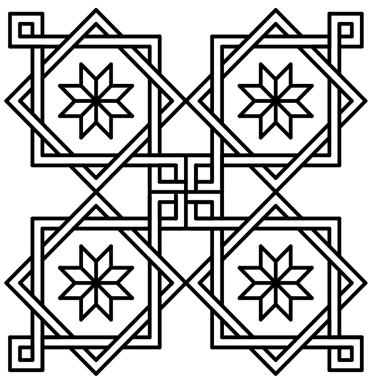


图 17 中世纪意大利教堂的镂花窗

图 18 16 世纪意大利数学书中泰勒斯测量方法的插图

2.5 专题历史

数学专题的历史通常以注解的形式出现，主要追溯某个主题（公式、定理）的起源、发现者或简史。

Beman & Smith（1899）开创了在教科书中补充历史注解的传统。编者在前言中指出，历史注解增加学生对课本的兴趣，这已成了人们的共识。关于“在已知线段上作一个正三角形”这一推论（已知三边长，作三角形），历史注解称这是“欧几里得《几何原本》的第一个命题，欧几里得发现该推论是开启他的逻辑体系的最佳命题”；关于三角形内角和定理，注解称“其发现者是毕达哥拉斯学派”；关于勾股定理，历史注解称“据说毕达哥拉斯给出了该定理的第一个证明，尽管定理本身很久以前已为人所知”；关于命题“三角形三条高线交于一点”，注解

称“该定理归功于阿基米德”；关于定理“四边形四边平方和等于对角线的平方和加上对角线中点连线平方的四倍”，注解称其发现者是欧拉；关于定理“若弓形小于、等于、大于半圆，则弓形内的圆周角大于、等于、小于直角”，注解称“半圆内的圆周角为直角，这一发现归功于泰勒斯”。此外，书中还介绍一些主题的历史，如 π 的历史、化圆为方的历史、圆内接正多边形作图的历史、柏拉图立体等。

此后，不少教科书沿用了 Beman & Smith（1899）的做法。Failor（1906）在毕达哥拉斯定理、圆内接正多边形的尺规作图和圆周率等主题作了历史注解。

Hart & Feldman（1912）的众多历史注解中，除了表 1 所呈现的数学家生平外，还有一些专题的历史。如，毕达哥拉斯不可公度量、芝诺悖论（阿喀琉斯追龟问题）、古埃及人利用边长为 3、4、5 的三角形来构造直角、几何学在古埃及的起源、圆内接正多边形尺规作图的历史、圆周率的历史、正多面体的历史、莱因得纸草书上的体积计算公式等。

Betz & Webb（1912）对勾股定理、海伦公式、正多边形的尺规作图、三等分角问题、圆周率等作了历史注解。

Betz & Webb（1916）对立体几何的若干主题作了历史注解，如阿基米德在球表面积和球体积方面的工作以及阿基米德墓碑、梅内劳斯与球面三角形的性质，等等。

Wells & Hart（1916）对全等的符号“≅”、命题“等腰三角形底角相等”、过直线外一点作直线的垂线、尺规作图的工具限制、平行线性质、三角形内角和定理、多边形内角和与外角和定理、三角形重心、分析法、勾股定理、圆内接正十边形尺规作图、圆周率等主题加了历史注解。

Palmer & Taylor（1918）分别对勾股定理及其推广形式、海伦公式、圆周率、平行四边形四边平方和定理、圆内接正多边形的尺规作图、球体积公式等主题作了历史注解。

2.6 思想方法

这里所说的“思想方法”，指的是教科书中推导公式或证明定理所用的方法。尽管 20 世纪初的美国几何教科书已经摆脱了《几何原本》的束缚，但仍然深深地刻上了《几何原本》的烙印。大量的几何命题源于《几何原本》，欧几里得的证明方法仍然被奉为圭臬。以勾股定理为例，Beman & Smith (1899)，Failor (1906)，Gore (1908)，Durell (1911)，Betz & Webb (1912)，Hart & Feldman (1912)，Wentworth & Smith (1913)，Wells & Hart (1916)，Palmer & Taylor (1919) 无

一例外都首选了欧几里得的面积证法。有 4 种教科书给出了赵爽的证法、学术界所推测的毕达哥拉斯的证法以及阿拉伯数学家伊本·库拉（Tābit ibn Qorra, 826-901）的证法，两种教科书给出加菲尔德（J. A. Garfield, 1831-1881）的方法，其他证法只出现于某一种教科书。详见本书“勾股定理”一节。

也有一些教科书在证明某些定理时抛弃欧几里得的方法，而采用欧几里得之后的数学家的方法。如，Wentworth & Smith（1913）采用了公元 1 世纪拜占庭时期数学家菲罗（Philo）的方法来证明边边边定理，即让两个三角形的其中一条边重合，所对顶点位于该边的两侧，联结顶点，利用等腰三角形性质和边角边定理即可完成证明。详见本书“全等三角形的判定”一节。

2.7 几何学史

不少教科书在开篇或在全书的最后介绍几何学的历史。如，Betz & Webb（1912）在开篇即介绍几何学在古埃及（图 19）的起源：

“几何学是所有艺术与科学中最古老的。它产生于巴比伦和埃及，源于建筑、测量、航海

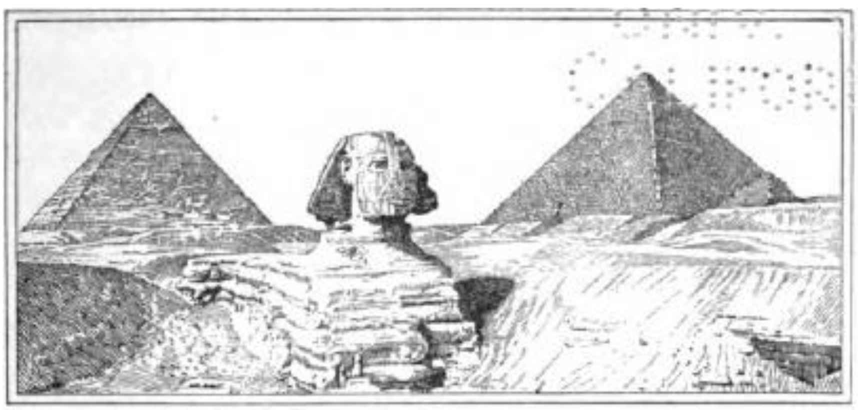


图 19 Betz & Webb（1912）开篇插图：埃及金字塔与狮身人面像

等实践活动。事实上，‘几何’一词的意思就是‘土地测量’。古希腊历史学家希罗多德曾游历于埃及。他说，每年尼罗河的泛滥改变了土地的许多边界，因此每年都需要对每一位纳税人的土地进行测量，以便能够合理地调整税额。他断言，正是在这种情况下，几何学起源于埃及。所有的古典作者都赞同他的观点，将埃及称为几何之乡。”（p.1）

关于古希腊（图 20）几何学，编者写道：

“尽管早期的几何学就实用目的而言具有巨大的价值，但它却是有缺陷的，因为它仅仅由一组经过数百年实验得到的规则所组成。如何得出结果，似乎是其最重要的问题。有了希腊的

天才，这种状况并未无限期地延续下去。他们是一个思想家和诗人的民族。他们希望知道，在一组给定的条件下，为什么某个结果一定会成立。他们的智者在埃及学习多年，回国后，他们激发了追随者对于几何学研究的浓厚兴趣。他们发现了许多新的事实，这些事实逐渐被编排成一个体系。这样，几何学就变成了一门科学。经过约三百年的不懈研究，希腊人编撰成一部巨著，最终以欧几里得的《几何原本》（约公元前 300 年）的形式面世。”（p.2）

图 20 Betz & Webb（1912）开篇插图：帕特农神殿

关于几何学的目的，编者写道：

“按照希腊人所赋予的形式，几何学主要关注的不再是测量这样的实践活动，而是点、线、面、体最重要性质以及它们之间的关系的发现与分类。”（p.3）

接下来，编者又讨论了几何学的价值和方法等。

Durell（1911）在附录中专门介绍几何学的历史，包括几何学的起源、几何学的历史分期、几何方法的历史、几何定理的历史等。其中，几何方法被分成三类——修辞方法、逻辑方法和机械方法。

所谓修辞方法，指的是使用了定义、公理、定理、几何图形来呈现几何事实、用字母表示几何量、将材料编辑成卷，等等。关于该方法，本书介绍了以下数学家。

- 泰勒斯：第一个表述几何图形抽象性质，有了初步的几何定理的思想；
- 毕达哥拉斯：第一个将定义引入几何学，按逻辑顺序将所知的重要命题加以编排；
- 希波克拉底：第一个用大写字母表示一点，两个大写字母表示一条线段；
- 柏拉图：第一个将定义、公理和公设作为几何学的起点和基础；
- 欧几里得：第一个将几何学分成不同卷，按照“形式地给出定理”、“具体表述”、“形

式的作图”、“证明”、“结论”的顺序来呈现一个命题，最早使用了推论和注释。

所谓逻辑方法，指的是演绎证明的方法。关于该方法，本书介绍了以下数学家。

- 毕达哥拉斯：第一个通过系统的演绎建立几何事实，但他的方法有时是错误的，如，他认为一个命题的逆命题一定成立；
- 希波克拉底：在几何证明中使用了正确的、严密的演绎，还运用了化归方法和归谬法；
- 柏拉图：最早采用了分析法，即假定命题成立，从结论出发，推出已知事实。
- 欧多克斯：最早采用穷竭法；
- 阿波罗尼奥斯：最早使用了投影、截线等。

所谓机械方法，指的是利用特定工具作图。古希腊人发明了许多作图工具，但受柏拉图的影响，最终限定只用尺规两种工具来作图。

Wells & Hart（1916）、Palmer & Taylor（1918）开篇也介绍了几何学的历史。

3 讨论

3.1 数学史的运用方式

数学教科书运用数学史的方式可分为点缀式、附加式、复制式、顺应式和重构式五种（汪晓勤，2012）。

点缀式是以“装饰”、“美化”、“人性化”为目的的运用方式。数学家的画像、古代数学书籍、测量或作图工具的图片、反映数学主题的艺术作品等都属于点缀式素材。在我们所考察的 13 种几何教科书中，点缀式素材主要有两类，即数学家画像和图片资料。但点缀式素材并非仅仅为点缀而点缀，而是以图辅文、图文相配。如，Hart & Feldman（1912）在介绍某位数学家的生平事迹时，配上了相应的人物画像；Slaught & Lennes（1919）在数学家画像的下方给出了简短的生平介绍。

附加式是以“追溯历史起源、补充历史知识、提供辅助材料”为目的的运用方式，附加式素材通常以附录、注解的形式出现，可与正文内容相分离。13 种几何教科书中，术语词源、人物生平、专题历史均属于附加式素材。

复制式是指原原本本采用历史上的数学问题、问题解法、命题证明等，或直接在正文中介绍有关主题的历史。复制式素材是教科书正文不可分割的一部分，其功能是提供数学问题、再

现古人智慧、促进数学学习。13 种教科书中，数学史上的问题、方法和正文中的几何学历史概述都属于复制式素材，而附录中的有关历史介绍，则属于附加式。Betz & Webb（1912）中的“引葭赴岸”问题、正方形作图问题分别采自中国的《九章算术》和古希腊的《几何原本》，故属于复制式问题。Robbins（1907）的希波克拉底弓月形定理和阿基米德鞋匠刀形命题的证明，Hart & Feldman（1912）的等腰三角形性质证明问题也属于复制式问题。

所谓顺应式，是指对根据历史材料来编制问题，或将历史上的数学问题进行改编，使之具有更适合于今日的教学，或将历史上的思想方法进行改进、简化使之顺应时代。顺应式数学史素材也是教科书不可分割的一部分，其功能是提供数学问题、增加探究机会、展示数学思想、激发学习兴趣。与代数教科书大多采用复制式数学问题不同，13 种几何教科书主要采用自由式，根据历史材料来编制新的数学问题，见表 2。

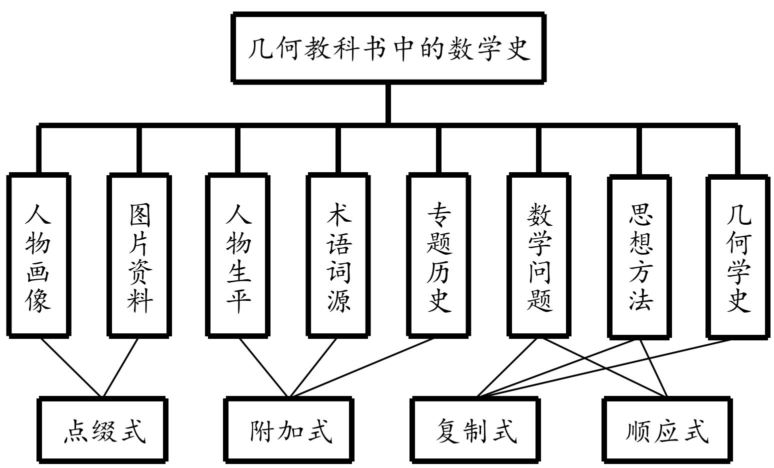


图 21 各类数学史素材在几何教科书中的不同运用方式

表 2 根据历史材料编制的部分数学问题

类别	历史材料	国家/地区	问题类别	编题策略	几何教科书
命题	圆面积近似公式	古埃及	计算题	自由式	Gore（1899）
	圆面积公式	古希腊	作图题	自由式	Betz & Webb（1912）
	欧拉公式	瑞士	验证题	自由式	Betz & Webb（1916）
谬论	64=65	欧洲	证明题	自由式	Hart & Feldman（1912）

	任意三角形均为等腰三角形	英国	证明题	自由式	Wentworth & Smith（1913）
	直角等于钝角	英国	证明题	自由式	Wentworth & Smith（1913）
建筑	拱券	欧洲	作图题	自由式	Betz & Webb（1912）
	马蹄拱	欧洲	计算题	自由式	Betz & Webb（1912）
	胡夫金字塔	埃及	计算题	自由式	Betz & Webb（1916）
	教堂花窗	意大利	作图题	自由式	Wentworth, Smith & Brown（1917）
测量	轮船的距离	古希腊	解释题	自由式	Betz & Webb（1912）
	河宽	古罗马	解释题	自由式	Betz & Webb（1912）
	海岛面积	古希腊	解释题	自由式	Betz & Webb（1912）
	塔高	欧洲	解释题	自由式	Wentworth, Smith & Brown（1917）
	河宽	意大利	解释题	自由式	Wentworth, Smith & Brown（1917）
作图	圆周长	波兰	证明题	自由式	Betz & Webb（1912）
	弓月形求积	古希腊	证明题	自由式	Betz & Webb（1912）
图形	视错觉图形	德国	判断题	自由式	Wentworth & Smith（1913）

在 13 种几何教科书中，我们几乎没有发现重构式。图 21 给出了 13 种教科书中的数学史素材类别与四种运用方式之间的对应关系。

3.2 数学史素材的若干特点

早期几何教科书对数学史素材的运用，呈现出以下特点。

其一，教科书是否运用数学史与编者息息相关。

本文所考察的 13 种几何教科书或多或少都运用了数学史，但运用数学史料的数量和方式互有不同。Beman & Smith（1899）、Hart & Feldman（1912）以及 Wells & Hart（1916）中的历史注解较为丰富，Wentworth, Smith & Brown（1917）中的图片资料较为丰富，Betz & Webb（1912）中的基于历史材料的数学问题较为丰富。贝曼是密歇根大学数学教授，曾与史密斯曾合作翻译德国学者芬克（K. Fink, 1851-1898）的《初等数学史》（1899）和《数学简史》（1900），对数学史有着浓厚的兴趣；在与史密斯合作以前，温特沃斯（G. A. Wentworth, 1835-1906）在其单独编写的教科书中极少使用数学史材料，但在与史密斯合作之后，其教科书开始较多地使用数学史材料，这显然与史密斯的旨趣息息相关；哈特（C. A. Hart, 1863-?）等受贝曼和史密斯的影响，在《平面与立体几何》前言中称“众多的历史注解将给本书增加活力和趣味性”。总之，19 世纪末 20 世纪初使用数学史料的几何教科书编者，或多或少，都受到数学史家史密斯的影响。

其二，几何教科书运用数学史的情况与同时代数学史学术研究状况密切相关。

19 世纪末 20 世纪初，几何教科书编写者所掌握的数学史知识明显有着时代的局限性。 在 13 种几何教科书中，我们只看到“引葭赴岸”这一中国古代数学问题，关于勾股定理、圆周率、球体积、棱锥体积等主题，只字未提中国古代数学家的贡献。实际上，在英国著名科学史家李约瑟（J. Needham, 1900-1995）出版《中国的科学与文明》之前，西方学者对于中国古代数学成就知之甚少；甚至连 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）这样学问宏博的数学史家也完全忽略中国古代数学的成就。

其三，数学课程改革对数学教科书产生重要影响。

20 世纪初，培利运动如火如荼，科学人文主义运动方兴未艾，数学课程处在变革之中。几何大纲“十五人委员会”在其报告中强调了数学史的教育价值：

> “无疑，教师或教科书给出零星的历史信悉，具有激发兴趣的效果。在该学科的初等历史中可以找到丰富的素材；一些特定命题的发现者已为人所知；在学生学习几何的过程中，非正式地告诉他们几何学的一般历史，将增加可贵的人文兴趣。建议在教室中悬挂著名数学家的画像。”（National Committee of Fifteen, 1912）

本文考察的教科书的编写者中，斯劳特（H. E. Slaught, 1861-1937）、史密斯、贝茨（W. Betz, 1879-?）、哈特（W. W. Hart）都同为几何大纲“十五人委员会”成员。在该委员会报告发表后出版的教科书都深受该报告的影响，数学史料的运用，也就成为很自然的事了。

4 结语

19 世纪末 20 世纪初的 13 种美国几何教科书使用了较为丰富的数学史素材，涉及数学人物、数学名词、图片资料、数学问题、思想方法、专题历史等，其中使用最多的是数学问题和专题历史；运用数学史的方式有点缀式、附加式、复制式和顺应式；教科书运用数学史的情况与同时代数学史研究、编写者的数学史素养以及当时的数学课程改革大背景息息相关。

数学史融入数学教科书，在今天仍是一个颇受关注的主题，早期几何教科书所用数学史素材的类别较为丰富，为我们带来了很多思想启迪。

其一，让数学人性化、富有趣味性和吸引力，是教科书运用数学史材料的重要目的之一，教师或教科书在介绍数学家生平时，可以按照“一个人物、一个故事、一个主题和一种思想”来展开；

其二，数学术语的词源、专题的历史等附加式素材在今日教科书中并不多见，而这些素材都有助于学生对相关主题的学习，完全可用于今日教科书或课堂教学之中；

其三，历史上的数学问题或基于数学史料编制的数学问题是最重要的复制式或顺应式素材，尽管近年来中考或高考试卷上出现了一些数学文化问题，但问题来源相对单一，基于数学史的问题编制是未来数学教师重要的研究课题。

将数学史融入数学教科书是一项系统工程。编写者不仅需要对数学学科的育人价值以及数学史独特的教育价值有深刻的认识，而且需要掌握丰富的数学史素材和对数学史料进行裁剪和加工的策略。在 20 世纪之初浩如烟海的西方几何教科书中，只有极少数运用数学史，这一事实充分证明：对于教科书编写者而言，数学史的运用并非易事。我们有理由相信，教科书如何运用数学史素材、用什么数学史素材，是一个需要长期研究的课题。

参考文献

[1] Beman, W. W., Smith, D. E. (1899). *New Plane & Solid Geometry*. Boston: Ginn & Company.

[2] Betz, W., Webb, H. E. (1912). *Plane Geometry*. Boston: Ginn & Company.

[3] Betz, W., Webb, H. E. (1916). *Solid Geometry*. Boston: Ginn & Company.

[4] Durell, F. (1911). *Plane and Solid Geometry*. New York: Charles E. Merrills Company.

[5] Failor, I. N. (1906). *Plane and Solid Geometry*. New York: The Century Company.

[6] Gore, J. H. (1899). *Plane and Solid Geometry*. New York: Longmans, Green, and Company.

[7] Hart, C. A. Feldman D. D. (1912). *Plane and Solid Geometry*. New York: American Book Company.

[8] Palmer, C. I., Taylor, D. P. (1918). *Plane and Solid Geometry*. Chicago: Scott, Foresman and Company.

[9] Robbins, E. R. (1907). *Plane and Solid Geometry*. New York: American Book Company.

[10] Slaught, H. E., Lennes, N. J. (1919). *Solid Geometry*. Boston: Allyn & Bacon.

[11] 汪晓勤. (2012). 法国初中教科书中的数学史. 数学通报, 51(3): 16.

[12] Wells, W. & Hart, W. W. (1916). *Plane and Solid Geometry*. Boston: D. C. Heath & Company.

[13] Wentworth, G. A., Smith, D. E. (1913). *Plane and Solid Geometry*. Boston: Ginn & Company.

[14] Wentworth, G. A., Smith, D. E. & Brown, J. C. (1917). *Junior High School Mathematics*, Boston: Ginn and Co.

[15] National Committee of Fifteen on Geometry Syllabus. Final Report of the National Committee of Fifteen on Geometry Syllabus. *The Mathematics Teacher*, 1912, 5(2): 46-131.

美英早期几何教科书中的旋转体概念

沈中宇

（苏州大学数学科学学院，苏州 215006）

1 引 言

旋转体是立体几何中的一类重要和基本的几何体。《普通高中数学课程标准》（2017 年版）要求“利用实物、计算机软件等观察空间图形，认识柱、锥、台、球及简单组合体的结构特征，能运用这些特征描述现实生活中简单物体的结构。”（中华人民共和国教育部, 2017）在现行的人教版、沪教版和苏教版教科书中，主要研究的旋转体有圆柱、圆锥和球等，其中各个旋转体的定义主要为矩形、三角形和半圆绕着某条直线旋转一周所形成的几何体。在教学实践中，教师往往采用直观演示或生活观察的方式直接引出各旋转体的概念（王志明，1959; 李多，2018）。但是，学生往往未能通过简单的演示和观察深入理解旋转体的概念，同时，如何在旋转体概念的教学中进一步渗透数学核心素养、落实数学学科德育，成为了教师关注的重要课题。

在历史上，欧几里得（Euclid, 325BC-265BC）在《几何原本》第 11 卷中分别给出了圆柱、圆锥和球的旋转定义（Heath, 1908，269-271），古希腊数学家海伦（Heron, 1 世纪）给出了球的静态定义（Heath, 1908，269），古希腊数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius, 约 263BC-190BC）给出了圆锥的另一个定义（Heath, 1908，270）。由此可见，历史上，旋转体的概念有着悠久的历史，且不同的数学家给出了各旋转体的多种定义。

有鉴于此，本文聚焦圆柱、圆锥和球的定义，对美英早期几何教科书进行考察，以期对今日的数学教学提供启示。本研究试图回答以下问题：美英早期几何教科书中呈现的圆柱、圆锥和球的定义有哪些？这些定义是否随着时间推移而发生嬗变？

2 研究方法

本研究采用的研究方法主要为质性文本分析法 （Kuckartz, 2014），接下来详细介绍本研究的文本选取、编码和分析过程。

2.1 文本选取

本研究选取 19 世纪 10 年代到 20 世纪 60 年代约 160 年间出版的 78 种美英几何教科书作为研究对象，其中 73 种为美国教科书，5 种为英国教科书。若以 20 年分段，则各教科书的分布情况如图 1 所示。

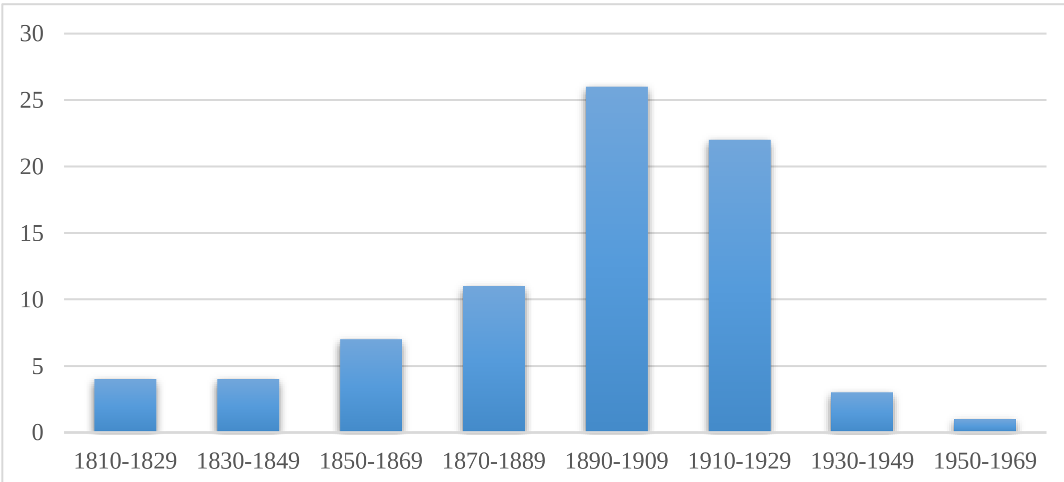


图 1 78 种美英教科书的时间分布

本研究关注美英早期几何教科书中有关旋转体的内容，进一步的，本研究聚焦美英早期教科书中圆柱、圆锥和球的定义，因此，分别选取圆柱的定义、圆锥的定义和球的定义作为记录单元，其相关论述主要出现于“圆体（round bodies）”、“三种圆体（the three round bodies）”、“圆柱”、“圆锥”和“球”等章节中。

2.2 文本编码

基于选取的 78 种美英早期几何教科书中有关的圆柱、圆锥和球的定义，对其定义进行编码，确定主题类目。接着，根据主题类目分别得到圆柱定义、圆锥定义和球定义的分类，将 78 种美英早期几何教科书中的圆柱定义、圆锥定义和球定义分别归于恰当的类目。

2.3 文本分析

在文本编码完成之后，开始文本分析。根据研究问题，首先呈现主题类目及其子类目的分类结果，即分别呈现美英早期几何教科书中的圆柱、圆锥和球的定义，分析其不同的类别，从而回答第一个研究问题。其次，根据时间顺序对不同定义类别在其时间上的分布情况进行统计和分析，从而回答第二个研究问题。

3 圆柱的概念

通过文本编码，可以将圆柱的定义分为矩形旋转定义、直线旋转定义、圆平移定义、直线连接定义、基于棱柱的定义、基于圆柱面的定义和基于圆柱空间的定义 7 类。

统计发现，78 种美英早期几何教科书中涉及圆柱定义的编码共 120 条，其分布如图 2 所示。由此可见，早期教科书中呈现最多的圆柱定义分别是基于圆柱面的定义和矩形旋转定义，其次为基于直线旋转定义、基于圆柱空间的定义和基于棱柱的定义，而圆平移定义和直线连接定义则较少。

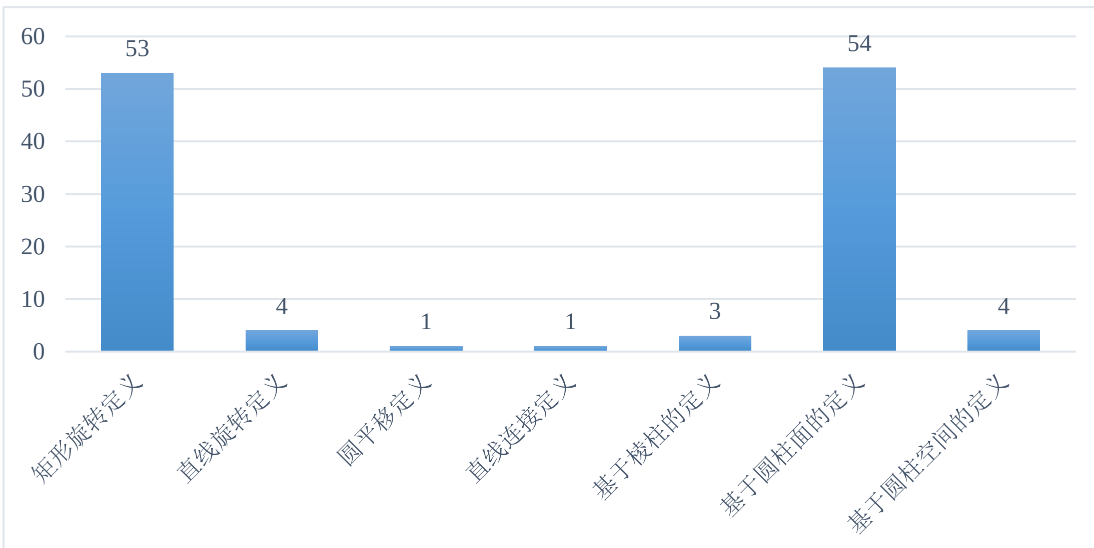


图 2 78 种美英教科书中圆柱定义的分布

下面对圆柱的以上 7 类定义作具体的分析。

3.1 矩形旋转定义

矩形旋转定义源于欧几里得的《几何原本》第 11 卷中对圆柱的定义（Heath, 1908，269-271），其中，欧几里得给出的圆柱定义为“固定矩形的一边，绕此边旋转矩形到开始位置，所成的图形称为圆柱”。这一定义在后世得到了广泛流传，较多美英早期几何教科书沿用了欧几里得的圆柱定义。

法国数学家勒让德 （A. M. Legendre, 1752-1833）在其《几何基础》中，将圆柱定义为“矩形绕着一条固定边旋转而形成的立体图形称为圆柱”。（Legendre, 1819）

其后，不同的教科书给出了多种矩形旋转定义的表述（如表 1），尽管表述互有不同，但均源于欧氏定义。

表 1 部分教科书中的矩形旋转定义

年份	作者	著作	圆柱的定义
1829	普莱菲尔（J. Playfair, 1748-1819）	《几何基础》	矩形绕着它的一条边旋转生成的立体图形称为圆柱。
1841	戴维斯（C. Davies, 1798-1876）	《几何基础》	矩形绕着一条固定边旋转而形成的立体图形称为圆柱。
1849	罗密士（E. Loomis, 1811-1889）	《几何基础与圆锥曲线》	矩形绕着它的一条边（保持固定）旋转而形成的立体图形称为圆柱。
1864	塔潘（E. T. Tappan, 1824-1888）	《平面与立体几何》	圆柱是矩形以它的一条边为轴旋转而形成的立体图形。

3.2 直线旋转定义

Hayward（1829）将圆柱定义为“空间中一条直线沿给定圆以平行于自身的方式运动，形成圆柱”。其后，不同教科书强调了直线旋转定义的不同特征。

Robinson（1850）将圆柱定义为“空间中一条直线与轴平行，绕着两个同样且平行的圆旋转形成圆柱”，强调直线绕着圆旋转。

Dupuis（1893）将圆柱定义为“由一对平行线中的一条以固定的距离围绕另一条平行线旋转，形成圆柱”，强调直线绕着定直线旋转。

3.3 圆平移定义

78 种教科书中，只有 Hayward（1829）将圆柱定义为“一个圆沿着一条给定直线，以平行于自身的方式运动形成圆柱”。

3.4 直线连接定义

Grund（1832）给出了直线连接定义：“圆柱是由两个相等和平行的圆所包围的几何体，它有一个弯曲的侧面，从下底上的任意一点出发作一条直线与上底面相连，则这条直线完全在侧

面上”。

3.5 基于棱柱的定义

Peirce（1837）最早将圆柱定义为“底面为正无穷多边形（即为圆）的棱柱称为圆柱”。Benjamin（1858）沿用了皮尔斯对圆柱的定义。

3.6 基于圆柱面的定义

Schuyler（1876）先定义圆柱面为“空间中一条直线沿着一条给定曲线，按照与不在曲线平面内的一条给定直线平行的方式运动所形成的面”，再将圆柱定义为“一个由圆柱面和两个平行平面所围成的几何体”。

Newcomb（1884）将圆柱面定义为“一条直线沿着一条给定的曲线按照保持与初始位置平行的方式运动所形成的面”，接着用圆柱面来定义圆柱。

Halsted（1885）将圆柱面定义为“一条直线沿着一条给定的曲线运动所形成的面，运动过程中的任意两条直线的位置都保持平行”，接着用圆柱面来定义圆柱。

Van Velzer & Shutts（1894）将圆柱面定义为“一条直线保持与自身平行的位置移动，同时不断与一条给定曲线接触，从而形成圆柱面”，接着，用圆柱面来定义圆柱。

3.7 基于圆柱空间的定义

基于圆柱空间的定义最早出现于 Beman & Smith（1899）中。作者先定义圆柱面为“一条直线沿着一条给定的曲线运动所形成的面，在运动过程中，直线始终保持与初始位置平行”，再定义圆柱空间为“准线为封闭曲线的圆柱面”，最后将圆柱定义为“包含在两个平行平面之间的圆柱空间”。

Sykes & Comstock（1922）将圆柱空间定义为“无限且封闭的圆柱面”，再利用圆柱面空间来定义圆柱。

3.8 圆柱概念的嬗变

以 20 年为单位，对上面提到的圆柱的 7 类定义：矩形旋转定义、直线旋转定义、圆平移定义、直线连接定义、基于棱柱的定义、基于圆柱面的定义和基于圆柱空间的定义进行统计，得到 1810-1969 这 160 年间 7 类圆柱定义在时间上的分布情况，如图 3 所示。

从图 3 中可见，矩形旋转定义从 19 世纪 10 年代开始出现并占据主流，其后逐渐减少，直到 20 世纪 50 年代开始销声匿迹。直线旋转定义出现于 19 世纪 10 年代，在 19 世纪 50 年到 60 年代之间较为活跃，在 19 世纪末 20 世纪初昙花一现，其后则没有出现。圆平移定义只是出现在 19 世纪初期，其后不见踪迹。直线连接定义只在 19 世纪 30 年代到 40 年代出现。基于棱柱的定义集中出现于 19 世纪 30 年到 60 年代。基于圆柱面的定义从 19 世纪 70 年代开始兴起，其

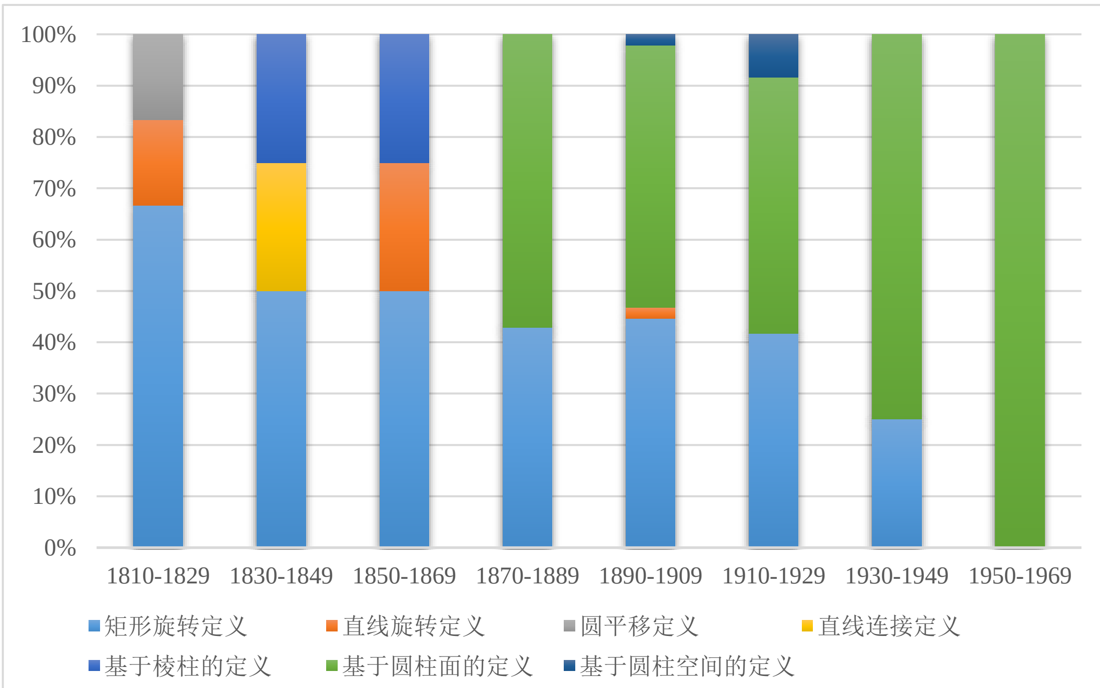


图 3 78 种美英教科书中圆柱定义的分布

后逐渐占据主流。基于圆柱空间的定义出现较晚，主要出现于 19 世纪末到 20 世纪初之间。

从年代上看，从 19 世纪 10 年代到 19 世纪 60 年代之间，主要是矩形旋转定义占据主流，而直线旋转定义、圆平移定义、直线连接定义和基于棱柱的定义则轮番出现。从 19 世纪 70 年代到 20 世纪 20 年代，主要是矩形旋转定义和基于圆柱面的定义平分秋色，直线旋转定义和基于圆柱空间的定义偶有出现。从 20 世纪 30 年代开始，矩形旋转定义逐渐减少，基于圆柱面的定义基本一统天下。

4 圆锥的概念

通过文本编码，可以将圆锥的定义分为直角三角形旋转定义、直线绕定点旋转定义、直线

连接定义、基于棱锥的定义、基于圆锥面的定义和基于圆锥空间的定义 6 类。

统计发现，78 种美英早期教科书中涉及圆柱定义的编码共 119 条，其分布如图 4 所示。由此可见，早期教科书中呈现最多的圆锥定义分别是基于圆锥面定义和直角三角形旋转定义，其次为直线绕定点旋转定义、基于棱锥的定义和基于圆锥空间的定义，而直线连接定义则较少。

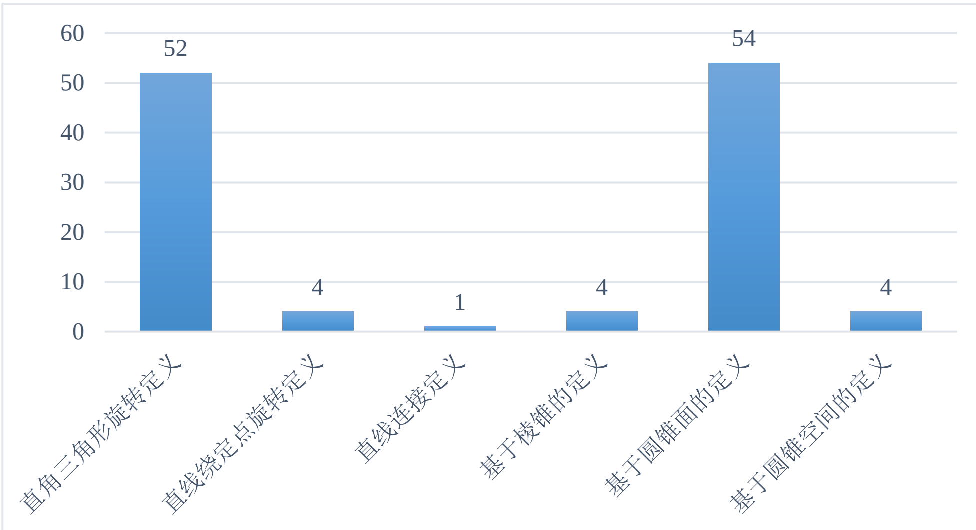


图 4 78 种美英教科书中圆锥定义的分布

下面对以上 6 类圆锥定义作具体的分析。

4.1 直角三角形旋转定义

直角三角形旋转定义源于欧几里得的《几何原本》第 11 卷中对圆锥的定义（Heath, 1908，269-271），其中，欧几里得给出的圆柱定义为“固定直角三角形的一条直角边，旋转直角三角形到开始位置所形成的图形称为圆锥”。这一定义对美英早期几何教科书中有关圆锥的定义有着重要的影响。

勒让德将圆锥定义为“直角三角形绕着它的一条固定边旋转而成的立体图形”。（Legendre, 1819）其后，不同的教科书给出了直角三角形旋转定义的多种表述（如表 2），尽管表述互有不同，但均源于欧氏定义。

表 2 部分教科书中的直角三角形旋转定义

年份	作者	著作	圆锥的定义
1829	海沃德（J. Hayward, 1786-1866）	《几何基础》	圆锥由直角三角形绕着它的一条直角边旋转而成。

1841	戴维斯（C. Davies, 1798-1876）	《几何基础》	圆锥可由直角三角形绕着其中一条边旋转而成。
1850	帕金斯（G. R. Perkins, 1812-1876）	《几何基础》	圆锥是由直角三角形绕着一条固定边旋转而成的立体图形。
1859	本杰明（G. Benjamin, 1786-1864 ）	《几何基础》	圆锥是直角三角形绕着它的一条垂直的固定边旋转而成的立体图形。

4.2 直线绕定点旋转定义

直线绕定点旋转定义源于古希腊数学家阿波罗尼奥斯给出的圆锥定义，其将圆锥定义为“一条无限长的直线通过一个定点，并且绕着一个与定点不在同一平面上的圆周旋转，这条经过圆周上的每一个点的动直线形成的表面”。（Apollonius, 1896）

苏格兰数学家普莱菲尔 （J. Playfair, 1748-1819）在其《几何基础》中将圆锥定义为“一条直线过圆所在平面外一点，沿着圆旋转而成的立体图形”。（Playfair, 1829） Robinson（1868）进一步将圆锥定义为“由一个圆和一条直线运动所产生的表面所包围的几何体，这条直线通过过圆心且垂直于圆的平面上的一点，以及它周长上的不同点”。

4.3 直线连接定义

直线连接定义仅出现于 Grund（1832）中，该书将圆锥定义为“圆锥是被圆和一个弯曲表面包围的几何体，这个表面的终点是一个点，成为圆锥的顶点，从圆上的每一个点，可以作一条到顶点的直线，这个直线完全在表面上”。

4.4 基于棱锥的定义

Peirce（1837）最早将圆锥定义为“底面为正无穷多边形（即为圆）的棱锥称为圆锥”。Gore（1898）提到，由于圆锥可以看作底边为无穷多边形的棱锥，因此可以将很多棱锥的性质类比到圆锥中。

4.5 基于圆锥面的定义

基于圆锥面的定义最早出现于 Schuyler（1876）中，该书先将圆锥面定义为“空间中一条直线沿着一条给定曲线，并且过不在曲线平面内的一个定点运动所形成的面”。接着，进一步定义圆锥为“一个由圆锥面和一个平面所围成的几何体”。

Halsted（1885）进一步将圆锥面定义为"空间中一条直线绕着一个定点运动所形成的图形"。接着，采用圆锥面来定义圆锥。

Olney（1886）给出了圆锥面的另一种表述："圆锥面是由空间中一条直线运动所形成的表面，这条直线经过一个固定点，而直线上的其他点则描出一条曲线"。接着，采用圆锥面来定义圆锥。

4.6 基于圆锥空间的定义

基于圆锥空间的定义最早出现于 Beman & Smith（1899）中，作者先将圆锥面定义为"空间中一条直线沿着一条给定曲线运动，并且包含一个定点所形成的表面"。接着，定义圆锥空间为"给定曲线为封闭曲线的圆锥面"。最后，定义圆锥为"圆锥空间中在顶点和横截面之间的部分"。

Sykes & Comstock（1922）将圆锥空间定义为"封闭的圆锥面"。其后，利用圆锥空间来定义圆锥。

4.7 圆锥概念的嬗变

以 20 年为单位，对上面提到的圆锥的 6 类定义：直角三角形旋转定义、直线绕定点旋转定义、直线连接定义、基于棱锥的定义、基于圆锥面的定义和基于圆锥空间的定义进行统计，得到 1810-1969 这 160 年间 6 类圆锥定义在时间上的分布情况如图 5 所示。

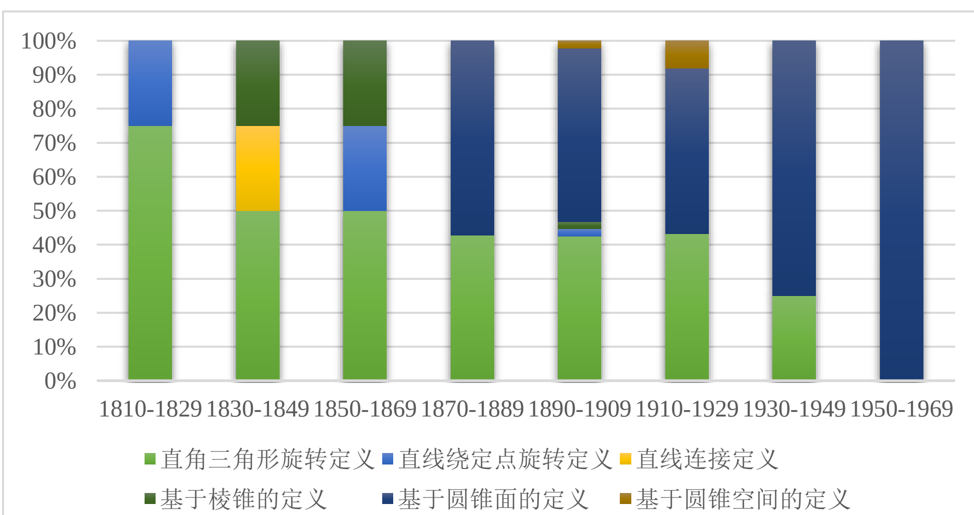


图 5 78 种美英教科书中圆锥定义的分布

从图 5 中可见，直角三角形旋转定义从 19 世纪 10 年代开始出现并占据了主流，随后逐渐减少。直线绕定点旋转定义同样出现于 19 世纪 10 年代，随后相继在 19 世纪 50-60 年代和 19 世纪末 20 世纪初零星出现。直线连接定义只是在 19 世纪 30 年代到 19 世纪 40 年代间出现。基于棱锥的定义出现于 19 世纪 20-60 年代之间。基于圆锥面的定义从 19 世纪 70 年代出现，随后逐渐增多，直到 19 世纪中叶开始一统天下。基于圆锥空间的定义则偶尔出现于 19 世纪 90 年代到 20 世纪 30 年代。

从年代上看，从 19 世纪 10-60 年代之间，主要是直角三角形旋转定义占据主流，直线绕定点旋转定义、直线连接定义和基于棱锥的定义则偶有出现。从 19 世纪 70 年代到 20 世纪 20 年代，直角三角形旋转定义和基于圆锥面的定义基本平分秋色，基于圆锥空间的定义开始出现。从 20 世纪 30 年代开始，基于圆锥面的定义开始占据主流地位。

5 球的概念

通过文本编码，可以将球的定义分为半圆旋转定义、距离定义和基于球面的定义 3 类。

统计发现，78 种美英早期教科书中涉及球定义的编码共 112 条，其分布如图 6 所示。由此可见，早期教科书中呈现最多的球定义是距离定义，其次为半圆旋转定义，而基于球面的定义则较少。

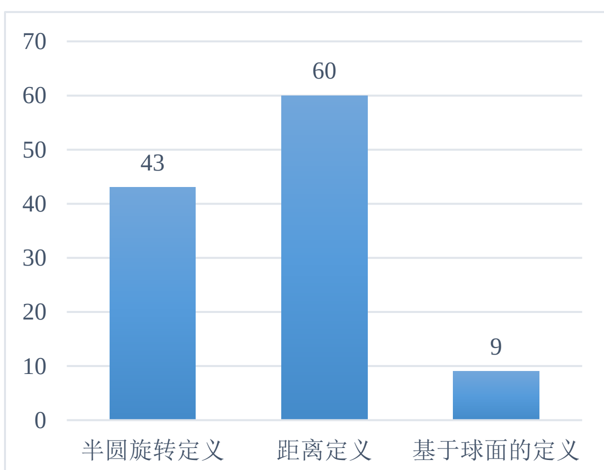


图 6 78 种美英教科书中球定义的分布

下面对以上 3 类球定义作具体的分析。

5.1 半圆旋转定义

半圆旋转定义源于欧几里得的《几何原本》第 11 卷中对球的定义（Heath, 1908，269-271），其中，欧几里得给出的球定义为“固定一个半圆的直径，旋转半圆到开始位置，所形成的图形称为一个球”。这一定义对美英早期几何教科书中有关球的定义有着重要的影响。

在所考察的 78 种美英早期几何教科书中，半圆旋转定义最早出现于 Playfair（1829）中，作者将球定义为“半圆绕着固定的直径旋转而成的立体图形”。

Dupuis（1893）进一步采用轨迹给出球的半圆旋转定义，其将球定义为“半圆以它的中心线为轴旋转而形成的轨迹”。

5.2 距离定义

距离定义源于古希腊数学家海伦对球的定义（Heath, 1908, 269），其中，海伦给出的球定义为“一个被表面所围的立体图形，所有从其内部一点出发到表面的线段都相等”。这一定义被较多美英早期几何教科书所采用。

勒让德将球定义为：“球是由一张曲面所围成的几何体，曲面上任意一点到其中一点的距离都相等，这一点被称为球心”。（Legendre, 1819）Robinson（1850）进一步将球定义为“球是只有一个表面的几何体，表面上的每一个部分都同样的凸，并且表面上的每一点都与内部的某一点（球心）距离相等”。Slaught & Lennes（1911）利用轨迹来定义球面：“空间中所有到一个定点距离相等的点的轨迹叫做球面，这个不动点称为球心”。

5.3 基于球面的定义

在所考察的 78 种美英早期几何教科书中，基于球面的定义最早出现于 Newcomb（1884）中，作者先定义球面为“其上任意一点到其中某一个点距离相等的表面”，接着，将球定义为“由球面所包围形成的几何体”。Phillips & Fisher（1896）进一步强调了球面是一张闭合的曲面。

5.4 球概念的嬗变

以 20 年为单位，对上面提到的球的 3 类定义：半圆旋转定义、距离定义和基于球面的定义进行统计，得到 1810-1969 这 160 年间 3 类球定义在时间上的分布情况如图 7 所示。

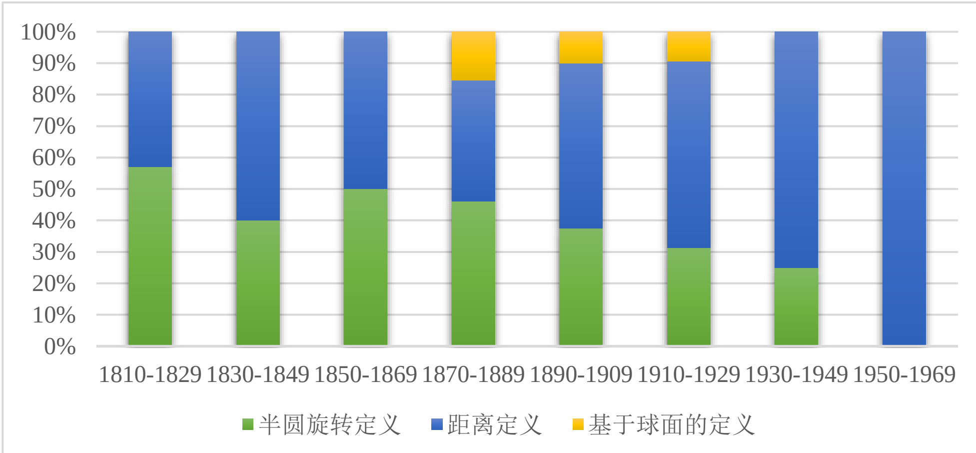


图 7 78 种美英教科书中球定义的分布

由图 7 可见，半圆旋转定义从 19 世纪 10 年代开始出现，其后呈现下降趋势。距离定义同样出现于 19 世纪 10 年代，随后呈现上升趋势。基于球面的定义出现于 19 世纪 70 年代到 20 世纪 20 年代之间，占比均较少。

从年代上看，从 19 世纪 10 年代到 19 世纪 80 年代之间，半圆旋转定义和距离定义基本平分秋色。从 20 世纪 90 年代开始，距离定义占比逐渐上升。

6 结论与启示

综上所述，美英早期几何教科书中呈现的圆柱定义有矩形旋转定义、直线旋转定义、圆平移定义、直线连接定义、基于棱柱的定义、基于圆柱面的定义和基于圆柱空间的定义 7 种，圆锥定义有直角三角形旋转定义、直线绕定点旋转定义、直线连接定义、基于棱锥的定义、基于圆锥面的定义和基于圆锥空间的定义 6 种，球的定义有半圆旋转定义、距离定义和基于球面的定义 3 种。其中，圆柱定义经历从矩形旋转定义占据主流，到矩形旋转定义和基于圆柱面的定义平分秋色，再到基于圆柱面的定义一统天下的过程。圆锥定义经历了从直角三角形旋转定义占据主流，到直角三角形旋转定义和基于圆锥面的定义基本平分秋色，再到基于圆锥面的定义开始占据主流地位的过程。球的定义经历了从半圆旋转定义和距离定义基本平分秋色，到距离定义占比逐渐上升的过程。基于以上分析，可以得到如下启示。

6.1 基于多种定义，深入理解概念

从以上分析中可以发现，美英早期几何教科书中呈现了多种圆柱定义、圆锥定义和球的定义。这些定义由浅入深，体现了数学家对不同旋转体概念认识的不断深入。以圆柱定义为例，从简单的矩形旋转定义到稍为复杂的基于圆柱空间的定义，体现了数学家们对圆柱概念理解的认识过程。在课堂中，可以让学生探究不同旋转体的多种定义，从而促进学生对旋转体概念的深入理解。

另一方面，美英早期几何教科书中不同旋转体定义之间存在一定联系。这些联系隐藏于不同的定义中，体现了数学家对于不同几何体之间联系的深刻认识。如圆柱的基于棱柱的定义和圆锥的基于棱锥的定义，体现了圆柱与棱柱、圆锥与棱锥之间密切的联系。在教学中利用不同定义渗透这些联系，有助于学生进一步理解旋转体与其他几何体之间的关系。

6.2 重视实验操作，培养核心素养

进一步分析美英早期几何教科书中呈现的不同旋转体的定义可以发现，这些定义与不同几何图形的运动息息相关。数学家在不同旋转体定义中采用了多种几何图形的运动元素。如在圆柱定义中，分别采用了矩形的旋转、直线的旋转和圆的平移等方式来建构定义，这说明了数学家对于不同旋转体定义的动态特征较为注重。在教学中，可以采用多种教具，让学生通过实验操作感受到不同旋转体的建构方式，从中进一步获得不同旋转体的定义。

此外，美英早期几何教科书中的不同旋转体定义为渗透数学核心素养提供了多种途径。如从圆柱的矩形旋转定义到基于圆柱空间的定义，定义变得更加抽象，有助于体现数学抽象的核心素养。从圆柱的基于圆柱面的定义到基于圆柱空间的定义，定义的方式变得更加严密，有助于渗透逻辑推理的核心素养。从圆柱的矩形旋转定义、直线旋转定义和圆平移定义等动态定义中，有助于培养直观想象的核心素养。在教学中，可以合理利用不同旋转体的多种定义，适当培养学生的多种数学核心素养。

6.3 联系数学人文，落实学科德育

在美英早期几何教科书中的不同旋转体的多种定义中，可以发现数学背后的人文元素。这些不同的定义显示了历史上的数学家对于旋转体的不断探索和思考，体现了数学的人文性。以圆柱的定义为例，从欧几里得最初给出圆柱的矩形旋转定义，再到勒让德和普莱菲尔的探索与

完善，勾勒出了历代数学家不断发现与研究的精神。在教学中，可以采用微视频或小型演讲的方式再现这段持续两千多年的历史，培养学生动态的数学观以及体会数学背后的人文精神。

进一步地，美英早期几何教科书中的不同旋转体定义为落实数学学科德育提供了丰富的素材。首先，数学家对于不同旋转体定义精益求精的探索有助于培养学生坚持真理、追求创新的理性精神。其次，不同定义背后的人文元素让数学变得更加亲切，有助于增加学生对数学的兴趣。然后，不同旋转体定义的演进有助于揭示数学的动态特征，让学生体会到数学的人性化与社会化。最后，数学家对于不同旋转体定义的多元认识，让学生感受到倾听、尊重和包容的重要性，培养良好的意志品质。

参考文献

[1] 李多 (2018). 信息技术在数学课堂中的应用——以北师大版第一章“简单几何体和简单旋转体”为例. 中学数学教学参考, (21): 1-2.

[2] 王志明 (1959). 谈立体几何第三章“旋转体”的教学. 数学教学, (08): 15-17.

[3] 中华人民共和国教育部 (2017). 普通高中数学课程标准. 北京: 人民教育出版社.

[4] Apollonius. (1896). *Treatise on Conic Sections*. Cambridge: Cambridge University Press.

[5] Beman, W. W. & Smith, D. E. (1899). *New Plane and Solid Geometry*. Boston: Ginn & Company.

[6] Benjamin, G. (1859). *Elements of Geometry*. Boston: Robert S. Davis & Company.

[7] Benjamin, P. (1858). *An elementary treatise on plane and solid geometry.* Boston, Cambridge: J. Munroe and company.

[8] Davies, C. (1841). *Elements of Geometry*. Philadelphia: A. S. Barnes & Company.

[9] Dupuis, N. F. (1893). *Elements of Synthetic Solid Geometry*. New York: Macmillan & Company.

[10] Gore, J. H. (1898). *Plane and solid geometry*. New York, Longmans, Green, and co.

[11] Grund, F. J. (1832). *Elementary Treatise on Geometry (Part II)*. Boston: Carter, Hendee & Co.

[12] Hayward, J. (1829). *Elements of Geometry*. Cambridge: Hilliard & Brown.

[13] Heath, T. L. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vol.III). Cambridge: The University Press.

[14] Legendre, A. M. (1819). *Elements of Geometry and Trigonometry*. Cambridge: The University

Press.

[15] Loomis, E. (1849). *Elements of Geometry and Conic Sections Geometry*. New York: Harper &Brothers.

[16] Newcomb, S. (1884). *Elements of Geometry*. New York: Henr y Holt & Company.

[17] Olney, E. (1886). *Elementary geometry: including plane, solid and spherical geometry : with practical exercises*. New York : Sheldon and Company.

[18] Peirce, B. (1837). *An Elementary Treatise on Plane and Solid Geometry*. Boston: James Munroe & Company.

[19] Perkins, G. R. (1850). *Elements of Geometry*. New York: D. Appleton & Company.

[20] Phillips, A. W. & Fisher, I. (1896). *Elements of Geometry*. New York: American Book Company.

[21] Playfair, J. (1829). *Elements of Geometry*. Philadelphia: A. Walker.

[22] Robinson, H. N. (1850). *Elements of Geometry, Plane & Spherical Trignometry Geometry.* Cincinnati: Jacob Ernst.

[23] Robinson, H. N. (1868). *Elements of Geometry, Plane & Spherical Trignometry Geometry*. New York: Ivison, Blakeman, Taylor & Company.

[24] Schuyler, A. (1876). *Elements of Geometry*. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Company.

[25] Slaught, H. E. & Lennes, N. J. (1911). *Solid Geometry*. Boston: Allyn and Bacon.

[26] Sykes, M. & Comstock, C. E. (1922). *Solid Geometry*. Chicago: Rank Mcnally & Company.

[27] Tappan, E. T. (1864). *Treatise on Plane and Solid Geometry*. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle.

[28] van Velzer, C. A. & Shutts, G. C. (1894). *Plane and Solid Geometry*. Chicago: Atkinson, Mentzer& Grover.

美英早期几何教科书中的轨迹概念与相关问题

张佳淳

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

在沪教版初中教科书中，点的轨迹指符合某些条件的所有点的集合。这是对几何图形运动与变化本质特征的一种抽象的、静态的概括。然而，早在 19 世纪，F·克莱因（Felix Klein，1849-1925）在德国几何教育的改革过程中，强调不应过分重视欧几里得的公理化思想，而忽视运动思想的重要性。1912 年，美国几何大纲十五人委员会在《关于几何课程大纲的报告》中指出，轨迹概念的教育价值在于[1]：

- 突破以往几何课程中被描述为静态的空间概念，在有关轨迹的定理和问题中，均凸显了运动思想的重要地位；
- 几乎所有的用于构造几何图形的问题都是基于一些命题，而轨迹为这些命题的陈述提供了一种优雅的语言；
- 有助于培养直观想象能力，强调函数概念的重要性。

时至今日，以上价值仍具备普适性。《全日制义务教育课程标准（实验稿）》[2]明确将“图形性质和运动”作为初中几何教学的重要目标之一，使得动态几何问题在初中阶段备受重视。同时，通过轨迹思想构造出的一些图形，成为中学几何课程的基础，包括三种平面基本轨迹（圆、角平分线、垂直平分线）与三种立体轨迹（椭圆、双曲线、抛物线）。

然而，轨迹也是中学数学的难点概念，常使学生感到别扭和空洞，本就难以正确形成轨迹的概念[3]，且部分现行教材也没有给出轨迹的明确定义。另一方面，轨迹问题不同于学生已往熟悉的几何证明与计算题题型，需要善于在动中找静，抓住运动过程中的不变量和相等关系[4]。三种平面基本轨迹常作为典型的相等关系进行运用，但为什么仅有三种基本轨迹？是否存在其他常用的轨迹？基本轨迹的意义何在？

为了回答上述问题，本文聚焦轨迹概念，对 19-20 世纪部分美、英几何教科书进行考察和分析，从中总结出轨迹定义和问题，以期为今日教学提供有益的素材和思想启迪。

2 轨迹概念的引入

在早期教科书中，轨迹概念的引入方式主要有“动态发生过程”和“静态条件属性”两种导向。每一种导向下，用以叙述内容的情境又可进一步分为数学情境和现实情境。“动态发生过程”导向强调几何元素“点”以何种方式发生运动，体现图形的动态生成过程。数学情境一般为简单轨迹的例子，如由直线、圆的发生方式引出轨迹含义；现实情境包括铅笔笔尖的运动、地球中心围绕太阳中心的运动等。“静态条件属性”导向强调轨迹的形成原因，即单个条件导致点位置的不确定性，例如，直角坐标系中的横、纵坐标相当于两个条件，可以确定点的位置，若仅有一个条件则只能确定点的轨迹。有的教科书还强调轨迹需要满足条件的纯粹性与完备性，要理解这两个属性难度较大，多采用两种情境一同引入。表 1 给出了典型的引入例子。

表 1 引入方式典例

类别	情境	具体内容	教科书
动态发生过程	数学情境	把一条线看作一个动点的路径，如果这条线满足某个给定的条件，则必须对动点施加相应的条件。例如，如果这条线是一条直线，那么点必须始终沿同一方向运动。可以用若干静止的点来代替动点，用轨迹这个词来代替路径。[5]	Wormell（1882）
	现实情境	在用铅笔画一条直线或曲线的过程中，笔尖变成了一个动点，所描出的直线或曲线就是它的轨迹。在几何中，生成的点按一定的规律运动。[6]	Dupuis（1889）
静态条件属性	数学情境	要确定一个点在平面上的位置，需要两个独立的条件。例如，某一点位于一条水平线下方两英寸，且在另一条垂直线右侧一英寸，那么它的位置就是完全固定的。但如果唯一的条件是它在给定水平线下方两英寸，那么它的位置就不是固定的，但它可以沿着给定水平线以下两英寸的直线移动。最后这条线就叫做该点的轨迹。[7]	Newcomb（1889）
	混合情境	若 A 班所有学生都在一个房间里（即没有一个学生缺席），并且房间里的所有学生都属于 A 班（即没有访客在场），则该房	Smith（1909）

间里就包括了 A 班的所有学生，没有其他学生。同样地，若一条线包含了每一个特定种类的点（这里的“种类”指的是满足某种条件的点），并且线上的每一点都满足该种类，则该线就是这些点的轨迹。[8]

3 轨迹概念的定义

根据定义中的关键词与性质，将教科书中出现的定义方式分为运动定义、静态定义和混合定义三类。其中，仅 80 种教科书明确轨迹定义的内涵，11 种教科书给出了两种定义，1 种教科书给出了三种定义。各类型定义的典例如表 2 所示。

表 2 定义方式典例

类 别	定义的叙述	教科书
运动定义	为满足某一给定要求而移动的点的路径称为轨迹。[11]	Sykes (1918)
图形定义	平面上的轨迹是一条直线、圆或平面曲线，其中每一点，并且该平面内没有其他点，满足特定的条件。[12]	Morton (1830)
	轨迹是一条线或一个曲面，其上所有点都有一些共同的性质，不与其他点相联系。[13]	Legendre (1867)
集合定义	几何轨迹是所有具有共同性质的点的集合。[14]	Chauvenet (1870)
位置定义	轨迹是所有具有公共属性的点的位置。[15]	Schuyler (1876)
排列定义	完全满足一个给定几何条件的点的排列称为该条件的轨迹。[16]	Auerbach (1920)
混合定义	当一个点按某种确定的规律改变其位置时，它会沿着一条叫做它的轨迹的线运动。[17]	Leslie (1811)

运动定义着重描述发生过程，将点所需满足的条件视为某种运动规律，将轨迹图形视为动点的路径。静态定义着重抽象概括结果，将符合条件或具有共同性质的点所组成的结果抽象概括为 3 种形式。一是几何图形，但一个轨迹可以由任意数量的几何图形甚至平、曲面的整体或分离部分组成，在这方面“轨迹”一词比“几何图形”一词具有更广泛的意义[9]，但大部分教科

书将轨迹看成平面几何图形，仅 12%的教科书包含空间轨迹的相关内容；二是与现代初中教科书相同，归纳为点的集合；三是由于轨迹一词在拉丁语中意为“位置（place）”，即把轨迹看成是所有满足特定几何条件的点的位置[10]；四是与位置类似，把轨迹看成是所有满足特定几何条件的点的排列。所以静态定义还可进一步细分为图形定义、集合定义、位置定义和排列定义四种。同时，部分教科书作者在定义中强调轨迹的纯粹性与完备性，如表 2 中的 Morton。另外，有 7 种教科书采用了混合定义，同时包含运动与静态两种定义的要素。

通过统计可知，早期教科书中的轨迹定义呈现出多样化的特点，但早期教科书是否也与今日教科书一样更青睐于集合定义？为了了解轨迹定义的发展趋势，以 20 年为一段，统计教科书中各类型定义的时间分布情况，见图 1。

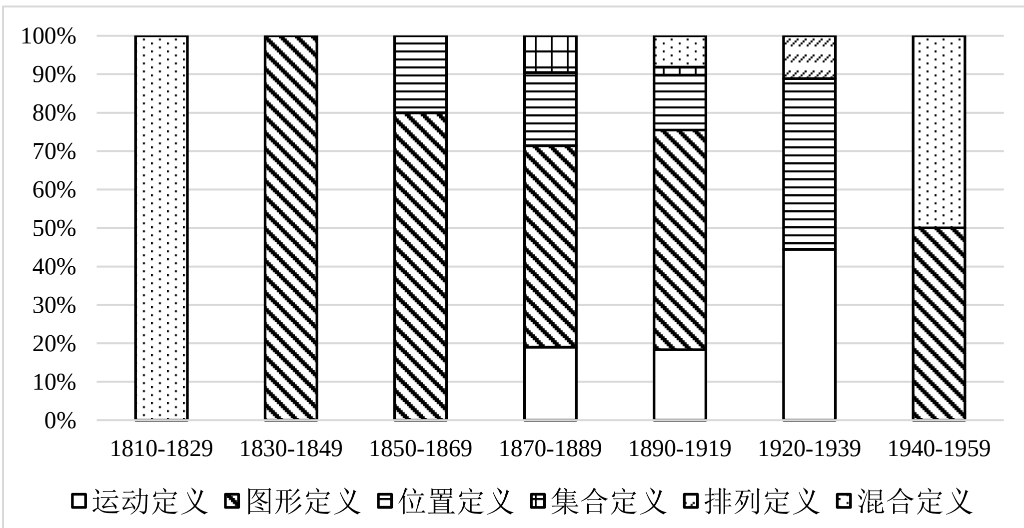


图 1 各类型定义的时间分布

由图 1 可知，19 世纪初期的教科书主要采用混合定义，随后静态定义占据主流地位，尤其图形定义与位置定义是主要的定义方式。集合定义仅在 1870-1919 年短暂出现。运动定义直至 19 世纪 70 年代出现，往后呈现递增趋势。总之，教材编写者更倾向于通过静态方式下定义，这种偏好或许与早期几何学家们长期以来以严厉而轻蔑的态度拒绝运动概念在初等几何中引入有关[9]。

4 轨迹问题

4.1 基本轨迹

为了了解三种基本轨迹在早期教科书中的地位，统计以引例、定理、推论和习题等方式呈现的平面轨迹问题的类型与数量。出现次数最多的前十种轨迹见图 2，其中，三大基本轨迹位列前三，其余轨迹图形都是直线型轨迹或圆（弧）型轨迹，其中 T4、T9 也是现在中学课程中常用的轨迹[18]。这些简单的轨迹也可视为早期教科书中的“基本轨迹”，因其限制条件单一，其解可从著名的几何定理中推导而出。假设有 n 个这类问题，则有 n 个条件，利用交轨法可以产生另外 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个轨迹，加上简单问题本身，那么 n 个简单轨迹的解提供了解决 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个轨迹问题的方法[19]。

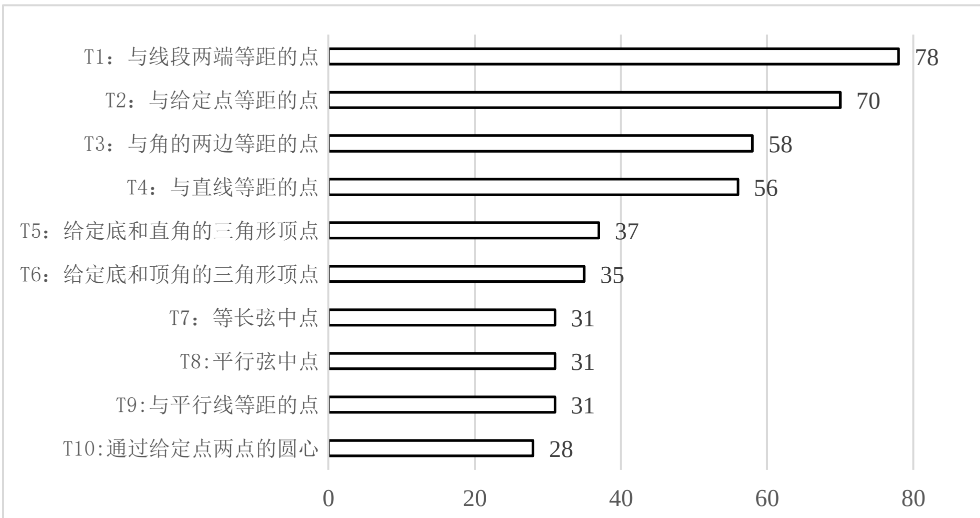


图 2 出现次数最多的前十种轨迹

4.2 轨迹问题

早期教科书中还有很多轨迹问题，这些问题或依赖于基本轨迹的识别与运用，或可以利用中学平面几何知识进行解答。根据不同的限制条件，主要分为以下五类。

4.2.1 与定点有关

限制条件仅围绕定点的问题较少，主要包括以下四个问题：

A1：求通过两定点的圆的圆心轨迹；

A2：求到两定点距离之比为常数的点的轨迹；

A3：求到两定点平方和（差）为定值的点的轨迹；

A4：求到三定点等距离的点的轨迹。

问题 A1、A4 考察基本轨迹的迁移应用，问题 A2 与 A3 源于古希腊阿波罗尼奥斯提出的平面轨迹命题[20]，涉及垂直平分线的性质、角平分线的性质、等面积法、勾股定理等知识。

4.2.2 与定直线有关

对于现行教科书中角平分线这一重要基本轨迹，一些早期教科书通过改变条件，提出角平分线的推广问题。

B1：求到两直线（平行与相交）距离相等的点的轨迹；

B2：求到两非平行线距离之比为定值的点的轨迹。

问题 B1 是典型的分类讨论问题，若两直线平行，则为轨迹 T9；两直线相交，则轨迹为角平分线。问题 B2 的轨迹是角的等分线，类比问题 B1 将条件一般化，还可衍生出“求到两条直线距离之比为定值的点的轨迹”。再将条件“距离之比”改变为“距离之和（差）”，进一步出现如下轨迹问题。

B3：求到两相交线距离之和为常数的点的轨迹；

B4：求到两相交线距离之差为常数的点的轨迹；

B5：求到两直线距离之和为常数的点的轨迹；

B6：求到两直线距离之差为常数的点的轨迹。

通过建立平面直角坐标系，利用点到直线的距离公式可得，问题 B3 的轨迹是以两定直线为对角线的矩形，问题 B4 的轨迹是八条射线[21]。

在与定直线相关的问题中，还有一道高频问题。

B7：从定点画线段到定直线，按给定比例切割线段，求截点的轨迹。

如图 3，在定点 B 到直线 l 的线段 AB 上取一点 C，使得 BC：BA=k，根据相似三角形的判定及性质，点 C 到过点 B 与底边平行的直线 n 的距离，与到直线 l 的距离之比恒为 k，则动点 C 的轨迹是与底边平行的直线 m。

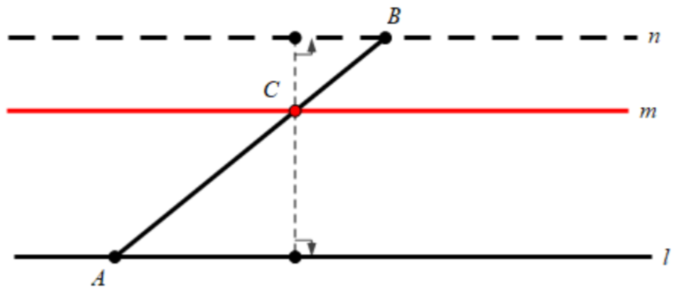


图 3 问题 B7 的轨迹

4.2.3 与定线段有关

与定长线段有关的轨迹问题常以三角形作为情境，三角形的底为定长线段，某个顶点为动点。出现次数最多的前十种轨迹中，T5、T6 就是以三角形为情境的问题。问题 T5 还可表述为：到两定点的距离的平方和等于两定点距离的平方的点的轨迹，需要先运用勾股定理的逆定理，判断动点与两定点构成直角三角形，考察圆周角定理及其推论。更多问题见表 3，表中问题都可以转化为如前所述的轨迹问题，但要注意排除不构成三角形的点。

表 3 以三角形为情境的若干问题

问题	转化	涉及知识点
C1：求给定底和高的三角形顶点的轨迹，或：求给定底且面积相同的三角形顶点的轨迹；	T4	三角形面积
C2：求给定底和底边中线的值的三角形顶点的轨迹；		
C3：求给定底且另外两条边中一条边的长度与底边相同的三角形的顶点轨迹；	T2	圆的概念
C4：求给定底的等边三角形的顶点轨迹；		
C5：求等腰三角形的顶点轨迹；	T1	等腰三角形的性质
C6：求底相等且另外两边比值 k 固定的三角形的顶点轨迹。	A2	垂直平分线的性质、角平分线的性质、等面积法

另外，还有不少问题以平行四边形、任意四边形作为情境，见表 4。

表 4 以（平行）四边形为情境的若干问题

轨迹	问题	涉及知识点
直线	D1：求给定公共底且面积相同的平行四边形的对角线的交点的轨迹；	对角线的性质、全等三角形的判定及性质
圆的一部分	D2：平行四边形的底有固定的位置和长度，其邻边有给定的长度，求对角线的交点轨迹；	三角形中位线定理
平行四边形	D3：求平行四边形的（对称）中心点与各边任意点所成的所有线段的中点的轨迹；	相似三角形的判定及性质
线段	D4：如果从三角形底边的任意一点开始，分别画两条与另两边平行的线，求这样形成的平行四边形的（对称）中心的轨迹；	对角线的性质
圆弧	D5-1：在一个四边形 *ABCD* 中，已知 *AB*、*BC*、*AC*、*CD*，求对角线 *BD* 中点的几何轨迹； D5-2：求联结两条对角线中点的线段 *EF* 的中点的几何轨迹；	三角形中位线定理
圆的一部分	D6：*ABCD* 是一个所有边长固定且 *AB* 边位置固定的平行四边形，求其余三条边的中点的轨迹。	圆的概念、平行四边形的判定与性质

一些教科书为了降低问题 D1 难度，将其拆分为两个子问题：

(1) 给定底和高度，平行四边形另外两个顶点的轨迹是什么？

(2) 这些平行四边形的对角线的交点的轨迹是什么？

如图 4，从对角线交点 E 的某个位置入手，过点 E 作垂线 EG、EF，由全等三角形的判定定理可知△DEG 与△BEF 全等，则 $EG=EF$，问题转化为轨迹 T9。

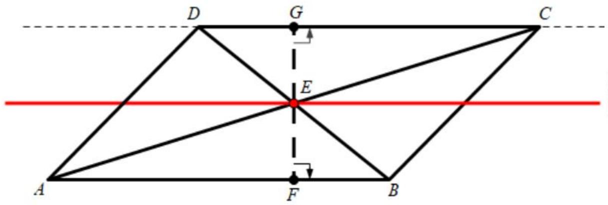


图 4 问题 D1 的轨迹

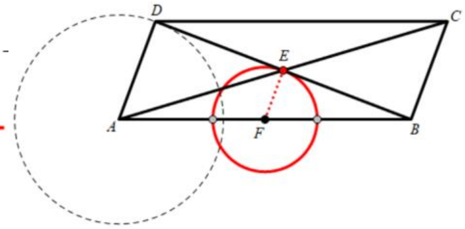


图 5 问题 D2 的轨迹

问题 D2 如图 5 所示，主动点 D 的轨迹是圆，联结动点 E 与定线段 AB 的中点 F，利用三角形中位线定理可知，$EF=\frac{1}{2}AD$，所以点 E 的轨迹是 AB 的中点为圆心，$\frac{1}{2}AD$ 为半径的圆，圆与线段 AB 的交点除外。问题 D3 是问题 B7 中比值为 1 的特殊情况，轨迹是与题设中平行四边形相似，且边长为原边长一半的平行四边形，如图 6 所示。问题 D4 如图 7 所示，由于平行四边形始终有一条对角线联结三角形顶点 A 与底边任意点 B，根据对角线的性质，问题 D4 可转化为问题 D3，但不包括三角形边上的点。

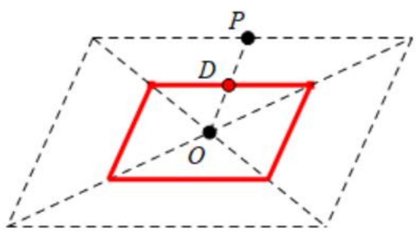


图 6 问题 D3 的轨迹

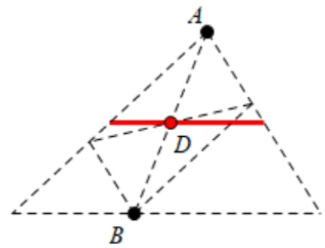


图 7 问题 D4 的轨迹

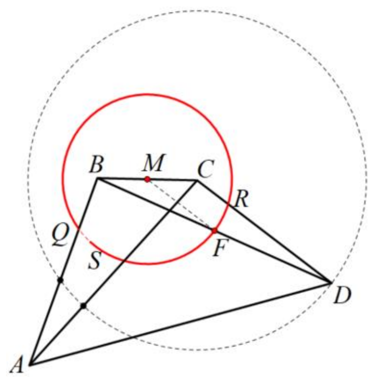


图 8 问题 D5-1 的轨迹

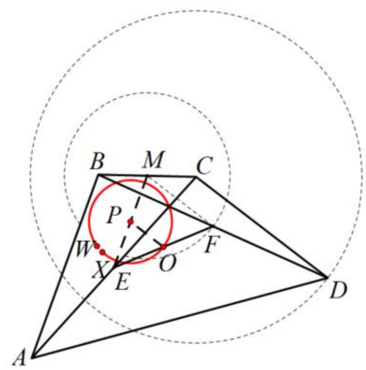


图 9 问题 D5-2 的轨迹

问题 D5 假设三角形 ABC 位置固定，利用三角形中位线定理，关键在于寻找底边长度固定的三角形，问题 D5-1 如图 8，联结 F 与 BC 中点 M，$FM=\frac{1}{2}DC$，需要注意点 D 不能在三角形 ABC 中，否则 $ABCD$ 无法成四边形，所以点 F 的轨迹是 M 为圆心，$\frac{1}{2}CD$ 为半径的圆弧 QRS。问题 D5-2 如图 9，联结点 O 与 EM 中点 P，则 $OP=\frac{1}{2}FM$，所以点 O 的轨迹是 P 为圆心，$\frac{1}{2}FM$ 为半径的圆弧 WOX。

问题 D7 中，不难得出边 AD、BC 的中点轨迹是圆，对于边 CD 的中点 E，如图 10，由于点 D 的轨迹是圆，取 AB 中点 F，联结 EF，由于 $DE//AF$，所以四边形 $AFED$ 是平行四边形，

则 $EF=AD$，点 E 的轨迹是以 F 为圆心，EF 为半径的圆，线段 AB 上的点除外。

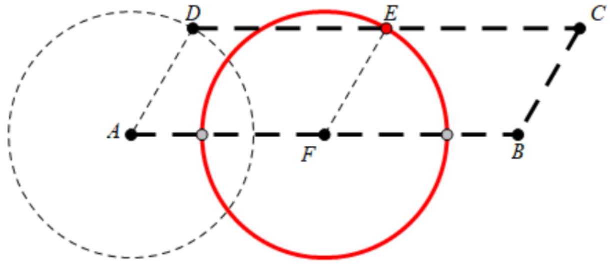


图 10 问题 D6 的轨迹

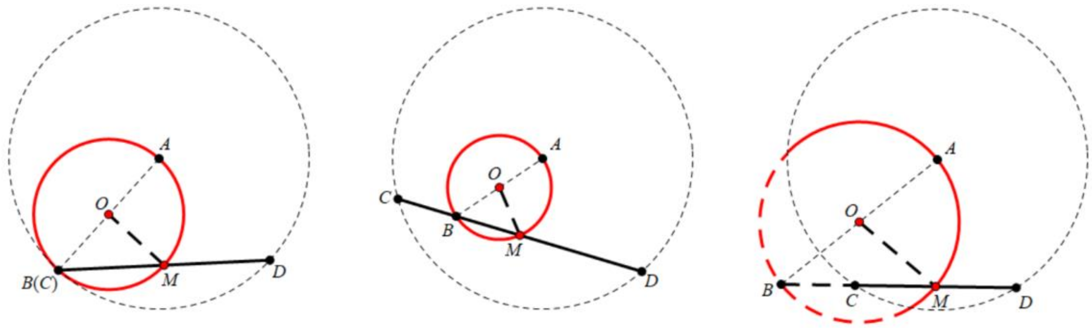
4.2.4 与定圆有关

早期教科书中，与定圆有关的问题常设置动点为弦的中点，如轨迹 T7、T8，否则应就点与圆的位置关系进行分类讨论，见表 5。

表 5 与定圆有关的若干问题

轨迹	问题	涉及知识点
圆、圆弧	E1：求经过定点的所有弦的中点轨迹；	垂径定理的推论、直角三角形斜边中线定理
圆	E2：求到定圆距离相等的点的轨迹；	点到圆心的距离
	E3：求与两个同心圆等距的点的轨迹；	
圆的一部分	E4：在给定圆周上的所有点上画一条平行线，并在每条平行线上画一条给定长度的线段，求线段另一端点的轨迹；	平行四边形的判定及性质
	E5：求从定点到一系列同心圆的切点的轨迹。	圆的切线的性质
圆	E6：过定点 A 作一直线，与定圆 O 交于点 M，按给定比例分割线段 AM，使得 $AM/AN=m/n$，求截点 N 的轨迹；	相似三角形的判定与性质

问题 E1，如图 11，定圆 A， CD 为过定点 B 的弦，点 M 为 CD 中点，O 为线段 AB 中点。根据垂径定理的推论，$AM\perp CD$，则在 RtΔAMB 中，$OM=\dfrac{1}{2}AB$。因此，若点 B 在圆上或圆内，轨迹是圆；若点 B 在圆外，轨迹是圆弧，圆的直径均为定点与定圆圆心的连线。



(1)点在圆上；　　(2)点在圆内；　　(3)点在圆外

图 11 问题 E1 的轨迹

问题 E4 如图 12，给定圆 A，BC 长度固定，过定点 A 作 $AO \overset{//}{=} BC$，则四边形 $BCOA$ 是平行四边形，则 $CO=BA$，所以点 C 的轨迹是以 O 为圆心，AB 为半径的圆，圆与直线 AO 的交点除外，且点 O 的位置由平行线的方向决定。

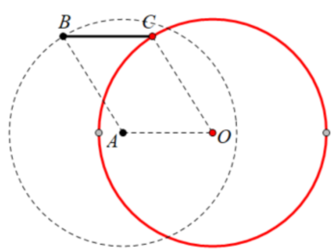


图 12 问题 E4 的轨迹

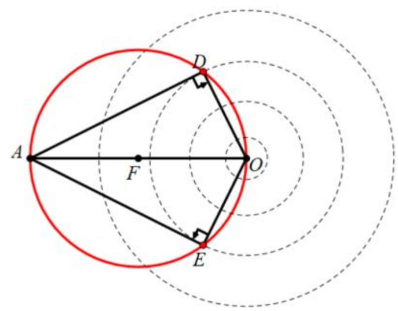


图 13 问题 E5 的轨迹

问题 E5 可以通过描点法，利用特殊位置，猜想轨迹，如图 13，通过观察几个同心圆的

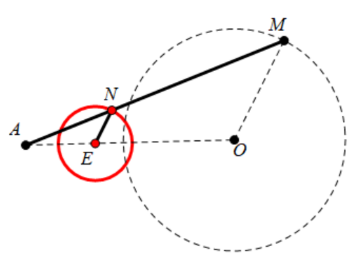


图 14 问题 E6 的轨迹

切线与定点 A、同心圆圆心 O 的关系，归纳出任何一个切点 D，都满足切线 AD 与半径 DO 垂直，且 AO 距离固定，由此将问题转化为轨迹 T5，由此点 D 的轨迹是以 AO 为直径的圆，点 A、O 除外。

问题 E6 若定点在圆外，实际是改变问题 B7 的条件，将线段终点由直线上的点变为圆周上

的点，如图 14，在线段 AO 上取一点 E，使得 $\frac{AO}{AE}=\frac{AM}{AN}=\frac{m}{n}$，则 $\Delta ANE \backsim \Delta AMO$，得 $NE=\frac{n}{m}MO$，则点 N 的轨迹是以 E 为圆心，$\frac{n}{m}MO$ 为半径的圆。同理可得，定点在圆上或圆内的轨迹同上。

4.2.5 与圆心有关

在早期教科书中，除了轨迹 T10，还有一些轨迹问题目标都直指满足条件的所有圆的圆心轨迹，见表 6。

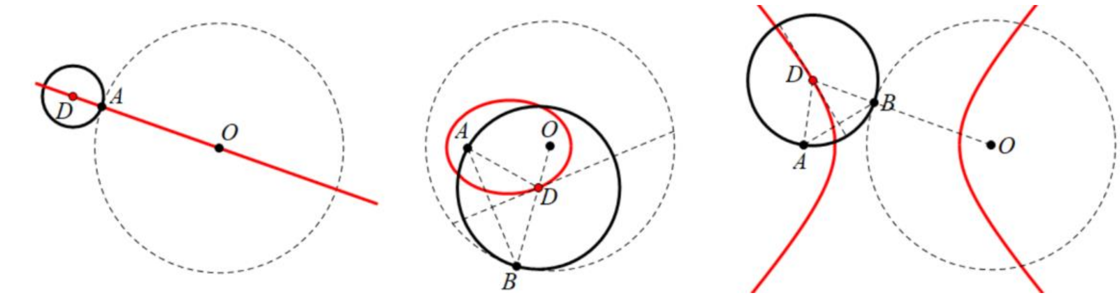
表 6 与圆心有关的若干问题

轨迹	问题表述	涉及知识点
直线	F1：求给定半径，且与定直线相切的圆的圆心轨迹；	
直线	F2：求与两平行线相切的圆的圆心轨迹； F3：求与两直线相切的圆的圆心轨迹；	圆的切线的性质
圆弧	F4：如果梯子的尾部放置在水平面上，顶部靠在垂直的墙上，梯子就会滑下来；求它的中点的轨迹，或：让一给定长度的线段在彼此成直角的两条直线上滑动，求这样形成的三角形的斜边中点的轨迹；	直角三角形斜边中线定理
直线的一部分、椭圆、双曲线	F5：求经过定点，与定圆相切的圆的圆心轨迹；	两圆的位置关系、垂直平分线的性质
抛物线	F6：求经过定点并与定直线相切的圆的圆心轨迹。	圆锥曲线的第一定义

其中，问题 F1 转化为轨迹 T4；问题 F2 是问题 F3 的特殊情况，圆与两直线相切，即圆心到两直线距离相等，转化为问题 B1；问题 F4 则是现行教科书中的常见问题。

问题 F5，如图 15，当定点 A 在定圆 O 上时，点 A 必为两圆切点，问题可表述为“在定点与定圆相切的圆的圆心的轨迹”，两圆内切或外切，则动点 D 与定点 A、圆心 O 共线，则点 D 的轨迹为直线 AO，点 A 除外。当点在圆内时，两圆内切，圆 O 上的另一点为切点，则动圆 D 经过定点 A 与圆 O 上的任意点 B，则点 D 到点 A、B 的距离相等，且在线段 OB 上，则

$|DA|+|DO|=|DB|+|DO|=|BO|$，点 D 的轨迹是以 A、O 为焦点的椭圆。当点在圆外时，两圆外切，同理圆 O 上的任意点 B 为切点，则 $||DO|-|DA||=||DO|-|DB||=|BO|$，此时点 D 的轨迹是以 A、O 为焦点的双曲线。



(1)点在圆上；　　(2)点在圆内；　　(3)点在圆外

图 15 问题 F5 的轨迹

问题 F6，如图 16，圆心到切线的距离 DB 等于半径 DA，则问题转化为求到定点与定直线距离相等的点的轨迹。由抛物线的第一定义可知，动点 D 的轨迹为以 A 为焦点的抛物线。

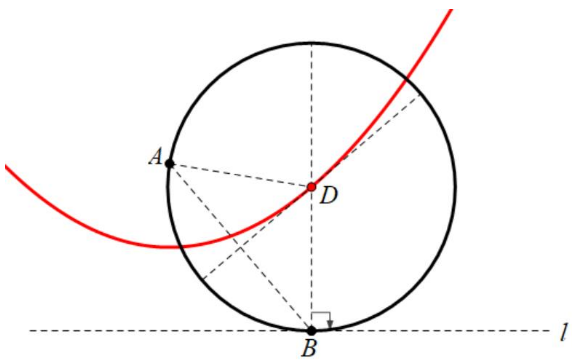


图 16 问题 F6 的轨迹

5 结论与启示

综上所述，美英早期几何教科书在编写轨迹内容时，主要有两种引入方式，即动态发生过程与静态条件属性，相应地，轨迹定义主要有动态定义、静态定义和混合定义三类。从定义方式的演变来看，早期教科书与今日教科书一样，在定义上更偏向于弱化运动思想，体现数学概念的抽象性与概括性。最后，早期教科书中提供了不少富有探究价值的轨迹问题，从条件看，主要分为与定点有关、与定直线有关、与定线段有关、与定圆有关、与圆心有关；从结果看，

可分为直线型、射线型、线段型、圆（弧）型、圆锥曲线型、四边形型、多线交点型等。总之，早期教科书中轨迹概念及其问题的多样性能为今天轨迹的教学提供诸多启示。

（1）追溯轨迹之源

从 19 世纪 F·克莱因提出的建议，到 20 世纪中叶“新数运动”对欧式几何的严厉审视，人们愈发认识到传统欧式几何的不足之处在于，研究的图形静止不变，容易掩盖背后的几何规律。为此，动态几何应运而生，它的精髓在于：能在变动状态下保持几何规律不变[22]。因此，轨迹概念始于人们用运动的观点看待数学问题，终于对“几何规律不变”的静态规则的刻画。由此可见，虽然轨迹概念产生于运动变换思想，最终人们还是习惯依托欧式几何的公理化体系进行表达和论证。

另一方面，通过考察早期教科书可知，基本轨迹早在 19-20 世纪的教科书中大放异彩，其“基本”二字的意义，一是基本轨迹本身对应中学数学课程中的基本图形；二是在于很多轨迹问题可以转化为基本轨迹，从早期教科书中可以看到，除了三种基本轨迹，与直线、平行线等距的点的轨迹，也应用广泛；三是基于基本轨迹，利用交轨法可以滚雪球式地衍生出源源不断的轨迹问题，丰富平面几何的内容与形式。

（2）体现轨迹之用

解决轨迹问题需要的是一种“据性索图”的解题思路，通过调动学生已有的认知基础，识别点的不变属性，从而求索出轨迹图形。因此，教师可以选择或改编早期教科书中的轨迹问题，搭建问题串，串联相似三角形、全等三角形、直角三角形、中位线、对角线、平行四边形、垂径定理、切线、勾股定理、圆锥曲线等中学数学知识，或将某一类型的限制条件、某一类型的轨迹、某一基本轨迹的使用等作为一系列子问题间的暗线，体现问题的层次性与系统性。最终，以问题串为抓手，培养直观想象能力、逻辑推理能力和绘图制图能力。

（3）彰显轨迹之魅

轨迹的意义，一方面在于对制图、作图具有指导意义，另一方面，可以让学生看到静态图形背后，动态生成途径的多样性，例如一条直线，可以是给定公共底且面积相同的平行四边形的对角线的交点的轨迹，也可以是给定底和高的三角形顶点的轨迹，还可以是与两平行线相切的圆的圆心轨迹等等。教师可以通过对比、归纳不同的轨迹问题揭示“一图多性”，彰显轨迹灵活多变的特征与魅力。

参考文献

[1] National Education Association. *Final Report of the National Committee of Fifteen on Geometry Syllabus*[S]. Chicago: University of Chicago Press, 1912: 18+61-63.

[2] 中华人民共和国教育部．义务教育数学课程标准（2011 年版）[S]．北京：北京师范大学出版社, 2012: 8．

[3] 李绍林．“点的轨迹”的教学设计[J]．中学数学教学参考, 1992(5): 10-13.

[4] 周义琴．初中生求解动态几何问题的典型错误及归因研究[D]．重庆：西南大学, 2015: 5．

[5] Wormell, R. *Modern Geometry*[M]. London: T.Murby, 1882: 72.

[6] Dupuis, N. F. *Elementary Synthetic Geometry of the Point, Line and Circle in the Plane*[M]. London: Macmillan, 1889: 38.

[7] Newcomb, S. *Elements of Geometry* [M]. New York: H. Holt, 1889: 244.

[8] Smith, E R. *Plane Geometry Developed by the Syllabus Method*[M]. New York: American Book Company, 1909: 75.

[9] Olney, E. *A Treatise on Special or Elementary Geometry*[M]. New York : Sheldon & company, 1872: 4-5.

[10] Wentworth, G. A. *Plane Geometry*[M]. New York: Ginn and Company, 1910: 73-74.

[11] Sykes, M., Comstock, C. E. *Plane Geometry*[M]. Chicago: Rand McNally & Co., 1918: 143.

[12] Morton, P. *Geometry, Plane, Solid, and Spherical, in Six Books*[M]. London: Baldwin and Cradock, 1830: 106.

[13] Legendre, A. M. *Elements of Geometry* [M]. Baltimore: Kelly & Piet, 1867: 274-275.

[14] Chauvenet, W. *A Treatise on Elementary Geometry* [M]. Philadelphia: J. B. Lippincott & Co., 1870: 22.

[15] Schuyler, A. *Elements of Geometry*[M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Co., 1876: 14.

[16] Auerbach, M., Charles, B. W. *Plane Geometry*[M]. Philadelphia: J. B. Lippincott, 1920: 153.

[17] Leslie, J. S. *Elements of Geometry, Geometrical Analysis, and Plane Trigonometry*[M]. Edinburgh: J. Ballantyne and co., 1811: 299.

[19]常州市中学数学教学研究委员会. 关于初中几何中轨迹教学的建议[J]. 数学通报, 1958(3): 30-35.

[20] Hackley, C. W. *Elementary Course of Geometry for the Use of Schools and Colleges*[M]. New York: Harper & Brothers, 1847: 97-98.

[21] 张佳淳, 汪晓勤. 古希腊数学中的平面轨迹问题[J]. 数学教学, 2020(01): 5-10+15.

[22] 江春莲. 到两直线距离的和与差为定值的点的轨迹[J]. 数学教学, 2011(4): 11-12.

[23] 吴华, 周玉霄. 变易理论驱动下的动态几何“变中不变”[J]. 数学教育学报, 2010(6):26-29.

美英早期几何教科书中的“与圆有关的角”

刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

数学概念是构建数学大厦的基石，而数学定理则是构建数学大厦的支柱和骨架。正所谓万丈高楼平地起，只有练就扎实的数学基本功，学生才能在今后的数学学习中行稳致远。

与圆有关的角作为“圆”的重要内容，其所包含的圆心角、圆周角以及弦切角的概念和定理不容小觑。《义务教育数学课程标准》（2011 年版）要求学生能理解圆、弧、弦、圆心角、圆周角的概念，了解等圆、等弧的概念；探索圆周角与圆心角及其所对弧的关系，了解并证明圆周角定理及其推论[1]。在现行人教版和苏科版九年级上册教科书中，先介绍圆心角的概念及其定理，后介绍圆周角的概念以及圆周角定理，并未涉及弦切角概念。在沪教版九年级数学下册（拓展二）的教材中，用“与圆有关的角”一节，完整介绍了圆心角、圆周角和弦切角的内容。

HPM 视角下的数学教学对于学生理解知识、掌握技能以及增进对数学过程与方法的理解起到了十分重要的作用[2]。然而，手头无史料却成为阻碍教师在教学过程中开展 HPM 实践的一大原因。人们对与圆有关角的历史知之甚少，至今，相关的 HPM 课例付之阙如。鉴于此，本文聚焦圆心角、圆周角和弦切角，对美英早期几何教科书进行考察，希望从中获得恰当的教学素材和思想启迪，为今后的课例研究提供参考。

2 早期教科书的选取

本文选取 1829-1948 年间出版的 87 种美英早期数学教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

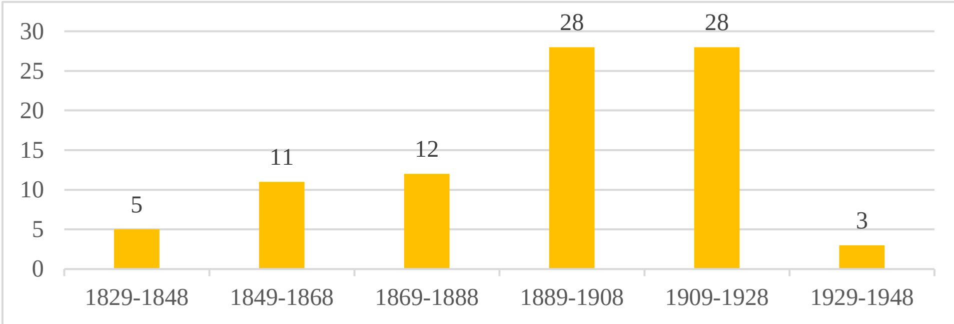


图 1 87 种美英早期数学教科书的出版时间分布

关于圆心角、圆周角和弦切角的内容主要位于“圆”“直线和圆”“角度测量”“圆和正多边形”等章节中。其中，圆心角和圆周角的概念大多归于“圆”一章的“定义”一节，圆心角定理大多归于“圆心角”一节，而圆周角定理和弦切角定理大多归于“角度测量”一节。

3 圆心角的概念

在 58 种给出圆心角基本概念的教科书中，定义方法可以分为邻边定义、静态定义和顶点定义三类，具体分类情况见表 1。

表 1 圆心角概念的分类

类别	基本概念	教科书	数量
邻边定义	两条半径所夹的角。[3]	Olney（1886）	27
静态定义	以圆心为顶点，两边为半径的角。[4]	Schuyler（1876）	21
顶点定义	以圆心为顶点的角。[5]	Perkins（1855）	10

图 2 为圆心角定义的时间分布情况。在 19-20 世纪，有超过半数的几何教科书中并没有直接给出圆心角的概念，只是在圆心角定理中涉及“the angle at the centre”一词。到了 20 世纪以后，没有给出圆心角概念的教科书越来越少，而越来越多的教科书会在“圆”一章中的“定义”一节给出圆心角的概念，同时，定义方式也逐渐呈现出多样化的趋势。不难发现，采用邻边定义的教科书逐渐增多，而采用顶点定义的教科书逐渐减少。现行沪教版、人教版、苏科版教科书中把圆心角定义为顶点在圆心的角，即顶点定义，所以多数早期教科书中对于圆心角的定义方式与现行教科书中的定义方式并不一致。

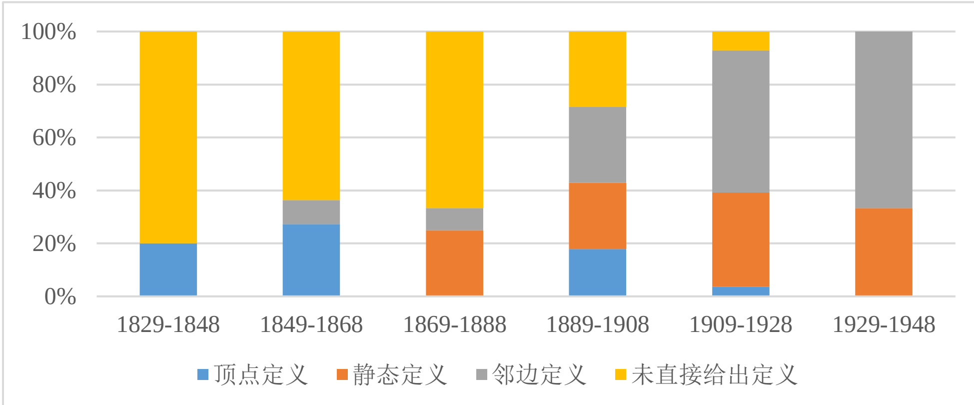


图 2 圆心角定义的时间分布

4 圆心角定理

所谓圆心角定理，即在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，相等的弧所对的圆心角相等。因此，证明圆心角定理则需证明两个命题，即

命题 1：在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等；

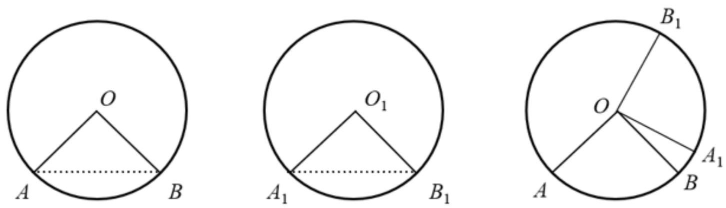
命题 2：在同圆或等圆中，相等的弧所对的圆心角相等。

4.1 命题 1 的证明

在 64 种几何教科书中，关于命题 1 的证明方法可以分为重合法、使用圆心角所对弧与弦的关系以及使用圆中比例关系三类。

4.1.1 重合法

有 57 种教科书使用重合法来证明这一命题，例如，英国数学家海华德（J. Hayward,1786-1866）在《几何学基础》（1829）中将两个扇形的顶点和半径重合，由此证明圆心角所对弧相等[6]。如图 3(a)，在两个相等的圆中，有$\angle O=\angle O_1$，于是将$\odot O_1$平移到$\odot O$上，使得点 O 与 O_1 以及射线 OA 与 O_1A_1、OB 与 O_1B_1 重合。又因为 $OA=O_1A_1$，$OB=O_1B_1$，所以点 A、A_1 重合，点 B、B_1 重合，故 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A_1B_1}$ [4]。若两个圆心角在同一个圆中（图 3(b)），可以将扇形 $O_1A_1B_1$ 绕圆心 O 旋转，使得其与扇形 OAB 重合，由此也可以完成证明[6]。



(*a*) (*b*)

图 3 圆心角定理的证明

4.1.2 使用圆心角所对弧与弦的关系

在同圆或等圆中，圆心角所对弦相等，则所对弧也相等。有 5 种教科书使用了这一方法。在图 3(*a*)中，联结 AB、A_1B_1，因为$\angle O=\angle O_1$且 $OA=O_1A_1$，$OB=O_1B_1$，所以$\Delta OAB \cong \Delta O_1A_1B_1$。由此可以得到弦 $AB=A_1B_1$，于是 $AB = A_1B_1$ [7]。

4.1.3 使用圆中比例关系

有 2 种教科书使用了这一方法，其中包括数学家格兰德（F. J. Grund, 1804—1863）于 1830 年出版的《几何学基础》[8]。所谓圆中的比例关系，即在同圆或等圆中，弧长之比等于圆心角之比。如图 3(*a*)，因为$\angle O=\angle O_1$，即两个圆心角度数的比值为 1，所以$\angle O$ 和$\angle O_1$所对弧长的比值也为 1，即 $AB = A_1B_1$。

4.2 命题 2 的证明

在 57 种给出命题 2 证明过程的几何教科书中，证明方法可以分为重合法、使用圆心角所对弧与弦的关系、反证法、使用圆中比例关系、使用圆周角定理以及使用逆向定理六类。

4.2.1 重合法

类似于证明命题 1 的方法，通过平移和旋转使两圆重合后同样可以证明命题 2。在 46 种使用重合法证明命题 2 的教科书中，有 27 种选择从半径重合出发，有 14 种选择从弧重合出发，而有 5 种只提及使用这一思想。

在同圆或等圆中（图 3(*a*)），如果将圆心 O 和 O_1 以及半径 OA 与 O_1A_1 重合放置。因为 $AB = A_1B_1$，所以点 B 和 B_1 也重合，于是半径 OB 与 O_1B_1 重合，则$\angle O=\angle O_1$ [3]。

如果让 $AB = A_1B_1$ 重合放置，于是点 A、A_1 重合，点 B、B_1 重合。又因为两圆半径相等，即

$OA=O_1A_1$，$OB=O_1B_1$，所以圆心 O 和 O_1 也重合，故$\angle O=\angle O_1$[9]。

4.2.2 使用圆心角所对弧与弦的关系

有 4 种教科书使用了这一方法。如图 3(a)，因为$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A_1B_1}$，由命题“在同圆或等圆中，圆心角所对弧相等，则所对弦也相等”，所以 $AB=A_1B_1$。又因为 $OA=O_1A_1$，$OB=O_1B_1$，所以$\Delta OAB \cong \Delta O_1A_1B_1$，于是$\angle O=\angle O_1$[7]。

4.2.3 反证法

通过假设在同圆或等圆中，等弧所对圆心角不相等，再利用命题 1 中的结论即可导出矛盾。有 3 种教科书采用了这一方法，例如，1849 年由美国数学家罗密士（E. Loomis, 1811-1889）撰写出版的《几何基础与圆锥几何》[10]。

如图 4，假设$\angle AOB\neq\angle A_1O_1B_1$，不妨设$\angle AOB>\angle A_1O_1B_1$。于是可以在$\overset{\frown}{AB}$上找到一点 C，使得$\angle AOC=\angle A_1O_1B_1$。由命题 1 可知，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{A_1B_1}$，而$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A_1B_1}$，所以$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，这就与$\angle AOB>\angle AOC$ 矛盾，所以$\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$。

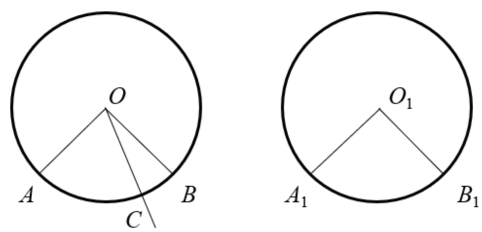


图 4 利用反证法证明命题 2

4.2.4 使用圆中比例关系

有 2 种教科书采用这一方法。在同圆或等圆中，因为圆心角所对的弧相等，即两弧的比值为 1，而圆心角的比值等于其所对弧的比值，所以两弧所对圆心角也相等[8]。

4.2.5 使用圆周角定理

1829 年，苏格兰数学家普莱菲尔（J. Playfair, 1748-1819）在《几何学基础》中使用圆周角定理证明命题 2[11]。如图 5，假设$\angle C$、$\angle C_1$ 是锐角，因为$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A_1B_1}$，由圆周角定理可知，$\angle C=\angle C_1$，又因为$\angle O=2\angle C$，$\angle O_1=2\angle C_1$，所以$\angle O=\angle O_1$。假设$\angle D$、$\angle D_1$ 是钝角，因为

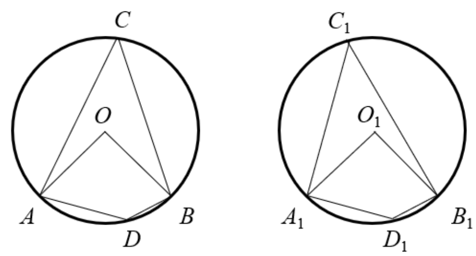


图 5 利用圆周角定理证明命题 2

$\angle D=\angle D_1$ 且 $\angle D+\angle C=\pi$, $\angle D_1+\angle C_1=\pi$，则 $\angle C=\angle C_1$，于是 $\angle O=\angle O_1$。

4.2.6 使用逆向定理

只有 Beman & Smith（1900）采用了这一方法。[12] 所谓逆向定理，即若 $A>B\Rightarrow X>Y, A=B\Rightarrow X=Y, A<B\Rightarrow X<Y$，于是反之也成立。显然，在同圆或等圆中，圆心角及其所对弧之间的关系也能满足上述定理，因此当圆心角所对的弧相等时，圆心角也对应相等。

4.3 圆心角定理的演变

以 20 年为一个时间段，图 6 给出了证明命题 1 的时间段分布。除去 1929-1948 年教科书样本数量较少的一个时间段不难发现，命题 1 的证明方法相对单一，重合法在 19-20 世纪的教科书中一直占据主流，而其余方法很少出现。

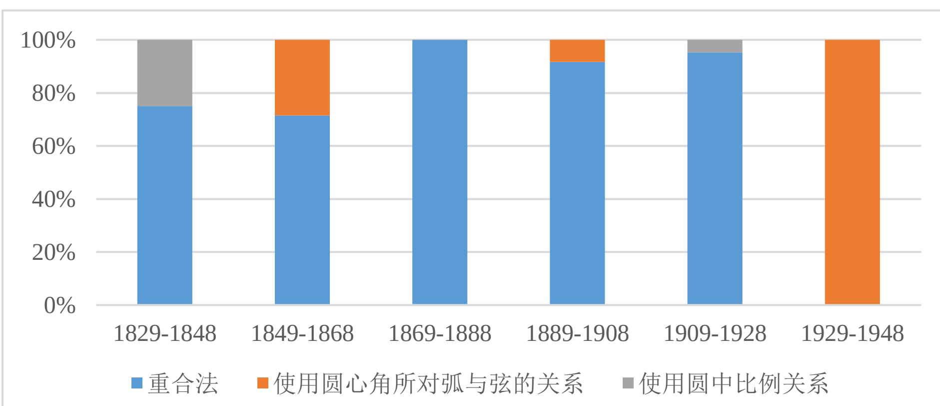


图 6 命题 1 证法的时间段分布

图 7 给出了命题 2 证明的时间段分布。同样除去 1929-1948 年可以看出，证明方法的演变呈现出由多元走向单一，最终又回归多元的趋势。虽然命题 2 的证明呈现“百家争鸣”的局面，但是从总体上看，重合法仍占据主流，其余方法还属“小众”。其次是反证法，这是中学中常

见的一种证明方法，学生运用命题 1 可以很自然的导出矛盾从而证明命题 2。

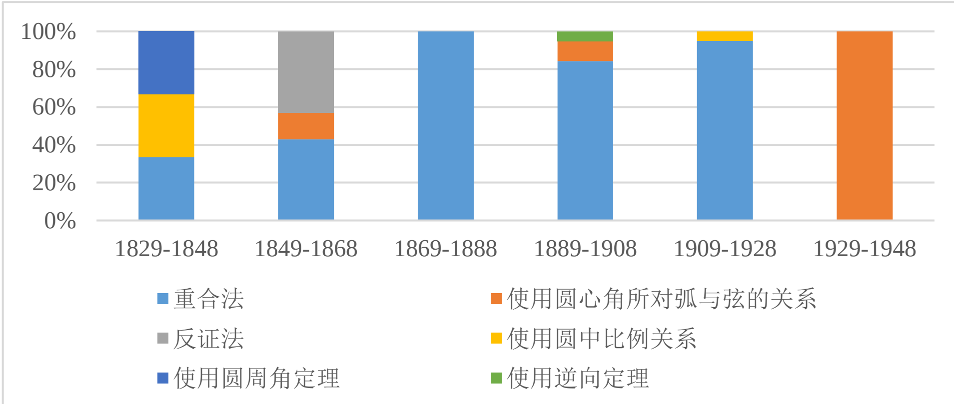


图 7 命题 2 证法的时间段分布

从历史的角度看，早到《几何原本》中全等三角形判定定理的证明，近到集合中交集的概念，无一不体现重合的思想，可以说重合法的历史源远流长。与此同时，通过图形的平移或旋转，学生可以从直观的角度掌握图形的性质。类比历史，联系现实，因而在证明圆周角定理时，超过 8 成的教科书都使用了重合法。

5 圆周角的概念

在 87 种美英早期教科书中，除 5 种没有给出圆周角概念的教科书外，其余 82 种通常将圆周角翻译为“an inscribed angle”或 “an angle is inscribed in a circle”，并给出其详细解释。圆心角概念的定义方法可以分为静态定义、邻边定义以及动态定义三类。表 2 是圆心角概念的具体分类情况。

表 2 圆周角的概念

类别	基本概念	教科书	数量
静态定义	顶点在圆周上且两边为弦（割线）的角。[3]	Olney（1886）	58
邻边定义	两根在圆周上相交的弦所夹的角。[13]	Davies（1841）	17
	内接在圆上的两直线所夹的角。（当一条边的两端都在圆上，我们称其为内接。）[10]	Loomis（1849）	2
动态定义	从圆上同一点出发的两条弦所夹的角。[11]	Playfair（1829）	5

图 8 为圆周角定义的时间分布情况。可以看出，从 1829 年开始的 120 年中，教科书编者通

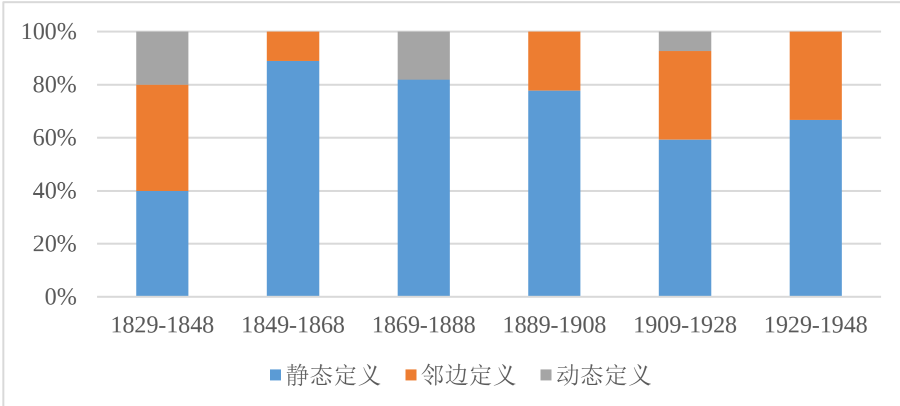


图 8 圆周角定义的时间分布

常采用静态定义提出圆周角的概念。早期教科书中对角的定义方式大都采用静态定义，即具有公共端点的两条不重合的射线组成的图形叫做角，于是用顶点和邻边描述圆周角的概念也显得顺理成章。

6 圆周角定理

所谓圆周角定理，即同弧所对的圆周角度数等于这条弧所对的圆心角的度数的一半。在美英早期教科书中，证明圆周角定理的方法可以分为使用三角形外角定理、平行线法以及使用弦切角定理三类。

6.1 使用三角形外角定理

在 86 种给出圆周角定理证明过程的教科书中，有 93%的教科书用到了三角形外角定理。在 $\odot O$ 上任取一个圆周角 $\angle BAC$，于是可以分三种情况进行讨论，即圆心 O 在 $\angle BAC$ 的边上，内部以及外部（图 9）[14]。

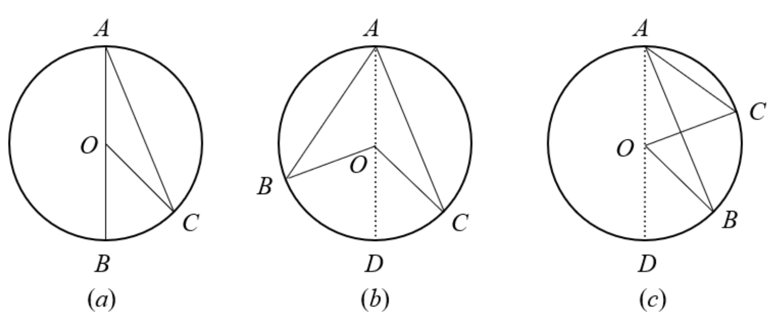


图 9 利用三角形外角定理证明圆周角定理

对于图 9(a)，即圆心 O 在$\angle BAC$ 的边 AB 上的情况。联结 OC，因为 $OA=OC$，所以$\angle BAC=\angle C$，于是，由三角形外角定理可知$\angle BOC=\angle BAC+\angle C=2\angle BAC$。对于图 9($b$)的情况，因为$\angle BOD=2\angle BAD$，$\angle DOC=2\angle DAC$，所以两边相加可得$\angle BOC=2\angle BAC$。同理，对于图 9($c$)的情况，两边作差可得$\angle BOC=2\angle BAC$。

6.2 平行线法

有 3 种教科书采用了这一方法。例如，美国数学家泰班（E. T. Tappan, 1824-1888）在《平面与立体几何》（1864）中，过圆心作一条与圆心角的一边平行的直线，进而完成证明[15]。

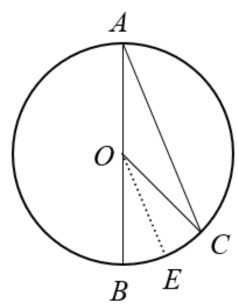


图 10 利用平行线证明圆周角定理

如图 10，过圆心 O，作 $OE\parallel AC$，于是$\angle BAC=\angle BOE$，$\angle C=\angle COE$。又因为 $OA=OC$，所以$\angle BAC=\angle C$，于是$\angle BAC=\angle BOE=\angle COE$，即$\angle BOC=2\angle BAC$。最后再运用 6.1 节中证明图 9($b$)($c$)的方法，即可完成证明。

6.3 使用弦切角定理

有 3 种教科书使用弦切角定理来证明圆周角定理。其中，有 2 种教科书采用帕金斯（G. R. Perkins, 1812-1876）于 1850 年出版的《几何基础》一书中的做法[16]。

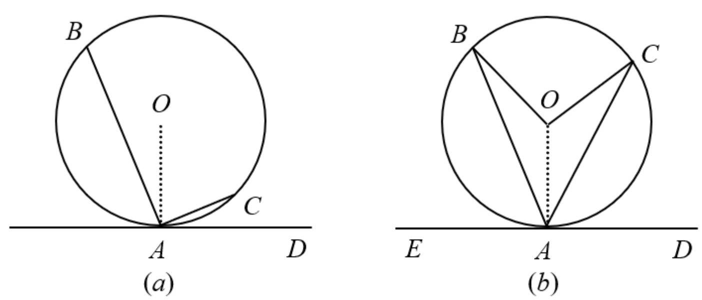


图 11 利用弦切角定理证明圆周角定理

如图 11(a)，由弦切角定理可知，$\angle BAD$ 等于 BCA 所对圆心角度数的一半，$\angle CAD$ 等于 CA 所对圆心角度数的一半，于是作差可得 $\angle BAC$ 等于 BC 所对圆心角度数的一半。

另 1 种做法来自于格兰德《几何学基础》（1830）[8]，如图 11(b)，因为 $\angle BOA=2\angle BAE$，$\angle COA=2\angle CAD$ 以及 $2\pi = 2\left(\angle BAE+\angle BAC+\angle CAD\right)$，于是作差可得 $\angle BOC=2\angle BAC$。

6.4 圆周角定理的演变

图 12 给出了证明圆周角定理的时间段分布。由图可知，使用三角形外角定理证明圆周角定理一直是教科书中的主流方法，这主要源于以下两点原因。第一，这一方法相比于其余两种方

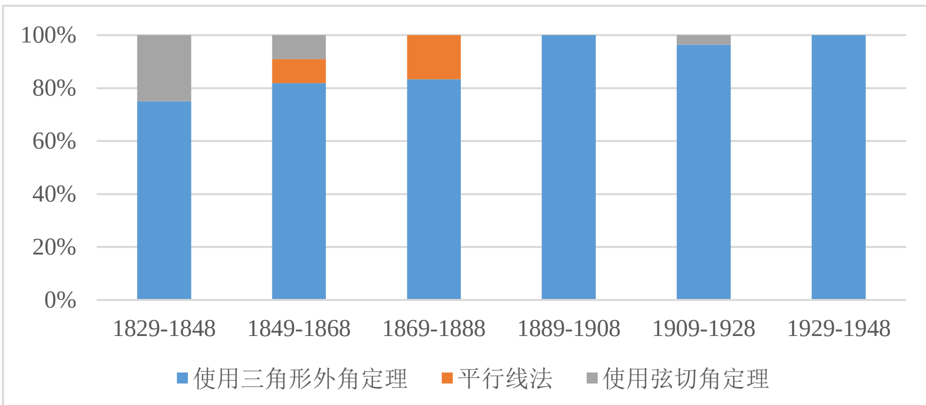


图 12 圆周角定理证法的时间段分布

法，只需用到简单的三角形知识而无需添加辅助线或利用后续知识，因而更符合学生已有的知识基础。第二，来自于历史上的一些书籍的影响，例如，欧几里得在《几何原本》中也采用了与教科书中一样的方法进行证明。这一证明方法也与现行教科书上的证明方法也相契合。与此同时，由于大多数教科书通常是按照圆周角定理到弦切角定理的顺序进行编排，所以用弦切角定理去证明圆周角定理的做法并不多见。

7 弦切角

在美英早期教科书中，并没有直接给出弦切角的概念，而只是在弦切角定理中有所提及。在 87 种教科书中，有 54 种教科书在定理或在证明中将弦切角定义为：由一根切线和一根过切点的弦所夹的角。有 32 种教科书没有指出弦切角的顶点在圆周上，而是将弦切角定义为由切线和弦所夹的角，并在图中指出弦切角。剩余 1 种教科书中则没有弦切角定理。

相比于弦切角概念单一的表述，弦切角定理的证明方法则非常丰富。所谓弦切角定理，即弦切角的度数等于它所夹的弧所对圆心角度数的一半，等于它所夹的弧所对圆周角度数。在 84 种给出弦切角定理证明的教科书中，证明方法包括四类，具体分类情况如图 13 所示。

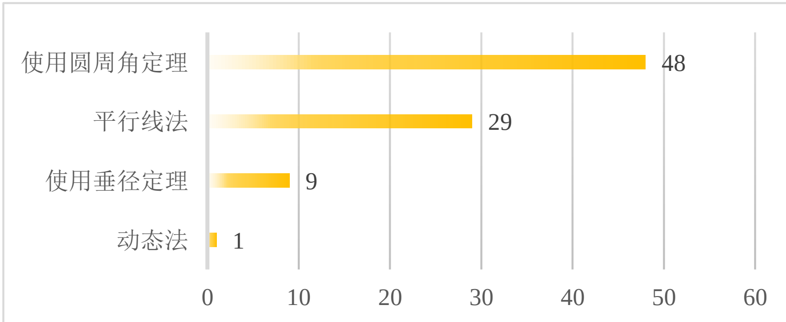


图 13 弦切角定理证法的分类情况

7.1 使用圆周角定理

有超过半数的教科书在证明弦切角定理的时候，不约而同的用到了圆周角定理的 3 个推论，即（1）同弧或等弧所对的圆周角相等，（2）直径所对圆周角是直角，（3）圆的内接四边形的对角互补。

有 44 种教科书只用到了推论 1。在图 14(a)中，因为$\pi=2\angle BAD$, $\angle BOC=2\angle BAC$，两边作差可得$\angle AOC=2\angle CAD$。再由圆周角定理的推论 1 可知，$\angle CAD$ 的度数等于 AC 所对的圆周角度数。同理，我们还可以证明$\angle EAC$ 的度数等于 $AFBC$ 所对的圆周角度数[4]。

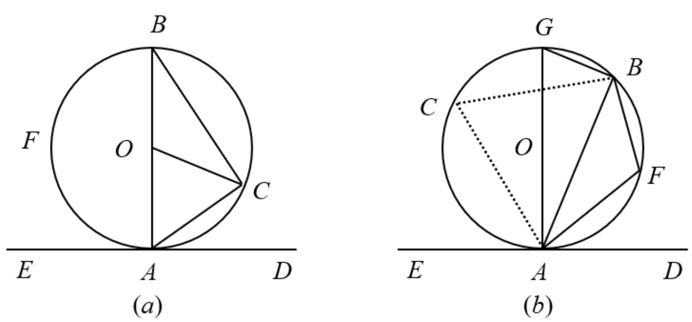


图 14 使用圆周角定理证明弦切角定理

有 4 种教科书用到了圆周角定理的 3 个推论。在图 14(b)中，因为$\angle ABG=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\angle AGB+\angle GAB=\dfrac{\pi}{2}$，又因为$\angle GAB+\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\angle AGB=\angle BAD$，再由圆周角定理的推论 1 可知$\angle BAD$ 的度数等于 AB 所对的圆周角度数。同理，由圆周角定理的推论 3 可知

$\angle BCA + \angle BFA = \pi$，又因为 $\angle BAD + \angle BAE = \pi$，故 $\angle BFA = \angle BAE$，即 $\angle BAE$ 的度数等于 $ACGB$ 所对的圆周角度数[17]。

7.2 平行线法

Tappan（1864）过弦的另一端作切线的平行线，把弦切角转化成了圆周角，随后运用圆周角定理即可完成证明[15]。有 27 种教科书使用了这一做法。如图 15(a)所示，过点 B 作 $BC \parallel ED$，于是 $\angle BAD = \angle B$。因为 $AB = AC$ 且 $\angle B$ 等于 AC 所对圆周角度数，所以 $\angle BAD$ 等于 AB 所对圆周角度数。又因为 $\angle EAB = \pi - \angle BAD$，所以 $\angle EAB$ 等于 ACB 所对圆周角度数。

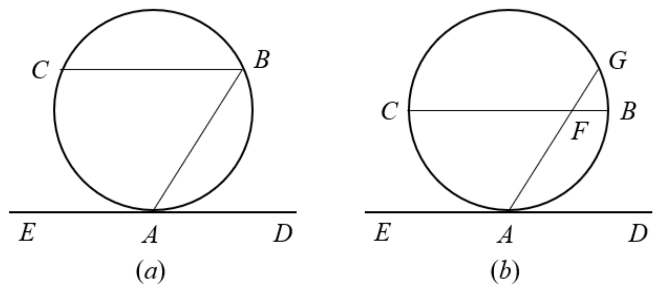


图 15 利用平行线证明弦切角定理

有 2 种教科书则是作一条与弦相交的平行线进而完成证明[18]。在图 15(b)中作 $BC \parallel ED$，交 AB 于点 F，则 $\angle GFB = \angle GAD$。因为 $\angle GFB$ 等于（$AC + BG$）所对圆周角度数且 $AB = AC$，所以 $\angle GFB$ 等于 AG 所对圆周角度数，故 $\angle GAD$ 等于 AG 所对圆周角度数。因为 $\angle GAE$ 和 $\angle GAD$ 互为补角，同样可以完成证明。

7.3 使用垂径定理

所谓垂径定理，即垂直于弦的直径平分弦且平分这条弦所对的两条弧。例如，罗宾逊（H. N. Robinson, 1806-1867）在《几何学、平面和球面三角基础》（1850）中，运用垂径定理来证明弦切角定理[19]。过圆心 O 作弦 AC 的垂线，垂足为 G，并交 AC 于点 F。联结 OA、OC（图 16），

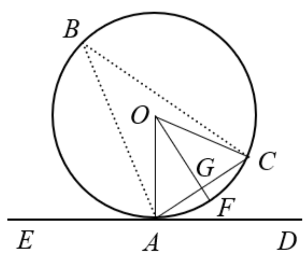


图 16 利用垂径定理证明弦切角定理

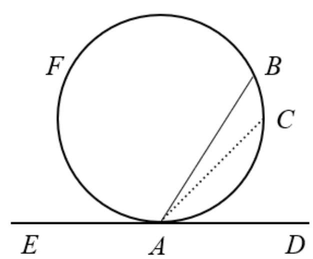


图 17 利用动态法证明弦切角定理

因为$\angle CAD+\angle OAC=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle AOG+\angle OAC=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\angle CAD=\angle AOG$。又由垂径定理可知，$\angle COG=\angle AOG$，所以$\angle AOC=2\angle CAD$。最后，由圆周角定理可知，因为$\angle AOC=2\angle ABC$，所以$\angle AOC=2\angle CAD=2\angle ABC$。

7.4 动态法

1876 年，美国数学家舒伊勒（A. Schuyler, 1828-1913）运用动态方法来证明弦切角定理[4]。具体来说，让直线 *AB* 绕点 *A* 顺时针旋转（图 17），因为$\angle BAC$ 等于 *BC* 所对圆周角度数，于是当点 *B* 和点 *A* 重合时，$\angle BAD$ 等于 *BA* 所对圆周角度数。同理，可以让直线 *AB* 绕点 *A* 逆时针旋转，于是$\angle EAB$ 等于 *AFB* 所对圆周角度数。

7.5 弦切角定理的演变

图 18 给出了证明弦切角定理的时间段分布情况。从图 18 可见，证明方法由单一走向多元，又从多元走向单一，但即使是在证明方法的多元时期，多数教科书依然以使用圆周角定理证明弦切角定理为主。其次是平行线法，从 19 世纪中叶开始，使用这一方法的教科书逐步增多，到了 20 世纪几乎和利用圆周角定理这一方法平分秋色。欧几里得在《几何原本》中已利用圆周角定理证明弦切角定理，与此同时，教科书的编写顺序也让圆周角定理的使用变得水到渠成。但不难发现，使用平行线的证明过程也非常简洁，运用平行线，将弦切角转化为圆周角，这其中所蕴含的化归思想，在中学数学中也十分常见。

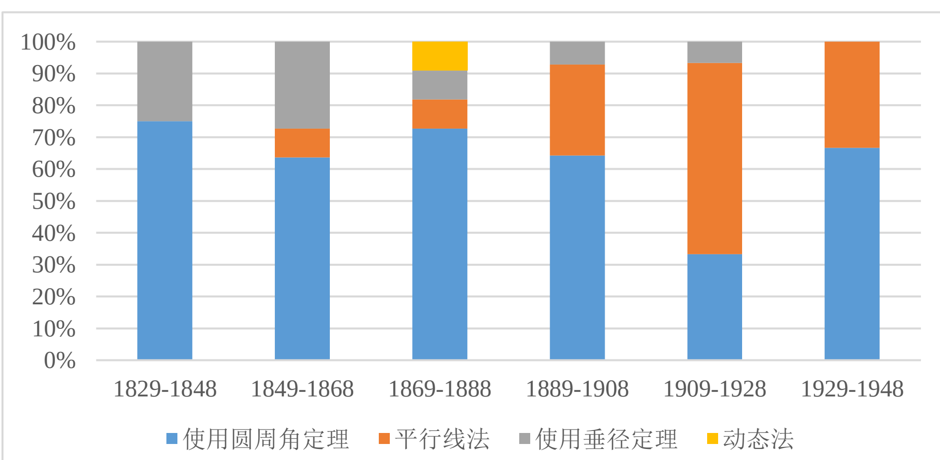


图 18 弦切角定理证法的时间段分布

8 教学启示

综上所述，在与圆有关的角这一主题上，美英早期教科书为我们呈现出圆心角、圆周角和弦切角的多种定义方式以及圆心角定理、圆周角定理和弦切角定理的多种证明方法，这些方式或方法为今日教学带来了诸多启示。

第一，在引入圆心角、圆周角和弦切角的概念时，可以先让学生尝试从这几个角的名字出发进行描述，随后教师向学生指出圆中这三个角的位置并让学生予以补充，最后教师对不同的定义方法进行总结。从不完善到完善，这样循循善诱的教法，一方面给予了学生今后自学概念的一种方法，更重要的是让学生体会动态的数学观，有助于构建知识之谐。

第二，在证明圆心角定理、圆周角定理以及弦切角定理时，教科书上单一的证明方法可能会束缚学生的思维，形成思维定势，这并不符合当前新课标下希望培养创新性人才的要求。于是，教师可以引导学生一题多思、一题多解、一题多变，在掌握课本上的证明方法之后，开展小组探究活动，尝试使用不同的工具来证明这些定理。一方面，“头脑风暴”式的数学课堂有利于培养学生数学发现、数学创造的能力，提高学生的分析问题和解决问题的能力，最终开拓学生的思路，发展学生的智力。另一方面，学生在探究中能加深对于这几个定理的理解，在互助合作中能体会到合作的重要性，在豁然开朗时体会到成功所带来的喜悦，有助于营造探究之乐。

第三，抽丝剥茧，深入挖掘定理证明背后的数学思想。例如，使用重合法证明圆心角定理中的类比思想，使用三角形外角定理证明圆周角定理中的分类讨论思想，使用平行线法证明弦切角定理中的化归思想等，无疑是今天数学课堂上的宝贵思想养料。这一切不仅使原本枯燥的定理学习变得精彩纷呈，同时还有助于培养学生的数学抽象、逻辑推理、直观想象等数学学科核心素养，有助于彰显方法之美、实现能力之助。

第四，在介绍圆心角、圆周角和弦切角的概念和定理时，可以借助微视频，展示各国数学家探索这三类角的概念和定理的过程，追溯知识源流，呈现多元文化。与此同时，数学家们对于数学真理的不懈追求与热爱，有助于激发学生学习数学的兴趣，体会数学背后的理性精神，最终达成德育之效。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011.

[2] 彭刚, 汪晓勤, 程靖. 数学史融入数学教学:意义与方式[J]. 成都师范学院学报, 2016, 32(01): 115-120.

[3] Olney, E. *Elementary Geometry*[M]. New York: Sheldon and Company, 1886: 88.

[4] Schuyler, A. *Elements of Geometry*[M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Company, 1876: 99+102-108.

[5] Perkins, G. R. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: D. Appleton & Company, 1855: 41+50.

[6] Hayward, J. *Elements of Geometry*[M]. Cambridge: Hilliard & Brown, 1829: 35-36.

[7] Legendre A. M. *Elements of Geometry and Trigonometry*[M]. New York: A. S. Barnes & Burr, 1862: 73-74.

[8] Grund, F. J. *Elementary Treatise on Geometry*[M]. Boston: Carter, Hendee & Co, 1830: 130-131.

[9] Failor, I. N. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: The Century Company, 1906: 81.

[10] Loomis, E. *Elements* of *Geometry and Conic Sections*[M]. New York: Harper & Brothers, 1849: 44-47.

[11] Playfair, J. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: A. Walker, 1829: 84+92-93.

[12] Beman, W. W., Smith, D. E. *New Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1900: 118.

[13] Davies, C. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: A. S. Barnes & Company, 1841: 39.

[14] Wentworth, G. A. *Elements of Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Heath, 1880: 94-95.

[15] Tappan, E. T. *Treatise on Plane and Solid Geometry*[M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864: 74-76.

[16] Perkins, G. R. *Elements of Geometry*[M]. New York: D. Appleton & Company, 1850: 85-86.

[17] Young, J. W., Schwartz, A. J. *Plane Geometry*[M]. New York: H. Holt, 1915: 114.

[18] Milne, W. J. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1899: 106.

[19] Robinson, H. N. *Elements of Geometry*, *Plane & Spherical Trigonometry Geometry*[M]. Cincinnati: Jacob Ernst, 1850: 58.

教学实践

基于课程思政的“感受可能性”教学设计与实施*

陈佳[1]，杨孝曼[2]

（1.华东师范大学附属贵阳学校，贵阳 550081；2. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

“课程思政”的概念早在 2014 年就由上海市教育委员会提出并在上海的一些高校进行了试验，社会反响热烈[1]。

“课程思政”是相对与“思政课程”提出的新概念，立足于深入挖掘思想政治理论课之外的各级各类课程和教学活动中蕴含的思想政治教育资源，通过课程承载思政、思政寓于课程的知识传授与价值引领的良性互动，发挥课堂主渠道承载的立德树人的功能与职责[2]。本文认为，“课程思政”是实现德育的重要教学途径，是在各学科教学中融入思想政治教育的理论知识、价值观念等，目的是对学生的行为举止、情感态度、思想信念等产生潜移默化的影响，这就要求所有课堂都要具备育人功能，所有教师都要发挥育人作用。虽然“课程思政”的概念起源于高等教育领域，但在其他教育阶段渗透“课程思政”理念也是势在必行，这对落实“立德树人”根本任务、培养符合新时代要求的社会主义建设者和接班人具有重要意义。

随机观念的培养需要一个长期的过程，“感受可能性”是北师大版教材七年级下册第六章第一节的内容，是概率初步的起始课。这部分内容是初中阶段培养学生从不确定（或统计）的角度来认识世界的教学内容，为学生在学习和生活中做出合理决策奠定基础，也为今后学习统计与概率的内容做好知识铺垫和情感储备。

鉴于上述考虑，本文从课程思政的角度设计并实施“感受可能性”教学，在知识讲授的同时，充分挖掘课程中的思政元素，在教学过程中为学生搭建一个从感性认知到理性认知的桥梁，从而润物细无声地践行数学学科德育。

---

* 华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学课例研究系列论文之一。

2 教学设计与实施

2.1 教学目标

本节课拟定的教学目标如下：

（1）通过猜测与游戏的方式，寓教于乐，学生在实际情境中切身感受什么是不可能事件、必然事件、确定事件与不确定事件，知道事件发生的可能性是有大小的，能够合理地做出决策；

（2）在小组探究、合作交流的过程中，增强团队意识和合作交流的能力，培养和发展用数学的眼光去观察世界，用数学语言去表达世界的能力。

（3）体会可能与必然的关系，培养理性精神，增强自主探究与发现的自信心，感悟数学的应用价值，进而提高学习数学的兴趣。

2.2 教学过程

2.2.1 介绍背景，引入概率

师：同学们，我们将跟随一个小视频开启今天的数学之旅！（播放概率起源的微视频）

师：通过视频，我们了解到概率的起源。可以看到，有的人使用骰子赌博，而数学家们却通过骰子来研究概率。在本章中，我们将进一步学习随机事件及其概率，掌握概率的知识和方法。接下来我们一起去感受生活中的随机现象，并体会事件发生的可能性大小。

【设计意图】通过微视频，了解概率的起源和发展，激发学生学习兴趣，感受理论来源于实际又应用于实际，感知看待事物的多面性。

2.2.2 提出问题，抽象概念

问题 1 在我们实际生活中，以下事件根据发生的可能性如何分类？（小组讨论）

（1）太阳从东方升起；

（2）拔苗助长；

（3）负数大于正数；

（4）守株待兔；

（5）买彩票恰好中一等奖；

（6）随意掷一枚质地均匀的骰子，掷出的点数不超过 6.

生 1：将事件（1）（6）分为一类；事件（2）（3）分为一类；事件（4）（5）分为一类.

师：分类依据是什么？这一类事件叫什么事件？

生 2：事件（1）（6）一定会发生，是必然事件；事件（2）（3）一定不会发生，是不可能事件；事件（4）（5）有可能发生也有可能不发生，是随机事件。

【设计意图】学生在实际生活场景中，根据发生可能性的大小对事件进行分类，感受事件类型的特征，并尝试用数学语言描述生活中的现象，突出知识产生的背景及其与现实的联系。

问题 2 根据上述分类，同学们能否用自己的语言描述什么是必然事件、不可能事件和随机事件？（学生回答，教师总结）

必然事件：在一定条件下进行重复实验时，有些事情我们事先能肯定它一定发生，这些事情称为必然事件；

不可能事件：在一定条件下进行重复实验时，有些事情我们事先能肯定它一定不发生，这些事情称为不可能事件；

随机事件：在一定条件下进行重复实验时，有些事情我们事先无法肯定它会不会发生，这些事情称为随机事件.

【设计意图】上述一系列的分类最终回归问题的本质，学生自主归纳总结，经历概念形成的过程。教师给予学生充分思考和表达的机会，引导学生的思维从具体到抽象的发展。在概念描述时，加入“在一定条件下进行重复实验时”的前提，发展学生严谨细致的数学学习态度。

2.2.3 合作探究，深化理解

首先通过一道例题，学生体会随机事件发生的可能性是有大小的。

例 1 下列三个盒子，甲、乙、丙中分别都放入 10 个球（除颜色外，其它完全相同），甲中放置 2 个红球和 8 个白球，乙中放置 7 个红球和 3 个白球，丙中放置 5 个红球和 5 个白球。

师：从以上三个盒子中“任意摸出一球，摸出的是红球”是什么事件？

生：随机事件。

师：规定谁先摸出红球谁就获胜，你愿意优先选择哪个盒子摸球？

生：乙盒子。

师：为什么选择乙盒子？

生 1：因为三个盒子中球的总数都是 10 个，乙中的红球个数占总数的$\frac{7}{10}$，、丙中的红球个数占总数的$\frac{5}{10}$，甲中的红球个数占总数的$\frac{2}{10}$，所以乙中摸到红球的可能性最大。

师：所以随机事件发生的可能性是有.......？

生：大小。

【设计意图】当教师规定“谁先摸出红球谁就获胜，你愿意优先选择哪个盒子摸球”时，学生根据盒子里红球的个数进行选择，初步感知随机事件的可能性是有大小的。教师再追问一句“为什么选择乙盒子”，有的学生就会想到红球与白球的比例问题，这为学生搭起感性认识和理性认识的桥梁，引导学生将生活经验提升为数学经验，进一步感受随机事件的可能性是有大小的.

接着教师设计了掷骰子的游戏环节，需要学生通过小组分工合作完成，并要求将游戏过程与结论通过表格的形式记录在课前分配给他们的白板上，游戏结束后教师挑选小组进行展示和汇报。具体游戏步骤如下：

Step1 组内分工：参赛员（2 人）、记录员、监督员、主持人；

Step2 游戏规则在一段对话中，游戏开始前教师请两位同学进行扮演并朗读。

生 1：我和你一起来玩掷骰子游戏？

生 2：好呀，怎么玩？

生 1：每人一颗骰子，掷一次，谁点数大，谁就赢。

生 2：这样太没意思了，我们这样玩：每人一颗骰子，掷的次数我们自己决定。

生 1：那怎么样才算赢呢？

生 2：当掷出的点数和不超过 10 时，如果决定停止掷，那么得分就是所掷出的点数和；当掷出的点数和超过 10 时，必须停止，并且你的得分为 0（游戏过程中，我们两个不能互看对方的点数）。

生 1：最后比较得分，谁的得分多谁就获胜。

Step3 各小组开始游戏并记录，游戏结束后小组主持人展示并解说本小组的比赛过程，并

分享经验。

以下是其中两个小组的分享。

小组 1：我们进行了 3 次游戏，第一局和第三局是乙胜，第二局是甲胜，所以最终是乙获胜。我们最后得出的结论是：可以将概率运用到生活中，比如剪刀石头布游戏中的预测，来增大自己获胜的几率。

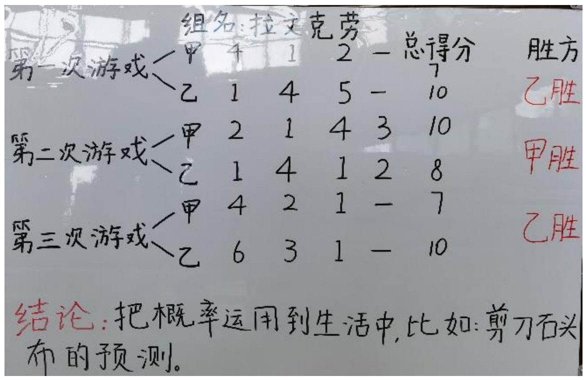


图 1 小组 1 的展示

小组 2：我们共进行了 3 轮游戏，其中甲的运气不太好，三次都输了。具体从分数上来看，乙获胜的几率比甲大，这是因为乙的运气比较好，且当两位同学掷出的点数都是小于或等于 5 的时候，再掷一次得分超过 10 的几率比较小，所以在生活中我们应该要善于观察，量力而行，不要盲目地冒险，否则可能会付出惨痛的代价。

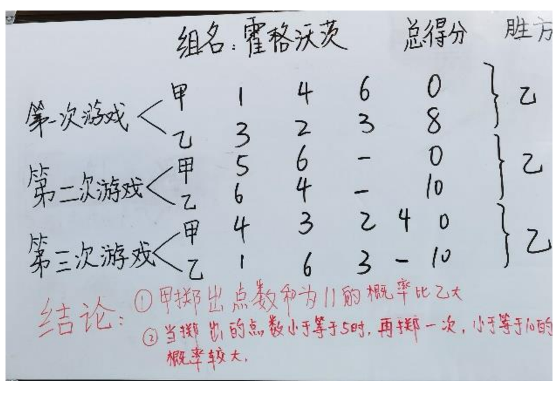


图 2 小组 2 的展示

师：感谢大家的分享，通过刚刚的游戏，我们可以看到随机事件发生的可能性是有大小的，根据这个可能性的大小，可以帮助我们做出合理的决策，就像刚才同学所说的，量力而行，适可而止，抵制诱惑。

【设计意图】游戏中设计了角色扮演的环节，不仅讲清楚了游戏规则，同时增加学生的体

验感，活跃课堂气氛。通过游戏，学生直观感受到在面对生活中的随机事件时，可以根据它发生可能性的大小进行科学分析，进而做出合理决策。在此过程中，学生真正体会到数学的实用价值，培养理性精神。另一方面，设计小组主持人解说比赛过程，成员分享经验的环节，让学生成为数学知识生成的体验者和学习成果的分享者，在此过程中培养学生的倾听能力。同时，学生通过游戏，感悟到在生活中有些事要量力而行，适可而止，要经过理性思考后再做出合理决策，于无形中渗透了数学学科德育。

2.2.4 巩固应用，回归生活

在课前，教师布置了以“生活中的可能与不可能”为主题，进行数学写作的任务，并在课堂中选择部分学生的作品进行分享。

师：老师从同学们的数学写作中选取了两个事件，请同学们判断横线上描述的是什么事件，此外，你想对这位同学说些什么？

数学日志 1：我每天上学前，妈妈总是少不了一句话：“路上注意安全，注意红绿灯，走斑马线，小心车辆。”我觉得妈妈很是唠叨，心想：“<u>贵阳市有几百万人口，每天交通事故也就那么几起，这样的事情轮到我是不可能的</u>”。

生 1：横线上所描述的事件属于随机事件，我想对这位同学说：虽然它发生的可能性比较小，但并不代表它不可能发生，所以我们应该遵守交通规则，注意安全，听妈妈的话！

数学日志 2：今天我真的太开心啦！<u>我们小组经过一个月坚持不懈的努力，终于在本月“一队三星”评比中获得了“优秀团队”的称号！</u>我们组的小伙伴都非常自豪！

生 2：横线上所描述的事件属于随机事件，我想对这位同学说：随机事件发生的可能性有大有小，但经过我们的努力，可以把随机事件发生的可能性变大，最终实现我们的目标。

【设计意图】素质教育不应只存在于课堂教学中，提高学生的综合素质还应渗透到课余生活，因此在课前布置了数学写作的任务，并选取部分写作内容在课堂中与学生一起交流讨论，使数学学习更“接地气”，让数学课堂充满人文元素，进而落实数学学科的育人价值。

2.2.5 课堂小结，升华主题

师：通过今天的学习，同学们有什么收获和感想呢？

生 1：概率在我们的生活中很重要，很多时候我们可以根据概率来决定一些事情，而且有

些事情我们要有所取舍，学会放手，因为鱼与熊掌不可兼得。

生 2：通过今天的学习，我知道了随机事件发生的可能性即使很小，它也是有可能会发生的，可能性即使很大，它也可能不发生。

师：非常棒！老师也想对大家说，人生的快乐在于挑战，人生的幸福在于奋斗，行动是成功的阶梯！让我们用行动将自己的梦想一步一步由不确定变成必然！

【设计意图】让学生畅谈本节课的收获，在交流和点评过程中不断升华，充分挖掘本节课的德育元素。

3 学生反馈

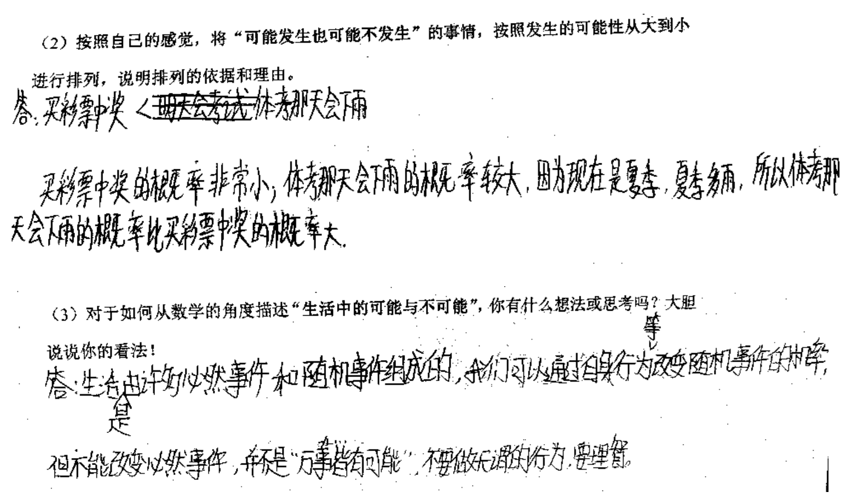
教师在课前和课后都发放了学习单，其中课前学习单发放 35 份，有效回收 29 份；课后学习单发放 35 份，有效回收 26 份。

3.1 课前学习单分析

（1）在描述生活中可能发生与不可能发生的事件中，部分学生给出如下例子：

- 一定发生：地球围着太阳转，初三要学习物理和化学；
- 不可能发生：正方形有五条边，自己的身高长到 5 米，鸡有牙齿；
- 可能发生也可能不发生：明天会出太阳，成为一名法官，买彩票中奖。

图 3 截取了部分学生的答案。


（2）按照自己的感觉，将“可能发生也可能不发生”的事情，按照发生的可能性从大到小进行排列，说明排列的依据和理由。

答：买彩票中奖 < ~~明天会考试~~ 体考那天会下雨

买彩票中奖的概率非常小，体考那天会下雨的概率较大，因为现在是夏季，夏季多雨，所以体考那天会下雨的概率比买彩票中奖的概率大。

（3）对于如何从数学的角度描述“生活中的可能与不可能”，你有什么想法或思考吗？大胆说说你的看法！

答：生活是由许多必然事件和随机事件组成的，我们可以通过自身行为等改变随机事件的概率，但不能改变必然事件，并不是“万事皆有可能”，不要做无谓的行为，要理智。

图 3 学生的想法

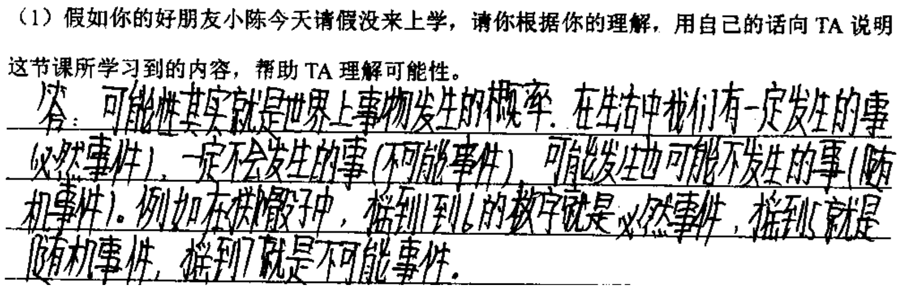
（2）在阐述观点“天气预报员说后天降雨的概率是 70%，如果没有下雨该作何解释”中，学生的主要理由如下：

- 后天降雨的概率是 70%，这是一个随机事件，所以有可能不会降雨；
- 70%与 100%是有区别的，降雨概率大并不是一定会降雨，还是有 30%的可能性不会下雨。

以上可以看出，学生能对生活中常见现象发生的可能性进行一定的分析和判断，对必然事件、不可能事件和随机事件的概念理解和区分比较到位。

3.2 课后学习单分析

课后学习单中也布置了数学写作的任务。第一题假设有同学请假，要求学生根据自己的理解向这位同学解释本节课的内容。所有学生均能较准确且有逻辑地表述和区分三种事件，其中有 11 位学生同时结合了具体事例进行说明。图 4 截取了其中一位同学的回答。


（1）假如你的好朋友小陈今天请假没来上学，请你根据你的理解，用自己的话向 TA 说明这节课所学习到的内容，帮助 TA 理解可能性。

答：可能性其实就是世界上事物发生的概率。在生活中我们有一定发生的事(必然事件)，一定不会发生的事(不可能事件)，可能发生也可能不发生的事(随机事件)。例如在掷骰子中，掷到1到6的数字就是必然事件，掷到1就是随机事件，掷到7就是不可能事件。

图 4 学生的回答

第二题要求列举一些寓言故事，从数学的角度说明故事背后隐含的随机性和道理，如“猴子捞月”、“守株待兔”。学生给出的部分回答如下：

- 揠苗助长：是不可能事件，我们做事不要急于求成，要在悠悠天云下静待花开。
- 铁杵磨成针：是必然事件，愿望要通过自己的努力实现。
- 龟兔赛跑：龟兔都有胜利的机会，如果谁偷懒了，就会让对方胜利，所以这是随机事件。故事告诉我们，通过不懈努力可以改变现状，把成功的几率增大，离胜利更近一步。
- 精卫填海：从理论上来说，应该是一件必然事件，因为只要它持续不断地去填的话，大海是能被填满的，但只凭它一己之力是填不满的，所以从现实上说又是不可能事件。这个故事告诉我们要量力而行，做自己力所能及的事。
- 刻舟求剑：是不可能事件，我们不能拘泥成例，死守教条，固执不知变通，要从根本去

看事物。

4 结语

为了综合分析本节课的德育元素，本文借鉴了汪晓勤等学者提出的基于数学史的数学学科德育的分类框架[3]，该框架虽然是在对数学史与数学教育的讨论中，结合《标准》的课程目标提出的，但实践证明它对于一般的课堂同样适用。因此，本节将参考这一框架，从理性、情感、信念和品质四个角度对这节课的德育元素进行分析。

（1）从理性的角度，学生通过游戏环节总结出在生活中要善于取舍，量力而行，要学会基于数据来制定合理策略的经验。此外，学生也能够正确认识运气与概率、可能与必然的关系。例如，有学生说："可以通过自己的努力，一步一步增大可能性，将可能转变成必然"，也有学生说："我们可以通过自身的行为去改变随机事件发生的可能性，但不能改变必然事件，并不是'万事皆有可能'，需要我们保持理智"。

（2）从情感的角度，本节课设计了探究式教学，让学生自主发现与总结。在此过程中，学生不仅掌握了知识，还体验到了学习数学的乐趣，从而在学生的心里种下自信的种子，提高学习数学的兴趣，增加了学习数学的动机。

（3）从信念的角度，在教学过程中，教师通过大量生活实例让学生感受生活中的可能性，并且在课前课后都布置了数学写作的任务，在此过程中学生充分体会到数学与生活的紧密联系，感悟到数学的实用价值。例如，有学生写到"我们要用数学的眼光观察生活，感受每个事件发生的可能性，然后做出正确的选择"。

（4）从品质的角度，游戏环节的规则设计了角色扮演活动，汇报环节也需要小组成员分享经验，并请其他小组成员进行点评。通过这些互动，培养了学生运用数学语言进行交流的能力，以及学会倾听他人的好习惯，这对学生的成长成才具有重要意义。课堂中日志分享环节，有学生总结"要听妈妈的话！"，在课后写作中，也有学生列举了经典的寓言故事，并从数学的角度给出新的认识和感悟，这些都在潜移默化中提升了学生的品质。

本节课基于"课程思政"的理念，将德育渗透在教学的每一环节，实现了帮助学生形成理性思维、激发积极情感、树立正确信念、培养优秀品质的目标。希望本文能对未来开发更多基于课程思政的课例提供一定的参考。

参考文献

[1] 贺武华,王凌敦. 我国课程思政研究的回顾与展望[J]. 学校党建与思想教育, 2021(4): 26-30.

[2] 巩茹敏, 林铁松. 课程思政: 隐性思想政治教育的新形态[J]. 教学与研究, 2019(6): 45-51.

[3] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. 数学通报, 2020(3): 7-12.

活动讯息

ICME-14 中 TSG27 的中国学者报告纪要

刘思璐

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

第十四届国际数学教育大会（简称 ICME-14）于 2021 年 7 月 11-18 日（原定于 2020 年举办，因疫情推迟一年）在中国上海的华东师范大学举行。此次会议包含了极其丰富的研究主题，其中一个重要的研究主题是数学史与数学教育（简称 HPM）。此次会议中与 HPM 相关的专题研究组为 TSG 27（Topic Study Group 27）“数学史在数学教育中的作用”。此次 TSG 27 报告中，长口头报告时间为 15 分钟，再加 12 分钟讨论，短口头报告为 10 分钟，再加 10 分钟讨论。接下来将介绍 TSG 27 中 7 位中国学者的报告，介绍顺序为报告顺序。

中国的韩嘉业做了“HPM 微视频在二项式定理教学中的应用”的短口头报告。韩嘉业首先介绍了有关于二项式定理的开方作法本原图、赌金分配问题等历史材料。接着他介绍了该课例中 4 节课程的实施过程，其中包括 3 段介绍二项式定理的微视频。韩嘉业通过分析学生的前、后测调查问卷和对学生的跟踪访谈，得到 HPM 微视频对学生产生的影响。

中国的李卓忱做了“小学 HPM 微视频的设计与应用”的短口头报告。小学 HPM 微视频制作流程包括设计、制作、应用、评价和反馈 5 个环节，微视频类型包括创设情境类、重现历史类、介绍思想类和展示方法类 4 类，微视频内容可以从一个人物、一个问题、一个故事和一种思想进行选择。最后李卓忱介绍了几个小学 HPM 微视频的应用案例，来展示 HPM 微视频的作用及其效果。

中国的刘思璐做了“HPM 视角下的高中函数概念教学对学生认知影响的实证研究”的短口头报告。该研究建立了基于数学史的函数概念理解水平的分析框架，接着使用该框架来分析课前、课后学生的调查问卷，以得到 HPM 视角下的函数概念教学效果，最后通过对学生的访谈、课堂教学视频和对授课教师的访谈等数据探索其影响因素。

中国的余庆纯做了“基于数学史的数学文化内涵实证研究”的短口头报告。研究使用德尔菲法修订“基于数学史的数学文化”内涵分析框架，该框架内涵包含知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐与多元文化 5 个维度。接着研究者使用该框架对 20 个高中 HPM 课例进行文

本分析，得到高中 HPM 课例在数学文化不同维度上的表现和特点。

中国的沈中宇做了“教师的 MKT 发展：一项 HPM 专业学习共同体（HPMLC）的案例研究”的长口头报告。沈中宇以某 HPM 工作室 2 位教师为例，通过 MKT 理论和活动系统模型，分析和解释这 2 位教师的各版教学设计、反思单、调查问卷和访谈数据，得到这两位教师参与 HPMLC 前后 MKT 的变化及其影响因素。

中国的姜浩哲做了“增强数学教师教学效能感：来自上海 HPM 学习共同体的影响”的短口头报告。该研究中，6 位职前教师参加了 HPM 教师发展项目，包括文献阅读、案例学习、微格教学、微课程开发和课堂教学 5 个阶段。研究者通过主题分析法处理对这些职前教师的半结构访谈数据，得到了他们教学效能感产生的变化及其影响因素。

中国的雷沛瑶做了“中国大陆和中国台湾高中数学教科书数学史的比较研究”的短口头报告。该研究从内容分布、栏目分布、数学史表现形式三个方面，比较了中国大陆人教 A 版的五本高中数学必修教材和中国台湾翰林乙版的四本高中必修教材中的数学史内容。其内容分布是从显性和隐性进行比较，栏目分布从章头、正文、例题、习题和阅读进行比较，数学史表现形式从文字、图片和“文字+图片”进行比较。

第 15 届国际数学教育大会将于 2024 年 7 月 7 日至 14 日在澳大利亚悉尼举行，期待更多的中国学者在 ICME-15 上展示中国数学教育研究成果。