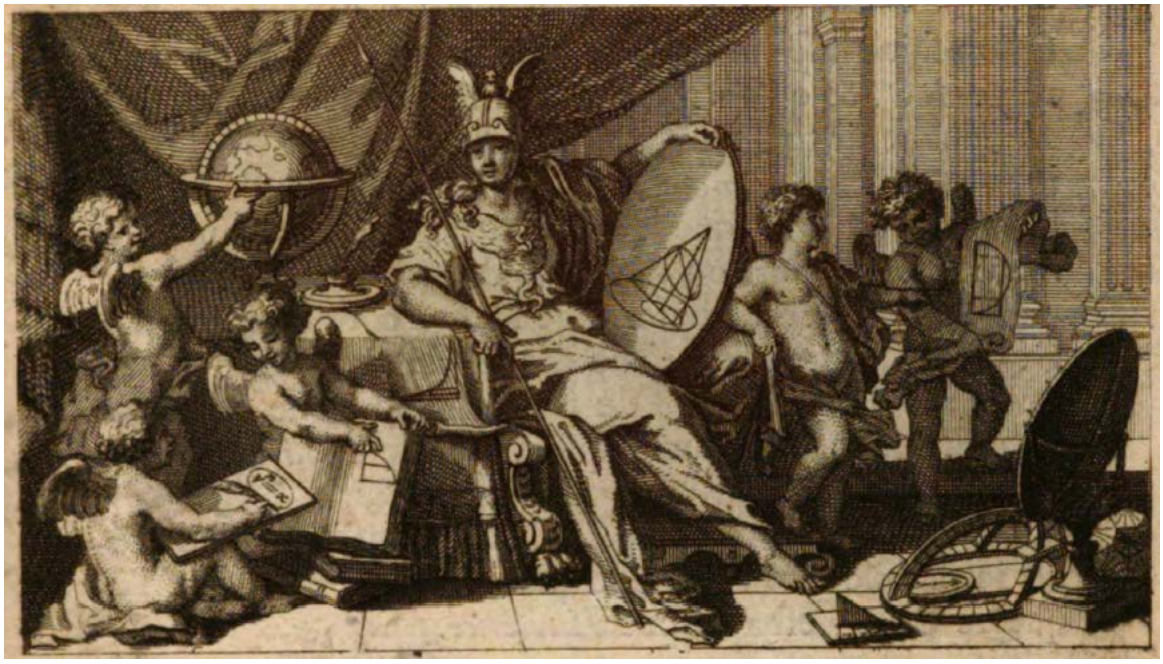
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2020 年第 9 卷第 3 期



洛必达《圆锥曲线解析》（1707）书影

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 彭 刚 栗小妮

责任编辑：彭思维 秦语真

编委（按姓氏字母序）：

纪妍琳 姜浩哲 雷沛瑶 栗小妮 李卓忱 刘思璐 彭 刚 邵爱娣 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 余庆纯 岳增成 张佳淳 邹佳晨

刊首语

1661 年，牛顿如愿以偿，成为剑桥大学三一学院的学生。牛顿如饥似渴，古希腊哲学家柏拉图、亚里士多德以及同时代哲学家和科学家笛卡儿、伽桑狄、霍布斯、波义耳、伽利略、开普勒等的著作如甘泉般滋润着他的心灵，为他提供丰富的思想养料，并促进他的独立思考。1664 年，他在自己撰写的题为《哲学的若干问题》的小册子中写道：“柏拉图是我的朋友，亚里士多德亦是我的朋友，但我最好的朋友是真理！”

刚进剑桥的时候，牛顿的数学知识少得可怜。大二时，他在剑桥大学附近的集市里买到一本有关占星术的书，但书中的数学内容使他如坠五里云雾。为此，他想从一本三角学著作开始学习数学，但由于缺少几何知识，他还是裹足不前。或许是在他的恩师、刚刚担任三一学院卢卡斯数学教授的巴罗先生的建议下，他开始阅读《几何原本》。从此，他逐渐走进数学世界。前辈数学家的著作为他学习和研究数学创造了良好的条件。1631 年，他的校友、国王学院毕业生奥特雷德出版《数学之钥》； 1646 年，荷兰数学家舒腾编辑出版《韦达数学全集》；1649 年，舒腾又出版笛卡儿《几何学》的拉丁文版（1659 年再版）；1655 年，牛津大学萨维利几何学教授沃利斯出版《无穷算术》。

剑河上的牛顿桥

牛顿不断从这些数学著作中获取灵感，有理数指数情形的二项式定理就是其中的典型一例。沃利斯在《无穷算术》中获得了一系列曲线

$$y=\left(1-x^2\right)^0,\quad y=\left(1-x^2\right)^1,\quad y=\left(1-x^2\right)^2,\quad y=\left(1-x^2\right)^3,\quad \cdots$$

下的面积（在$[0,x]$上），它们分别为

$$x,$$

$$x-\frac{x^3}{3},$$

$$x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5,$$

$$x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7,$$

$$x-\frac{4}{3}x^3+\frac{6}{5}x^5-\frac{4}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9,$$

……

我们今天有了二项式定理和定积分知识，很容易得到上述结果。但是，牛顿上大学以前，对正整数情形的二项式定理一无所知，虽然帕斯卡早在 1654 年就写好了《论算术三角形》，但该书的出版却是在帕斯卡去世之后的 1665 年。但观察沃利斯的结果，牛顿马上就发现了面积表达式中的规律（按照升幂的顺序）：

- 各项系数的符号交错出现；
- 各项系数的分母为奇数 1，3，5，7，…；
- 第二项系数的分子为等差数列 1，2，3，4，…；
- 各项系数的分子依次对应于为 11 的乘方的各位数，即对应于以下数表中每一行：

1

1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

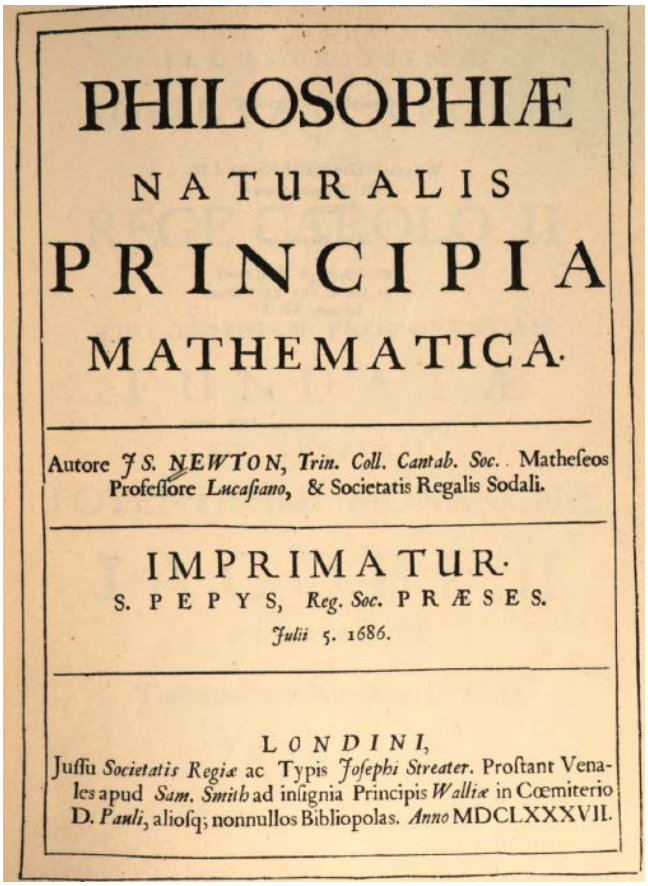
……

- 若第二项系数的分子为 n，则以后各项系数的分子分别为

$$\frac{n-0}{1}\times\frac{n-1}{2},\quad \frac{n-0}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3},\quad \frac{n-0}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4},\quad \cdots$$

牛顿马上将上述规律类比到以下曲线下的面积：

$$y=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad y=\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}},\quad y=\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}},\quad y=\left(1-x^2\right)^{\frac{7}{2}},\quad \cdots$$



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtant Venales apud *Sam. Smith* ad inſignia Principis *Walliæ* in Cœmiterio D. *Pauli*, alioſq; nonnullos Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

《自然哲学之数学原理》(1687)

分别得到

$$x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{\frac{1}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{\frac{1}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-2}{3}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots,$$

$$x-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{\frac{3}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{3}{2}-1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{\frac{3}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{3}{2}-1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}-2}{3}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots,$$

$$x-\frac{5}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{\frac{5}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{5}{2}-1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{\frac{5}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{5}{2}-1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}-2}{3}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots,$$

……

牛顿又把上述规律类比到更多的曲线，如

$$y=\left(1+x^2\right)^{\frac{0}{2}},\quad y=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad y=\left(1+x^2\right)^{\frac{2}{2}},\quad y=\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}},\quad \cdots$$

在得到上述规律之后，牛顿马上得出原函数的无穷级数表达式：

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\cdot x^4-\frac{\frac{1}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-2}{3}\cdot x^6+\cdots$$

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{\frac{3}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{3}{2}-1}{2}\cdot x^4-\frac{\frac{3}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{3}{2}-1}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}-2}{3}\cdot x^6+\cdots,$$

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}=1-\frac{5}{2}x^2+\frac{\frac{5}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{5}{2}-1}{2}\cdot x^4-\frac{\frac{5}{2}-0}{1}\cdot\frac{\frac{5}{2}-1}{2}\cdot\frac{\frac{5}{2}-2}{3}\cdot x^6+\cdots,$$

……

一般地，牛顿得到

$$\left(1-x^2\right)^n=1-\frac{n}{1}x^2+\frac{n(n-1)}{1\times2}x^4-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}x^6+\cdots$$

这样，牛顿在数学史上首次将二项式定理推广到一般有理数指数的情形。如果说帕斯卡为正整数指数幂情形下的二项式定理划上了句号，那么，牛顿则完全超越了他的前辈，书写了二项式定理的崭新篇章。牛顿二项式定理在数学上是如此重要、如此著名，以致在牛顿去世之后，有好事者猜测该定理会被刻在他的墓碑上（事实上并没有）。

1665 年 4 月，牛顿获得了学士学位。正当牛顿踌躇满志、继续向剑桥大学三一学院研究员的目标迈进之际，一百公里以外的伦敦爆发瘟疫的坏消息不断传来。瘟疫从伦敦城的外围迅速蔓延到了市中心，每周的死亡人数不断攀升。丹尼尔·笛福说得好：“瘟疫像一场大火，如果起火的地方只有几座房屋受牵连，那就只会烧毁几座房屋；如果是在单幢房，或者按我们的叫法是在孤房里烧起来，那就只会烧毁那座起火的孤房：但如果是在一座建筑密集的市

丽塔·格雷尔油画“大瘟疫 1665”（2009）

镇或城市里烧起来，到了紧急关头，火势越来越猛，那它就会在这整个地方蔓延开来，然后将所到之处吞噬殆尽！”到夏天，疫情肆虐达到了顶峰，不仅使整座伦敦城笼罩在死亡的阴影中，而且对伦敦周围地区构成了巨大的威胁。关闭学校、返乡隔离的通知下达到了剑桥大学的每一个学院。

牛顿收拾行囊，回到了故乡——林肯郡的乌尔索普村（今属格兰瑟姆市）。牛顿家的房子是他祖父于 1632 年购得，给生于斯长于斯的牛顿留下了许许多多童年和少年时代的回忆。母亲在第二次婚姻中给他增添了同母异父的一个弟弟和两个妹妹。十四岁时，继父（一位牧师）亡故，母亲带着三个孩子回到乌尔索普。彼时，牛顿在离家八英里的格兰瑟姆文法学校读书，但母亲却希望牛顿能够好好务农，承担持家重任，并不可思议地让他中途辍学！对农事了无兴趣的他，身上哪有一星半点的农夫基因？每到周末，母亲就让他有一位老仆人陪伴去格兰瑟姆的市场上出售一些农作物，并购买一些生活必需品。但他压根儿就不适合做买卖。有时牛顿偷偷溜回学校宿舍，有时会蹲在篱笆边，忘我地看书。他还在一场暴风雨中，做了一次测量风力的实验。在叔父（曾经的剑桥高材生）的关心之下，他才回到格兰瑟姆的课堂，并以就读剑桥大学为目标。

乌尔索普村牛顿家的房子（采自 E· F·金《牛顿传略》）

我们可以想象，避疫期间的牛顿，活动范围不会很大，和家人的交流也不会很多，基本

上就在自己家里读书、静思、写作。大疫关闭了大学校园，却关闭不了牛顿的精神世界！

在避疫的两年时间里，牛顿在数学、光学和力学领域取得了重要突破。在微积分方面，牛顿于 1665 年构想了“流数术”。我们今天所说的函数，被牛顿称为“流量”（注意，不是我们今天所说的手机“流量”哦）；函数的导数，被牛顿称为“流数”。“流数”的概念似乎源于物理学中的速度概念——“流量”流动的速度就是“流数”。牛顿通过在表示“流量”的字母上方加一点来表示该流量的“流数”。假设“流量”是 $y=x^n$，则其“流数”为

$$\dot{y}=\frac{(x+o)^n-x^n}{o}=\frac{nox^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}o^2x^{n-1}+\cdots}{o}=nx^{n-1}$$

显然，牛顿所求的“流数”就是我们今天所说的“导数”。牛顿将上述比成为“初生量的初始比”或“消失量的终极比”。由于牛顿没有严格的极限概念，所以上述求留数的方法并不严谨，以致日后受到贝克莱大主教的激烈批判。另外，由于返校后没有及时发表他的“流数术”，导致日后他与莱布尼茨之间无休止的微积分发明权之争。

构想了“流数术”之后，牛顿将它应用于求曲线的切线和曲率。我们相信，在乌尔索普老家，牛顿关于微积分的思考远远不止“流数术”，因为他同时也在思考：如何根据“流数”来求“流量”。在“流数术”的应用过程中，牛顿很可能还悟出，前辈数学家眼中风马牛不相及、需要采用不同技巧才能加以解决的求切线问题、求最大值和最小值问题，都可以统一采用同一种分析方法；求切线问题和求面积问题所需要的不过是互逆的两种运算而已。近两个世纪之后，在遥远的东方，中国数学家李善兰在学习微积分之后，不禁发出如下赞叹：

> 由是，一切曲线、曲线所函面、曲面、曲面所函体，昔之所谓无法者，今皆有法；一切八线求弧背、弧背求八线、真数求对数、对数求真数，昔之视为至难者，今皆至易。呜呼！算术至此观止矣，蔑以加矣！

微积分是数学史上最重要的发明，它使数学这门古老的学科插上了腾飞的翅膀，使其以前所未有的速度向前发展；同时，它为人类认识世界、解决不同知识领域中的难题提供了一把万能钥匙。微积分能够帮助我们更深刻地理解什么是“积微成著”，什么是“水滴石穿”，什么是“失之毫厘，谬以千里”，什么是“一寸光阴一寸金，寸金难买寸光阴”，什么是“一沙一世界，一花一天堂，双手握无限，刹那是永恒”。

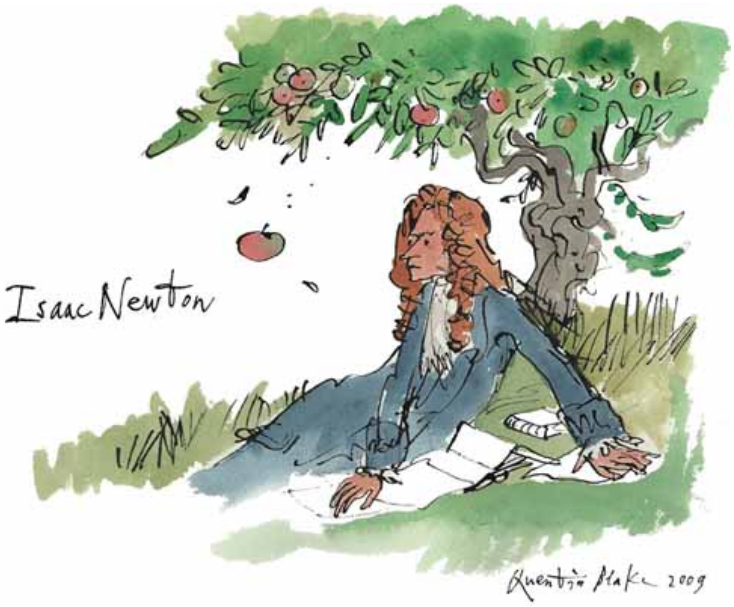
如果把人的成就比作“流量”，那么他经过每一瞬间“o”之后这“流量”的增量与这个“o”的比值，正刻画了人生的“流数”，即一个人进步的速度。

牛顿在乌尔索普的第二项重要发现是太阳光的分解。从亚里士多德时代开始人们就一直相信，太阳光是纯粹的单色光。1666 年，牛顿从附近集市上买来三棱镜，并进行光学实验——后来成了科学史上最著名的实验之一。通过暗室中的三棱镜实验，他惊奇地发现，太阳光被分解成了红、橙、黄、绿、蓝、靛、紫七种不同颜色！我们完全可以想象，牛顿的书房不知不觉成了他实施科学探究的实验室。

德国邮票上的牛顿与三棱镜实验

牛顿的第三项发现因苹果落地的故事而广为人知：在乌尔索普的一棵苹果树下，一只苹果从树上掉下来，激发了牛顿关于万有引力的灵感。当然，也有人怀疑故事的真实性，包括 19 世纪著名数学家德摩根；但更多的人都相信故事是真实发生过的：在那宁静的乡间，习惯于在苹果树下思考问题的牛顿，突然听到一只苹果落在地上发出声响，因而思索苹果落地的原因，最终彻悟宇宙的普遍规律。如果换一个人，换一个时间，一个生活在 5G 时代、对自然界的秘密毫无好奇心的庸人在苹果树下用苹果手机刷着微信，突然听到苹果的落地声，于是浮想联翩、灵光闪现……那不用说是无聊的杜撰。但是，苹果树下坐着的是 1666 年避疫在家的牛顿，你很难让人相信这仅仅是人们的臆想。实际上，牛顿的侄女凯瑟琳·巴顿曾经向参加过牛顿葬礼的法国思想家伏尔泰讲起过这则故事，1741-1752 年间担任英国皇家学会会长的马丁·福克斯也和他人说起过这则故事。

后来，牛顿用数学的方法证明了万有引力定律以及力学三大定律，并将其写进《自然哲学的数学原理》（1687）中。欧洲的知识阶层普遍认为：上帝创造了世界，而牛顿发现了上帝创造世界的方法！万有引力定律以及其他力学定律的发现，深刻地改变了人类的世界观，人类不再像英国哲学家休谟所说的那样，“被悬挂在永恒的疑惧之中”，“既没有足够的智慧预见未来，也没有能力防止那些使我们不断受伤害的不幸事件发生”，而是坚信：自然界是有规律的，而规律是可以认识的，并且是用数学来刻画的！



昆丁·布雷克插画作品：苹果树下的牛顿（2009）

1727 年，英国诗人蒲柏为牛顿撰写了墓志铭：

自然和自然的规律在黑夜里隐藏，

上帝说，‘让牛顿来吧’，

于是一切都变得光亮。

回顾牛顿避疫期间的科学发现，我们不禁要问：在整个人类历史上，还有谁能拥有如此不平凡的两年时光？

牛顿塑像（采自 E· F·金《牛顿传略》）

牛顿墓（威斯敏斯特教堂）

1666 年，伦敦大疫伴随着一场全所未有的大火而画上了句号。剑桥大学于 1667 复课，牛顿和其他学生一样，从家乡返回。四年的积累，两年的沉淀，如今的牛顿业已成为世界一流的数学家和物理学家。就在剑桥大学复课当年的 10 月份，他被选为低级研究员（minor fellow），翌年 7 月，他又被选为高级研究员。巴罗教授敏锐地发现了牛顿的才能，于 1669 年将这位学生的论文寄给伦敦的柯林斯（柯林斯和世界各地的数学家有着广泛的通信联系），希望他通过通信，让世界上更多的数学家了解牛顿。同年，巴罗毅然辞去卢卡斯教授职位，并力荐牛顿作为他的继任者。27 岁的牛顿顺利成为卢卡斯数学教授。

从此，一颗璀璨的科学新星，不仅点亮了工业革命的前程，更是照亮了人类文明的天空。

1665 年的那场大疫，让无数人生活在恐惧、谵妄和迷信之中。作为一名剑桥学子，牛顿可能并没有为抗疫做出过什么直接的贡献，但他通过自己的科学著作，给予人类前所未有的理性，正是这种理性，让人类在遇到灾难的时候，能够沉着冷静、充满信心地去寻找科学的治疫良方；另一方面，他很好地利用了避疫的两年时光，心无旁骛地做自己喜欢的研究工作，一举超越了他在剑桥的所有同学，为未来的发展打下坚实的基础。

三个半世纪之后的今天，人间又逢瘟疫。绝大多数居家避疫的人或悼念逝者，或为病者祈福，或给予疫区微薄捐助，或充当键盘侠发正义之声，或不停转发各类信息（其中谣言甚多），除此之外，对于疫情本身大抵是无所作为的。无聊乎？厌倦乎？茫茫然无所适从乎？饱食终日无所事事乎？想想乌尔索普村那棵苹果树下的牛顿。

一个人在自己专业领域的耕耘、坚守与创获，正是大疫期间让自己有功于国家、有益于世界的正途。

目　录

刊首语 ..... 汪晓勤 I

理论探讨

基于数学史料的高中数学问题编制策略 ..... 汪晓勤 1

历史研究

美英早期解析几何教科书中的双曲线方程 ..... 秦语真 16

垂径定理的历史 ..... 王娟 29

美英早期三角学教科书中的数学文化 ..... 彭思维 39

教学实践

HPM 视角下的“轨迹”课例研究 ..... 张佳淳 53

HPM 视角下的类比推理教学 ..... 纪妍琳 67

学术资讯

第一届 HPM 工作室成员课例论文目录 ..... 沈中宇 78

教师教育学院数学教育研究所工作研讨会会议纪要 ..... 韩嘉业，沈中宇 80

CONTENT

FOREWORD…… Wang Xiaoqin I

THEORETIC DISCUSSION

The Strategies of Senior High School Mathematics Problem Posing based on the History of Mathematics…… Wang Xiaoqin 1

HISTORICAL STUDY

The Equation of the Hyperbola in Early American & British Textbooks on Analytical Geometry…… Qin Yuzhen 16

The History of the Theorem on the Chord Perpendicular to the Diameter …… Wang Juan 29

The Mathematical Culture in Early American & British Textbooks on Trigonometry…… Peng Siwei 39

TEACHING PRACTICE

Lesson Study on the Concept of Loci ……Zhang Jiachun 53

Teaching of the Analogical Reasoning from the Perspective of HPM Ji Yanlin 67

ACADEMIC INFORMATION

A List of Papers of the Members of HPM Studio from 2018 to 2019…… ……Shen Zhongyu 78

The Meeting of the Institute for Mathematics Education in Teachers College, ECNU …… Han Jiaye, Shen Zhongyu 80

理论探讨

基于数学史料的高中数学问题编制策略*

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

近年来，随着 HPM 视角下课例研究的深入开展以及一系列相关课例的发表，越来越多的数学教师开始关注 HPM 的教学理念、教育价值和教学策略。一般说来，数学教学中运用数学史料的方式有附加式、复制式、顺应式和重构式[1]。除了附加式（介绍数学家的生平轶事、提供数学史阅读材料等）外，其他三种方式都与问题提出息息相关：复制式指的原始材料的直接采用（有时需要进行必要的语言转换），其中最主要的材料之一就是历史上的数学问题；顺应式指的是对数学史料的改编，包括对问题的改编；重构式是指借助一系列由易至难、环环相扣的问题串，再现知识的发生和发展过程。因此，在 HPM 视角下的数学教学中，数学问题乃是数学史的最重要的载体。

另一方面，近年来，高考数学卷中相继出现了一些涉及数学文化的问题，这些问题引起人们的浓厚兴趣，已有大量文献对这些问题做过分析（如[5-11]）。数学史是数学文化的重要组成部分，讨论高考数学文化题，都绕不开基于数学史的问题。尽管已有部分文献对数学文化或数学史问题进行了分类（如[6]和[8]），但分类方法还有待于进一步论证、细化和修正。本文的研究问题是：如何从数学史料出发，编制数学问题？高考数学卷中涉及数学史的问题反映了问题提出的哪些策略？

我们希望在已有相关研究的基础上，建立“基于数学史的问题提出策略”的分类框架，并用于部分高考试题以及高中数学典型问题的分析，为未来 HPM 视角下的课堂教学和试题命制提供参考。

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中如何落实立德树人根本任务的研究”（A8）系列论文之一。

2 基于数学史料的问题提出策略

美国学者希尔佛（Silver）等人的研究表明，根据已知情境或已知问题提出新问题的具体策略有四种[2][3]：

- 条件式策略，即改变给定情境的条件而保持其目标不变，提出新问题；
- 目标式策略，即改变给定情境的目标而保持其条件不变，提出新问题；
- 对称式策略，即将给定情境中的条件和目标互换，提出新问题；
- 链接式策略，即以给定情境的目标作为已知条件，提出新问题。

其中前两种策略即为所谓的“否定属性”（what-if-not）策略。如果给定情境是含有条件和目标（或结论）的数学史材料（主要是数学命题和数学问题），那么相应地，“基于数学史料的问题提出策略”也包含上述四类，从数学史运用方式上说，这四种策略都属于顺应式。但是，希尔佛在其研究中所发现的问题提出策略，并不考虑课堂教学的需求，而本文所说的“基于数学史的问题提出策略”是服务于课堂教学的，因而有其特殊性。对于含有条件和目标（或结论）的数学史料来说，具体体现在以下几个方面：

- 当数学史料完全满足课堂教学需求，即满足科学性、有效性、可学性、趣味性和人文性时，无需对其进行改编，因此，基于数学史料的问题提出策略应该包含“复制式策略”，即除语言翻译外，对情境、条件、目标（或结论）不加改编而直接采用；
- 当数学史料部分满足课堂教学需求，但未能体现可学性、趣味性或人文性时，需要补充情境或对原有情境进行改编，但不改变史料中的条件和目标（或结论），这种策略称为“情境式策略”；
- 针对一则数学史料，采用以上各类策略所提出的问题，都无法满足课堂教学需求，此时，教师需要同时改变史料中的情境、条件和目标（或结论），此时的策略称为“自由式策略”。

对于不含条件或目标（或结论）的数学史料（主要是指概念定义、作图工具等），为了编制满足课堂教学需求的问题，需要设定条件或目标，此时的策略也属于“自由式策略”。

因此，“基于数学史料的问题提出策略”至少有七类，见表 1。

例如，《九章算术》勾股章中设有如下问题（通常称为“勾股容方问题”）：“今有勾五步，股十二步，问：勾中容方几何？”如果我们以该问题作为出发点，运用各种策略，分别可以提

出以下新问题。

问题 1：已知直角三角形的两条直角边的长分别为 5 和 12，求与该直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长。（复制式）

表 1 基于数学史料的问题提出策略

类 别	数学史料	问题提出的策略
含有条件和目标	公式、定理或法则	复制式、条件式、目标式、对称式、自由式
	数学问题	复制式、情境式、条件式、目标式、对称式、链接式、自由式
不含条件和目标	概念定义	自由式
	作图工具	自由式
	其他史实	自由式

问题 2：有一块直角三角形空地，直角边长分别为 5 米和 12 米。现要在该空地上建一个面积最大的正方形花坛，求该花坛的边长。（情境式）

问题 3：已知直角三角形的两条直角边长分别为 7 米和 25 米，求与直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长。（条件式）

问题 4：已知直角三角形的直角边为 a 和 b，求其内接正方形的边长。（条件式）

问题 5：若直角三角形两条直角边分别为 a 和 b，则内接正方形边长为 $\frac{ab}{a+b}$。你觉得古人是如何得到这个结果的？（条件式）

问题 6：已知直角三角形的直角边为 5 和 12，求其内接正方形的面积。（目标式）

问题 7：已知直角三角形内接正方形（与直角三角形有公共直角）的边长为 $\frac{60}{17}$，斜边为 13，求直角边。（对称式）

问题 8：已知直角三角形的直角边为 a 和 b，试写出与直角三角形有公共直角的内接正方形的边长与 a 和 b 之间的关系，据此证明均值不等式 $\frac{2ab}{a+b} \le \frac{a+b}{2}$。（链接式）

问题 9：如图 1，若 RtΔ ABC 的两条直角边分别为 a 和 b，正方形 CEDF 和 MNPQ 为它的两个不同的内接正方形，试比较 ECFD 和 MNPQ 边长的大小。（自由式）

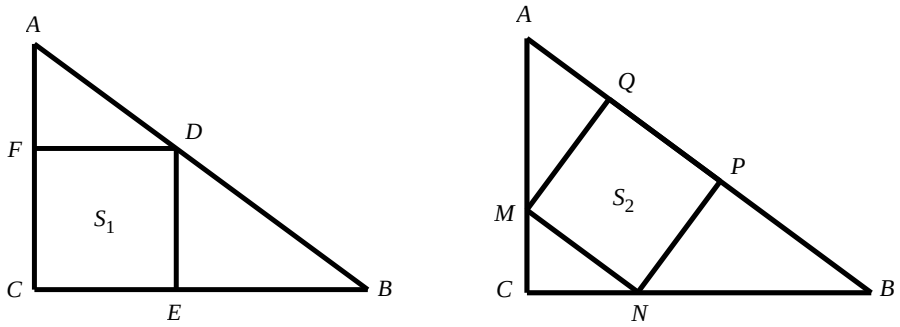


图 1 勾股容方新问题

问题 10：如图 1，正方形 *CEDF* 和 *MNPQ* 内接于同一个直角三角形 *ABC*，其面积分别 S_1 和 S_2，$\angle A = \alpha$。已知 $S_1 = 441$，$S_2 = 440$，求 $\sin 2\alpha$。（自由式）

3 基于数学史料的高考题

3.1 复制式问题

高考数学卷中的“复制式”问题较多取自中国古代数学名著《九章算术》和《数书九章》，如《九章算术》中的“九节均容”问题（2011 年湖北文理卷）、“委米依垣”问题（2015 年全国课标 I 卷）、《数书九章》中的“天池测雨”问题（2013 年湖北文科卷）、“米谷粒分”问题（2015 年湖北文理卷）等。2017 全国 II 卷采用了明代数学家程大位（1533-1606）《算法统宗》中的问题：“远望巍巍塔七层，红光点点倍加增。共灯三百八十一，请问尖头几盏灯？”这是一道已由等比数列项数、公比与和求首项的问题。命题者除了对原文进行翻译外，原题的情境、已知条件和目标都不变，故属于“复制式”问题。

有些问题看似与数学史无关，但如果从数学史的角度去看，却是古代数学家解决过的问题。如 2017 年江苏卷中的一题：“如图（图 2），在圆柱 O_1O_2 内有一个球 O，该球与圆柱的上下底面及母线均相切。记圆柱 O_1O_2 的体积为 V_1，球 O 的体积为 V_2，则 V_1/V_2 的值是_____。”该问题正是古希腊数学家阿基米德（Archimedes，前 287-前 212）曾经孜孜以求的问题，问题的解决是阿基米德生前最引以为豪的工作，而在他去世之后，求与外切圆柱还被刻在他的墓碑上。因此，我们也可以将本题视为“复制式”问题。

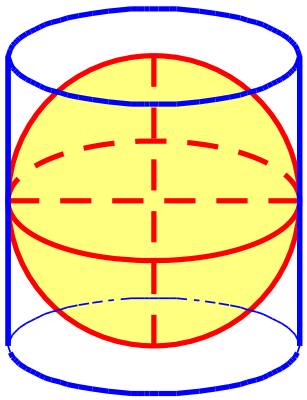


图 2 圆柱及其内切球

3.2 条件式问题

2018 年浙江数学卷根据《张丘建算经》中的百鸡问题编制了一道方程问题：

我国古代数学著作《张丘建算经》中记载百鸡问题：“今有鸡翁一，直钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一。凡百钱，买鸡百只，问：鸡翁、母、雏各几何。”（考卷上“丘”误作“邱”，《张丘建算经》原文中的“直”写成“值”）设鸡翁、鸡母、鸡雏个数分别为 x，y，z，则 $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100 \end{cases}$。当 $z=81$ 时，$x=$ _____，$y=$ _____。”

这里，命题者对“百鸡问题”中的条件进行操作，将原题中的不定方程组改编为一个适定的二元一次方程组，故属于“条件式”问题。

3.3 目标式问题

2017 年浙江数学卷先介绍三国时代数学家刘徽的割圆术以及祖冲之的贡献，然后提出数学问题：“

我国古代数学家刘徽创立的“割圆术”可以估算圆周率 π，理论上能把 π 的值计算到任意精度，祖冲之继承并发展了“割圆术”，将 π 的值精确到小数点后七位，其结果领先世界一千多年，“割圆术”的第一步是计算单位圆内接正六边形的面积 S_6，$S_6=$ _____。

如图 3 所示，AB 为圆内接正 n 边形的一边，长为 a_n，$AC=BC$ 是圆内接正 $2n$ 边形的一边，长为 a_{2n}，则圆内接 $2n$ 边形的面积为

$$S_{2n}=nS_{等形OABC}=n\left(\frac{1}{2}a_nR\right)=\frac{1}{2}na_nR$$

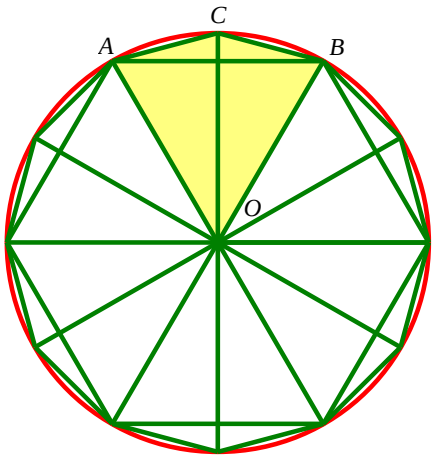


图 3 割圆术

上述公式是割圆术的关键公式，刘徽利用该公式证明了圆面积公式（图 4）。为了求圆周率的近似值，从 $a_6=R=1$ 尺出发，刘徽先计算出

$$S_{12}=\frac{1}{2}\times 6\times a_6\times R=300\left(寸^2\right),$$

再根据“倍边公式”

$$a_{2n}=\sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2+\left(R-\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)^2},$$

依次计算 a_{12}，a_{24}，a_{48} 和 a_{96}，相应计算出

$$S_{24}=\frac{1}{2}\times 12\times a_{12}\times R=310\frac{1757}{2500}\left(寸^2\right),$$

$$S_{48}=\frac{1}{2}\times 24\times a_{24}\times R=313\frac{13143}{50000}\left(寸^2\right),$$

$$S_{96}=\frac{1}{2}\times 48\times a_{48}\times R=313\frac{584}{625}\left(寸^2\right),$$

$$S_{192}=\frac{1}{2}\times 96\times a_{96}\times R=314\frac{64}{625}\left(\text{寸}^2\right)。$$

显然，割圆术的第一步不是计算S_6，而是计算s_{12}。因此，本题改变了割圆术中的目标，因而属于“目标式”问题。如果将所求项改为s_{12}，那么问题就符合割圆术的原意，成为“复制

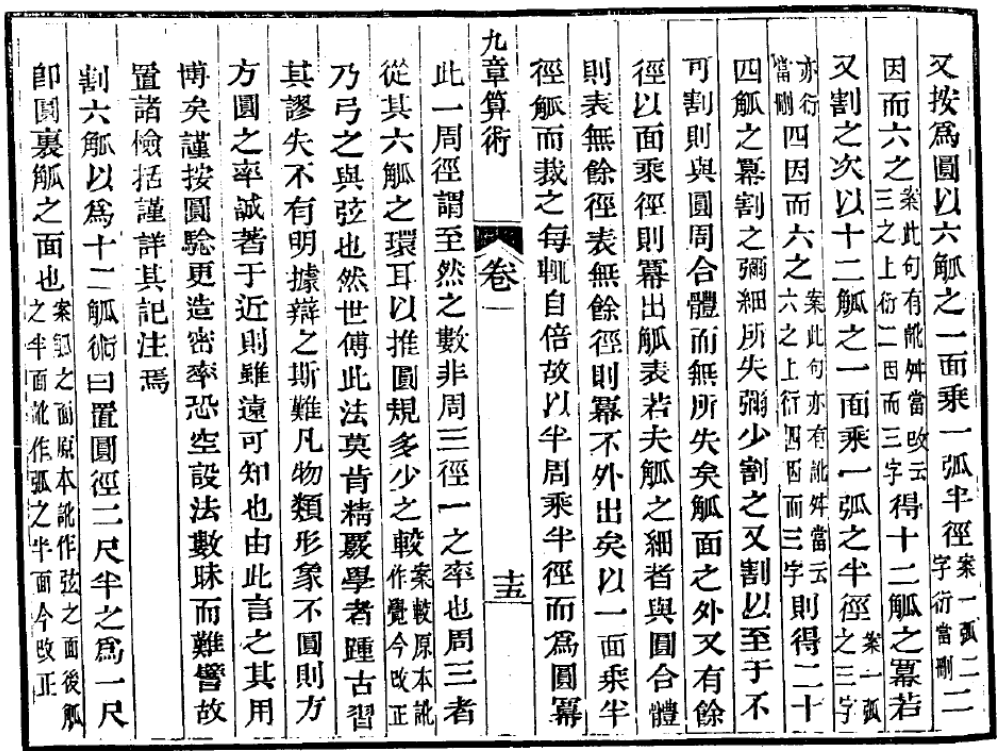

又按爲圓以六觚之一面乘一弧半徑案一弧二字衍當刪二
因而六之案此句有訛舛當改云三之上衍二因而三字得十二觚之冪若
又割之次以十二觚之一面乘一弧之半徑之案一弧之三字亦衍
案此句亦有訛舛當云六之上衍四因而三字則得二十
四觚之冪割之彌細所失彌少割之又割以至于不
可割則與圓周合體而無所失矣觚面之外又有餘
徑以面乘徑則冪出觚表若夫觚之細者與圓合體
則表無餘徑表無餘徑則冪不外出矣以一面乘半
徑觚而裁之每輒自倍故以半周乘半徑而爲圓冪
九章算術 卷一 十五
此一周徑謂至然之數非周三徑一之率也周三者
從其六觚之環耳以推圓規多少之較案較原本訛作覺今改正
乃弓之與弦也然世傳此法莫肯精覈學者踵古習
其謬失不有明據辯之斯難凡物類形象不圓則方
方圓之率誠著于近則雖遠可知也由此言之其用
博矣謹按圖驗更造密率恐空設法數昧而難譬故
置諸儉括謹詳其記注焉
割六觚以爲十二觚術曰置圓徑二尺半之爲一尺
即圓裏觚之面也案弧之面原本訛作弦之面後觚之半面訛作弧之半面今改正

图 4 《九章算术》书影（中国科学技术典籍通汇影印四库全书版）

式”问题了。本题中，命题者的初衷并非目标操作，但由于曲解史料的原意，无意中改变了问题提出的策略。

2018 年全国 I 卷以希波克拉底定理为基础，编制了一道概率问题：

下图（图 5）来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形。此图由三个半圆构成，三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC 和直角边 AB，AC。ABC 的三边所围成的区域记为 I，黑色部分记为 II，其余部分记为 III。在整个图形中随机取一点，此点取自 I，II，III 的概率分别为 p_1，p_2，p_3。则

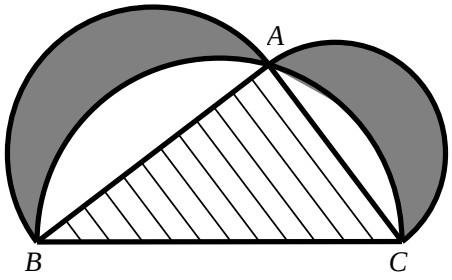


图 5 希波克拉底的几何图形

A. $p_1 = p_2$；　　B. $p_1 = p_3$；　　C. $p_2 = p_3$；　　D. $p_1 = p_2 + p_3$。

本题所依据的数学史料是希波克拉底定理，该定理的结论是 RtΔABC 的面积等于两个弓月形面积之和，即区域 I 的面积等于区域 II 的面积。命题者对定理的结论进行操作，将 I 和 II 的面积关系替换为“在整个图形中随机取一点，此点取自 I 和 II 的概率 p_1 和 p_2 的大小关系”，形成一个新问题，故本题也属于目标式问题。

3.4 自由式问题

“自由式”问题在历年高考题中也时有出现，如 2012 年湖北理科卷根据历史上圆周率的不同分数近似值，编制了一道比较包括《九章算术》“开立圆术”在内的不同球体积近似公式的问题；2015 年湖北文理卷根据 16 世纪荷兰数学家舒腾（F. van Schooten, 1615-1660）的椭圆规编制的解析几何问题。2018 年北京卷根据明代学者朱载堉（1532-1611）的“十二平均律”编制了一道等比数列问题：

> “十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展作出重要的贡献。十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它前一个单音的频率之比都等于 $\sqrt[12]{2}$。
>
> 若第一个单音的频率为 f，则第八个单音的频率为

A. $\sqrt[3]{2}f$；　　B. $\sqrt[3]{2^2}f$；　　C. $\sqrt[12]{2^5}f$；　　D. $\sqrt[12]{2^7}f$

由于“十二平均律”属于音乐理论，属于表 1 中“不含条件和目标”的史料，由此提出的问题归为“自由式”。

当然，有些高考题虽然贴上了数学史的“标签”，但并不属于“基于数学史料的数学问题”。如 2019 年浙江数学卷先介绍了祖暅原理——“缘幂势既同，则积不容异”，然后编制了一道已

知柱体的三视图，求柱体体积的问题。该问题本质上与祖暅原理并无多大关联。

4 基于数学史的数学问题举例

为了进一步说明“基于数学史的问题提出策略”的分类框架的可行性，我们再举两个例子。

4.1 奇数与立方数的关系

公元 1 世纪，古希腊数学家尼可麦丘（Nicomachus）在《算术引论》（图 6）中给出奇数与立方数之间存在如下关系[12]：

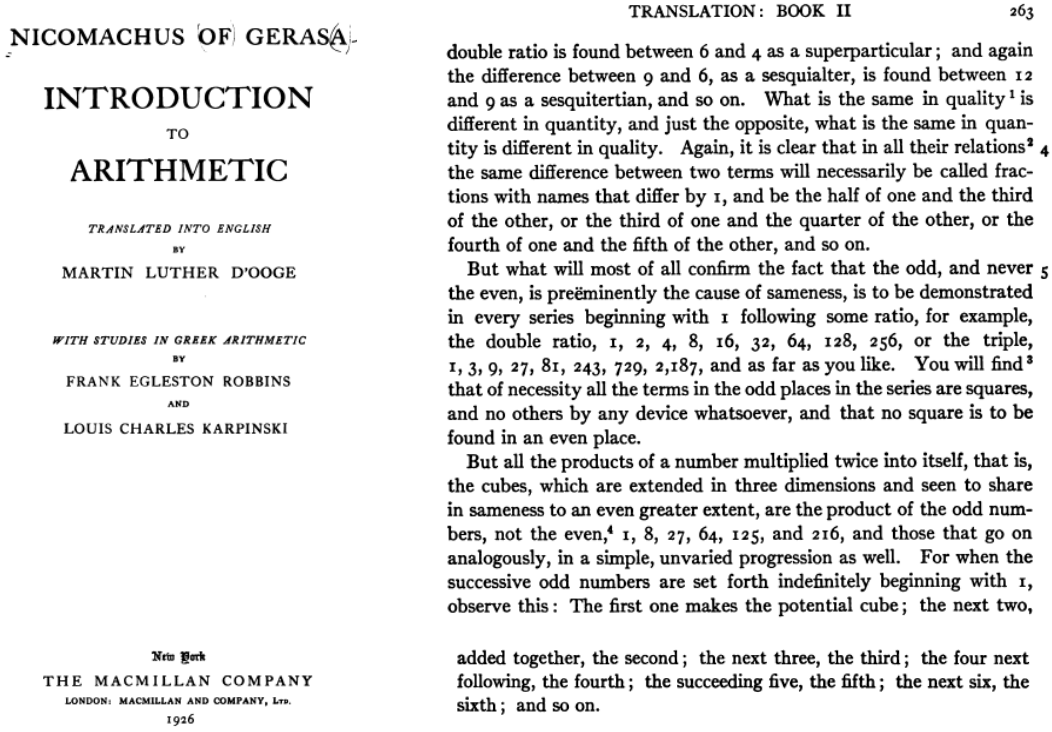
$$1=1^3,$$

$$3+5=2^3,$$

$$7+9+11=3^3,$$

$$13+15+17+19=4^3$$

……



NICOMACHUS OF GERASA

INTRODUCTION TO ARITHMETIC

TRANSLATED INTO ENGLISH BY MARTIN LUTHER D'OOGE

WITH STUDIES IN GREEK ARITHMETIC BY FRANK EGLESTON ROBBINS AND LOUIS CHARLES KARPINSKI

New York THE MACMILLAN COMPANY LONDON: MACMILLAN AND COMPANY, Ltd. 1926

TRANSLATION: BOOK II 263

double ratio is found between 6 and 4 as a superparticular; and again the difference between 9 and 6, as a sesquialter, is found between 12 and 9 as a sesquitertian, and so on. What is the same in quality[1] is different in quantity, and just the opposite, what is the same in quantity is different in quality. Again, it is clear that in all their relations[2] 4 the same difference between two terms will necessarily be called fractions with names that differ by 1, and be the half of one and the third of the other, or the third of one and the quarter of the other, or the fourth of one and the fifth of the other, and so on.

But what will most of all confirm the fact that the odd, and never 5 the even, is preëminently the cause of sameness, is to be demonstrated in every series beginning with 1 following some ratio, for example, the double ratio, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, or the triple, 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2,187, and as far as you like. You will find[3] that of necessity all the terms in the odd places in the series are squares, and no others by any device whatsoever, and that no square is to be found in an even place.

But all the products of a number multiplied twice into itself, that is, the cubes, which are extended in three dimensions and seen to share in sameness to an even greater extent, are the product of the odd numbers, not the even,[4] 1, 8, 27, 64, 125, and 216, and those that go on analogously, in a simple, unvaried progression as well. For when the successive odd numbers are set forth indefinitely beginning with 1, observe this: The first one makes the potential cube; the next two, added together, the second; the next three, the third; the four next following, the fourth; the succeeding five, the fifth; the next six, the sixth; and so on.

图 6 尼可麦丘《算术引论》英译版书影

在尼可麦丘所生活的时代，人们并不会用字母表示数，因此，我们无法苛求他给出奇数与立方数的一般关系式。上述规律为三次幂和公式的发现开辟了道路，我们有理由相信，尼可麦

丘已知道三次幂和的规律，因为同时代的罗马土地测量员据说都知道这个规律。事实上，根据尼可麦丘的上述规律，我们有

$1^3=1=1^2$（1 个奇数），

$1^3+2^3=1+3+5=(1+2)^2$（1+2 个奇数之和），

$1^3+2^3+3^3=1+3+\cdots+11=(1+2+3)^2$（1+2+3 个奇数之和），

$1^3+2^3+3^3+4^3=1+3+\cdots+19=(1+2+3+4)^2$（1+2+3+4 个奇数之和），

……

尼可麦丘写不出一般的等式，而有了字母表示任意数的思想，我们可以写出一般关系式，并找出更多的规律。据此，我们可以编制一系列问题。把正奇数数列$\{2n-1\}$中的数按上小下大、左小右大的原则排成如下三角形数表：

1

3　5

7　9　11

13　15　17　19

21　23　25　27　29

……

设a_{nm}（$n,m\in N^*$）是位于该三角形数表中从上往下数第 n 行、从左往右数第 m 个数。

（1）用 n 和 m 表示a_{nm}；

（2）已知$a_{nm}=2021$，求 n 和 m 的值；

（3）设$a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}=b_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和S_n；

（4）设$c_n=b_{n+1}-b_n$，利用数列$\{c_n\}$的前 n 项之和，求二次幂和$1^2+2^2+\cdots+n^2$；

（5）求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}}{b_{n+1}}$和$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}}{b_{n+1}}$；

（6）已知函数 $f\left(x\right)$ 的反函数为 $f^{-1}\left(x\right)=8^n x^3\left(x>0,n\in N^*\right)$，求数列 $\left\{f\left(b_n\right)\right\}$ 的前 n 项和 T_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$；

（7）证明：当 $n>1$ 时，$\dfrac{f\left(b_1\right)}{a_{11}+1}+\dfrac{f\left(b_2\right)}{a_{22}+1}+\cdots+\dfrac{f\left(b_n\right)}{a_{nn}+1}>\dfrac{1}{4}$。

以上问题都是以尼可麦丘所发现的奇数与立方数之间关系为出发点，并问题的条件和目标都是新设的，因而均属于“自由式”问题。

问题（4）和（6）的背后还蕴含了更多的数学史元素。（4）中的累加法，正是 17 世纪法国数学家帕斯卡（B. Pascal, 1623-1662）推导幂和公式的方法，由等式

$$\left(r+1\right)^{p+1}-r^p=C_{p+1}^1r^p+C_{p+1}^2r^{p-1}+\cdots+C_{p+1}^pr+1$$

分别取 $r=1$，2，…，n，将 n 个等式两边分别累加，即可有 $p-1$ 次以及更低次的幂和公式推导出 p 次幂和公式[13]。

（6）中的 $f\left(b_n\right)=\dfrac{n}{2^n}$，所求的 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$ 正是 14 世纪法国数学家奥雷姆（N. Oresme, 1323-1382）用几何方法（图 7）解决过的无穷级数问题，奥雷姆的结果是

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2$$

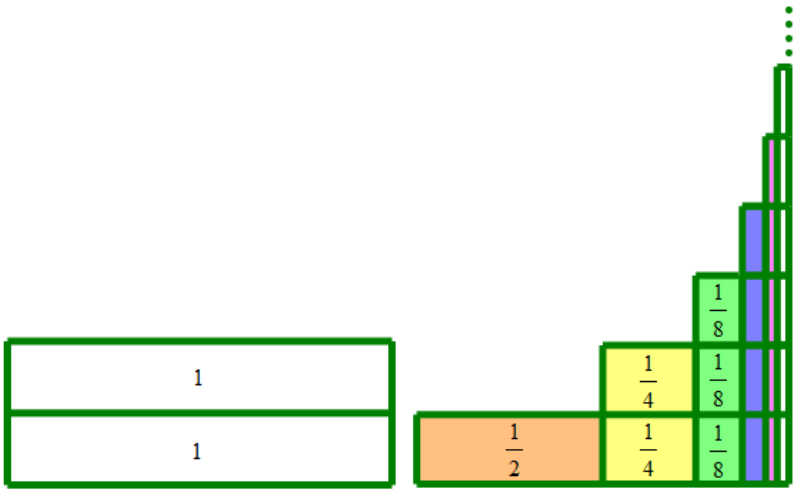


图 7 奥雷姆的面积变换方法

从上例可见，从古代数学史料出发可以提出有若干问题组成的问题串，而其中的某些问题本身也可能是历史上别的数学家曾经解决过的问题，因次，如果以别的史料为参照，这些问题可能又会成为“复制式”或“条件式”问题了。

4.2 抛物弓形的面积

古希腊数学家阿基米德在其《抛物弓形求积》中解决了抛物弓形的面积问题。如图 8 所示，设 AB 是抛物线的一条弦，阿基米德证明[14]：

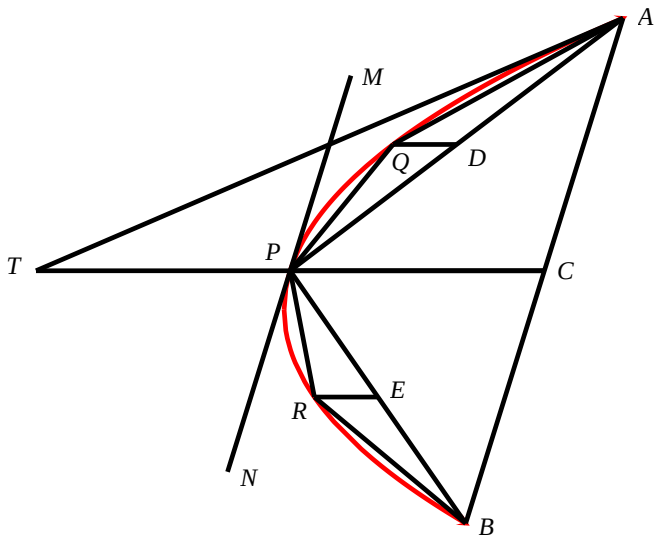


图 8 抛物弓形的性质

命题 1：过抛物线上任意一点 P 作抛物线对称轴的平行线，交 AB 与 C，若 AB 平行于抛物线在点 P 处的切线 MN，则 $AC=BC$；反之，若 $AC=BC$，则 AB 平行于抛物线在点 P 处的切线 MN。

命题 2：P 为抛物线上任意一点，直线 AB 与抛物线在 P 处的切线 MN 平行，交抛物线于点 A 和 B，过 P 作抛物线对称轴的平行线，交 AB 于点 C，交抛物线在点 A 处的切线于点 T，则 $PT=PC$。

命题 3：过 AB 的中点 C 作抛物线对称轴的平行线，交抛物线于点 P，则 P 为抛物弓形的顶点。

命题 4：设 P 是抛物弓形 ABP 的顶点，Q 和 R 分别是 AP 和 BP 所截的小抛物弓形的顶点，则 $S_{\Delta APQ}=S_{\Delta BPR}=\frac{1}{8}S_{\Delta ABP}$。

命题 5：设 P 是抛物弓形的顶点，则抛物弓形 ABP 的面积等于 $\frac{4}{3}S_{\Delta ABP}$。

由于只有纯几何的方法，加上没有极限概念，命题 5 的证明并非易事，需要用到穷竭法。而我们今天有了解析几何这一重要工具，再加上极限工具，可以根据阿基米德上述命题编制一组新的解析几何问题。

如图 9，直线 l：$y=kx+b$ 与抛物线 $x^2=2py$（$p>0$）相交于不同的两点 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$。$M\left(x_0,y_0\right)$ 是抛物线上任意一点，过 M 作 y 轴的平行线，交 AB 于 C。

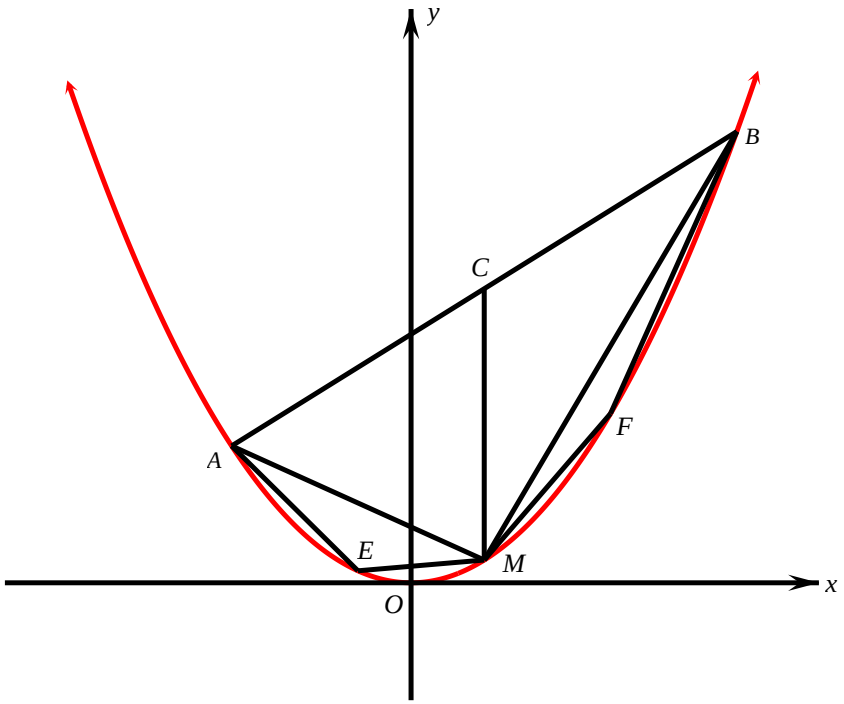


图 9 基于数学史的抛物线问题

（1）求抛物线平行弦的中点轨迹；

（2）求抛物线在点 M 处的切线方程；

（3）证明：C 是 AB 中点的充要条件是抛物线在点 M 处的切线平行于 AB；

（4）证明：若 C 是 AB 的中点，且抛物线在点 A 处的切线与 CM 的延长线交于点 T，则 $CM=MT$；

（5）证明：若 C 是 AB 的中点，则 CM 是抛物弓形中所有与 y 轴平行的截线段中最长的线

段，即点 M 是抛物弓形的顶点。

（6）设 C 为 AB 的中点，$\left|x_2 - x_1\right| = d$，试用 d 来表示ΔABM 的面积。

（7）设 C 为 AB 的中点，联结 AM、BM，分别作与 AM、BM 平行的切线，切点分别为 E、F，证明：$S_{\Delta AME} = S_{\Delta BMF} = \frac{1}{8} S_{\Delta ABM}$。

（8）求抛物线弓形 ABM 的面积。

以上8个问题中，问题（3）、（4）、（5）、（7）和（8）分别对应于阿基米德的命题1-5，问题的目标没有变，但采用代数方程来表征抛物线和直线，问题的条件发生了改变，因此，这些问题都属于“条件式”问题。而问题（1）、（2）和（6）则属于“自由式”问题。

5 结 语

以上我们看到，根据“基于数学史料的问题提出策略”的分类，有关高考题大多采用了复制式、条件式、目标式和自由式四种，但很少采用情境式、对称式和链接式。根据“奇数与立方数之间的关系”和“抛物弓形的面积”两则史料所编制的一系列高中数学问题表明，由于古今数学表征、数学方法、数学工具的巨大差异，要编制适合于今日课堂教学或考试的数学问题，条件式和自由式往往是理想的选择。

基于数学史料的数学问题提出策略对于HPM视角下数学教学设计和数学文化试题的编制都有重要指导意义。但是，就像一个具有高超的烹饪技术但缺少好食材的厨师很难烧出一道好菜一样，一个掌握了问题提出策略却缺乏好素材的教师或命题者也无法编出一道好题。首先，一线教师和命题者需要针对高中数学课程中涉及的知识点开展更深入、系统的历史研究，丰富课程、教材和教学的数学问题资源；其次，教师专业发展指导者可将“基于数学史的问题提出”这一主题纳入在职教师的培训课程中，让一线教师更多地了解问题提出策略，学习如何对数学史料做出必要的裁剪和加工，形成合适的数学问题；再次，一线教师和命题者需要正确认识基于数学史料的问题的教育价值，不能仅仅满足于数学文化标签，而是要展示数学文化的精髓，充分发挥数学史的多元教育价值。

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[2] Silver, E. A. et al. Posing mathematical problems: an exploratory study [J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1996, 27(3): 293-309.

[3] Singer, F. M. et al. Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2013, 83: 1-7.

[5] 仓万林, 史嘉. 随风潜入“卷”, 润“题”细无声[J]. 数学通报, 2015, 54(6): 46-50.

[6] 史嘉. 2015 年“数学文化高考题”分类欣赏[J]. 数学通讯, 2015(12): 46-49.

[7] 孙庆括. 近十年高考数学文化命题的特征分析及启示[J]. 数学通报, 2017, 56(1): 49-54.

[8] 陈莎莎, 汪晓勤. 2007-2016 十年间基于数学史的高考试题分析[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017, (5): 26-33.

[9] 祁平等. 基于数学文化视角的命题研究[J]. 数学通报, 2018, 57(9): 19-24.

[10] 李隽易. 数学文化题编拟研究[J]. 数学通报, 2018, 57(9): 25-28.

[11] 李汝雁, 郭要红. 2018 年高考数学文化试题的评析与教学建议[J]. 数学通报, 2018, 57(9): 29-31.

[12] Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics* [M]. Cambridge: The University Press, 1921.

[13] 汪晓勤. 中学数学中的数学史[M]. 北京: 科学出版社, 2002

[14] Heath, T. L. *The Works of Archimedes*[M]. Cambridge: The University press, 1897.

历史研究

美英早期解析几何教科书中的双曲线方程 *

秦语真

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

近年来，随着 HPM 课例研究的不断开展和一系列课例的陆续发表，越来越多的数学教师开始关注 HPM 视角下的数学教学，但数学史材料的缺乏始终是新课例开发的障碍。圆锥曲线的历史与教学早在十年前就已受到关注[1]，椭圆定义的教学案例相继诞生[2][3]，相应地，对椭圆方程的历史也有研究[4]。之后，也有人对双曲线的历史与教学做过研究[5]，但很少涉及西方早期教科书。此外，HPM 视角下的双曲线教学案例也有待于进一步开发。

国内现行高中数学教科书大多采用双曲线的第一定义。人教 A 版和沪教版都采用“拉链法”引入第一定义，人教 B 版用两组同心圆来模拟双曲线的第一定义。人教 A 版和沪教版都采用“二次平方法”推导双曲线方程；人教 B 版则采用“分母有理化”的推导方法。各版教科书几乎都未涉及数学史。已有教学设计中，除了个别教师采用了“和差术”[6][7]外，很少见到数学史的元素。然而，历史是一座宝藏，翻开历史的画卷，双曲线方程的推导方法精彩纷呈，挖掘、总结和提炼这些方法，可以为今日教学提供有用的素材和思想养料。

为此，我们针对双曲线的定义与方程，对美英早期解析几何教科书进行考察，试图回答以下问题：关于双曲线，美英早期解析几何教科书给出了哪些定义？采用了哪些推导方程的方法？双曲线方程的历史对今日教学有何启示？

2 早期教科书的选取

我们选取 1830-1969 年间出版的 93 种美英早期解析几何教科书或含有解析几何内容的数学

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”（A8）系列论文。

教科书，对其中的双曲线引入方式、定义、方程推导方法进行考察。在 93 种教科书中，83 种出版于美国，10 种出版于英国，各种教科书的时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化，则将其看作不同的教科书。

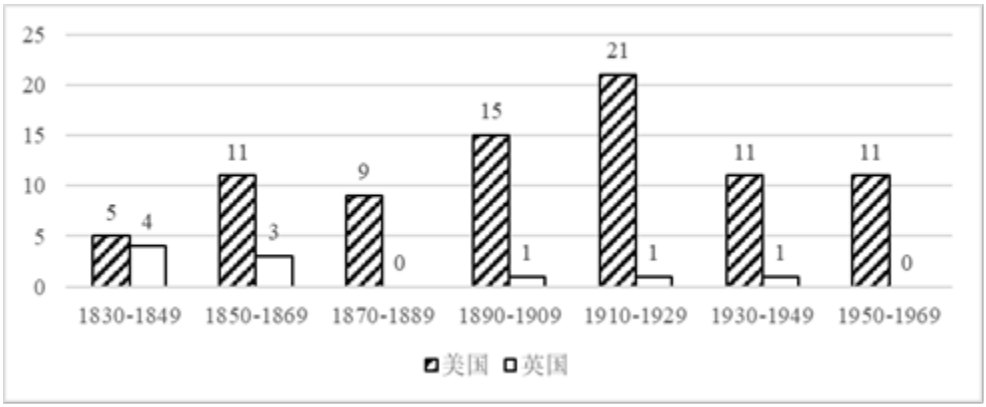


图 1 93 种解析几何教科书的时间分布

在所考察的教科书中，双曲线定义与方程所在章节大致可以分为“圆锥曲线”、“双曲线”、“解析几何”、“轨迹方程”、“椭圆与双曲线”和“二次方程”6 类，具体分布见表 1。

表 1 双曲线定义与方程在 93 种教科书中的章节分布

所在章节	圆锥曲线	双曲线	解析几何	轨迹方程	二次方程	椭圆与双曲线
教科书数量	34	35	6	4	6	8

3 双曲线的定义

93 种教科书中，有 11 种教科书采用了类比椭圆的方法引入双曲线，3 种通过追溯历史来引入双曲线：从梅内克缪斯发现圆锥曲线，到阿波罗尼奥斯系统研究圆锥曲线并撰写专著，古希腊数学家在圆锥曲线的研究上相继做出了重要贡献。其他教科书都采用直接引入的方式。

93 种解析几何教科书中，共出现双曲线的四种定义：

第一种是原始定义，即“平面截一圆锥面，当截面与圆锥面的母线不平行也不通过圆锥面顶点，且与圆锥面的两个圆锥都相交时，交线称为双曲线”；

第二种是第一定义，即“平面内，到两个定点的距离之差的绝对值为常数（小于这两个定点间的距离）的点的轨迹称为双曲线”；

第三种是第二定义，即“平面内，到给定一点及一定直线的距离之比为常数 e（e>1），的点的轨迹称为双曲线”；

第四种是基于方程的定义（作为补充说明出现），即“在平面直角坐标系中，二元二次方程 $F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 中，满足 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时[11]，其图像为双曲线；或 $F(x,y)=Ax^2+By^2+C=0$，$A\cdot B<0$。”[12]

4 种定义共出现 194 次，其中有 27 种教科书只给出 1 种定义，38 种教科书给出 2 种定义，21 种教科书给出了 3 种定义，7 种教科书给出了 4 种定义。图 2 给出了不同时期教科书中各种定义的分布情况。由图 2 可见，4 种定义出现在各个时期的教科书中，第一定义和今天一样最受青睐；而原始定义也受到部分教科书的关注，这与今天迥然不同。

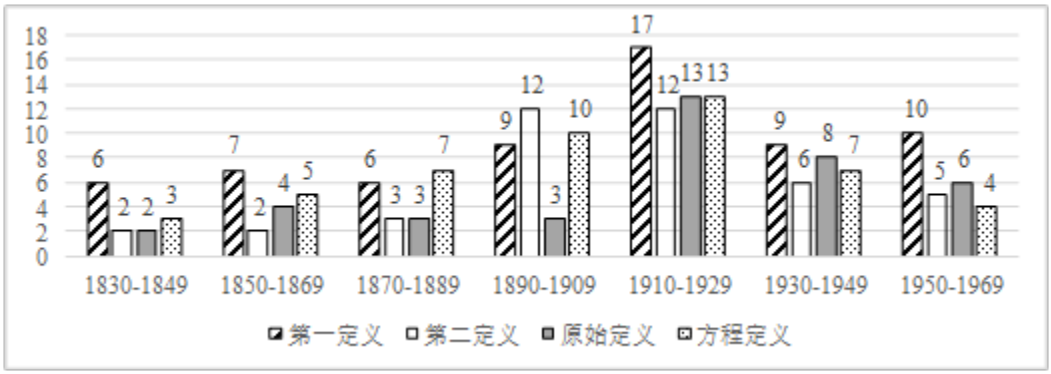


图 2 不同时间段教科书中各种定义的分布

4 双曲线方程的推导

4.1 基于第一定义的推导

4.1.1 两次平方法

在采用第一定义的种教科书中，有 37 种采用了二次平方法[13]：如图 3，实轴 $|AB|=2a$，焦距 $|F_1F_2|=2c$，$P(x,y)$ 是双曲线上任意一点。由 $|PF_1-PF_2|=2a$ 以及两点之间的距离公式得

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

通过移项、两次平方即得双曲线方程。

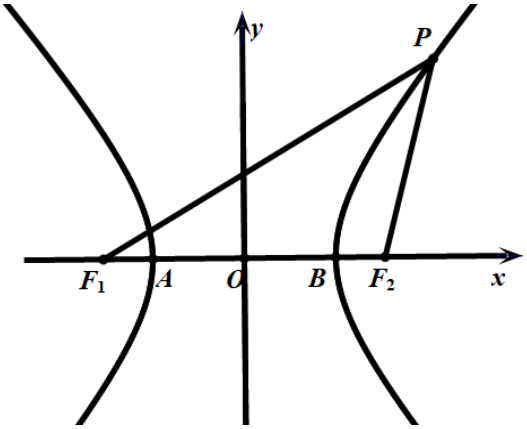


图 3 基于第一定义的双曲线方程推导

4.1.2 洛必达法

Whitlock（1848）采用了 17 世纪法国数学家洛必达（G. de L' Hospital, 1661-1704）的方法[14]，即“和差术”（图 4）。由第一定义可得$|PF_1|-|PF_2|=2a$，故设

$$|PF_1|=a+u,|PF_2|=a-u \tag{1}$$

其中 u 为待定参数。根据两点间距离公式可得：

$$|PF_1|^2=(a+u)^2=(x+c)^2+y^2 \tag{2}$$

$$|PF_2|^2=(a-u)^2=(x-c)^2+y^2 \tag{3}$$

（2）–（3）得$au=cx$，故得：

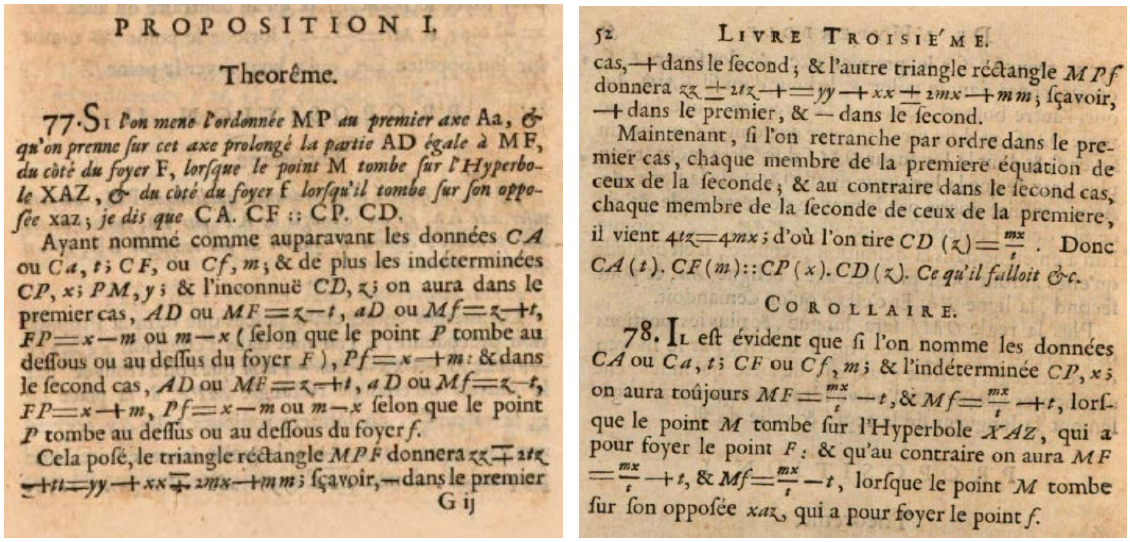
$$u=\frac{cx}{a} \tag{4}$$

（2）+（3）得：

$$a^2+u^2=y^2+c^2+x^2 \tag{5}$$

将（4）代入（5）中，并令$c^2-a^2=b^2$可得：

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2 \tag{6}$$



PROPOSITION I.

Theorême.

77. Si l'on mene l'ordonnée MP au premier axe Aa, & qu'on prenne sur cet axe prolongé la partie AD égale à MF, du côté du foyer F, lorsque le point M tombe sur l'Hyperbole XAZ, & du côté du foyer f lorsqu'il tombe sur son opposée xaz; je dis que CA. CF :: CP. CD.

Ayant nommé comme auparavant les données CA ou Ca, t; CF, ou Cf, m; & de plus les indéterminées CP, x; PM, y; & l'inconnuë CD, z; on aura dans le premier cas, AD ou $MF = z - t$, aD ou $Mf = z + t$, $FP = x - m$ ou $m - x$ (selon que le point P tombe au dessous ou au dessus du foyer F), $Pf = x + m$: & dans le second cas, AD ou $MF = z + t$, aD ou $Mf = z - t$, $FP = x + m$, $Pf = x - m$ ou $m - x$ selon que le point P tombe au dessus ou au dessous du foyer f.

Cela posé, le triangle rectangle MPF donnera $zz \mp 2tz + tt = yy + xx \mp 2mx + mm$; sçavoir, — dans le premier

cas, + dans le second; & l'autre triangle rectangle MPf donnera $zz \pm 2tz + = yy + xx \pm 2mx + mm$; sçavoir, + dans le premier, & — dans le second.

Maintenant, si l'on retranche par ordre dans le premier cas, chaque membre de la premiere équation de ceux de la seconde; & au contraire dans le second cas, chaque membre de la seconde de ceux de la premiere, il vient $4tz = 4mx$; d'où l'on tire $CD\,(z) = \frac{mx}{t}$. Donc $CA\,(t).\ CF\,(m) :: CP\,(x).\ CD\,(z)$. Ce qu'il falloit &c.

COROLLAIRE.

78. Il est évident que si l'on nomme les données CA ou Ca, t; CF ou Cf, m; & l'indéterminée CP, x; on aura toûjours $MF = \frac{mx}{t} - t$, & $Mf = \frac{mx}{t} + t$, lorsque le point M tombe sur l'Hyperbole XAZ, qui a pour foyer le point F: & qu'au contraire on aura $MF = \frac{mx}{t} + t$, & $Mf = \frac{mx}{t} - t$, lorsque le point M tombe sur son opposée xaz, qui a pour foyer le point f.

图 4　洛必达《圓锥曲线解析》(1707) 第 3 卷书影

4.1.3 平方差法

洛必达法引入参数 u，具有较强的技巧性，不易被初学者所理解。Young（1830）采用了更简洁的平方差法[15]。由

$$\left|PF_1\right| - \left|PF_2\right| = 2a \tag{7}$$

$$\left|PF_1\right|^2 = \left(x + c\right)^2 + y^2 \tag{8}$$

$$\left|PF_2\right|^2 = \left(x - c\right)^2 + y^2 \tag{9}$$

（8）–（9）得：

$$\left|PF_1\right|^2 - \left|PF_2\right|^2 = \left(\left|PF_1\right| + \left|PF_2\right|\right)\left(\left|PF_1\right| - \left|PF_2\right|\right) = 4cx \tag{10}$$

再由（7）得：

$$\left|PF_1\right| + \left|PF_2\right| = \frac{2cx}{a} \tag{11}$$

联立（7）和（11）可得：

$$\left|PF_1\right| = \frac{cx}{a} + a, \left|PF_2\right| = \frac{cx}{a} - a \tag{12}$$

（12）即双曲线的焦半径公式。将（12）代入（8）中，即得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

共有 14 种教科书采用了平方差法，相较于两次平方法，其计算的复杂性大大降低；相较于洛必达法，其运算技巧性没有那么强，较有利于初学者理解及计算。

4.1.4 利用余弦定理

有 2 种教科书利用余弦定理来推导双曲线方程，体现了知识的综合性。在图 3 中，设 $\angle PF_1F_2=\varphi$，$|PF_1|=r$，则由余弦定理可得[16]：

$$|PF_2|^2=r^2+4c^2-4cr\cos\varphi \tag{16}$$

再由第一定义得：

$$|PF_1|-|PF_2|=r-\sqrt{r^2+4c^2-4cr\cos\varphi}=2a \tag{17}$$

故得

$$\sqrt{r^2+4c^2-4cr\cos\varphi}=r-2a \tag{18}$$

又因

$$r\cos\varphi=c+x \tag{19}$$

联立（18）和（19），利用两点之间距离公式，可得（13）。

4.1.5 小结

图 5 呈现了上述四种方法在不同时期的分布情况。从图中可见，在 19 世纪的教科书中出现了四种推导方法，而 20 世纪教科书普遍采用“两次平方法”，方法的多元性不复存在。

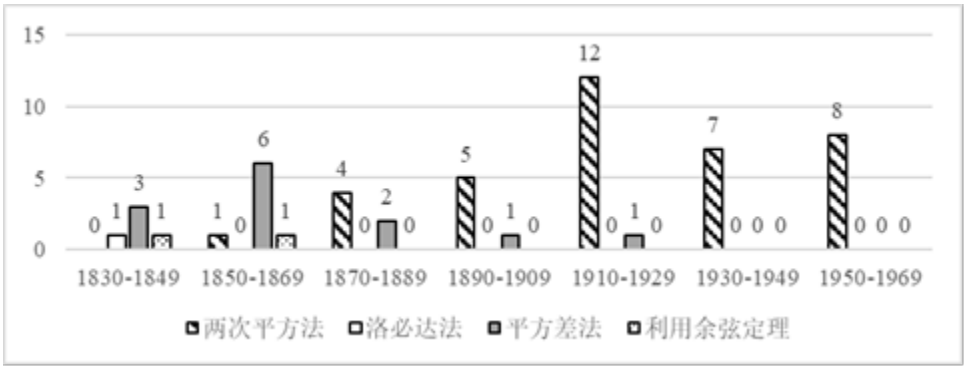


图 5 基于第一定义的双曲线方程推导方法在不同时期的分布

4.2 基于第二定义的推导

4.2.1 以准线为纵轴

在采用第二定义的教科书中，有 15 种以准线为轴来推导双曲线方程。如图 6，*CN* 为准

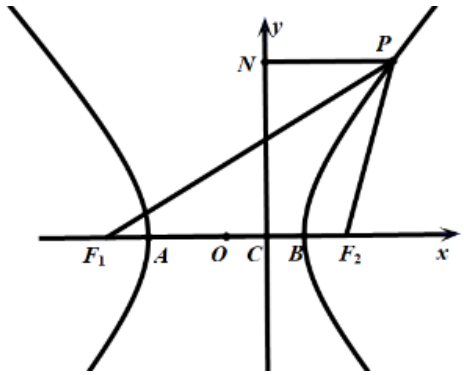


图 6 以准线为纵轴的方程推导

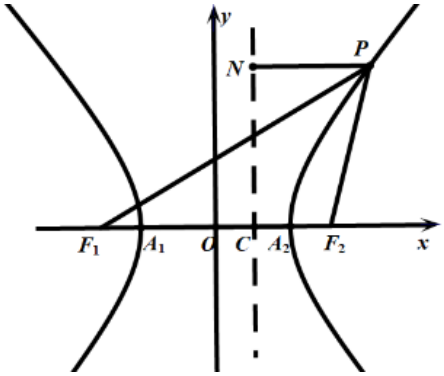


图 7 以中心为原点的方程推导

线，以 *CN* 为纵轴，点 $P(x,y)$ 是双曲线上任意一点，令 $|CF_2|=2p$，由第二定义可得

$$y^2+(x-2p)^2=e^2x^2 \tag{20}$$

又因

$$OC=\frac{1}{2}(CA-CB)=a=-\frac{2pe}{1-e^2} \tag{21}$$

$$OA=\frac{1}{2}(CA+CB)=\frac{2p}{1-e^2}=-\frac{a}{e} \tag{22}$$

令 $y=y',x=x'-\frac{a}{e}$，可得

$$y'^2+\left[x'-\frac{a}{e}+\frac{a}{e}(1-e^2)\right]^2=e^2\left(x'-\frac{a}{e}\right)^2 \tag{23}$$

化简，并令 $a^2(e^2-1)=b^2$，即得双曲线标准方程[17]。

4.2.2 以中心为原点

有 13 种教科书以中心为原点建立直角坐标系，来推导双曲线方程。与前两种做法相比，此法技巧性略强，但过程简单，计算量也大大减少[19]。如图 7，由第二定义可得：$|A_2F_2|=e|A_2C|$，$|A_1F_2|=e|A_1C|$，故得 $|OF_2|=ae$，$|OC|=\frac{a}{e}$。设 $P(x,y)$ 是双曲线上任意一点，由 $|PF_2|=e|PN|$

得：

$$\sqrt{\left(x-ae\right)^2+y^2}=e\left|x-\frac{a}{e}\right|$$

两边平方，并令$a^2\left(e^2-1\right)=b^2$，即得（13）。

4.2.3 坐标轴的平移

Smith（1904）根据第二定义推出双曲线的极坐标方程，再从极坐标方程入手，通过坐标轴的平移来推导双曲线的标准方程[18]。将极坐标方程$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$ 化成直角坐标方程得

$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0 \quad (24)$$

令$x=x'+h, y=y'+k$，得：

$$\left(1-e^2\right)x'^2+y'^2-x'\left[2\left(1-e^2\right)h-2e^2p\right]+2ky'+k^2+\left(1-e^2\right)h^2-2e^2ph-e^2p^2=0 \quad (25)$$

令一次项系数等于 0。可得

$$k=0, 2\left(1-e^2\right)h-2e^2p=0 \quad (26)$$

将$k=0, h=\frac{e^2p}{1-e^2}$，代入式（25）可得：

$$\left(1-e^2\right)x'^2+y'^2-\frac{e^2p^2}{1-e^2}=0 \quad (27)$$

令$a^2=\frac{e^2p^2}{\left(1-e^2\right)^2}, b^2=-\frac{e^2p^2}{1-e^2}$，代入（27），即得标准方程。

4.2.4 小结

图 8 呈现了上述四种方法在不同时期的分布情况。从图中可见，19 世纪教科书倾向于以准线为纵轴建立坐标系，到了 20 世纪，教科书更倾向于以原点为中心建立坐标系。

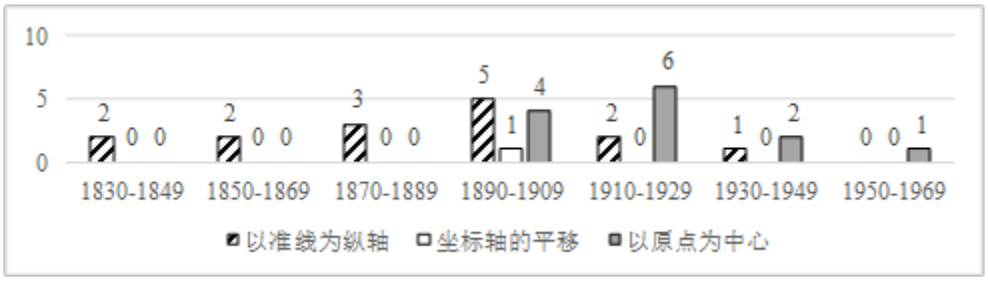


图 8 基于第二定义的双曲线方程推导方法在不同时期的分布

4.3 基于原始定义的推导

4.3.1 旦德林双球模型

有 2 种教科书采用了旦德林双球模型。Fehr（1951）认为，将立体几何和圆锥曲线结合起来，有助于巩固立体几何知识[20]。如图 9，一对对顶圆锥中各有一球与圆锥内表面相切，现用一不平行于母线且不经过顶点的平面去截圆锥，且平面与两球分别相切于点 F 和 F'，则截线为双曲线。直线 PT 分别与两球面相切于点 R 和 T，则有 $PF=PR$，$PF'=PT$，$PF'-PF=PT-PR=RT$，RT 为 R、T 所在圆面之间的母线长，是个定值。因此，双曲线上任意一点到两个定点距离之差为常值[21]。根据这一性质，用解析方法可推导出双曲线的方程。

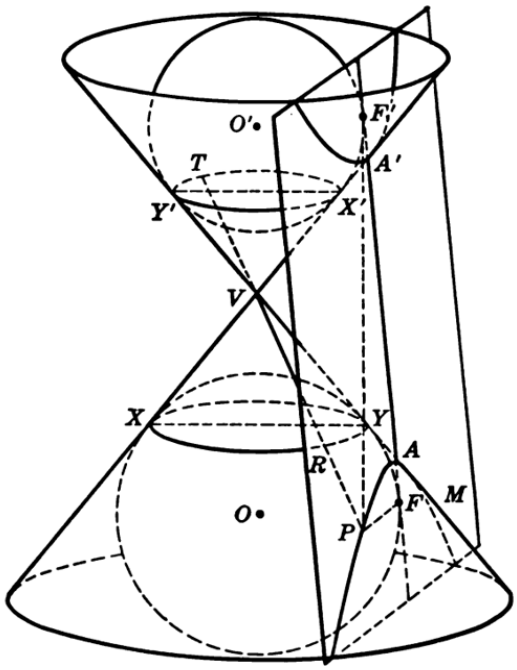


图 9 旦德林双球模型

4.3.2 阿波罗尼奥斯的方法

有 2 种教科书采用了阿波罗尼奥斯的方法[21]。为便于理解，我们将阿波罗尼奥斯的斜圆锥改为正圆锥。如图 10，圆锥 VAB 被不经过顶点 V 的平面所截，截线为一条双曲线。D 和 E 为双曲线的顶点，O 为双曲线的中心，平面与圆锥的对称轴交于点 C。设 P 为双曲线上任意一点，过 P 作底面的平行平面，截圆锥得圆，分别交母线 VA 和 VB 于 M 和 N。过 P 作双曲线对称轴 DF 的垂线，垂足为 Q，易知 $PQ \perp MN$，故知 $PQ^2 = MQ \times QN$，又因 $\Delta EMQ \sim \Delta EAC$，$\Delta DQN \sim \Delta DCB$，故 $\frac{MQ}{AC} = \frac{EQ}{EC}$，$\frac{QN}{CB} = \frac{DQ}{DC}$。于是

$$PQ^2 = \frac{AC \times CB}{EC \times DC} \times EQ \times DQ = \left(\frac{AC^2}{EC \times DC} \right) \times EQ \times DQ \qquad (28)$$

令 $DE = 2a$，$OQ = x$，$PQ = y$，$\frac{AC^2}{EC \times DC} = k$，则得双曲线方程为 $y^2 = k\left(x^2 - a^2\right)$。

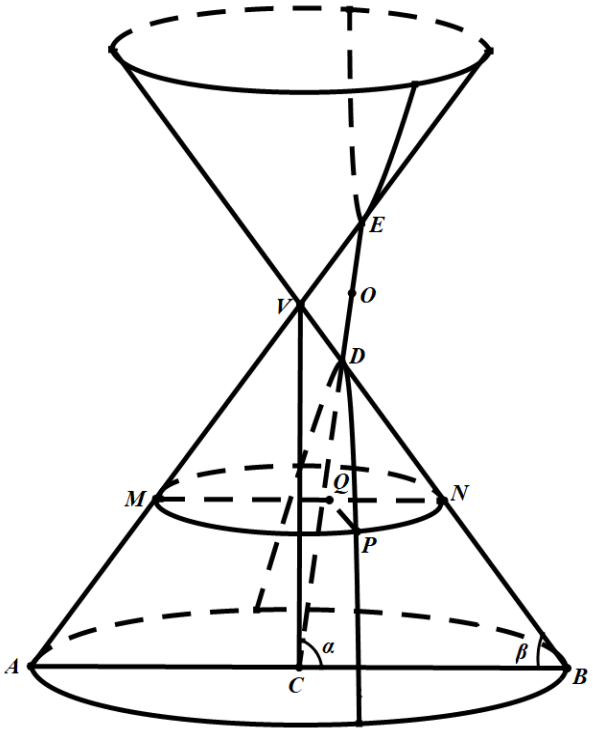


图 10 阿波罗尼奥斯的方法

由（28）可知，$\frac{PQ^2}{EQ \times DQ}$ 为常值，即双曲线上任意一点向双曲线对称轴引垂线，则垂线段

的平方与垂足到双曲线两顶点距离乘积之比为常数。Coffin（1859）直接利用双曲线的上述几何性质来推导方程[22]。设双曲线的实半轴和虚半轴分别为 a 和 b，则可证明：当垂足恰为双曲线焦点时，所说的比值为$\frac{b^2}{a^2}$。故得$\frac{y^2}{x^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2}$，整理得（13）。

4.3.3 三角法

有 4 种教科书利用空间解析几何知识，借助三角函数来推导双曲线的方程[23]，为便于理解，我们对其进行改进。仍如图 10，设圆锥的母线与底面所成角为β，平面与底面构成的二面角大小为α（$\alpha>\beta$），$VC=h$，则 $AC=h\cot\beta$。在ΔEAC 和ΔDCB 中，分别利用正弦定理得

$EC=\frac{h\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$，$DC=\frac{h\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$，于是

$$DE=\frac{2h\cos\alpha\cos\beta\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$$

将 $EQ=x+\frac{1}{2}DE$，$DQ=x-\frac{1}{2}DE$ 代入（28），整理得

$$x^2\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta)-y^2\sin^2\beta\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=h^2\cos^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta$$

令 $a^2=\frac{h^2\cos^2\alpha\cos^2\beta\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)\sin^2(\alpha-\beta)}$，$b^2=\frac{c^2\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$，即得（13）。

5 结 语

以上我们看到，美英早期解析几何给出了双曲线的四种定义，从第一定义、第二定义和原始定义出发，又采用了丰富多彩的推导方程的方法，涉及代数、几何、三角等多领域的知识。在近一个半世纪里，随着时间的推移，推导方程的方法趋于单一，洛必达法、平方差法、余弦定理法等逐渐被人们所淡忘。

在学生具备立体几何知识基础的情况下，教师为了揭示圆锥曲线之源，可以在教学中采用旦德林双球模型（为降低难度，可制作该模型的教具），推导出双曲线的焦半径性质，再将双曲线定义为满足该性质的动点轨迹。这样，就将原始定义和第一定义统一起来，从而构建知识之谐。旦德林双球模型的使用，有助于培养学生的直观想象素养和逻辑推理素养，从而实现能力

之助。为了推导双曲线的标准方程，教师可以采用“洛必达法”、“平方差法”或“余弦定理法”，以彰显方法之美。当然，在以后的复习课中，还可以采用更多的方法。教师在课堂上呈现双曲线的定义和方程的历史、不同时空数学家在双曲线定义和方程上的贡献，在展示数学文化之魅的同时，也可以让学生体会数学中所蕴含的理性精神，并树立动态的数学观，从而达成德育之效。

参考文献

[1] 邹佳晨. 椭圆的历史与教学[M]. 华东师范大学硕士学位论文, 2010.

[2] 汪晓勤, 王苗, 邹佳晨. HPM 视角下的数学教学: 以椭圆为例[J]. 数学教育学报, 2011, 20(5): 20-23.

[3] 陈锋, 王芳. 基于旦德林双球模型的椭圆定义教学[J]. 数学教学, 2012(4): 5-8.

[4] 汪晓勤. 椭圆方程之旅[J]. 数学通报, 2013, 52(4): 54-58.

[5] 程琛. 双曲线的发生教学研究[M]. 华中师范大学硕士学位论文, 2014.

[6] 朱惊涛, 何小亚, 赵家良.《双曲线及其标准方程》教学新设计[J]. 中学数学研究, 2019(8): 21-22+50.

[7] 姜相宇, 张维忠. 利用支架式教学发展学生的数学抽象素养——以“双曲线定义与标准方程”的教学为例[J]. 中学数学月刊, 2019(2): 32-34+54.

[8] Young, J. W. A. *Plane and solid analytic geometry* [M]. New York: Macmillan, 1921: 124-12.

[9] Young, J. R. *The Elements of Analytical Geometry* [M]. Philadelphia, Carey, Lear & Blanchard, 1835: 95-100.

[10] Wentworth, G. A. *Elements of analytic geometry*[M]. Boston, Ginn & company, 1891：87-91.

[11] Davies, C. *Mathematical Dictionary and Cyclopedia of Mathematical Science* [M]. New York: A. S. Barnes & Co., 1856: 293-297.

[12] Runkle, J. D. *Elements of Plane Analytic Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1888: 178-185.

[13] Newcomb, S. *Elements of Analytic Geometry* [M]. New York: H. Holt & Company, 1884: 167-169.

[14] Whitlock, G. C. *Elements of Geometry, Theoretical and Practical* [M]. New York: Pratt, Woodford,

1848. 121-122.

[16] Peirce, B. *An elementary Treatise on Curves, Functions, and Forces* [M]. Boston: J. Munroe, 1846: 65-67.

[17] Johnson, W. S. *An Elementary Treatise on Analytical Geometry* [M]. Philadelphia: J. B. Lippincott & Co., 1869: 162-163.

[18] Smith, P. F. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1904: 174-182.

[19] Fine, H. B. *Coordinate Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1909:100-105.

[20] Fehr, H. F. *Secondary Mathematics; a Functional Approach for Teachers* [M]. Boston: Heath 1951: 110-119.

[21] Smith, E. S. *Analytic Geometry*[M]. New York Wiley, 1954: 52-55; 96-102.

[22] Coffin, J. H. *Elements of Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Collins & Brother, 1859: 100-102.

[23] Smith, F. H. *An Elementary Treatise on Analytical Geometry*[M]. New York: Wiley and Putnam, 1840: 72-75; 132-139.

垂径定理的历史*

王娟

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

近年来，HPM 专业学习共同体相继开发了一系列初中数学课例，如三角形内角和定理、邻补角与对顶角、等腰三角形的性质、三角形中位线、演绎证明等，这些课例由于其蕴含的多元教育价值而受到初中一线教师的喜爱，越来越多的教师对 HPM 产生了浓厚的兴趣。他们希望学习和借鉴更多的 HPM 课例，以改善自己的课堂教学，并促进自己的专业发展。但是，由于缺乏教育取向的数学史研究，初中数学课程中很多知识点背后的历史对教师来说都是盲点。缺乏历史知识和历史素材，“将数学史融入数学教学”就成了一句空话。

垂径定理是中学平面几何的重要定理，该定理及其推论是证明线段相等、角相等、垂直关系的重要依据，同时也为圆的有关计算和作图提供了方法和依据。国内五种现行教科书（人教版、苏科版、沪教版、北师大版、浙教版）先通过翻折圆形纸片或寻找几何图形等量关系来引入垂径定理，再给出定理的内容，然后对定理进行证明，最后给出与定理有关的练习题。已有的教学设计大多关注垂径定理的证明和应用。除了个别版本将中国古代数学问题编入习题外，教科书和已有的教学设计都很少涉及该定理的历史。

那么，垂径定理经历了怎样的历史发展过程？有关数学文献是如何呈现该定理的？有哪些理想的教学素材？对今日教学有何思想启迪？为了开展数学史融入垂径定理教学的课例研究，我们需要对上述问题作出回答。

2 垂径定理的历史

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中落实立德树人的研究”（A8）系列论文之一。

2.1 古巴比伦

两河流域的先民们很早就知道垂径定理的结论了。在当时的美索不达米亚地区，人们已经认识到一些重要的几何关系，如等腰三角形的高平分它的底。因此，在一个已知半径的圆中，给出弦长，就能求出边心距[1]。他们虽未明确提出垂径定理的具体内容，但在古巴比伦时期（公元前 1800 年-公元前 1600 年）数学泥版所呈现的数学问题中，我们可以窥见垂径定理的相关应用。

大英博物馆所藏数学泥版 BM85194 上载有这样的问题：“已知圆周长为 60，弓形高为 2，问弦长为多少？”[2]如图 1 所示，圆直径为 c，弓形高为 d，弦长为 a，古巴比伦人认为圆周是直径的 3 倍，故 c=20，泥版给出计算公式为弦长 $a=\sqrt{c^2-b^2}$ =12，其中 $b=c-2d$ =16。显然，古巴比伦人已掌握圆的轴对称性质，并且知道“过平行弦中点的直线过圆心且垂直于该组平行弦”这一结论，故根据勾股定理可以求出弦长 a。泥版 BM85194 中另载有类似的问题：“已知圆周长为 60，弦长为 12，问弓形高为多少？”[2]

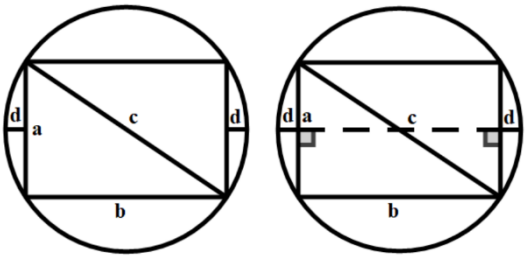


图 1 泥版 BM 85194 上的问题

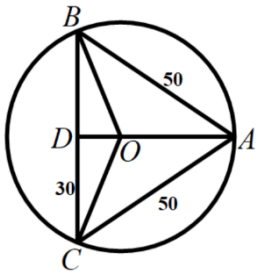


图 2 泥版 TMS 1 上的问题

此外，古巴比伦时期数学泥版 TMS 1 载有如下问题：“已知三角形三边分别为 50、50 和 60，求外接圆直径。”[3]如图 2 所示，设三角形顶点为 A、B、C，过点 A 做高线 AD，外心 O 在 AD 上。泥版上的解法相当于：由垂径定理可知，$CD=\frac{1}{2}CB=30$，由勾股定理知 $AD^2=AC^2-CD^2$，故求得 AD=40，然后，在 $Rt\triangle OCD$ 中，再次利用勾股定理解得 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 OC 为 $\frac{125}{4}$。

2.2 古希腊

公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得在《几何原本》第三卷给出如下命题：“如果在一

个圆中，一条经过圆心的直线二等分一条不经过圆心的弦，则它们成直角；而且如果它们成直角，则这直线二等分这一条弦。”[4]命题的后半部分就是我们今天所说的垂径定理的一部分，前半部分在今天的教材中是作为垂径定理推论呈现的，它是垂径定理的逆命题。该命题与今天教材中的表述略有不同，由“垂直”得到“平分”时，未提及垂直于弦的直径平分弦所对的两条弧。

欧几里得先证由“平分”到“垂直”：如图 3，已知直径 CD 等分不过圆心的弦 AB，在△AEF 和△BEF 中，$EA=EB$，EF 为公共边，弦 AB 被点 F 平分，即 $FA=FB$，由《几何原本》卷一命题 8（SSS 定理）可知，$\angle AFE=\angle BFE$，进一步，根据卷一定义 10（当两条直线相交所形成的邻角彼此相等时，两直线垂直）可知 $CD\perp AB$[4]。

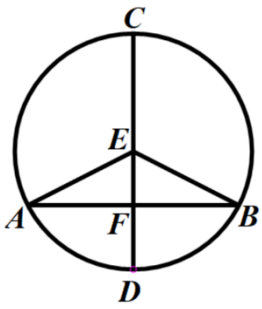


图 3 《几何原本》中的垂径定理

再证由“垂直”到“平分”：已知 $CD\perp AB$，在△AEF 和△BEF 中，$EA=EB$，根据卷一命题 5（等腰三角形两底角相等）可得$\angle EAF=\angle EBF$，又因为$\angle AFE$ 和$\angle BFE$ 均为直角，EF 为公共边，根据卷一命题 26（AAS 定理）可知 $AF=BF$[4]。

欧几里得的证明严谨且简单，他分别运用 SSS 定理和 AAS 定理证明两个三角形全等得到相应的垂直、平分关系，这种证明方法现在也被国内大部分的中学教材所采用。

2.3 中国

2.3.1 《九章算术》

中国汉代数学典籍《九章算术》勾股章所载的“圆材埋壁”问题涉及垂径定理的相关知识，原文为“今有圆材埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何？答曰：材径二尺六寸。术曰：半锯道自乘，如深寸而一，以深寸增之，即材径。”[5]

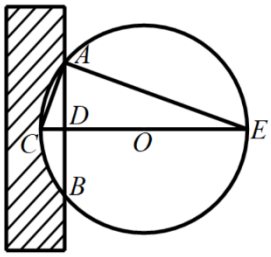


图 4 “圆材埋壁”问题

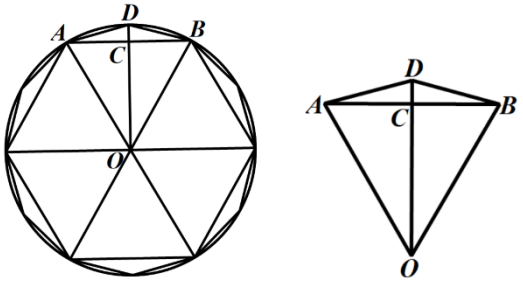


图 5 刘徽的“割圆术”

如图 4 所示，弦 AB 为锯道长，弓形 ACB 的高 CD 为锯深，欲求直径 CE 的长。《九章算术》给出的解法是 $CE=\dfrac{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}{CD}+CD$，还原其步骤可知 $DE=\dfrac{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2}{CD}$。因 $AB\perp CE$，由射影定理得 $\dfrac{AD^2}{CD}=DE$，故有 $\dfrac{1}{2}AB=AD$。可见，汉代数学家已熟悉垂径定理的结论了。

2.3.2 刘徽的割圆术

三国时期的数学家刘徽在为《九章算术》方田章“圆田术”注中，提出了“割圆术”作为计算圆周长、面积、圆周率的基础。割圆术的要旨是用圆内接正多边形去逐步逼近圆，而在“割圆”的过程中隐含着垂径定理的内容。

如图 5，设圆 O 的半径为 R，圆内接正 n 边形的边长、面积分别为 a_n、S_n，圆内接正 $2n$ 边形的边长、面积分别为 a_{2n}、S_{2n}。已知 a_n，刘徽用以下公式求出 a_{2n} 和 S_{2n}：

$$a_{2n}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}a_n\right)^2+\left(R-\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}a_n\right)^2}\right)^2},$$

$$S_{2n}=\frac{1}{2}na_nR。$$

这样，从 n=6 开始，刘徽依次计算边数倍增的圆内接正多边形的边长和面积[6]。上述两个公式都建立在垂径定理的基础之上，可见，刘徽对于该定理的结论是了然于心的。

2.4 古印度

公元 6 世纪，古印度数学家阿耶波多（Aryabhata, 476-550）在其《天文历算书》中给出圆的弦、矢与直径三个量之间的关系[7]。如图 6，圆 O 内有直径 $CD=d$、弦 $AB=a$，矢 $CE=s$，阿耶波多的结果是

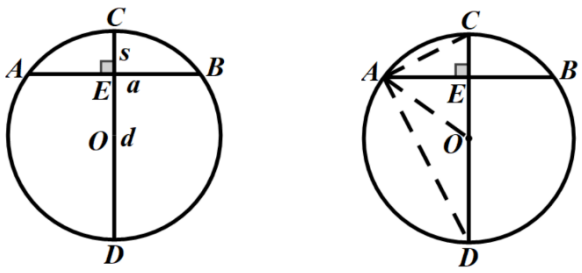


图 6 弦、矢、直径之间的关系

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s(d-s) \tag{1}$$

12 世纪，婆什迦罗（Bhaskara, 1114-1193）在《莉拉沃蒂》中在阿耶波多的基础上进一步给出了“矢弦法则”：“取弦直径和与差之积的平方根，从直径中减之，折半，则为矢也。直径减去矢，乘以矢，取平方根，二倍之，则为弦也。半弦之平方除以矢，加矢则为直径之大小也。往昔之师关于圆之法如是说。”[8]

婆什迦罗所说的“往昔之师”就是阿耶波多。如图 6，根据垂径定理，当 $CD \perp AB$ 时，$EA = EB$。联结 AD、OA、AC，在 Rt△ACD 中，由射影定理易得阿耶波多的关系式（1），即

$$a = 2\sqrt{s(d-s)},$$

又由（1）可得

$$d = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{s} + s,$$

在 Rt△OAE 中，由勾股定理易得，

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} - s\right)^2$$

故得：

$$s = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{(d+a)(d-a)}\right)。$$

2.5 近代欧洲

17 世纪，法国数学家巴蒂（I. G. Pardies, 1636-1673）在其《几何基础》（图 7）中将垂径定理表述成“弦 bc 被经过圆心 a 的垂线 ad 所平分”。在证明定理之后，巴蒂补充了结论“弧 bc

也被平分”[9]。巴蒂的《几何基础》由法国来华天主教传教士译成满文和汉文，汉文后被收入康熙皇帝主编的《数理精蕴》（图 8）中。因此，作为一个几何定理，垂径定理在清初传入中国。

ELEMENS
DE
GEOMETRIE,
OÙ
PAR UNE METHODE COURTE & aisée l'on peut apprendre ce qu'il faut sçavoir d'Euclide, d'Archimede, d'Apollonius, & les plus belles inventions des anciens & des nouveaux Geometres.
Par le P. IGNACE GASTON PARDIES, de la Compagnie de JESUS.
SECONDE EDITION, reveuë & corrigée.
A PARIS,
Chez SEBASTIEN MABRE-CRAMOISY, Imprimeur du Roy, ruë S. Jacques, aux Cicognes.
M. DC. LXXIII.
Avec Privilege de Sa Majesté.

34 ELEMENS
également par vne perpendiculaire *a d*, tirée du centre *a*: car le triangle *a b c* eſt iſoſcele, puiſque *a b* eſt égal à *a c*: (1. 14) donc la perpendiculaire *a d* coupe la baſe *b c* en deux également. (2. 16.) L'arc *b c* eſt auſſi diviſé également.
7. Si deux lignes *d b* & *d c* touchent vn cercle, elles ſeront égales. Car imaginant du centre vers les points d'attouchement deux lignes *a b* & *a c*, celles-ci ſeront perpendiculaires aux touchantes. (4. 5.) De plus, ſi on imagine la ligne *b c*, l'angle *a b c* ſera égal à l'angle *a c b*: (2 15.) donc ſi de choſes égales, c'eſt-à-dire, des angles droits *a b d* & *a c d*, on oſte les choſes égales, c'eſt à dire, l'angle *a b c*, d'vne part, & de l'autre l'angle *a c b*, les angles qui reſteront ſeront égaux, c'eſt à dire, *c b d* ſera égal à *b c d*, & par conſequent le coſté *d b* ſera égal au coſté *d c*. (2. 15.)
8. Deux cordes égales *b c*, *e f*, font deux ſegmens *b d c* & *e g f* égaux, & les perpendiculaires *a o* & *a n* ſeront égales. Ceci eſt facile à prouver.

图 7 巴蒂《几何基础》（1673 年）书影

1741 年，法国数学家克莱罗（A. C. Clairaut, 1713-1765）在《几何基础》（图 9）第三卷命题 24 中给出垂径定理：“如果两条线段彼此垂直，并且其中一条线段是圆的直径，那么另一

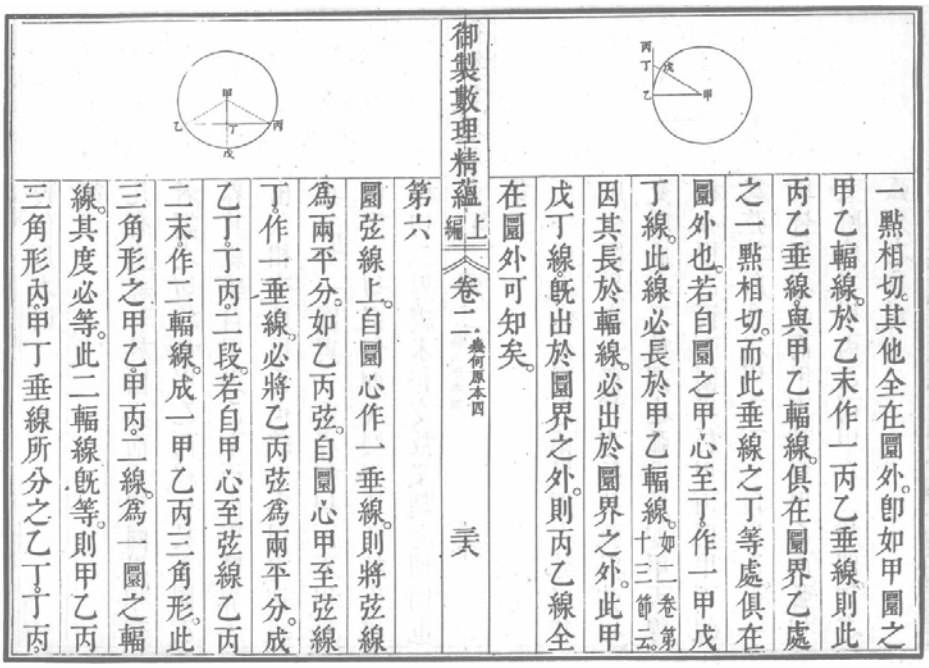
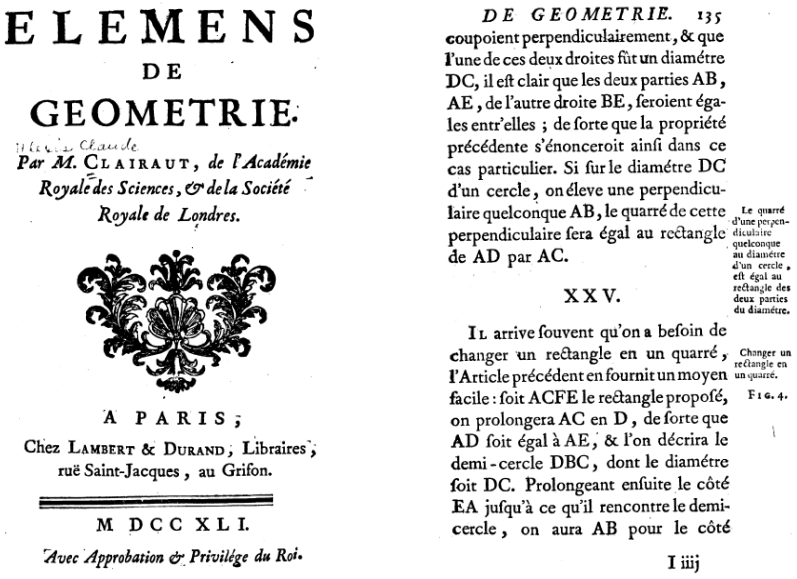

御製數理精蘊 上編 卷二 幾何原本四
第六
圓弦線上自圓心作一垂線則將弦線爲兩平分如乙丙弦自圓心甲至弦線丁作一垂線必將乙丙弦爲兩平分成乙丁丁丙二段若自甲心至弦線乙丙二末作二輻線成一甲乙丙三角形此三角形之甲乙甲丙二線爲一圓之輻線其度必等此二輻線既等則甲乙丙三角形內甲丁垂線所分之乙丁丁丙
一點相切其他全在圓外即如甲圓之甲乙輻線於乙末作一丙乙垂線則此丙乙垂線與甲乙輻線俱在圓界乙處之一點相切而此垂線之丁等處俱在圓外也若自圓之甲心至丁作一甲戊丁線此線必長於甲乙輻線（如二卷第十三節二）必出於圓界之外此甲戊丁線既出於圓界之外則丙乙線全在圓外可知矣

图 8 《数理精蕴》上编卷二书影

条线段将被平分。”[10]克莱罗仅仅叙述了垂径定理由“垂直”到“平分”的部分，而且只有“弦”被平分，没有“弧”被平分，仅陈述定理内容，没有给出具体的证明，不涉及定理应用。



ELEMENS
DE
GEOMETRIE.
Par M. CLAIRAUT, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.
A PARIS;
Chez LAMBERT & DURAND, Libraires, ruë Saint-Jacques, au Grifon.
M DCC XLI.
Avec Approbation & Privilége du Roi.

DE GEOMETRIE. 135
coupoient perpendiculairement, & que l'une de ces deux droites fût un diamétre DC, il eſt clair que les deux parties AB, AE, de l'autre droite BE, ſeroient égales entr'elles ; de ſorte que la propriété précédente s'énonceroit ainſi dans ce cas particulier. Si ſur le diamétre DC d'un cercle, on éleve une perpendiculaire quelconque AB, le quarré de cette perpendiculaire ſera égal au rectangle de AD par AC.

Le quarré d'une perpendiculaire quelconque au diamétre d'un cercle, eſt égal au rectangle des deux parties du diamétre.

XXV.

IL arrive ſouvent qu'on a beſoin de changer un rectangle en un quarré, l'Article précédent en fournit un moyen facile : ſoit ACFE le rectangle propoſé, on prolongera AC en D, de ſorte que AD ſoit égal à AE, & l'on décrira le demi-cercle DBC, dont le diamétre ſoit DC. Prolongeant enſuite le côté EA juſqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle, on aura AB pour le côté

Changer un rectangle en un quarré.

FIG. 4.

I iiij

图 9 克莱罗《几何基础》（1741 年）书影

1794 年，法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）出版《几何基础》。此书出版后，取代了欧几里得的《几何原本》作为几何教科书的地位，产生了深远的影响。书中给出并证明了垂径定理：“垂直于弦的半径平分弦，并且平分弦所对的两条弧。”[11]与欧几里得和克莱罗不同的是，勒让德在命题中增加了“半径平分弧”的结论，首次使垂径定理具有我们在今日教科书中所看到的完整形式。

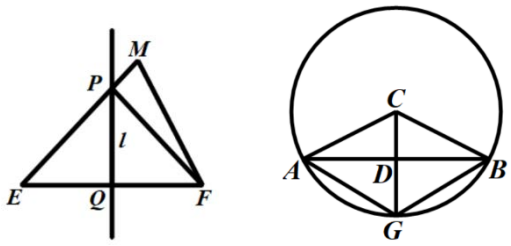


图 10 勒让德《几何基础》中的垂径定理

勒让德先证明命题“任何不在线段中垂线上的点到线段两端点的距离不相等”，将该命题记为命题①。如图 10 所示，已知直线 *l* 为线段 *EF* 的中垂线，取 *l* 外任意一点 *M*，联结 *ME*、*MF*，*ME* 与直线 *l* 交于点 *P*，联结 *PF*，在△*MPF* 中，*MF* < *MP* + *PF*，又因为 *MP* + *PF* = *MP* + *PE* = *ME*，所以 *MF* < *ME*。同理，当点 *M* 在直线 *l* 另一侧时，可得 *MF* > *ME*，即线段 *EF* 的中

垂线外任意一点到 E、F 两点的距离不相等[11]。

接着，勒让德利用命题①来证明垂径定理[11]：如图 10，在圆 C 中，半径 $CG\perp AB$，联结 CA、CB，因为 $CA = CB$，所以点 C 在 AB 的垂直平分线上，即 $AD = DB$。可以合理推测这一步骤的证明，勒让德的依据是命题①的逆否命题“到线段两端距离相等的点在线段的中垂线上”。再联结 GA、GB，显然点 G 在 AB 的中垂线上，所以 $GA=GB$，根据“等弦对等弧”可知 $\overset{\frown}{GA}=\overset{\frown}{GB}$。

2.6 20 世纪的美国

20 世纪，美国众多几何教科书都呈现了垂径定理。美国著名数学史家史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）十分强调几何定理的应用价值，他认为，只把应用题作为教材附加的内容提供给学生，不会吸引学生的学习兴趣，如果教师能结合实际，考虑学生的学习背景、生活环境，设置一系列习题，使这些题目难度逐渐递增，能够考察学生不同方面的程度的几何知识，那么这样的习题将会对学生的几何学习产生较大的帮助。

史密斯在其教师培训教材《几何教学》中不仅论述了垂径定理的完整内容，还讨论了定理在生活实践中的重要作用：在工程、建筑、测量等领域，垂径定理可以帮助工程师确定任何一段圆弧的圆心位置。假如一位土木工程师想要确定一条曲线（如跑道、铁路或公园里的小路）的圆心，他可以任取弧上的两条不平行的弦，然后作它们的中垂线，那么两条中垂线的交点就是圆心所在位置。史密斯设计了以下由易至难的 3 个问题[12]。

问题 1 如图 11，城镇中有两条马路 AP 和 BQ，为两条马路的连接部分设计一个弧形弯角。

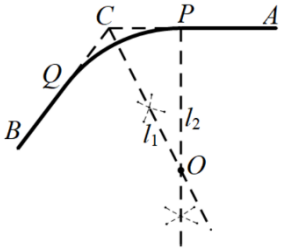


图 11 弯道设计问题之一

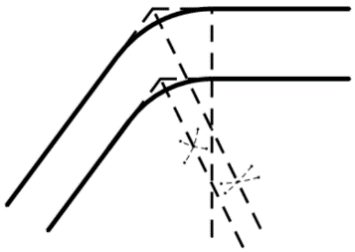


图 12 弯道设计问题之二

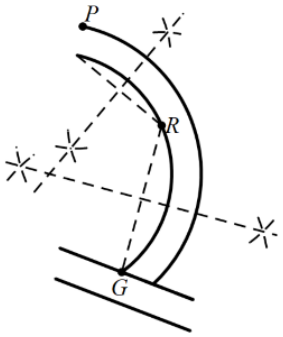


图 13 弯道设计问题之三

问题 2 如图 12，为两条不同宽度的马路设计连接的弧形弯角。

问题 3 如图 13，需要在 G 处的大门和 P 处的车库之间修一条弧形车道，要求车道避开 R 处的大石块。

从圆外一点引出两条切线，则圆心在两条切线所成夹角的角平分线上，问题 1-2 的解决需要用到这个性质，其中隐含了垂径定理。在问题 1 中，延长 AP、BQ 形成$\angle PCQ$，作$\angle PCQ$ 的角平分线 l_1，然后过点 P 作 AP 的垂线 l_2，根据切线的性质可知，圆心在垂线上 l_2，则 l_1 与 l_2 的交点即为圆心 O 所在位置。问题 2 在问题 1 的基础上增加了难度，此时两段圆弧的圆心是不同的。史密斯认为与此类似的题目有很多，教师应当注意不要设置太多同类型的题目，而应注意变换题目难度，以保证题目能考查学生对不同知识点的掌握情况[12]。问题 3 涉及“三点共圆”这一知识点，可以让学生了解到，平面上任何不共线的三个点都可以确定一个圆，解决这类真实情境下问题有助于学生对该知识点的理解，同时也能加深他们的记忆。

3 结论与启示

通过不同时期不同地区数学文献的考察，我们可以勾勒出垂径定理的历史发展脉络。古代两河流域的数学泥版经历岁月长河的洗涤，向我们展现了古巴比伦人的智慧水平，他们已经知道了垂直于弦的直径与弦的几何关系；中国数学典籍《九章算术》中的“圆材埋壁”问题以及刘徽的“割圆术”等都隐含了垂径定理的结论；中世纪印度数学名著《莉拉沃蒂》中的“矢弦法则”与垂径定理息息相关。因此，在欧几里得之前，尽管古代东方数学家从未用文字明确表述过垂径定理，但定理的结论却已为他们所熟知。欧几里得在《几何原本》中最早明确提出垂径定理及其逆命题，让垂径定理登上了初等几何学的历史舞台。17-18 世纪，法国数学家巴蒂、克莱罗、勒让德分别在各自的几何教科书给出了垂径定理，勒让德《几何基础》丰富了垂径定理的内容，使之有了我们今天十分熟悉的完整形式。到了 20 世纪，人们开始关注垂径定理在现实生活中的应用。美国数学家史密斯在《几何教学》中呈现了丰富有趣的与定理相关的应用题。

数学史是一个宝藏，纵观垂径定理的历史，我们可以从中获得以下启示。

一是知识之谐。垂径定理绝对不是数学家拍脑袋的产物，在它被作为定理提出之前，已经在历史长河中经历了漫长的积淀，人们首先在生产生活中使用它，再对其进行提炼、组织使之形成一个定理。教师在教学中可以从古巴比伦泥版上的数学问题出发，自然而然引出垂径定理，让学生明白定理不是从天而降的。

二是探究之乐。弗赖登塔尔认为学习数学唯一正确的方法就是“再创造”，也就是由学生本人把要学的东西自己去发现和创造出来[13]。教师在教学过程中应该强调学生在“做中学”，

从解决实际问题出发，引导学生进行自主探究，发现直径与弦的几何关系，从中感受数学学习的探究之乐。

三是能力之助。垂径定理的发展与形成和其他平面几何知识紧密联系，对学生直观想象、逻辑推理等素养的培养至关重要。古巴比伦人根据等腰三角形的性质，探究圆的直径与弦的关系，教师讲述这段历史有利于学生感受平面几何知识的内在逻辑，促进学生学习迁移的发生。

四是文化之魅。生活在古巴比伦、古希腊、古印度、古中国、近代西方国家的人们，虽然身处不同国度，拥有不同文明，语言系统大相径庭，但都在垂径定理这同一课题上做出了成就和贡献，从垂径定理的悠久历史中，学生可以感悟到数学文化的多元性。

五是德育之效。史密斯在《几何教学》中呈现的具有现实社会情境的问题体现了数学的社会角色，可以作为教师教学的素材，有助于增强学生的社会意识。垂径定理从萌芽到成熟，经历了漫长的过程，数学家们锲而不舍的精神，以及数学曲折的发展过程，有利于培养学生实事求是、坚持真理的求是态度。学生了解了历史的来龙去脉，也会对数学增添一份喜爱，潜移默化之中德育之效已然落实。

参考文献

[1] Boyer, C, B. 数学史（上、下）[M]. 秦传安译. 北京: 中央编译出版社, 2012: 47-48.

[2] Katz, V. J. 东方数学选粹[M]. 纪志刚等译. 上海: 上海交通大学出版社, 2016: 153, 154.

[3] 汪晓勤, 黄芳. 巴比伦泥版文献中的勾股定理[J]. 中学教研, 2003(1): 49, 50.

[4] 欧几里得. 几何原本[M]. 兰纪正, 朱恩宽译. 西安: 陕西科学技术出版社, 2003: 64, 65.

[5] 郭书春. 汇校九章算术[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2009: 412-413.

[6] 李文林. 数学史概论（第 3 版）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 79-81.

[7] Aryabhata. *The Aryabhatiya of Aryabhata*[M]. Chicago: The University of Chicago Press, 1930: 34.

[8] 婆什迦罗. 莉拉沃蒂[M]. 徐泽林, 周畅, 张建伟译. 北京: 科学出版社, 2008: 148-150.

[9] Pardies, I. G. *Elémens de Géométrie* [M]. Paris: Sebastien Mabre-Cramoisy, 1673: 33-34.

[10] Clairaut, A. C. *Elémens de Géométrie* [M]. Paris: Lambert & Durand, 1741: 134-135.

[11] Legendre, A. M. *Elements of Geometry* [M]. Cambridge: Printed by Hilliard and Metcalf, 1825: 12, 25.

[12] Smith, D. E. *The Teaching of Geometry* [M]. Boston: Ginn and Company, 1911: 128, 140-143.

[13] 弗莱登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 上海: 上海教育出版社, 1992: 3.

美英早期三角学教科书中的数学文化*

彭思维

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

三角学是高中数学非常重要的一部分，具有广泛的应用与丰富的价值。高中必修教材人教A 版（2019）中三角学的内容主要集中在必修一和必修二，介绍了三角函数、三角恒等变换和解三角形。现有的研究大多集中在对解三角形和三角函数的教学以及解题研究上。《普通高中数学课程标准》（2017 年版）（以下简称《课标》）在教学建议中要求：“在整个数学教学中，教师应当有意识地结合相应的教学内容，引导学生了解数学的发展，认识数学在科学技术、社会发展中的作用，体会数学的科学价值、应用价值和文化价值，提升学生的科学精神、应用意识和文化素养。”[1] 《课标》在课程结构中明确要求“把数学文化融入课程内容中”。

另一方面，随着 HPM 视角下的一系列课例研究的开展和一系列课例文章的发表，越来越多的教师开始关注 HPM 的教学理念，并希望在教学实践中将数学史融入课堂教学。在三角学方面，已有的课例涉及正、余弦定理[2]、两角和与差的正、余弦公式[3]，但这些课例主要关注历史上丰富多彩的定理证明或公式推导方法，而在呈现三角学的科学价值、应用价值和文化价值方面还有很大的改善空间。究其原因，HPM 专业学习共同体关于三角学的数学文化还缺乏深入的历史研究。

鉴于此，我们就数学文化这一主题，对美英早期三角学教科书进行研究，主要聚焦以下问题：早期三角学教科书呈现了哪些三角学的数学文化内容？这些内容对于今日三角学教学有何启示？

2 研究方法

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”（A8）系列论文之一。

2.1 研究对象

笔者详细阅读有关数据库中出版于 1800-1955 年间的美国和英国三角学教科书的序言和正文引言部分，从中筛选出涉及较多三角学文化内涵的教科书作为研究对象，再根据每本书的目录阅读数学文化在教科书中的具体体现。对于同一作者且内容相同的教科书，视为同一种，最终确定 104 种，若以 40 年一个时间段，则 104 种三角学教科书的分布情况如图 1 所示。

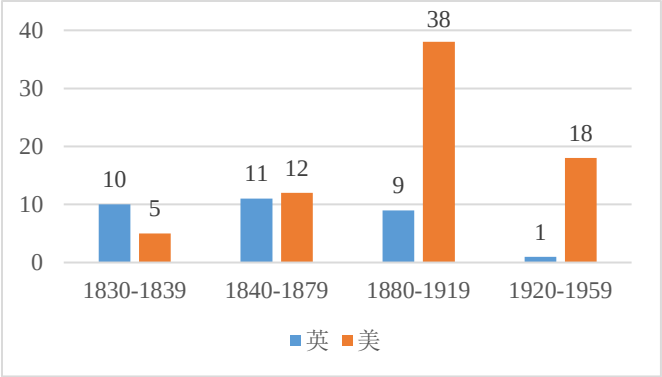


图 1 教科书出版年份及出版国家分布情况

2.2 分类框架

《课标》指出：数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点，以及它们的形成和发展，还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及与数学相关的人文活动。[1]结合《课标》提出的课程目标以及数学文化的内涵，文献[4]建立了“基于数学史的数学文化内涵”分类框架，包含知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐、多元文化五个维度。其中“知识源流”是指某个知识点的历史发展过程以及相关的人物、事件、思想等；“学科联系”指的是数学与其他学科之间的关联；“社会角色”指的是数学对人类文明进步、社会发展所起的重要作用；“审美娱乐”指的是数学美与趣味数学；“多元文化”指的是不同文明、不同地域在同一数学课题上的成就和贡献。本文基于上述框架，对早期三角教科书的数学文化及相关实例进行分类，以期为未来 HPM 视角下的三角学教学提供素材和启示。

2.3 统计方法

确定分类框架后，笔者运用文本分析法对 104 种教科书的序言、引言部分以及正文相关部分进行研究，提炼出关于三角学数学文化的内容，根据分类框架对其进行分类。教科书所涉及的数学文化内涵可分成知识源流、学科联系、社会角色和多元文化四类。104 本书均有学科联系

和社会角色的体现，但只有少数涉及知识源流和多元文化，几乎没有教科书含有审美娱乐类的素材。

3 数学文化内容分析

3.1 知识源流

Perlin（1955）等追溯了三角学的历史和“三角学”一词的辞源。三角学的历史可以追溯到古巴比伦时，以度、分、秒为单位的现代度量就从古巴比伦而来。三角学的英文名 Trigonometry 由德国数学家毕蒂克斯（B. Pitiscus, 1561-1613）于 1595 年首创，由希腊文“trigono”（三角）和“metrein”（测量）组合而成，原意为三角形的测量。[5]

Rider 和 Davis（1923）将三角学的历史分成萌芽期、独立期和成熟期。在萌芽期，三角学只是天文学的一种计算工具，并没有自己独立的理论体系。公元前 2 世纪，古希腊数学家和天文学家希帕克斯被认为是三角学的创始人，他制作的弦表不仅用于天文计算，也用于平面三角形的求解；公元 1-2 世纪，梅涅劳斯（Menelaus）、托勒密（C. Ptolemy）等为三角学早期的发展做出了贡献。在独立期，德国数学家雷吉奥蒙塔努斯（Regiomontanus, 1436-1476）著《论各种三角形》，标志着三角学作为一门独立学科的开端。[7]在该时期，人们引入了几种新的三角函数，建立平面与球面三角的若干公式，制作了许多三角函数表。在成熟期，欧拉（L. Euler, 1707-1783）明确了三角函数值是数值，三角函数作为一种初等超越函数登上了数学历史舞台。法国数学家棣莫弗（A. De Movive, 1667-1754）将三角学用于复数研究；瑞士数学家兰伯特（A. Lambert, 1728-1777）研究了双曲函数；法国数学家傅里叶（J. Fourier, 1768-1830）引入了傅里叶级数；挪威数学家阿贝尔（N. H. Abel, 1802-1829）和 19 世纪的其他数学家研究了椭圆函数。Rider 和 Davis 断言：“这门学科会继续发展壮大，没有人能预测它会有什么样的结果。”[6]

早期教科书在推导或证明和差角公式、正弦定理和余弦定理时，运用了历史上数学家的方法，部分教科书还说明了这些方法的来源，见表 1。

3.1.1 和差角公式

绝大多数教科书都采用帕普斯模型来推导两角和差公式，但并未提到它的起源。一些教科书利用了托勒密定理、正弦定理、两点之间的距离公式和构造辅助直径等方法，但只有少数教

科书交代了方法的来源。

表 1 早期教科书中基本公式定理的证明方法的来源

定理或公式	证明方法	方法的作者	教科书
	单位圆模型	克雷斯韦尔	Woodhouse（1819）
	托勒密定理	托勒密	
两角和差公式	两点间的距离公式	萨吕斯	Young（1833）
	两点间的距离公式	麦克沙恩	Perlin（1955）
	帕普斯模型	罗马努斯、毕蒂克斯	Murray（1908）
正弦定理	外接圆	韦达	Rider & Davies（1923）
			Woodhouse（1819）
余弦定理	欧几里得的几何命题	欧几里得	Todhunter（1866）
			Nixon（1892）

Woodhouse（1819）引用数学史家的观点称，利用托勒密定理可以自然且简单地得到两角和差公式，只需将弦长化为正弦即可[8]。书中还引用 19 世纪英国数学家克雷斯韦尔（D.Cresswell, 1776-1844）的方法：如图 2，在单位圆 O 中，由 $AC = AF + FC$ 即得和角公式。[8]

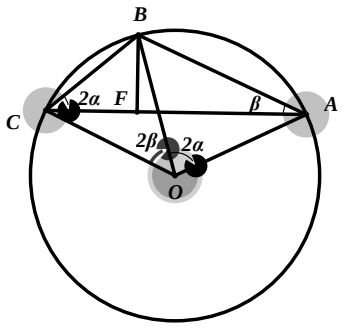


图 2 克雷斯韦尔的推导方法

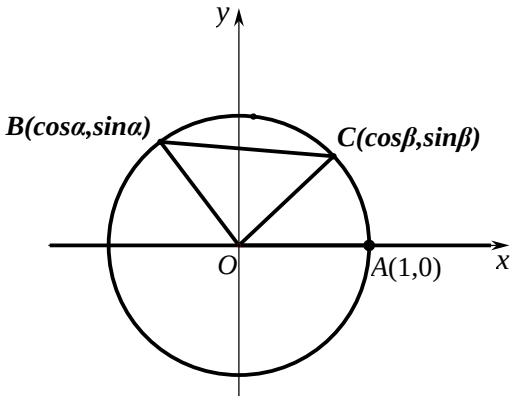


图 3 萨吕的方法

Young（1833）认为，关于和角公式的推导，最简单的方法是 19 世纪法国数学家萨吕（P. F. Sarrus, 1789-1866）的两点间距离公式法[9]。如图 3，在单位圆中构造 $\angle AOB = \alpha$、$\angle AOC = \beta$，则

$$BC^2 = Chord^2(\alpha - \beta) = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

即

$$Chord^2(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) \quad (1)$$

令 $\beta=0$，得

$$Chord^2\alpha=2-2\cos\alpha, \quad (2)$$

将公式（2）中 $\alpha-\beta$ 代替 α，可得

$$Chord^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta) \quad (3)$$

再由公式（1）和（3）得：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

Perlin（1955）给出了美国数学家麦克沙恩（E. J. McShan, 1904-1989）于 1941 年发表在《美国数学月刊》上的方法[6]。如图 4，在单位圆 *O* 中构造 $\angle AOB=\alpha$、$\angle AOC=\beta$，将 ΔBOC 沿顺时针旋转，使得 *OA* 与 *OC* 重合，*OB* 与 *OD* 重合，由 *AD* = *CB*，利用两点间的距离公式可以推导出两角差的余弦公式。

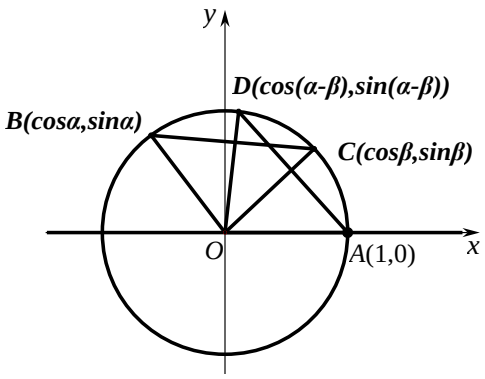


图 4 麦克沙恩的方法

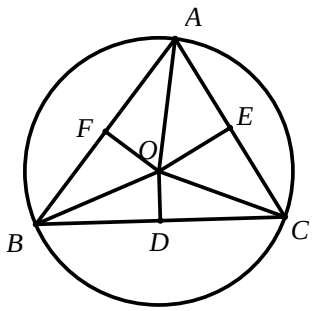


图 5 韦达的外接圆法

关于三角学的两角和差公式，Murray（1908）认为，荷兰数学家罗马努斯（A. Romanus, 1561-1625）是第一个证明两角和的正弦公式的数学家，德国数学家毕蒂克斯在《三角学》中推导了另三个公式[9]。实际上，在早期教科书中，还有很多的精彩推导方法，但除了距离公式法外，其他方法大多局限于锐角或钝角的情形，需要借助诱导公式进一步讨论。因此，20 世纪 50 年代之后，距离公式法逐渐受到人们的青睐，其他方法则逐渐淡出人们的视野。

3.1.2 正弦定理和余弦定理

绝大多数教科书都采用直角三角形法证明正弦定理，采用欧几里得的几何命题证明余弦定理。少数教科书将韦达的外接圆法作为正弦定理的第二种证明方法，或直接采用解析几何法证明。还有个别教科书采用托勒密定理、射影定理等证明余弦定理。从表 1 可见，只有极少数教科书介绍证明方法的来源。Rider 和 Davies（1923）指出：“第一个明确陈述和证明正弦定理的人是波斯数学家纳绥尔丁（Nasir-Eddin, 1201-1274），他也是第一个把三角学从天文学中分离出来的人。”[6]

韦达的外接圆法[13]如图 5 所示。从ΔABC 的外心 O 向三边作垂线，垂足分别为 D、E 和 F，则$\angle ACB=\angle AOE$，$\angle ABC=\angle AOE$，$\angle ACB=\angle AOF$。再用上述角度将 a、b 和 c 表示出来可以得到

$$a:\sin\angle BAC=b:\sin\angle ABC=c:\sin\angle ACB\text{。}$$

关于余弦定理的证明，绝大多数教科书都采用了欧几里得的方法，但只有少数几本书提及证明方法的来源。除此之外，Wilczynski（1914）指出，已知三角形三边求角的问题早已为托勒密所解决，但今人所看到的三角形式的余弦定理最早由韦达明确给出[12]。

3.2 学科关联

很多教科书都在引言或正文开篇部分强调三角学在天文学、物理学、地理学等其他学科领域的广泛应用。Day（1848）指出：“很少有数学分支比三角学更重要，应用更广泛了。通过它，军舰在海上按自己的路径游弋；地理学家测定各地的经纬度、各国的幅员和地理位置、山高、河道等等；天文学家计算天体的远近与大小，预测日、月食，度量恒星的光的运行（距离）。”[13]由此可见，三角学与天文学、物理学、地理学等科学的发展密切相关。

3.2.1 三角学与天文学

三角学源于天文学。Emerson（1749）断言：“没有三角学，Urania（掌管天文的缪斯女神）的儿子们将丢弃它们的工具、书和表，人们将对这个美丽的世界一无所知。”[14] 利用三角学，我们可以解决某个时刻行星到地球的距离、从而预测日、月食等问题。

如图 6 所示，在同一经线上的两个天文台 N 和 N'，P 为行星，测出$\angle ZNP$ 和$\angle Z'N'P$。CN 和 CN'为地球半径，$\overset{\frown}{NN'}$ 已知，则可求得$\angle NCN'$，进而可求出$\angle CNN'$和$\angle CN'N$。在$\Delta CNN'$中，已知

CN、$\angle CNN'$和$\angle CN'N$，可求得 NN'。在$\Delta PNN'$中，由$\angle PNN'$、$\angle PN'N$ 和 NN' 可得 PN 和 PN'；最后在ΔPNC 中，可以解出 PC，即为行星到地球的距离。

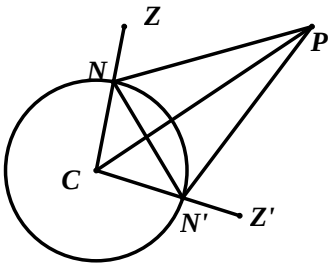


图 6 行星到地球的距离

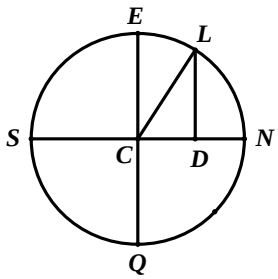
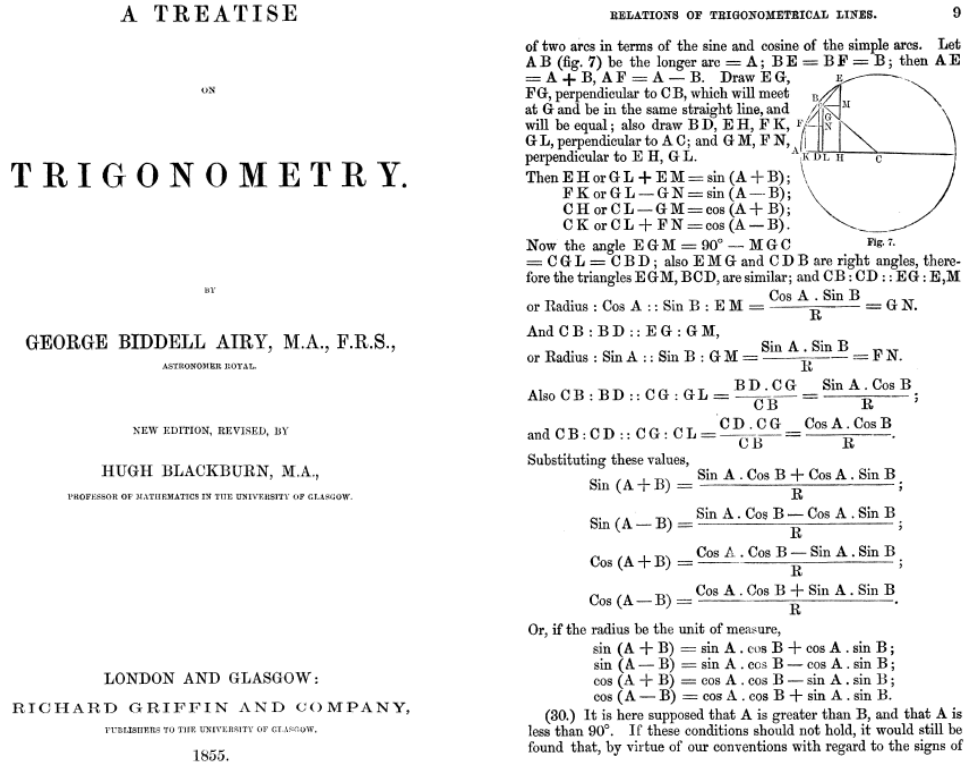


图 7 不同地方经度相差1°的距离差

3.2.2 三角学与物理学

Airy（1855）（图 8）指出：“说起数学在物理上的应用，没有哪个分支比三角学更重要了。它是我们最大程度地将算术计算之精确性与几何作图之准确性相结合的纽带。没有它，前者不可能用于物理学；而后者的误差也只能依靠几何学家的技巧。用数值计算代替作图，我们可以获得任意想要的精确结果。迄今为止，三角学的每一次进步都伴随着物理学各分支的进步。”[15]



A TREATISE

ON

TRIGONOMETRY.

BY

GEORGE BIDDELL AIRY, M.A., F.R.S.,
ASTRONOMER ROYAL.

NEW EDITION, REVISED, BY

HUGH BLACKBURN, M.A.,
PROFESSOR OF MATHEMATICS IN THE UNIVERSITY OF GLASGOW.

LONDON AND GLASGOW:
RICHARD GRIFFIN AND COMPANY,
PUBLISHERS TO THE UNIVERSITY OF GLASGOW.
1855.

RELATIONS OF TRIGONOMETRICAL LINES. 9

of two arcs in terms of the sine and cosine of the simple arcs. Let A B (fig. 7) be the longer arc = A; B E = B F = B; then A E = A + B, A F = A − B. Draw E G, F G, perpendicular to C B, which will meet at G and be in the same straight line, and will be equal; also draw B D, E H, F K, G L, perpendicular to A C; and G M, F N, perpendicular to E H, G L.

Then E H or G L + E M = sin (A + B);
F K or G L − G N = sin (A − B);
C H or C L − G M = cos (A + B);
C K or C L + F N = cos (A − B).

Fig. 7.

Now the angle E G M = 90° − M G C = C G L = C B D; also E M G and C D B are right angles, therefore the triangles E G M, B C D, are similar; and C B : C D :: E G : E M

or Radius : Cos A :: Sin B : E M = $\frac{\text{Cos A . Sin B}}{\text{R}}$ = G N.

And C B : B D :: E G : G M,

or Radius : Sin A :: Sin B : G M = $\frac{\text{Sin A . Sin B}}{\text{R}}$ = F N.

Also C B : B D :: C G : G L = $\frac{\text{B D . C G}}{\text{C B}} = \frac{\text{Sin A . Cos B}}{\text{R}}$;

and C B : C D :: C G : C L = $\frac{\text{C D . C G}}{\text{C B}} = \frac{\text{Cos A . Cos B}}{\text{R}}$.

Substituting these values,

$$\text{Sin (A + B)} = \frac{\text{Sin A . Cos B + Cos A . Sin B}}{\text{R}};$$

$$\text{Sin (A − B)} = \frac{\text{Sin A . Cos B − Cos A . Sin B}}{\text{R}};$$

$$\text{Cos (A + B)} = \frac{\text{Cos A . Cos B − Sin A . Sin B}}{\text{R}};$$

$$\text{Cos (A − B)} = \frac{\text{Cos A . Cos B + Sin A . Sin B}}{\text{R}}.$$

Or, if the radius be the unit of measure,

sin (A + B) = sin A . cos B + cos A . sin B;
sin (A − B) = sin A . cos B − cos A . sin B;
cos (A + B) = cos A . cos B − sin A . sin B;
cos (A − B) = cos A . cos B + sin A . sin B.

(30.) It is here supposed that A is greater than B, and that A is less than 90°. If these conditions should not hold, it would still be found that, by virtue of our conventions with regard to the signs of

图 8 艾里《三角学专论》（1855）书影

三角学是各种周期现象的基础，而物体的振动就是一种周期现象。众所周知，最基本、最简单的振动是简谐振动，其中质点的位移与时间之间的关系满足函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的规律，函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像称为简谐曲线。利用三角学相关知识，可以分析物体振动时在不同时刻所处的位置、物体离开平衡位置后能运动的最大距离、物体的振动快慢等问题。[12]

许多不同的简谐曲线可以合成单一的一般简谐曲线，正如声音的数学模型一样。我们平常听到的声音大多是由纯音合成的复合音，纯音的数学模型是函数 $y = A\sin\omega t$ 。反过来，如果给定的一条曲线具有周期性，那么它能否由若干条简谐曲线组合而形成？Wilczynski（1914）认为："如果可以，那么问题就转变为寻求一般简谐曲线的分量，解决这一问题的过程被称为调和分析，这不仅在纯数学和应用数学的分支中具有重要的意义，还在物理学中占有重要地位。"[12]

Wylie（1955）也指出："在处理诸如力和速度之类的东西时，经常需要使用三角函数来根据其他给部分找到某个未知部分。但比这更重要的是在波运动和一般周期性现象的研究中使用三角学。分析交流电路、音乐音调和商业周期，在每种情况下都需要广泛使用三角函数。"[16]

3.2.3 三角学与地理学

Jaki（1966）指出："三角学这门学科，在某种意义下就像是望远镜的前身。它把遥远的物体拉近到可测量的范围，并且首次使得人类能够用一种定量的方式去了解遥不可及的天空。"[17]三角学与地理学的关联主要体现在测量上，测定各地的经纬度、各国的幅员和地理位置、山高、河道等。早期三角学教科书涉及地球上不同地点的经度和纬度、海岸和大地的测量。

（1）地球不同地方经度相差1°的距离差

如图 7 所示，*NESQ* 为地球的经线，*EQ* 是地球的直径，*EL* 是美国安阿伯（Ann Arbor）城市的纬度 42°16′48.3″，在 *L* 处 1°的经度是以 *LD* 为半径的整个圆周的 $\frac{1}{360}$。已知地半径 *CL* 为 3957 英里。那么在 RtΔLCD 中，我们有$\angle CLD = \angle ELC$ = 42°16′48.3″，*CL*=3957 英里。

因此，$LD = CL \times \cos 42^\circ 16'48.3'' = 2927.6$ 英里，纬度为 42°16′48.3″的经线中，每隔 1°相当于隔了 51.1 英里，这会造成 4 分钟左右的时差。[18]

（2）大地和海岸的测量

Durell（1910）[19]介绍了古人测量大地和海岸的方法。主要步骤如下：

1）首先选取一条方便测量的基线，基线长度至少为 4 英里或 5 英里长（图 9），测量基线

长度时要确保其足够精确，尽量减小误差。

2）选择一个方便的 *P* 点，并测量∠*PAB* 和∠*PBA*，并在Δ*PAB* 中计算 *PA*、*PB*。

3）选择另一点 *Q*，测量∠*QBP* 和∠*QPB*，计算 *PQ* 和 *QB*。

4）按同样的方式从一点到另一点，直到便于测量的点 *R*，测出 *RC*、*RD*，计算 *CD* 的长度。

5）对 *CD* 进行仔细的测量，并将计算出的 *CD* 与测量结果进行比较。最后测量 *CD*，是为了测试所有中间步骤的准确性。通过把这些方法，可以进行足够远距离的测量，可以测量出地球大圆周长，并由此计算出地球的半径或直径。

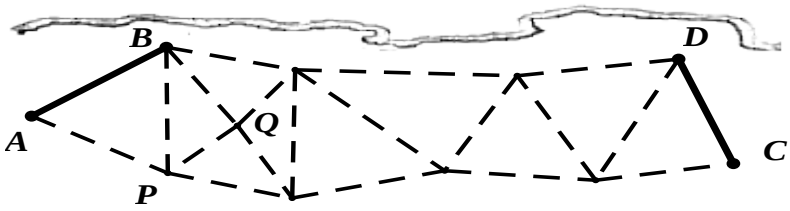


图 9 测量大地和海岸

3.3 社会角色

三角学在现实生活、航海、军事等领域都有广泛应用。Hart（1942）作了如下总结：“三角学是工程与物理学领域的重要工具。特别地，航海与测量研究需要三角学。在战争中，三角学在舰船的航行和飞机的飞行上，在陆地与海上炮火的定向上，在飞机轰炸理论上，在培训陆军和海军某些部门军官和专家的理论指导上，都是头等重要的。在工业上，不仅仅是工程师，还有各类技术工人，都会发现三角学有用。该学科的理论方面在纯数学以及许多应用领域中都是不可或缺的。”[20]

三角学可以测量可到达或不可到达物体的高度、在战争中确定敌方的位置和距离、帮助水手画航线等。由于测量可到达或不可到达物体的高度在现有的教科书中比较常见，所以接下来只对军事中确定敌方的位置、水手在海上航行举例说明。

3.3.1 确定敌方位置

Todhunter（1866）（图 10）指出：“有时需要知道某个站点与某些可到达物体之间的距离；通过一张好的地图，可以确定三个主要物体之间的距离，然后通过观察角度并通过计算，可以确定一个站点到这些物体的距离。该问题对于军事和其他的目的具有实际意义。”[21]此问题即为：在同一平面上给出三点的位置，确定相对于给定点的其他点的位置。在平面中，已知 *A*、*B*、*C*

TRIGONOMETRY

FOR BEGINNERS

WITH NUMEROUS EXAMPLES.

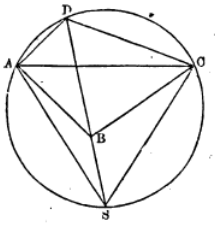
BY

I. TODHUNTER, M.A., F.R.S.

London and Cambridge.
MACMILLAN AND CO.
1866.

The Right of Translation and Reproduction is reserved.

119. *Given the distances of three points from each other, to find their distances from a station in the same plane with them.*



Let A, B, C denote the three points, so that AB, BC and CA are all known. Let the angles which AB and BC subtend at the station be observed. At the point A make the angle CAD equal to the observed angle at the station subtended by BC; and at the point C make the angle ACD equal to the observed angle at the station subtended by AB. Describe a circle round the triangle ACD, and produce DB to meet the circumference again at S. Then S will denote the station.

For the angle BSC = the angle CAD, and the angle BSA = the angle ACD; by Euclid III. 21. Hence the angles subtended at S by BA and BC are equal to the angles observed at the station; and therefore S denotes the station. Thus SA, SB and SC represent the three required distances: and we shall now shew how they may be calculated.

In the triangle ADC the side AC and the angles CAD and ACD are known; thus AD can be found. In the triangle ABC all the sides are known; thus the angle BAC can be found. Hence the angle BAD is known. In the triangle BAD the sides AB and AD, and the angle BAD are known; thus the other angles can be found. Hence the angle ABS is known. In the triangle ABS the side AB and the angles ASB and ABS are known; thus

图 10　托德亨特《三角学入门》书影

三点的位置，以及∠*ASC*、∠*CSB*、∠*ASB*，请确定 *S* 点的位置，并计算 *SA*、*SB* 和 *SC*。

A、*B*、*C* 三点若在同一条直线上，以及 *S* 与其中两点在同一条直线上比较容易确定 *S* 的位置，接下来主要以 *S* 与 *A*、*B*、*C* 三点所构成图形的外部为例来说明如何确定 *S* 点的位置。

方法一：如图 11，作 $\angle EBA = \angle ASC$，$\angle EAB = \angle BSE$，通过 *A*、*B*、*E* 三点作圆。连接 *EC* 并延长，与圆交于另一点，这个点即为 *S*。在Δ*ABC* 中，已知三边，可求出∠*BAC*；在Δ*AEB* 中，已知∠*EBA*，∠*EAB*，*AB*，可求出 *AE*、*BE*；在Δ*AEC* 中，已知 *AC*、*AE* 和 $\angle EAC = \angle BAE - \angle BAC$，

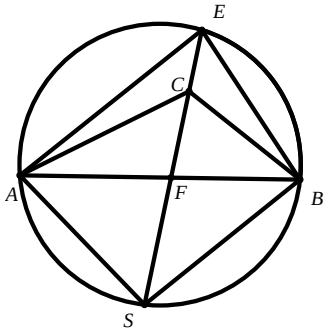


图 11 确定位置的方法一

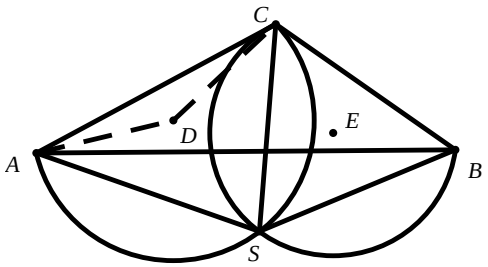


图 12 确定位置的方法二

可求出$\angle AEC$；在ΔAES中，已知$\angle AES$，$\angle ASE$和AE，可得出AS。同理在ΔAES中可得BS；在ΔACS中可得CS。

方法二：如图 12，已知$\angle ASC=\alpha$，则ΔASC 的外接圆$\odot D$，AC所对的圆心角$\angle ADC=2\alpha$，则可求出$\angle CAD=\angle ACD=\dfrac{180^\circ-2\alpha}{2}$，由此可作出$\angle CAD$和$\angle ACD$，且相交于点$D$。以$D$为圆心，$AD$为半径画圆；同理，可以找到以$BC$为弦的圆心$E$，以$E$为圆心，$EB$为半径画圆，交点（除去点$C$）即为要找的点$S$。

3.3.2 在航海上的应用

三角学在航海有很重要的作用，水手们可以利用航海指南针帮助确定航向，利用每次航行的航向确定自己的航线，所在的经纬度等。航海问题主要分为平面航行（plane navagation）、曲线航行(traverse navagation)、同纬度航行（parrallel sailing）、中纬度航行（middle latitude sailing ）、墨卡托航行（Mercator's sailing）等[22]。

如图 13，当航海家从A航行到B时，AB称为为航行的距离。作$AC\perp BC$，AC为航行的纬度差（latitude），BC为航行的东西距离(departure)。当航行的距离足够小时，可以忽略地球的曲率，看成如图 12 所示的直角三角形来计算航行的纬度差和东西距离：$AC=AB\cos A$、$BC=BC\sin A$；当距离很大时，如图 14，我们可以将AB分成很多小段，每一小段都可以用图 12 的情况来计算，也会有$AC=AB\cos A$、$BC=BC\sin A$。

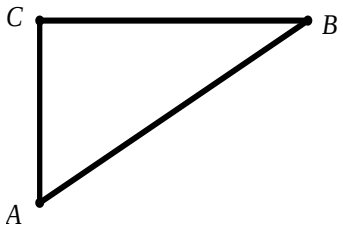


图 13 平面航行

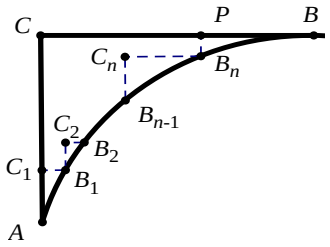


图 13 曲线航行

曲线航行是指将一艘船的几条连续航线减少到一条；也就是说，通过在多个连续的轨道上航行，找到通向该船实际到达的地点的最短轨道。根据每次航行的航向与距离，利用平面航行的原理，可以找到起点和终点的最短航道。同纬度航行是指船在同一纬度航行，只向东或向西航行，这与计算地球不同纬度圈上经度 1°相差的距离差类似。此外，还有中纬度航行、墨卡托航行等航行的测量方式，是对不同纬度航行精度的改进。

3.4 多元文化

数学史上，不同文明，不同地域，不同时空的数学家们都对三角学有贡献，如问题的提出、公式的推导、定理的证明等，这些都是人类数学史上宝贵的财富。

3.4.1 弦表的制作

古希腊的三角学创始人希帕克斯、梅涅劳斯制作了弦表，但是没有流传下来。托勒密在固定半径的圆内，做了一个和现今三角函数表相仿的“弦表”。古印度数学家阿耶波多（Āryabhaṭa, 476-550）利用弧的正弦制作了弦表，默认了曲线与直线可以用同一度量单位，孕育着弧度制的思想。中亚细亚地区的阿尔—巴坦尼（Al-Battani, 850-929）制作了余切表。后来，雷吉奥蒙塔努斯用 $R=10^7$，雷提克斯（Rhetinus, 1514-1574）用 $R=10^{15}$ 制作弦表，弦表越来越精确。[23][24]

3.4.2 公式的推导

两角和与差的三角公式推导的背后，有许多数学家孜孜以求，不断创用新的推导方法。阿拉伯数学家阿布-韦发（Abu'l-Wafa, 940-998）借助单位圆，法国数学家萨吕用两点间的距离公式、英国数学家伍德豪斯借助余弦定理、瑞士-美国数学家哈勒斯构造相似三角形和意大利数学家卡尼奥采用正弦定理等推导两角和差公式。[25]

3.43 定理的证明

正弦定理、余弦定理的证明也是精彩纷呈。早在 13 世纪，阿拉伯数学家纳绥尔丁用同径法证明了正弦定理。15 世纪，德国数学家雷吉奥蒙塔努斯简化纳绥尔丁的证明方法。后来，中国数学家梅文鼎、英国数学家辛普森对雷吉奥蒙塔努斯的方法进一步简化。而英国数学家哈里斯采用直角三角形、法国数学家韦达采用单位圆等证明正弦定理[26]。余弦定理也是如此，法国数学家韦达、荷兰数学家斯内尔、英国数学家扬等人也都给出了不同的证明方法。虽然早期教科书中呈现给了我们各种各样的方法，但对这些证明方法背后的数学文化却很少体现。

4 结 语

融入数学史的数学文化内涵的四个维度——知识源流、学科联系、社会角色、多元文化在教科书中都有体现。所有教科书都将重点放在了知识源流、学科联系和社会角色上，尤其是在学科联系上体现的很好，但对多元文化和审美娱乐涉及的比较少，尤其是审美娱乐，教科书几乎没有这方面的内容。那么如何用数学文化引导学生认识三角学的价值、发展学生的素养，我

们还有如下的地方需要努力：

（1）适当增加三角学的“学科联系”与“社会角色”教学，提升学生的科学精神和应用意识。从已有研究来看，对三角学的教学重点放在理论分析上，对于三角学的科学价值和应用价值认识比较少。早期三角学教科书中很多应用的素材进行适当改编后，可以用在课堂中，让学生感受到三角学作为一门工具，应用在其他学科中的科学价值。

（2）深入开发三角学“审美娱乐”与“多元文化”的数学文化素材，提升学生的文化素养。从已有的素材来看，三角学在这两方面的内容还不够丰富，对提升学生的文化素养也远远不够。因此，需要我们进一步再数学史文献中挖掘数学文化的素材，呈现数学史的“文化之魅”，达到“德育之效”。

（3）充分利用“知识源流”，引导学生了解数学的发展，培养创新精神。三角学历史中有很多数学家从不同的角度、用不同的方法对公式和定理进行推导，随着时间的发展，慢慢的才形成单一的证明方法。根据学情，利用这些不同的方法，可以让学生了解数学的发展，从多角度思考问题，培养学生的创新精神。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版）[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017.

[2] 张国定. HPM 视角下的数学教学设计——从“正弦定理”的教学设计谈起[J]. 数学教学研究, 2010, 29(3): 14-16.

[3] 蔡东山, 陈晏蓉, 沈中宇. HPM 视角下的两角和与差的余弦公式教学[J]. 数学教学, 2019(3): 7-12+34.

[4] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019(2): 37-43.

[5] Perlin, I. E. *Trigonometry*[M]. Scranton: International Textbook Company, 1955: 1-3;136.

[6] Rider, P. R. & Davis, A. *Plane Trigonometry*[M]. New York: D. van Nostrand Co., 1923:1-3;160.

[7] Woodhouse, R. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1819: 28.

[8] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方三角学文献中的和角公式[J]. 数学通报, 2016, 55(6): 4-8.

[9] Young, J. R. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: John Souter, 1833:19-20.

[10] Murray, D. A. *Plane Trigonometry for Colleges & Secondary Schools*[M]. New York: Longmans, Green & Co., 1908: 85-88.

[11] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前的正弦定理历史[J]. 数学通报, 2016, 55(1): 1-5.

[12] Wilczynski, E. J. *Plane Trigonometry & Applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914: 85-87; 226-257.

[13] Day, J. *A Treatise of Plane Trigonometry*[M]. New York: Mark H. Newman & Co., 1848:3.

[14] Emerson, E. *The Elements of Trigonometry*[M]. London: W. Innys, 1749: iii-vi.

[15] Airy, G. B. *A Treatise on Trigonometry*[M]. London & Glasgow: Richard Griffin & Co., 1855:1.

[16] Wylie, C. R. *Plane Trigonometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955:1-2.

[17] Maor, E. 三角之美——边边角角的趣事[M]. 曹雪娜译. 北京: 人民邮电出版社, 2010: 43-51, 66-78.

[18] Olney, E. *Elements of Trigonometry, Plane and Spherical*[M]. New York: Sheldon & Co., 1870: 62-64.

[19] Durell, F. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: Merrill, 1910: 134-137.

[20] Hart, W. W. & Hart, W. L. *Plane Trigonometry, Solid Geometry & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1942: 1.

[21] Todhunter, I. *Trigonometry for Beginners*[M]. London & Cambridge: Macmillan &Co., 1866: 87-89.

[22] Peirce, B. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*[M]. Cambridge & Boston: James Munroe & Co., 1835: 57-76.

[23] Bonnycastle, J. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: Cadell & Davies et al., 1818: v-xxx.

[24] NCTM. *Historical Topics for the Mathematics Classroom* [M]. Washington, D. C, 1969: 356.

[25] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 191-199: 217-225.

教学实践

HPM 视角下的“轨迹”课例研究 *

张佳淳，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

数学史与数学教育之间的关系（HPM）是数学教育的一个研究领域，而实践研究是该领域的重要方向之一。近年来，国内 HPM 实践研究的主要方式是基于专业学习共同体的课例研究。随着一系列 HPM 课例的相继发表，越来越多的中学一线教师开始关注 HPM。他们希望了解 HPM 课例的形成过程，从中学习课例研究的方法，并用以指导自己的教学实践。

HPM 课例研究包含“聚焦与准备”、“研讨与设计”、“实施与反馈”、“整理与写作”四个环节，其意义在于：

- 完善 HPM 专业学习共同体成员的面向教学的数学知识（MKT）；
- 促进 HPM 专业学习共同体成员对数学史教育价值的理解；
- 提高 HPM 专业学习共同体成员利用数学史进行教学设计的能力；
- 为高校研究者提供教育实证研究的机会；
- 夯实 HPM 有关理论，包括数学史选材原则、运用方式、教育价值等。

轨迹是初中几何的重要概念之一，也是教学难点之一。学生感到概念抽象难懂，教师不理解概念的教学意义。轨迹概念教学实践中有诸多需要解决的问题，例如：为什么要学习轨迹？初中数学中涉及的轨迹与平面几何的一些定理有何关联？初中数学中涉及的轨迹和高中数学中的典型轨迹（如圆锥曲线）有何关联？还有哪些轨迹问题适合于初中课堂教学？要解决这些问题，就需要追溯轨迹的历史，从历史中获得教学的启示。

另一方面，尽管 HPM 专业学习共同体相继开发了一系列初中平面几何课例，如“三角形的

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”（A8）系列论文之一。

内角和”、“三角形的中位线”、“等腰三角形的性质”、“演绎证明”等等[1]，但初中数学教师十分关注的“轨迹”课例至今仍然付之阙如。

有鉴于此，依托上海数学教育教学研究基地的 HPM 工作室，针对初中“轨迹”概念开展了较为深入的课例研究。本文追踪并整理初中“轨迹”课例的形成过程，以呈现其中的研究方法、实施流程、研究结果、教学理念、教研规律等，具体探讨三个问题：HPM 视角下的轨迹课例是如何形成的？课例研究对执教者的专业发展有何影响？课例形成的过程为轨迹的教与学以及 HPM 视角下的数学课例研究带来哪些启示？

2 聚焦与准备

2.1 问题聚焦

课例研究课题的确定采用“双向选择”的方式，先由高校研究者在每学期期末时段，根据下学期的教学内容给出多个主题，再由执教者基于自身经验进行选择，以保证课例的研究能贴近其自身实践基础。确定课题后，执教者提出对数学史料的需求，由 HPM 高校研究人员搜集史料，执教者精心设计教学过程，HPM 专业学习共同体成员一同研讨，执教者再反复调整教学设计并实施教学。

本文“轨迹”课例的执教者表示，这一课题在上学期已有过授课经验，但教学效果不佳，所以在高校研究者给出主题后，毫不犹豫报名了此课题。课题的准备还要从“教学合一”的角度出发，不仅考察教学中的实践难题，而且考察学生的认知障碍，以求贴近学生最近发展区。执教者表示，轨迹的思想、运动的观点和从有限个点中想象无数个点的思维是这节课的学习障碍和教学难点。所以，执教者希望通过将数学史融入课堂教学，能帮助突破以上难点。

据此，针对轨迹概念的教学，最终确定此次课例研究聚焦于解决以下问题：

（1）轨迹概念诞生的历史动因是什么？今天为什么要学习轨迹概念？

（2）除圆、垂直平分线、角平分线三个基本轨迹之外，教学中还可以解决哪些轨迹？

（3）如何在轨迹的教学中体现数学史的多元教育价值？

2.2 史料搜集

古希腊辩士学派的希皮亚斯（Hippias）利用点的运动发明了一种新的曲线——割圆曲线，这正是轨迹的思想。如图 1，令正方形 *ABCD* 的边 *BC* 匀速下移，同时边 *AB* 顺时针匀速旋转，

两边在任意时刻都交于点 P，无数交点所成的割圆曲线可以解决古希腊三大几何难题中的三等分角问题[2]。相反，毕达哥拉斯学派的阿契塔（Archytas）则从静中悟动，他首次提出曲线是点的轨迹，曲面是曲线移动的产物[3]。

欧几里得（Euclid）《几何原本》命题 I.35 称“在同底上且在相同两平行线之间的平行四边形彼此相等”。古希腊人已经知道命题背后的轨迹：平行线是使得同一基底上各个平行四边形的面积相等的轨迹。同理应把圆周看作同底上顶角相等的三角形顶点的轨迹，特殊地，应把半圆看作同底上顶角为 90 度的三角形顶点的轨迹[4]。阿波罗尼奥斯（Apollonius）曾著《平面轨迹》一书，虽然全书未能流传至今，但其中部分内容为后世希腊数学家所记录，使我们得以管中窥豹。阿波罗尼奥斯研究了两类平面轨迹问题，一类与定直线有关，如：

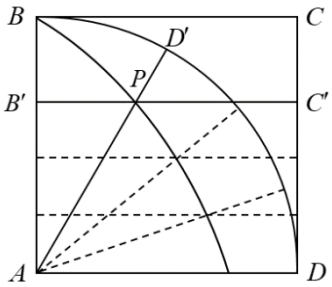


图 1 割圆曲线

- 一条线段平行于一条已知直线，线段的其中一个端点位于另一条已知直线上，移动线段，则另一端点形成的轨迹是一条直线；
- 到两条已知直线（平行或相交）的距离之比等于已知数的动点轨迹为直线。

另一类与定点有关，如：

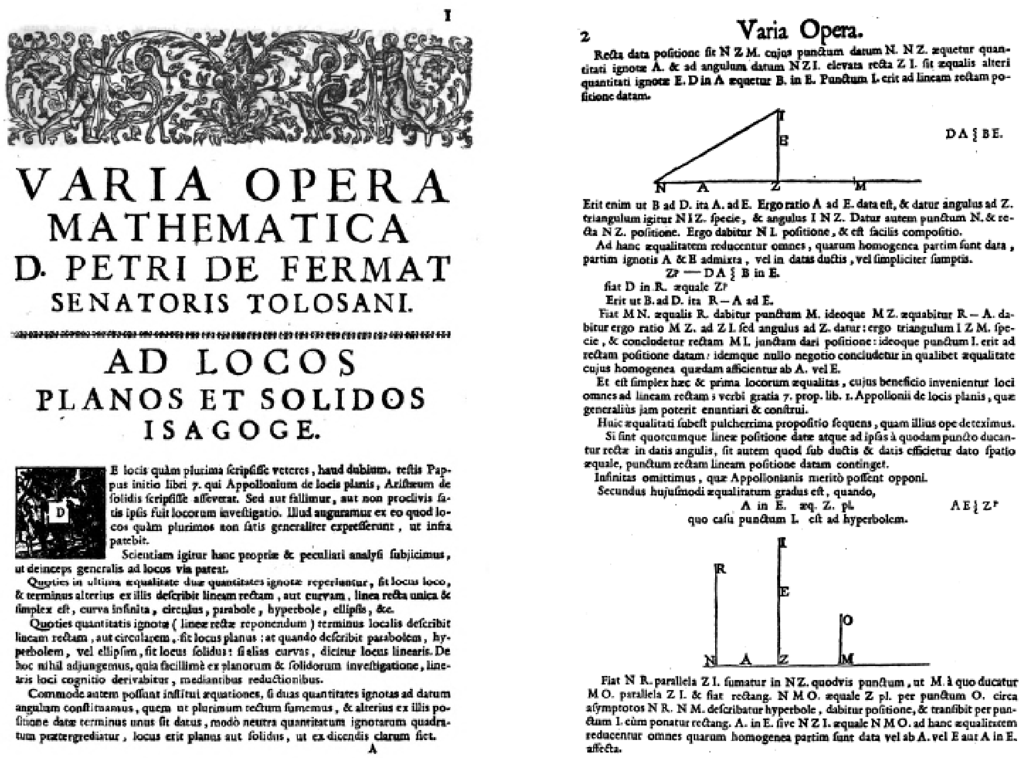
- 到两定点距离之比等于常数的动点轨迹为直线或圆；
- 到 n 个定点的距离的平方和等于已知数的动点轨迹为圆。

这些命题正是今日初中教科书中 3 种基本轨迹之滥觞[5]。

中世纪法国数学家奥雷姆（N. Oresme, 1323-1382）用几何图形来表征点的运动：横线上的点表示时刻，一端在横线上的竖线的长度表示每一时刻的速度，竖线沿着横线运动，若速度（长度）不变则形成直线，否则为曲线。[6]

到了 17 世纪，法国数学家费马（P. de Fermat, 1601-1665）提出类似的思想（图 2）：取一固定直线，当一条变线段的一个端点沿直线移动时，另一个端点的运动即确定了轨迹[6]。同时代另

一位法国数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）通过建立单轴坐标系、用代数方程来研究古希腊的轨迹问题，费马和笛卡儿成了解析几何的创始人。


1

VARIA OPERA MATHEMATICA D. PETRI DE FERMAT SENATORIS TOLOSANI.

AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS ISAGOGE.

DE locis quàm plurima scripsisse veteres, haud dubium. testis Pappus initio libri 7. qui Apollonium de locis planis, Aristæum de solidis scripsisse asseverat. Sed aut fallimur, aut non proclivis satis ipsis fuit locorum investigatio. Illud auguramur ex eo quod locos quàm plurimos non satis generaliter expresserunt, ut infra patebit.

Scientiam igitur hanc propriæ & peculiari analysi subjicimus, ut deinceps generalis ad locos via pateat.

Quoties in ultima æqualitate duæ quantitates ignotæ reperiuntur, fit locus loco, & terminus alterius ex illis describit lineam rectam, aut curvam, linea recta unica & simplex est, curva infinita, circulus, parabole, hyperbole, ellipsis, &c.

Quoties quantitatis ignotæ (lineæ rectæ reponendum) terminus localis describit lineam rectam, aut circularem, fit locus planus: at quando describit parabolem, hyperbolem, vel ellipsim, fit locus solidus: si alias curvas, dicitur locus linearis. De hoc nihil adjungemus, quia facillimè ex planorum & solidorum investigatione, linearis loci cognitio derivabitur, mediantibus reductionibus.

Commode autem possunt institui æquationes, si duas quantitates ignotas ad datum angulum constituamus, quem ut plurimum rectum sumemus, & alterius ex illis positione datæ terminus unus sit datus, modò neutra quantitatum ignotarum quadratum prætergrediatur, locus erit planus aut solidus, ut ex dicendis clarum fiet.

A

2 Varia Opera.

Recta data positione sit N Z M. cujus punctum datum N. N Z. æquetur quantitati ignotæ A. & ad angulum datum N Z I. elevata recta Z I. sit æqualis alteri quantitati ignotæ E. D in A æquetur B. in E. Punctum I. erit ad lineam rectam positione datam.

DA § BE.

Erit enim ut B ad D. ita A. ad E. Ergo ratio A ad E. data est, & datur angulus ad Z. triangulum igitur N I Z. specie, & angulus I N Z. Datur autem punctum N. & recta N Z. positione. Ergo dabitur N I. positione, & est facilis compositio.

Ad hanc æqualitatem reducentur omnes, quarum homogenea partim sunt data, partim ignotis A & E admixta, vel in datas ductis, vel simpliciter sumptis.

Zp — DA § B in E.

fiat D in R. æquale Zp

Erit ut B. ad D. ita R — A ad E.

Fiat M N. æqualis R. dabitur punctum M. ideoque M Z. æquabitur R — A. dabitur ergo ratio M Z. ad Z I. sed angulus ad Z. datur: ergo triangulum I Z M. specie, & concludetur rectam M I. junctam dari positione: ideoque punctum I. erit ad rectam positione datam: idemque nullo negotio concludetur in qualibet æqualitate cujus homogenea quædam afficientur ab A. vel E.

Et est simplex hæc & prima locorum æqualitas, cujus beneficio invenientur loci omnes ad lineam rectam; verbi gratia 7. prop. lib. 1. Appollonii de locis planis, quæ generaliùs jam poterit enuntiari & construi.

Huic æqualitati subest pulcherrima propositio sequens, quam illius ope deteximus.

Si sint quotcumque lineæ positione datæ atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ in datis angulis, sit autem quod sub ductis & datis efficietur dato spatio æquale, punctum rectam lineam positione datam continget.

Infinitas omittimus, quæ Appollonianis meritò possent opponi.

Secundus hujusmodi æqualitatum gradus est, quando,

A in E. æq. Z. pl. AE § Zp

quo casu punctum I. est ad hyperbolem.

Fiat N R. parallela Z I. sumatur in N Z. quodvis punctum, ut M. à quo ducatur M O. parallela Z I. & fiat rectang. N M O. æquale Z pl. per punctum O. circa asymptotos N R. N M. describatur hyperbole, dabitur positione, & transibit per punctum I. cùm ponatur rectang. A. in E. sive N Z I. æquale N M O. ad hanc æqualitatem reducentur omnes quarum homogenea partim sunt data vel ab A. vel E aut A in E. affecta.

图 2　费马《平面与立体轨迹概要》（采自 1861 年《费马全集》）

三类圆锥曲线最初是古希腊人用平面截圆锥而发现，所以圆锥曲线属于立体轨迹。直到笛卡儿创立解析几何，人们才开始用代数方法来研究包括圆锥曲线在内的动点轨迹。[7][8]

2.3 初步设计

HPM 专业学习共同体实现了教学资源的共享。执教者在研读有关轨迹的史料后，提出疑惑：《几何原本》中的命题固然很好，但并不适合学生现有的认知基础，如何有效地将其融入课堂教学？高校研究者提出，可以结合教科书例题，对史料进行适当地改编。《几何原本》命题 I.35 是图形（线段）运动形成的轨迹，而本课题针对的是点的轨迹，可以改用命题 I.37：“在同底上且在相同两平行线之间的三角形彼此相等。”该命题实际上也体现了轨迹思想，可以改编为轨迹问题：“底边固定且面积保持不变的三角形顶点的轨迹是什么？”

在数学家刘薰宇（1896-1967）所编的初中平面几何课本中，关于轨迹问题的讲授分 3 次出现，其中第二次正是在讲过平行四边形性质（平行线间的高处处相等）之后提出第四个基本轨

迹：与一已知直线距离等于定长的点的轨迹，是位于此直线两侧，且与已知直线平行、其距离等于定长的两条直线[9]，这与古希腊人的观点一脉相承。因此，已有史料需要经过裁剪和加工，由学术形态转变为教育形态，再用于教学设计。

在疑惑得到解决之后，执教者结合其所在学校采用的“翻转课堂”的教学方式，拟定教学目标如下：

（1）理解点的轨迹的意义，并能说出三种基本轨迹；

（2）能够画出符合条件的点的轨迹；

（3）通过寻找数学史中一些轨迹问题，感知集合的思想，体会古人对轨迹的研究。

执教者初步完成的教学设计I见表 1。

表 1 教学设计I

教学环节	教学过程	数学史素材
课前准备	学生观看 HPM 微视频，阅读教科书第 108-110 页。	费马的轨迹思想
检查自学	学生以小组为单位，组内说说什么是点的轨迹以及三大轨迹。再通过两道思考题了解学生自主学习情况。	
解决问题	通过 3 个常规习题，学生独立运用三大轨迹解决问题。	
探究轨迹	先通过上一环节的习题，归纳寻找轨迹的方法。再探究阿波罗尼奥斯的轨迹问题和基于《几何原本》改编的问题串。	阿波罗尼奥斯《平面轨迹》中的轨迹命题
课堂小结	学生总结感受与概念认识，执教者引发思考：在生活中只有点有轨迹吗？	
布置作业	问题串中部分习题与配套练习册的对应练习。	

课前 HPM 微视频的内容如下：

（1）通过生活实例（流星、单摆、导航）让学生体会生活中的“轨迹”是符合某些条件的点的集合；

（2）“轨迹”的字面意义，即什么叫“轨”，什么叫“迹”；

（3）结合三大基本轨迹，理解“轨迹”概念的纯粹性和完备性；

（4）费马的轨迹思想。

3 研讨与设计

研讨环节由三个部分组成。首先，对接本课例的高校研究者对历史材料进行解读，并对已有的教学设计进行总结；其次，执教者汇报自己的初步设计以及困惑；最后，全体参与人员就教学设计展开研讨。

3.1 历史分析

在数学史文献研究的基础上，高校研究者对轨迹的历史材料及其教学启示作了总结和分析，具体内容见表 2。

表 2 有关“轨迹”的史料及教学启示

时间	史料	教学启示
公元前 4 世纪	希皮亚斯为三等分角发明割圆曲线	揭示“轨迹”概念产生的历史动因，体现从有限个点中想象无数个点的思维以及运动对轨迹生成的重要性。
	阿契塔提出曲线是点的轨迹，曲面是曲线移动产物	学生在小学学习过多种图形，七年级接触图形的运动，这样的顺序符合学生的认知规律，体现古今从静态数学到动态数学的认知心理序具有历史相似性。
公元前 3 世纪	欧几里得《几何原本》命题 I.37	说明欧氏几何命题看似研究静态的图形性质，实则隐含动态的轨迹思想。学习轨迹可展示曲线的形成过程，揭示曲线的特征属性，帮助学生理解概念学习的必要性。
	阿波罗尼奥斯平面轨迹系列问题	可揭示基本轨迹的来源，通过改编史料可提出更多的轨迹问题以供学生探究。
14 世纪	奥雷姆用几何图形来表征点的运动	古人的轨迹思想为轨迹的形成提供了又一视角，可直观说明运动使得有限的点（一个端点）能衍生出无数个点，同样说明了运动对轨迹生成的重要性。
17 世纪	费马的轨迹思想	
	笛卡儿对圆锥曲线的研究	圆锥曲线是高中数学中的典型轨迹，其中椭圆、双曲线与初中数学所涉及的部分轨迹一样，都与定点有关，可作为拓展探究内容。

3.2 交流研讨

基于以上教学启示，HPM 学习共同体针对执教者的初步设计开展研讨。首先通过分析教学设计I发现，执教者在“探究轨迹”环节预设通过改编史料提出问题，有助于提高学生问题解决能力与创造力，值得肯定。其次，执教者对数学史的选取虽符合科学性，但有以下不足：

- 选用的史料较少，无法真正发挥数学史在轨迹教学中的价值；
- 数学史融入数学教学时所采用的方式较为单一，仅在视频中使用了复制式和在“探究轨迹”环节使用了顺应式编制数学问题。

高校研究者建议执教者可利用数学史解释“轨迹”概念的来源，揭示概念学习的必要性，激发学生的学习动机，还可运用附加式向学生介绍相关数学家的生平趣事，提高学生的学习兴趣。

高校研究者还建议，微视频的背景音乐可采用王洁实、谢丽斯所唱的校园歌曲《脚印》，伴随着歌词“朋友啊想想看，洁白如雪的大地上，该怎样留下脚印一串串”引发学生思考人生的轨迹该怎么走。

研讨过程中，执教者想到上学期的教学经验让其意识到“运动”是关键，希望从费马的直线轨迹出发结合奥雷姆的思想强调“运动”的重要性，但试图融入自己的理解：变线段可以垂直于固定直线，对应奥雷姆的思想，也可以与固定直线成一夹角。执教者不知这样做是否符合科学性，在与 HPM 学习共同体成员交流后确定了这一想法的可行性，并决定将这一内容用几何画板做成动画加入到微视频中。

3.3 设计改进

执教者根据历史启示与研讨结果，将教学目标前两点修正为：（1）依据实际生活中的轨迹形象，理解点的轨迹的意义；（2）分别从完备性和纯粹性的角度理解三条基本轨迹的意义，能够运用基本轨迹和描点法画出符合条件的点的轨迹。同时，执教者对初步教学设计进行了改进，形成教学设计II，见表 3。

4 实施与反馈

4.1 第一轮教学

第一轮教学为试讲，开课班级的学生成绩属于中等水平（同正式课班级），执教者根据教学

表 3 教学设计II

教学环节	教学过程	数学史素材
课前准备	同教学设计I	同教学设计I
自学检查	以小组为单位，说说什么是点的轨迹以及三大轨迹。 思考题 1：如何理解轨迹的定义； 思考题 2： （1）以已知线段 AB 为底边的等腰ΔABC 的顶点 C 的轨迹。 （2）以已知线段 AB 为腰的等腰ΔABC 的顶点 C 的轨迹。这两个问题与基本轨迹有关吗？可运用哪个基本轨迹解决问题？为什么？	阿波罗尼奥斯《平面轨迹》中的轨迹命题
问题解决	练习 1： （1）在$\angle POQ$ 的内部到角的两边距离相等的点的轨迹； （2）到点 A 和点 B 的距离相等的点的轨迹； （3）经过定点 M 且半径为 2cm 的圆的圆心的轨迹。	阿波罗尼奥斯平面轨迹》中的轨迹命题
轨迹探究	1. 核对练习 1，归纳寻找轨迹的方法； 2. 练习 2：探究根据阿波罗尼奥斯《平面轨迹》一书中的问题改编而成的问题： （1）到两条定直线的距离之比等于 1 的点的轨迹； （2）到两条定直线的距离之比等于 2 的点的轨迹； 3. 练习 3：回顾费马轨迹思想后探究以下问题。 已知：以线段 AB 为一边的ΔABC，且 AB = 3cm， （1）画出与ΔABC 的面积相等的顶点 C 的轨迹； （2）画出ΔABC 是等边三角形的顶点 C 的轨迹； （3）画出使得 $AC\perp BC$ 的顶点 C 的轨迹； （4）画出使得 $AC+BC=3/4$ 的顶点 C 的轨迹； （5）画出使得 $AC-BC=2$ 的顶点 C 的轨迹。	阿波罗尼奥斯《平面轨迹》中的轨迹命题 费马的轨迹思想 《几何原本》命题I.37
课堂小结	学生总结感受与概念认识，执教者引发思考：在生活中只有点有轨迹吗？	
作业布置	练习 3 中习题 4、5 与配套练习册中对应练习。	

设计II实施教学。课后，执教者反思其教学过程，认为主要存在以下问题：

（1）学生对轨迹纯粹性与完备性的辨析仍存在障碍，决定用几何画板辅助其慢慢理解；

（2）例题过多，时间有限只够完成 5 个教学环节，重要的“轨迹探究”环节无法完成，需要调节教学内容；

（3）数学史插入略显生硬，导致学生对数学史的学习兴趣不高，决定加入数学家的简介。

据此，执教者再次修正教学目标，对数学史作用的界定更加具体且多元，从“体会古人对轨迹的研究”调整为“了解古代数学家的轨迹思想，感受古人在研究轨迹中的智慧，体会数学的理性精神和人文情怀”。通过调整教学设计II，形成教学设计 III，见表 4。

表 4 教学设计III

教学环节	教学过程	数学史素材
课前准备	同教学设计I	同教学设计I
检查自学	思考题 1：如何理解轨迹的定义； 思考题 2：在费马的轨迹思想中理解轨迹的意义，初识费马。	费马的生平
回顾理解	1. 运用几何画板演示理解三大基本轨迹，感受轨迹的纯粹性和完备性； 2. 组内互相说一说三大基本轨迹； 3. 介绍三大基本轨迹源于《平面轨迹》一书，并简介其作者：古希腊数学家阿波罗尼奥斯。	阿波罗尼奥斯的生平与著作
解决问题	练习 1：问题（1）、（2）同教学设计II中的思考题 2； （3）与已知两条相交直线 l_1、l_2 距离相等的点的轨迹。	同教学设计II
探究轨迹	练习 2：源自古希腊欧几里得《几何原本》的轨迹问题：已知以线段 AB 为一边的ΔABC。 （1）画出与ΔABC 的面积相等的顶点 C 的轨迹； （2）画出使得 $AC\perp BC$ 的顶点 C 的轨迹。	欧几里得《几何原本》
课堂小结	同教学设计II	
布置作业	1. 探究根据阿波罗尼奥斯《平面轨迹》一书中的问题改编而成的问题： （1）到两条定直线的距离之比等于 1 的点的轨迹； （2）到两条定直线的距离之比等于 2 的点的轨迹； 2. 已知：以线段 AB 为一边的ΔABC，且 $AB=4$cm，画出使得 $AC+BC=6$ 的顶点 C 的轨迹。	阿波罗尼奥斯《平面轨迹》中的轨迹命题 立体轨迹之椭圆

4.2 第二轮教学

4.2.1 教学实施

本轮教学为正式授课，部分高校研究者和 HPM 工作室部分教师均前往观课。在教学设计中，一方面，添加了更多的数学史料，尤其是相关数学家的介绍，成功吸引了学生的注意力，而学生对数学家关注度的提高有助于增加其对所学知识的兴趣。另一方面，增加了对三大基本轨迹来源的追溯，揭示了欧几里得从静态中窥探出动态的轨迹思想，运用信息技术生动地再现了当初数学家费马头脑中的轨迹思想，这些对学生而言都是一种再创造的过程，是一种鲜活的教学形态的数学史。数学史的融入也使得执教者从最初设计 12 道习题精简为 8 道习题，打破精讲多练的常规教学模式，做到以文“化”人。

4.2.2 学生反馈

首先，分析全班 40 名学生的作业完成情况，第 1 题需要利用分类讨论的思想，作答学生较少。第 2 题作答率高但正确率仅为 22.5%，错因包括：（1）没有耐心，描点法只画了几个点便猜测轨迹形状，出现诸多错误的结果如圆、一段曲线等；（2）仅画出图形没有用文字语言描述轨迹；（3）所描点没有符合条件；（4）没有对猜想进行纯粹性和完备性的思辨。

但值得欣喜的是，从解题方法的多样性也看到了学生的创新精神和探究精神。对于第 1 题第（2）问的解答，一位学生不仅完整地讨论了两条直线平行或相交的情况，而且关于相交直线给出了特殊情况和一般情况的思考：当两条定直线互相垂直时，实际上满足条件的点的轨迹为 4 条相交直线，并且联想到正十二边形的对角线满足条件，由此得到启发，将一般情况下“距离之比等于 2”转换为“角度之比为 2”，但又想到尺规作图不能将一个角三等分，于是利用尺规作图尝试探究并构造出一个正四十八边形，虽然结果不正确，但其探究精神可嘉。

对于第 2 题的解答，一名学生采用了操作法：他把卫衣上的绳子拉下来，打了两个结，形成一段 6 厘米的部分，然后把两个圆规的尖端分别插在纸上距离为 4 厘米的 A、B 两点上，再把笔放上去绕着绳子运动。该学生的做法和荷兰数学家舒腾一致，具有显著的历史相似性。另一名学生从特殊点出发，他先在线段 AB 的垂直平分线上找出满足条件的点 P，并发现当点 P 向左移动时，PA 缩短，PB 增大相应数值，往右移时同理，由此得到轨迹是椭圆。该学生对平面几何的经验、观察、归纳、猜想产生了数学直觉。苏联著名物理学家福克指出，伟大的，以及不

仅是伟大的发现，都不是按逻辑的法则发现的，而是由猜测得来的；换句话说，大都是凭创造性的直觉得来的[10]。

其次，我们在授课后就认知和情感方面对学生进行调查。结果显示，学生对轨迹的概念意象主要可以归为以下六类：第一类意象来自于运动观点；第二类意象来自于集合观点（符合条件的点集）；第三类意象是数学实例，例如抛物线；第四类意象是生活实例，例如钟摆、天体运行轨道、足球踢出时的弧线；第五类意象是三大基本轨迹；第六类意象是对轨迹图形形状的归纳，例如可曲可直。而对 HPM 微视频的情感调查显示，40%的学生最喜欢视频中介绍的费马轨迹思想，因为能更详细地了解“轨迹”的来源及其作者。有学生认为，这样的内容是数学与历史的结合，使得教学内容的知识面更广泛，不再拘泥于教材。有一位学生表示非常喜欢视频的背景音乐《脚印》；另一位同学联想到周杰伦也有一首歌叫《轨迹》；更有一位同学提出，我们学习也要有层层递进的“轨道”。

4.2.3 课后评议

第二轮教学后，来自执教者所在区其他学校的观课教师与 HPM 工作室教师、高校研究者都进行了评课。与已有的轨迹教学设计相比，HPM 视角下的轨迹课例有许多创新之处。一是翻转课堂的形式与数学史的融洽结合，课前 HPM 微视频是“前滚翻”，学生自学新知、了解费马的轨迹思想，课后完成“平面轨迹”中的问题是“后滚翻”，学生巩固新知、体会分类讨论的思想；二是数学史的自然融入，执教者问学生“想知道是谁提出三大基本轨迹吗？”，将数学史自然地与教学重点有机结合，而且教师讲授时将阿波罗尼奥斯与学生熟识的欧几里得、阿基米德一同比较，将数学史的融入建立在学生已有认知基础之上；三是教学语言的艺术性，执教者将学术性语言通俗化，关于纯粹性、完备性的辨析，执教者采用“正过来”、“反过去”的说法更加通俗易懂；四是小细节和大格局的转化，执教者多次耐心引导学生使用描点法时要多描些点，体现一步一个脚印的小细节，而 HPM 微视频的背景音乐则提示学生对人生轨迹加以思考，将教学内容上升到人生大格局。

最后，高校研究者总结，本节课首次将数学史融入“轨迹”概念的教学，为古希腊轨迹问题赋予了生命力，可以说创造了历史；数学史在营造探究之乐、实现能力之助、展示文化之魅和达成德育之效等方面，都发挥着积极的作用。但本节课的设计还有改进的空间。轨迹概念的产生一方面源于数学外部，例如流星等现实生活中的现象；另一方面也源于数学内部，在解决

三大几何难题的过程中，古希腊数学家希皮亚斯利用点的运动构造新曲线，从而产生了轨迹思想。之后，以欧几里得为代表的古希腊数学家在静态的几何命题中感悟到动点轨迹。如果能够借鉴历史，从数学内部和外部两条路径来设计教学，就能更好地构建“知识之谐”，激发学生的学习动机，加深学生对轨迹的理解。

5 整理与反思

5.1 执教者反思

第二轮教学后，执教者对本节课进行了深刻反思，发现还有以下几点可改进：

其一，同行评议使执教者意识到数学史料还可以通过多种渠道渗透，例如有同行建议可以印发完整的轨迹史料供学生自行阅读，不同层次的学生学习后的收获不一，也可以让学生课后针对史料的学习心得进行交流讨论；

其二，作业题 1 较难且两个小题都需要花费较多时间，导致很少有学生完成，进而影响作业题 2 的完成情况，学生反馈让执教者意识到利用数学史改编题目还需考虑梯度的层层递进。而且执教者原本觉得作业题较难企图删去，但最后还是决定保留，分析学生反馈后执教者发现个别学生探究兴趣浓厚，意识到不能因为教师觉得难而剥夺了学生的探究机会。

5.2 执教者 MKT 的发展

本次课例研究前后历经 3 个月，执教者全程认真参与，其教学知识是否发生了变化？研究者基于 Ball 的 MKT 理论框架[11]，通过访谈与执教者的反思，了解执教者在课例研究过程中的教学知识变化情况及其与数学史的关系。分析发现，执教者的 MKT 主要有以下几方面的发展。

（1）在水平内容知识上，执教者领会到轨迹在数学外部（运动形成轨迹）和数学内部（静态曲线不够用，所以通过轨迹构造曲线解决问题）的重要作用；

（2）在专门内容知识上，执教者不仅知道了轨迹的历史演变过程，还知道了古人为什么会发明轨迹概念，以及三个基本轨迹源于古希腊阿波罗尼奥斯的著作。

（3）在内容与学生知识上，执教者在顺应数学史料改编习题时，原本预判作业题 2 学生采用描点法可以得到答案，结果欣喜地发现学生对轨迹的探求具有历史相似性；

（4）在内容与教学知识上，执教者认为，欧几里得《几何原本》中，把命题中的图形视为轨迹也是对图形的一种定义，但轨迹并不是指某一种图形，而是对相当广泛的一类有规律的图

形的概括。这与以前所教的对一种确定的图形（如三角形、平行四边形）的定义大不相同。根据定义，轨迹是点集，也是图形，但反之则不然。这让执教者意识到教学时应强调：并不是任何图形（点集）都是轨迹，只有满足一定条件的图形才是轨迹。例如随意画一个图形，未阐明其上所有点的共同规律时，就不能说它是轨迹。所以执教者在视频中设置问题启发学生思考：笔在纸上写下的痕迹是轨迹吗？

（5）在内容与课程知识上，执教者通过研讨判断“运动”是学生学习轨迹的关键障碍，在研讨中认识到要充分利用 HPM 微视频、几何画板等教育信息技术突破难点，既将数学课程知识转化为学生易于接受、乐于学习的形式，又顺应了“互联网+HPM”的教育发展趋势。

6 结语

在“轨迹”课例的形成过程中，所聚焦的问题部分得到了解决：轨迹概念的诞生有数学内部的原因，也有数学外部的原因，其中内部原因是几何难题的求解；但教学设计在揭示这两种动因方面还有待于完善。除三类基本轨迹之外，教学中还解决了根据数学史料改编的新轨迹问题或问题串。本课例体现了数学史的多元教育价值：根据数学史料改编的轨迹问题，营造了探究之乐；探究过程培养了学生数学抽象、逻辑推理、直观想象等素养，实现了能力之助；再现历史上数学家的轨迹思想，揭示知识源流，展示了文化之魅；培养学生的理性思维，揭示数学背后的人文精神，启发学生思考人生轨迹，彰显了德育之效。

本次课例研究最终形成了“轨迹”课例，为未来初中“轨迹”概念教学提供了借鉴；同时，课例研究也促进了执教者的专业发展，凸显了专业学习共同体交流合作的重要性。但也存在若干不足之处。

（1）缺乏两项前测数据。一是没有对学生进行前测。本次课例研究只跟进学生对教学内容的反馈，没有调查学生在上课前经过自学后的学习效果。应收集前测与后测数据，通过比较分析数学史融入数学课堂对学生的影响。二是没有针对执教者的 MKT 进行前测。本次课例研究从访谈与执教者反思窥探执教者 MKT 的发展，通过前后测对比，能更全面客观地反映执教者 MKT 的变化。

（2）没有考察课例研究对专业学习共同体其他成员的影响。HPM 专业学习共同体实现了教学资源的共享，随着课例开发的进展，应考察专业学习共同体其他成员是否有收获，如：他

们对 HPM 的教学理念是否更为认同？他们在教学中应用数学史的意识是否增强？他们对数学史教育价值是否有新的理解？等等。

学无止境，教无止境，HPM 课例研究也永无止境！

参考文献

[1] 汪晓勤, 栗小妮. 数学史与初中数学教学：理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019.

[2] Merzbach, U. C., Boyer, C. B. *A History of Mathematics* [M]. New Jersey: Wiley, 2011: 62-63.

[3] 何思谦. 数学辞海第一卷[M]. 太原: 山西教育出版社, 2002: 159.

[4] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1908.

[5] Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics* [M]. Oxford: Clarendon Press, 1921: 185-189.

[6] 汪晓勤, 柳笛. 平面解析几何的产生（二）—— 费马与解析几何[J]. 中学数学教学参考, 2008 (1-2): 122-122.

[7] 汪晓勤. 椭圆第一定义是如何诞生的?[J]. 中学数学月刊, 2017(6): 28-31.

[8] 邹佳晨. 椭圆的历史与教学[D]. 华东师范大学, 2010: 29.

[9] 潘关崇. 我如何讲解初中平面几何的轨迹问题[J]. 数学通报, 1955 (7): 39-43.

[10] 李昌官. 追寻直觉背后的逻辑与引领逻辑的直觉[J]. 数学教育学报, 2018, 27(4): 76-81.

[11] 黄友初. 基于数学史课程的职前教师教学知识发展研究[D]. 华东师范大学, 2014.

HPM 视角下的类比推理教学 *

纪妍琳

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

《普通高中数学课程标准》（2017 版，下简称《课标》）提出，逻辑推理素养主要表现为：掌握推理基本形式和规则，发现问题和提出命题，探索和表达论证过程，理解命题体系，有逻辑地表达与交流[1]。逻辑推理包括两类：从特殊到一般的归纳、类比和从一般到特殊的演绎推理。得到数学命题主要依赖归纳和类比，证明数学命题主要依赖演绎[2]。《课标》第一次明确归纳推理、类比推理与演绎推理一样，都是有逻辑的思维形式[3]。因此，类比推理是培养学生逻辑推理素养过程中不可忽视的重要内容。然而，类比推理教学的成功案例并不多见，恰当的类比推理教学模式也有待于建立[4]。

另一方面，尽管 HPM 专业学习共同体已陆续开发了一系列课例，但这些课例大多属于新授课，复习课并不多见，而高三复习课更是寥若晨星。如何在高三复习课中运用数学史，是值得研究的重要课题。众所周知，高三复习课注重知识综合，注重思想方法，注重培养学生分析和解决问题的能力。针对高三复习课的特点，要开发较为理想的高三数学课例，将历史上数学家的思想方法融入教学，可能是一条可行的途径。

为此，我们对有关类比推理的数学史料进行梳理，从中提炼比推理的特点，选取合适的素材，在高三复习课中实施类比推理的教学。

2 数学史料及其运用

2.1 基于类比推理的数学发现

历史上，类比推理是数学家们获得数学发现的重要途径。古希腊数学家阿基米德

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目——数学课程与教学中如何落实立德树人任务的研究（A8）系列论文。

（Archimedes，前 287-前 212）在《论方法》中写道：“……由圆面积等于以它的周长为底，以它的半径为高的三角形面积这一事实进行推断，我认识到同样应有，球体积等于以球的表面积为底、半径为高的圆锥的体积”[5]。阿基米德通过类比推理，由圆面积与其周长的关系，类比得到球体积与其表面积的关系：因

$$V=\frac{1}{3}SR=\frac{4}{3}\pi R^3$$

故得球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

17 世纪，英国数学家牛顿（I. Newton, 1643-1727）通过类比，得出有理数指数的二项式定理。18 世纪，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）通过将有限次代数方程根与系数的关系类比到无限次方程，解决了“自然数平方倒数和”这一难题[6]。19 世纪，法国数学家普鲁埃（E. Prouhet）类比三角形的九点圆，发现了四面体的十二点球[7]。

美籍匈牙利数学家波利亚（G. Pólya, 1887-1985）说过：“类比是一个伟大的引路人”[8]，波利亚在《数学与猜想》、《数学的发现》和《怎样解题》中对类比推理均有论述。

在《数学与猜想》和《数学的发现》相关章节的习题中，波利亚设置了许多有关类比推理的练习。例如，在《数学的发现》、《数学与猜想》中，波利亚给出了许多例子[8][9]：

- 证明：若空间二直线为三个平行平面所截，则相应的截线段成比例（提示：类比较简单的定理）；
- 证明：平行六面体的四条对角线交于一点，且各互相平分（提示：类比较简单的定理）；
- 证明：三面角中，每两个二面角之和总大于第三个（提示：类比较简单的定理）；
- 平面几何中有如下定理：“三角形的三条角平分线交于一点，该点是其内切圆的圆心”，类比上述定理，叙述一个立体几何定理；
- 平面几何中有如下定理：“等腰三角形的底边上的高经过底边中点”，类比上述定理，叙述一个立体几何定理。

2.2 类比方向的多样性

波利亚指出：“比较平面几何与立体几何，我们首先发现平面上的三角形与空间的四面体可作类比，其次三角形与棱锥可作类比，这两种类比都是合理的，它们各有其价值，在平面几何与利益几何之间有若干类比关系，而不只一个特殊的类比。”[9]这表明，类比的方向和结论具有

多样性。例如，波利亚在《数学的发现》与《数学与猜想》中分别设置了类比勾股定理和海伦公式的问题 [9][10]：

- 一个长方体的长、宽、高分别为 a，b 和 c，求对角线长 d（$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，类比勾股定理）；
- 一个长方体有公共顶点的相邻三个面的对角线长分别为 p、q 和 r，求其对角线长 d（$d=\sqrt{\dfrac{p^2+q^2+r^2}{2}}$，类比勾股定理）；
- 过四面体某个顶点的三条棱两两互相垂直，该顶点的三条对边长分别为 a、b 和 c，求该四面体的体积 V（$V=\dfrac{1}{6}\sqrt{\left(s^2-a^2\right)\left(s^2-b^2\right)\left(s^2-c^2\right)}$，其中 $s=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}$，类比三角学面积的海伦公式 $A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$）；
- 已知四面体一个面的三条棱的长度分别为 a、b 和 c，且四面体的每一条棱与其对棱等长，求该四面体的体积 V（$V=\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(s^2-a^2\right)\left(s^2-b^2\right)\left(s^2-c^2\right)}$，其中 $s^2=p^2+r^2+q^2$，满足条件的四面体可通过在长、宽、高分别为 p、q 和 r 的长方体中连结各个面对角线得到，如图 1 所示）。

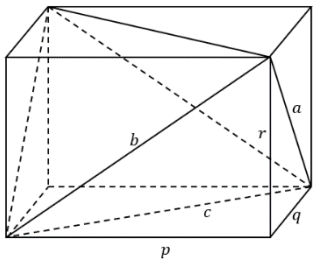


图 1

实际上，早在 16 世纪，意大利艺术大师弗朗西斯卡（P. della Francesca, 1412-1492）已经通过类比海伦公式，得到用棱长表示的任意四面体的体积公式[11]。18 世纪，欧拉再次获得了类似的公式。

2.3 由类比推理得到的错误命题

历史上，由类比推理所得出错误结论的例子很多。古代印度数学家阿耶波多（Āryabhaṭa, 476-550）在《阿耶波多历数书》“数学篇”中，类比三角形面积公式得出错误的三棱锥体积公式：三棱锥体积等于底面积与高的乘积的一半；由半径为 R 的圆面积等于边长为 $\sqrt{\pi R^2}$ 的正方形面

积，类比推理得到半径为 R 的球体积等于边长为 $\sqrt{\pi R^2}$ 的立方形体积，进而得到半径为 R 的球体积公式：

$$V=\pi R^2\sqrt{\pi R^2}$$

7 世纪印度婆罗摩笈多（Brahmagupta, 598-670）类比海伦公式，得出错误的一般四边形面积公式[12]

$A=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$（$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$）。

13 世纪意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci,1175-1250）由圆与其外切正方形的周长之比等于它们的面积之比（$C_{圆}:C_{方}=S_{圆}:S_{方}=\pi:4$），类比得到错误的命题：椭圆与其外切长方形周长之比等于它们的面积之比（$C_{椭圆}:C_{矩形}=S_{椭圆}:S_{矩形}$），进而得到了错误的椭圆周长公式

$$C_{椭圆}=\pi(a+b)$$

其中 a 和 b 分别为椭圆的长短半轴。[12]

2.3 数学史料的运用

类比推理的相关史料揭示了类比推理的特点：创造性、或然性和结论的多样性。阿基米德、牛顿、欧拉等通过类比作出重要发现，体现了类比推理的创造性；阿耶波多、婆罗摩笈多、斐波那契等运用类比推理得出错误结果，体现了类比所得到的结论的或然性；波利亚类比勾股定理和海伦公式，分别得出多个不同命题，说明类比推理的方向具有多样性，类比推理的结果不是唯一的。

另一方面，历史上数学家们进行类比推理时常常涉及圆与球、椭圆与圆、三角形与四面体、有限与无限等数学对象，说明这些对象具有较多的相似性，具备进行类比推理的条件。

以史为鉴，教师可以针对类比推理的三种特点、选择合适的数学对象进行类比推理的教学。

3 教学设计与实施

根据从数学史中提炼出的类比推理的特点，上海市某高三数学教师 A 尝试以“立体几何中的类比推理”为主题设计 HPM 视角下的高三立体几何复习课。教师将阿基米德类比推理得到球面积公式、阿耶波多类运用类比推理得到错误的四面体体积公式等数学史料融入球体积公式的

复习、四面体体积公式的复习中，在具体知识的复习中揭示类比推理的创造性与或然性，并引导学生尝试将勾股定理类比到立体几何中，在探究中揭示类比推理方向的多样性。本节将对 HPM 视角下的“立体几何中的类比推理”高三复习课的若干教学片段进行再现与分析。

3.1 从圆面积到球体积

圆与球是一对具有相似性的数学对象，适合于作为类比推理教学的研究内容。教师 A 考虑到沪教版教科书中球面积公式先于球体积公式出现，与历史顺序不同，且教科书不加证明地直接给出球的表面积和体积公式，导致学生“知其然”而“不知其所以然”。有于是将阿基米德类比得到球面积公式这一史料，重构式地融入球体积公式的复习中，让学生在探究球体积公式的过程中初步认识类比推理。

师：我们之前已经学习了球体积公式。但是，教科书直接给出了公式，并没有告诉我们它是怎么得到的，许多同学对此感到很困惑。所以，我们今天要来尝试推导球的体积公式，加深对这个公式的理解。

圆和球是非常相似的几何图形，同学们不妨回顾一下圆的面积公式的推导方法，看看能否找到推导球体积公式的思路。初中的时候，我们是怎么推导球体积公式的呢?

生：过圆心进行均匀分割，当切割的份数足够多时，我们可以将切割得到的小扇形近似看成三角形，将小三角形拼合成四边形，就可以得到圆的面积 $S_{圆}=\frac{1}{2}C_{圆}\cdot R=\frac{1}{2}\pi R^2$。

师：对的（PPT 展示图 2），初中的时候是通过“切割法”推导圆面积公式的。在推导过程中，我们得到 $S_{圆}=\frac{1}{2}C_{圆}\cdot R$，也就是说，圆的面积等于以其周长为底边、以其半径为高的三角

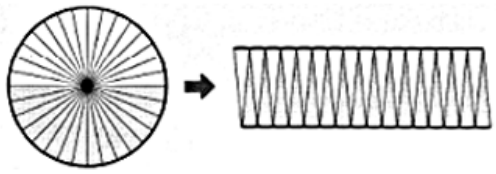


图 2 推导圆面积公式的“切割法”

形的面积。那么，能否类比圆面积公式的推导方法来推导球体积公式呢？

生：球可以由圆绕着直径旋转得到，我们可以对圆的面积与球的体积、圆的周长和球的表面积、三角形面积和圆锥体积进行类比。可通过类比得到：球的体积等于底面面积为球的表面

积、高为球半径的圆锥的体积，即$V_{球}=\frac{1}{3}S_{球}\cdot R$。那么由球的表面积公式$S_{球}=4\pi R^2$，我们就可以推导出球的体积公式啦。

师：非常好，同学们用类比推理得到的结论和古希腊数学家阿基米德所得出的结论完全一样呢！另外，德国数学家开普勒也是由球的表面积公式推出球的体积公式的，他所用的方法也是切割法。同学们思考一下，可以如何切割球体来推导球的体积公式呢？

生：推导圆面积公式时，过圆心将圆切割成了无数个小扇形；那么切割球的时候，过球心进行切割，也可以切割成无数多个小的部分。

师：非常好，过球心切割球体，如 PPT 所示（PPT 展示图 4），我们可以给切割得到的这些小的部分起名为“球面小锥体”，那么我们需要通过“球面小锥体”的体积来求球的体积。球面“球面小锥体”的体积怎么表示呢？

图 3 过球心对球进行分割

生：$V=\frac{1}{3}Sh$？但“球面小锥体”的底面是曲面，不是平面。

师：类似的问题，我们在切割圆得到小扇形的时候，是怎么处理的呢？

生：将圆切割成无数多个小扇形，那么扇形的弧就近似于直线段。那么，将球切割成无数多个小的“球面小锥体”，曲面就近似于平面上的四边形，“球面小锥体”的体积就近似于四棱锥的体积！

师：非常好，我们将球体积看成是无穷多个小棱锥的体积之和，这些棱锥的顶点在球心，底在球面上，这正是开普勒所用的方法。那么，要求小锥体体积，它的高是多少呢？

生：高是球心球面的距离，是球的半径R。

师：那底面面积要怎么求？

生：我们要求的是所有“球面小锥体”的体积之和，它们高相等，底面积之和为球的表面

积，所以体积之和为$\frac{1}{3}S_{球}\cdot R$。

师：非常好，同学们的思路就是当年开普勒的思路。但是，由于我们没有学习过微积分，有些表述还不够严谨，日后同学们可以再进行完善。开普勒正是用这样的方法，由球的表面积公式推导出球体积公式。但是，历史上，球的体积公式的发现是早于球的表面积公式的，有许多数学家用不同的方法推导球体积公式，我们一起通过微视频回顾一下历史上都有哪些精彩的方法吧。（播放微视频）

在球体积公式的复习中，教师 A 基于学生初中所学的有关圆面积公式推导的知识，重构式地融入史料，基本上实现了知识的历史序、逻辑序和学生心理序的统一。微视频则拓宽了学生的视野。在这个过程中，学生通过类比推理得到关于球体积公式的猜想，既加深了对球体积公式的理解，又获得了对类比推理创造性的认识。

3.2 从勾股定理到“立体几何中的勾股定理”

由波利亚对勾股定理和海伦公式的多种类比可见，当从不同的角度认识类比对象时，从同一事物出发往往可以作出不同的类比。教师 A 将《数学的发现》中的内容作为类比推理教学的素材，选择其中的“类比勾股定理，给出空间中相似的一个定理”作为“立体几何中的类比推理”一课中的探究性问题，让学生通过具体的例子尝试进行类比推理，同时揭示类比推理方向的多样性。

师：在 RtΔABC 中，两直角边分别为 a 和 b，斜边为 c，则有 $a^2+b^2=c^2$，这就是同学们耳熟能详的勾股定理。同学们能否将其类比到空间中，得到“立体几何中的勾股定理”？

生：……（陷入思考）

师：要将命题类比推理到空间中有些难度，那么我们不妨先将直角三角形的概念类比到空间中。

生：三角形可以类比为四面体。

师：那直角三角形呢？我们把由一个顶点出发的两条边互相垂直的三角形称为直角三角形。能不能有类似的“直四面体”的定义？

生：过同一顶点的三个面两两互相垂直的四面体称为直四面体。

师：非常好。那么，可否将勾股定理类比到直四面体中呢？同学们思考一下。

（交流讨论，学生尝试进行类比推理）

生：（教师 PPT 展示图 4）直四面体 *O-ABC* 中 $\left(S_{\Delta ABC}\right)^2=\left(S_{\Delta AOB}\right)^2+\left(S_{\Delta AOC}\right)^2+\left(S_{\Delta BOC}\right)^2$。

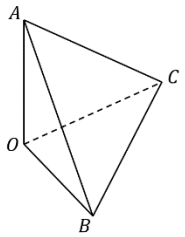


图 4 四面体 *O-ABC*

师：你是怎么想到的？

生：将直角三角形的边长类比为四面体各个面的面积。

师：很好，那为什么将边长的平方类比为面积的平方而不是面积的立方呢？

生：这个没有仔细想，就只考虑了元素的类比。

师：嗯，非常好，那到底是平方对，还是立方对呢？

生：可以用特殊情况带入检验一下。

师：嗯这是一个非常聪明的做法，同学们尝试用特殊情况检验一下，哪个更为可靠些？

生：平方更可靠。

师：好的，我们通过检验得到了一个更为可靠的猜想，但这并不意味着这个命题就是证明的，要说明其正确性，还需要通过严谨的证明。

（师生共同探究命题的证明）

师：同学们将勾股定理类比到直四面体，得到了“四面体”中的勾股定理，我们也一起严格证明了这个命题。那么，由勾股定理，同学们还能类比出其他不同的命题吗？

生：……（陷入思考）

师：数学家波利亚在其著作《数学的发现》中对勾股定理进行类比，和同学们一样类比得到“四面体中的勾股定理”之外，他还将勾股定理类比到长方体中，得到另外两个不同的命题。

生：类比到长方体中？

师：对的，当我们将勾股定理视为长方形对角线的性质时，我们可将其类比到长方体中。波利亚说过，在平面几何与立体几何之间有若干类比关系，而不只一个特殊的类比。

生：类比推理的方向可以是不唯一的。

师：对的，同学们总结得非常好，类比推理的方向有多样性。不仅仅是勾股定理，波利亚对海伦公式也作出了多个不同的类比。同学们课后可以再深入探究。

在类比推理教学中，强调类比推理结论的唯一性是类比推理教学中十分常见的现象。然而，从同一事物出发能得到许多不同的数学命题，这恰恰是类比推理作为数学发现的重要方式之一的巧妙之处。因此，在类比推理教学中应该揭示其方向的多样性。

当学生将勾股定理类比到直四面体 *O-ABC* 中时，教师 A 除对学生的类比结果表示肯定外，还可提出波利亚在《数学的发现》中将勾股定理类比到长方体中的做法，启示学生可以从更多的方向进行类比推理。更进一步地，教师向学生说明波利亚对海伦公式的多角度类比，强调类比推理的结论是多样化的，培养创新的意识与能力。

3.3 从三角形面积到四面体体积

类比推理所得的结论具有或然性，历史上数学家通过类比得出错误结论的例子比比皆是。《普通高中数学课程标准》（2017 版）中也明确指出，学生应该“知道通过类比推理得到的结论是或然成立的”[1]。教师 A 利用古代印度数学家阿耶波多类比错误得到的三棱锥体积公式对照学生所犯的类似错误，在进行复习四面体的体积公式时的同时说明了类比推理的或然性，帮助学生正确、全面地认识类比推理。

师：同学们，屏幕上的三棱锥体积公式正确吗？

（PPT 展示阿耶波多错误类比三角形面积公式得到错误的三棱锥体积公式：$V=\frac{1}{2}Sh$）

生：不对，应该是$V=\frac{1}{3}Sh$，三角形的面积公式系数才是$\frac{1}{2}$。

师：同学们都记得很清楚，可是我在很多同学的期中考试答卷上发现了很多“$V=\frac{1}{2}Sh$的错误答案。这些同学犯了和印度数学家阿耶波多一样的错误，把三角形的面积公式类比到四面体中，得到错误的体积公式。

生：数学家也会犯错误啊！

师：对的，数学家也会发生类比错误，因为类比所得的结论具有或然性，需要通过验证和证明才能说明结论的正确与否。

生：既然类比的结论不一定是正确的，为什么还要进行类比呢？

师：美籍匈牙利数学家波利亚说过，“如果没有类比推理，那么无论是初等数学还是在高等数学中，甚至在其他任何领域中，本来可以发现的东西，也可能无从发现。”，虽然类比推理的结论不一定正确，但它确是我们通往“发现”的重要道路，错误不可怕，重要的是我们要学会发现，只有不断尝试，不断失败才会更接近整理。

教师 A 结合学生常出现的错误介绍阿耶波多的错误，树立学生数学学习的信心的同时加深学生对于错误的认识。学生们认识到，即使是数学家，在运用类比推理发现新命题时也难免会发生错误，说明数学的发展不是直线式的、静态的，而是伴随着尝试与错误的。类比错误有关数学史的了解可以帮助学生树立数学学习的信心，形成动态的数学观，体现了数学史融入教学的“德育之效”。

在数学教学中，教师将数学家们通过类比推理得到错误命题的历史融入课堂，同时辨析以往学习中进行类比推理得到的错误命题，学生可以认识到类比推理的结果具有或然性，辩证地看待类比推理在数学学习中的作用。另一方面，通过类比推理所得到结论的正确性，不应该成为评价学生类比推理能力的唯一量尺。例如，学生在类比推理过程中，基于不同的考虑会得到不同的命题。比如，将勾股定理类比到空间中时，若学生考虑到二维平面与三维空间的差异性，类比得到的结论是：

$$\left(S_{\Delta ABC}\right)^3=\left(S_{\Delta AOB}\right)^3+\left(S_{\Delta AOC}\right)^3+\left(S_{\Delta BOC}\right)^3,$$

虽然这个命题是错误的，但就类比推理的逻辑形式而言，学生得到结论的过程也是合理的。

4 结语

德国数学家开普勒（J. Kepler, 1571-1630）曾说：“我珍视类比胜于任何别的东西，它是我最可信赖的老师，它能揭示自然界的秘密，在几何学中它应该是不容忽视的。”[14]历史上数学家们高度肯定类比推理的价值，利用类比推理获得了无数的新发现。与类比推理相关的数学史为今日类比推理教学带来了重要启示：应该以具有相似性的数学对象为载体渗透类比推理的教学；类比推理教学应该揭示类比推理的创造性、或然性和方向的多样性。

有关类比推理的历史素材为教师设计探究活动提供了参照，从而营造“探究之乐”。基于类比推理的创造性探究活动，助力学生逻辑推理素养的培养，从而实现“能力之助”。借鉴历史，

自然地揭示类比推理的或然性和方向的多样性，可以促进学生对数学活动本质的认识，让他们“穿越时空与古代数学家对话”，像数学家那样做出数学发现，增加学习数学的自信心，因此，教学中融入数学史，是达成“德育之效”的一条理想途径。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

[2] 普通高中数学课程标准修订组. 普通高中数学课程标准（2017）版解读[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[3] 史宁中. 试论数学推理过程的逻辑性——兼论什么是有逻辑的推理[J]. 数学教育学报, 2016, 25(4): 1-16+46.

[4] 林玉慈. 高中数学课程中的逻辑推理及教学策略研究[D]. 东北师范大学, 2019.

[5] 阿基米德. 阿基米德全集[M]. 朱恩宽, 等, 译. 西安: 陕西科学技术出版社, 2010: 538.

[6] 汪晓勤. 欧拉与自然数平方倒数和[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2002, (4): 29-33.

[7] 汪晓勤. 从九点圆到十二点球[J]. 中学教研（数学）, 2002(9): 40; 封面.

[8] 波利亚. 怎样解题[M]. 涂泓, 等, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2011: 31-38.

[9] 波利亚. 数学的发现[M]. 刘景麟, 等, 译. 北京: 科学出版社, 2006: 45-46+60.

[10] 波利亚. 数学与猜想[M]. 李心灿, 等, 译. 北京: 科学出版社, 2001: 12-35.

[11] 柳笛, 汪晓勤. 艺术家弗朗西斯卡的数学成就. 中学教研(数学), 2006, (9): 45-47

[12] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育. 北京: 科学出版社, 2017.

[13] 李文林. 数学珍宝——历史文献精选[M]. 北京: 科学出版社, 1998: 75.

[14] 熊惠民. 数学思想方法通论[M]. 北京: 科学出版社, 2010: 202.

学术资讯

第一届 HPM 工作室成员课例论文目录

（2018 年-2019 年）

HPM 工作室于 2018 年 3 月创建，首批学员有来自上海各区不同学校、不同学段的数学教师三十余人。两年间，工作室成员与高校 HPM 研究团队形成一个专业学习共同体，实现学术和实践共享，有计划地开展一系列课例研究活动，发表一系列课例论文，有效促进了工作室成员的专业发展，也为华东师范大学数学教育方向研究生的培养提供了优越的实践条件。

以下是课例论文的汇总 *。

1. 高振严, 何伟淋. “线面垂直判定定理”: 从历史看证明、找模型[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018(07): 35-40.
2. 胡佳婧, 张亚琦. HPM 视角下的线面垂直判定定理教学设计与实施[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(01): 15-20.
3. 张益明, 丁倩文. “两角和与差的余弦公式”: 从历史中找价值、看证明[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018(06): 33-38.
4. 蔡东山, 陈晏蓉, 沈中宇. HPM 视角下的两角和与差的余弦公式教学[J]. 数学教学, 2019(03): 7-12+34.
5. 顾海萍, 孙丹丹. HPM 视角下的“邻补角、对顶角”教学[J]. 中学数学月刊, 2018(09): 45-48.
6. 向荣, 陈莎莎, 沈中宇. HPM 视角下的周期函数概念教学[J]. 中小学数学(高中版), 2018(11): 45-50.
7. 杜金金, 陈莎莎, 沈中宇. 周期函数的概念: 从历史到课堂[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(07): 9-14+19.
8. 袁芳, 马艳荣. HPM 视角下的“和差术应用”专题复习课[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018(08): 52-57.
9. 黄蓓. HPM 视角下的“全等三角形角边角判定定理"教学[J]. 上海中学数学, 2020（待发表）.

* 论文信息按照课例研究活动开展顺序排列。

10. 汤雪川, 栗小妮, 孙丹丹. “等腰三角形的性质”:从历史中找应用,看证明[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018(11): 52-61.
11. 杜金金. HPM 视角下的棱柱概念教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(10): 16-21.
12. 贾彬, 孙丹丹. HPM 视角下“素数与合数”的教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(09): 12-17.
13. 黄深洵, 刘思璐, 沈中宇. HPM 视角下的函数概念教学[J]. 中学数学月刊, 2019(09): 53-56.
14. 张益明, 李卓忱. “旋转体的概念”: 基于相似性,重构数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2019(08): 37-42.
15. 李德虎, 余庆纯. HPM 视角下“十字相乘法”的教学[J]. 数学教学, 2019(08): 36-41.
16. 刘志霞, 刘思璐, 沈中宇. “向量的坐标表示及其运算”: 以重构式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2019(05): 44-51.
17. 王雅琪, 瞿鑫婷. HPM 视角下圆的面积公式教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(06): 9-14.
18. 张冰, 卢成娴, 沈中宇. HPM 视角下的复数概念教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(08): 12-18.
19. 王进敬. HPM 视角下“三角形一边的平行线性质定理及推论”的教学[J]. 上海中学数学, 2020（待发表）.
20. 蔡东山, 瞿鑫婷, 沈中宇. HPM 视角下的等比数列求和公式教学[J]. 数学教学, 2019(09): 8-13.
21. 黄蓓, 周天婷. HPM 视角下的平面向量概念教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2019(10): 23-28.
22. 李莹, 韩嘉业, 沈中宇. HPM 视角下的贾宪三角探究[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(11): 14-19.
23. 张翼翔, 余庆纯. 培育问题解决能力 浸润数学学科德育——以 HPM 视角下“平面直角坐标系”教学为例[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(12): 6-11.

教师教育学院数学教育研究所工作研讨会会议纪要

韩嘉业，沈中宇

（1.华东师大教师教育学院，上海, 200062; 2.华东师大数学科学学院，上海, 200241）

2020 年 1 月 13 日，为了进一步推进上海市第四期双名工程和华东师范大学教师教育学院数学教育研究所的各项工作，教师教育学院数学教育研究所工作研讨会在华东师范大学中北校区教师教育学院小红楼举行。数学教育研究所特聘专家、双名工程高峰计划主持人王华、胡军以及团队成员，攻关计划主持人虞涛、张亚东、王海平、李英和华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师以及研究生团队参加了本次研讨会。

本次研讨会的主题为讨论数学教育研究所 2020 年工作方案。围绕这一主题，各位老师纷纷建言献策，提出了一些具体的建议。如王华老师提到，研究所可以举办 1 次年会和 4 次季度交流会议，出版《新时代名师授课录》，在制订 1 年工作方案的同时制定 3 年长远规划，平时做好简报编辑和活动纪要的记录。虞涛老师提到各名师基地的学员和数学教育研究所之间可以有更多的交流互动，另可举办优秀论文和优秀教学案例的评奖活动。汪晓勤教授提出需要设立一本研究所的期刊，包括课题进展、活动讯息、教学案例、思想交流、数学人文、教材研究等栏目。此外，其他老师也针对工作方案提出了各自的建议并进行交流研讨。

交流研讨

最后，汪晓勤教授对本次研讨会作了总结，提出：1 个团队、1 本刊物、1 个论坛、1 项比赛、1 门课程、1 个栏目（访谈录）、1 部实录、1 批名师。

本次研讨会在临近春节时期举办，常言道“一年之计在于春”，春天正是冰雪消融、万物复苏的季节，相信本次研讨会已经在各位老师和同学的心中埋下了希望的种子，且让我们共同展望数学教育的美好明天。