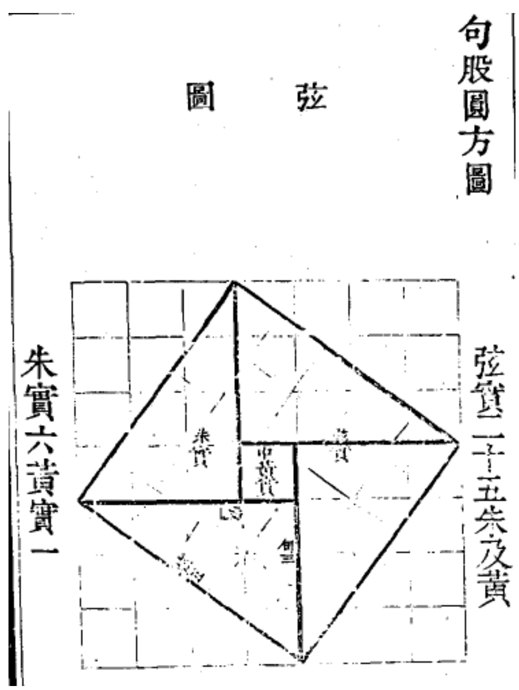
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2023 年第 12 卷第 08 期



赵爽《周髀算经》注中的弦图

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首新语

数学教育之人文追求

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

19 世纪英国著名数学家德摩根（A. De Morgan, 1806-1872）曾说过："任何一门艺术或科学都算不上博雅艺术或博雅科学，除非人们将其与人类过去的思想联系起来学习。"德摩根所说的"博雅艺术"（liberal arts），又译为"自由艺术"，在欧洲中世纪，指的就是"七艺"，包括逻辑、文法、修辞、算术、几何、天文和音乐。按照弗吉里奥（Vergerio, 1349-1420）的说法，"自由人是博雅教育塑造出来的，使得我们习得并实践智慧与美德；博雅教育唤起、淬练、开发人的身心的最大潜能，并保障人生道路臻于真善美的方向。"17 世纪以后，学校课程体系不再局限于传统的七艺，但博雅教育的目标和"自由"特质却得到了延续。

今天，以追求功利为目标的数学教育已经与博雅教育格格不入，究其原因，功利导致数学与人文的分离、历史与现实的割裂。站在"立德树人"的高度审视数学教育，从"以文化人"的角度探寻教学方法，并在实践中有所作为，理应成为吾辈追求的目标。

1 文以载道

德国哲学家尼采（F. W. Nietzsche, 1844-1900）曾经说过："我们会用自己所知道的词语来表达自己的想法。如果词汇贫乏，就意味着我们的思维也相应地贫乏。知道更多的词汇，也就是拥有更多的想法。想法越多，思考的范围就会越广，可能性也会越大。这是人生中能够利用的最强大的武器。知道更多的词汇，能帮助你在人生道路上走得更顺。"在尼采看来，词汇决定着思维，词汇的贫乏会导致思维的贫乏。尼采的观点对于数学教学有重要启示。虽然数学学科有自己独特的语言——文字、符号与和图形，但文字和符号语言往往较为抽象，这时候需要教师利用更多的文字和词汇，特别是体现形象思维的文学语言来辅助理解。

举个例子，圆周率是一个无理数，用数学语言来描述，就是"无限不循环小数"，但"无限"是一个十分抽象的术语，事实上，"无限"或"无穷"成为数学中的一个重要概念，乃是

19 世纪的事，可谓姗姗来迟。诺奖得主、波兰诗人维斯拉瓦·申博尔斯卡（Wislawa Szymborska, 1923-2012）用诗歌来描述圆周率π：

世上最长的蛇不过四十尺
神话传说中的蛇无分轩轾
组成 Pi 的数字串行进逶迤
它不会在书页边停步栖息
它会继续走过书桌，穿过空气
越过墙壁、树叶、鸟巢、云霓
直上九霄
穿过广袤无垠的天际
那彗星的尾巴显得多么短小
就像鼠尾和小辫子
而星光显得多么脆弱
撞在空间上便弯曲了轨迹
…………………………

与圆周率数字串相比，彗星的尾巴短得像鼠尾，星光也只是脆弱的存在，诗歌语言生动形象地表达了圆周率数字串的无穷无尽，而与无穷相比，任何有限的长度无论多么大，都与零无异。

在数学教学中，文学语言十分有助于学生的直观理解。例如，直角三角形有两个内接正方形（图 1），其中一个的两边分别与勾和股部分重叠，另一个的一边与弦部分重叠，前者为正，后者为斜，前者的边长大于后者的边长，这个结论可用“邪不压正”来表达（详见本期专题研究栏目文章）。

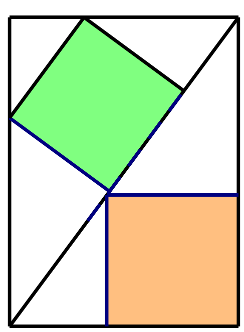


图 1 邪不压正

随着 x 的或 y 的无限增大，双曲线的渐近线无限接近双曲线，但永远不会与双曲线相交（图 2），这个结论可用“触不可及”来表达。

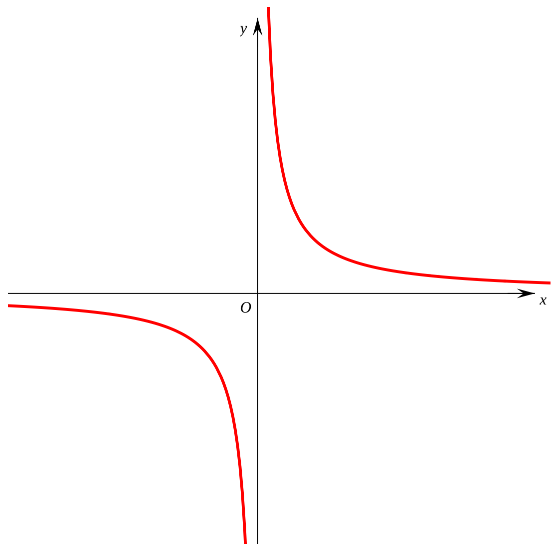


图 2 触不可及

将圆分割成无穷多个小扇形，将每一个小扇形视为三角形，变更每一个小三角形转化为等底同高的三角形，将所有转化后的三角形依次组合在一起，得到一个以圆周长为长直角边、圆半径为短直角边的直角三角形（图 3），这个过程可用“积微成著”来表达。

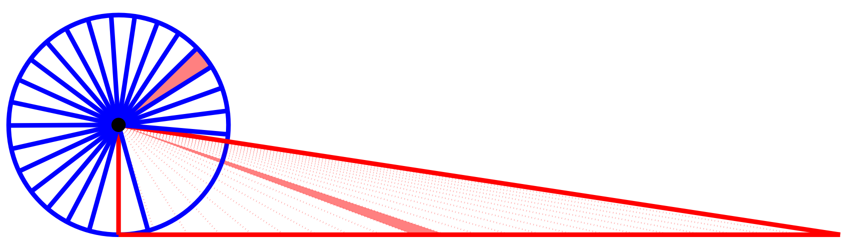


图 3 积微成著

抛物线的光学性质（图 4）可用“殊途同归”来表达，抛物线可视为有一个焦点在无穷远处的椭圆，这一结论可用“心在远方”来表达。

类似地，研究函数奇偶性的意义可用“事半功倍”来表达，反函数可用“相依相存”来表达，等等，举不胜举。

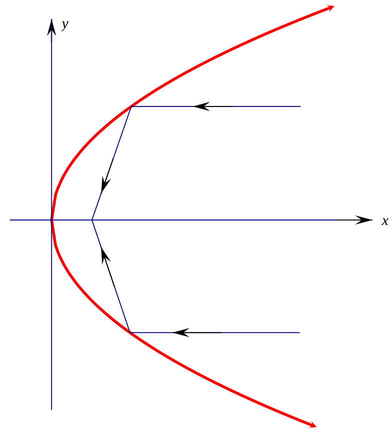


图 4 殊途同归

2 古今之变

比利时-美国著名科学史家萨顿（G. Sarton, 1884-1956）曾经说过：“在科学和人文之间只有一座桥梁，那就是科学史。建造这座桥梁，是我们这个时代的主要文化需要。”类似地，我们也可以说，在数学和人文之间有一座桥梁，那就是数学史；建造这座桥梁，是我们这个时代的教育需要。

德摩根曾讲过一个在他大学时代发生的故事，他的一位同学质疑，对数的发明者纳皮尔真有那么伟大、真值得后人颂扬吗？已知幂和底数求指数，对数自然就出现了，这有什么稀奇的？这个故事充分说明，不了解知识的前世今生，人们往往会站在自我的立场上以逻辑顺序来思考问题。逻辑包装下的课本知识，有着“冰冷的美丽”，却无“火热的发明”，有着“枯燥的形式”，却无“生命的色彩”，易于让人生厌，却难以令人敬畏。

在勒齐奥（A. Lecchio）《几何基础》（1753）的扉页上有一幅插图（图 5），描绘的是古希腊哲学家亚里斯提普斯在遭遇海难之后漂流到一座荒岛上，见沙地上的几幅图形，不禁惊叫：“我看到了人的迹象！”在沙地上看到几何图形，亚里斯提普斯联想到了人的存在，但仅仅看到教科书上的几何图形，今日学生恐怕不会联想到其背后的人的存在。只有当我们将所教授的知识置于历史背景之中，“究天人之际，通古今之变”，知识才会被赋予鲜活的生命力。

图 5 勒齐奥《几何基础》插图

数学术语各有滥觞。李善兰和伟烈亚力在《代微积拾级》中称："凡式中函天，为天之函数"，"函数"之名源于欧拉的解析式定义。《数理精蕴》称："真数与假数对列成表，故名对数表"，"对数"之名源于 17 世纪等差数列与等比数列之间的对应关系。"算术中项"和"几何中项"之名源于古希腊的中项定义，无关算术、几何这两个学科。"正弦"乃"半弦"之谓，而不是"正好为弦"，"余弦"乃"余角之正弦"，不是"剩余之弦"。

数学主题各有因缘。在古代，历史学家修昔底德（Thucydides，公元前 5 世纪）、博物学家普林尼（Gaius Plinius Secundus，23-79）等都根据周长来估算不同地区的面积；而据普罗克拉斯（5 世纪）记述，在公元 5 世纪的公有制社会里，有人将周长大的土地分给他人，却被视为大公无私。那么，一个几何图形，周长越大，面积一定越大吗？为了回答这个问题，我们来研究长方形与等周正方形面积之间关系，不难得到

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

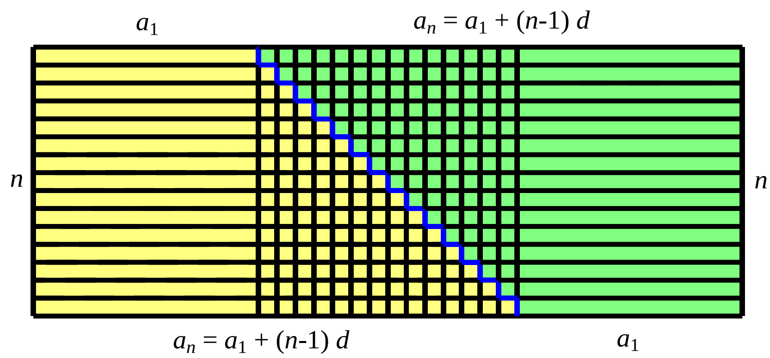
由此得到均值不等式

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}。$$

数学公式各有智巧。南宋数学家杨辉在解决汉代《九章算术》中的二马相遇问题时，构造了一幅"良马图"，利用该图，通过两种不同拼图方式（图 6），即可推导出等差数列前 n 项和公式

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2},$$

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n\left(n-1\right)d \text{ 。}$$



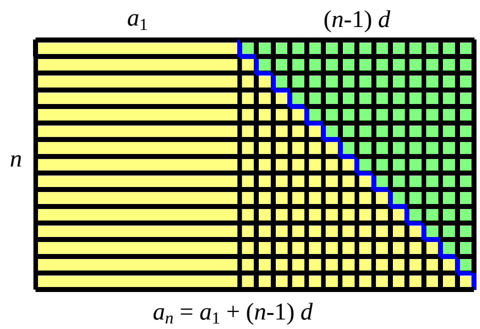


图 6 利用“良马图”推导等差数列求和公式

数学定理各有通途。在证明正弦定理时，韦达的外接圆法和梅文鼎的等径法交相辉映；在证明余弦定理时，韦达的割线法和圣文森特的面积法各显神通。

3 学科交融

鲁迅（1881-1935）在“科学史教篇”（1907）中指出：“盖使举世惟知识[1]之崇，人生必大归于枯寂，如是既久，则美上之感情漓，明敏之思想失，所谓科学，亦同趣于无有矣。故人群所当希冀要求者，不惟奈端（今译牛顿）已也，亦希诗人如狭斯丕尔（今译莎士比亚）；不惟波尔（今译波义耳），亦希画师如洛菲罗（今译拉斐尔）；既有康德，亦必有乐人如培得诃芬（今译贝多芬）；既有达尔文，亦必有文人如嘉来勒（今译卡莱尔）。凡此者，皆所以致人性于全，不使之偏倚，因以见今日之文明者也。嗟夫，彼人文史实之所垂示，固如是已！”在鲁迅看来，不同学科各有其价值，多学科并存方可使人性健全、文明昌盛。鲁迅的“多学科”

[1] 按上下文理解，这里的“知识”指的是科学知识。

（multidiscipline）思想已跃然于纸上。

M・克莱因（M. Kline, 1908-1992）将“文化原理”作为数学课程四原理之一（1958）：“我们必须将数学与历史、科学、哲学、社会科学、艺术、音乐、文学、逻辑学以及与所讲主题相关的别的学科联系起来。”M・克莱因为“跨学科”（interdiscipline）数学教学思想之先驱，当之无愧。

数学教学中渗透多学科与跨学科思想，乃今日实施“博雅教育”之途径。例如，根据我国先秦典籍《列子・汤问》愚公移山（图 7）的故事，可以编制以下数学问题。

问题 1：《列子》称：“太行、王屋二山，方七百里，高万仞”。如果将两座山视为圆锥形，按照 1 仞 = 8 尺，1 里 = 1800 尺，1 尺 = 23 厘米来计算，两座大山的体积共为多少立方米？

问题 2：愚公说：“虽我之死，有子存焉；子又生孙，孙又生子；子又有子，子又有孙；子子孙孙，无穷匮也，而山不加增，何苦而不平？”假设愚公有三子，各代子孙每人各生三子，问：经过几代，愚公家族的族谱上人数超过 72000？

问题 3：假设每人移土 10 立方米，需要经过几代人的努力，才能把二山移完？

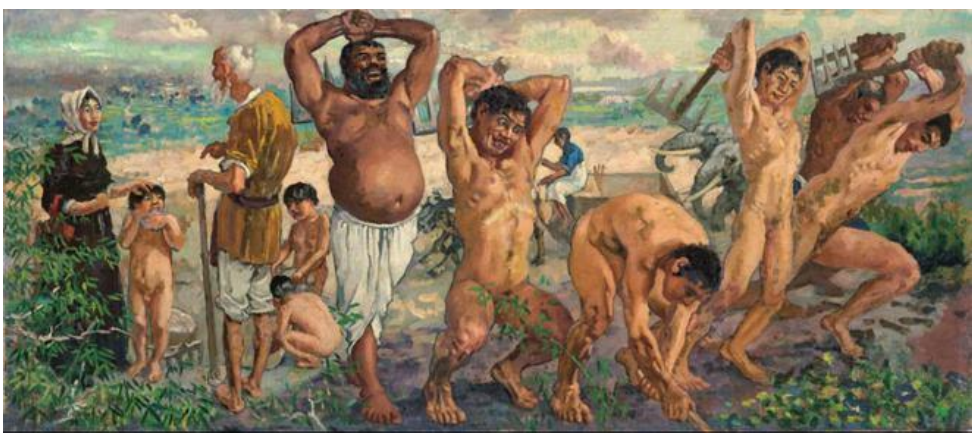


图 7 徐悲鸿油画：愚公移山（1940）

犹太经典《塔木德经》云：“任何一个看望病人的人能消除其疾病的六十分之一。”由此可以提出问题：“第 60 个人看望该病人之后，病情如何？”这是一个数列问题：第 1，2，…，n 个人看望病人之后，病情构成等比数列

$$\frac{59}{60},\left(\frac{59}{60}\right)^2,\left(\frac{59}{60}\right)^3,\cdots,\left(\frac{59}{60}\right)^n。$$

明代律学家朱载堉（1536-1611）发明“十二平均律”，将八度音程平均分成 12 个半音，

相邻半音频率之比均为$\sqrt[12]{2}$，若基音频率为 1，则得等比数列

$$1,\ 2^{\frac{1}{12}},\ 2^{\frac{2}{12}},\ \cdots,\ 2^{\frac{12}{12}}。$$

若要计算公比$2^{\frac{1}{12}}$的数值，则需利用二项式定理

$$(1+x)^{12}=1+C_{12}^{1}x+C_{12}^{2}x^{2}+\cdots+x^{12}。$$

不同学科均可为数学教学提供有益的素材。

4 艺术呈现

电视剧《星汉灿烂》中，有一段猜灯谜的情节。白鹿书院的袁慎提出一个数学问题：田家九楼门口有一口井，井径二尺半，却不知其深。仅利用手头的一柄三尺木，问：能否测出井口至水面有多深？实际上，这个问题源于汉代数学典籍《九章算术》，该书勾股章设题："今有井径五尺，不知其深。立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸。问：井深几何？"剧中，女主程少商按照《九章算术》的测量方法（图 8），成功测出井深，从而引起袁慎的注意。

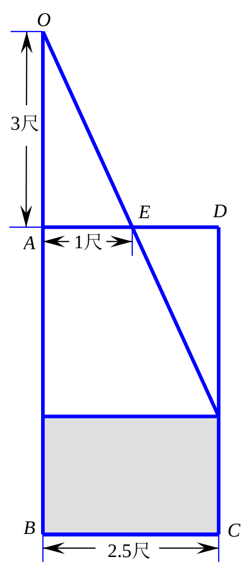


图 8 立竿测井

在日本电影《成就天才的妻子》（图 9）中，天才数学家冈吉利用复数知识解决了如下问题："从地藏菩萨往水井走一段距离，接着右转 90 度，再走相同的距离，把这点记为 C。再回到地藏菩萨往稻荷神走一段距离，接着左转 90 度，再走相同的步数，把这点记为 D。遗产就

埋藏在 C、D 两点连线的中点。没了地藏菩萨，可否找到遗产？”

图 9 日本电影《成就天才的妻子》

该问题源于美籍俄国物理学家数学家伽莫夫（G. Gamow, 1904-1968）在《从一到无穷大》中提出的“荒岛寻宝”问题：在一个无人荒岛上埋藏着宝藏，岛上有一棵橡树和一棵松树，还有一座断头台。从断头台往橡树走一段距离，接着右转 90 度，再走相同的距离，在终点位置打一个桩；再回到断头台，往松树走一段距离，接着左转 90 度，再走相同的步数，在终点位置打一个桩。在两桩连线的中点处往下挖，即可找到宝藏。问题是：由于年代久远，断头台消失了，岛上只剩下孤零零的橡树和松树。问：如何找到宝藏？

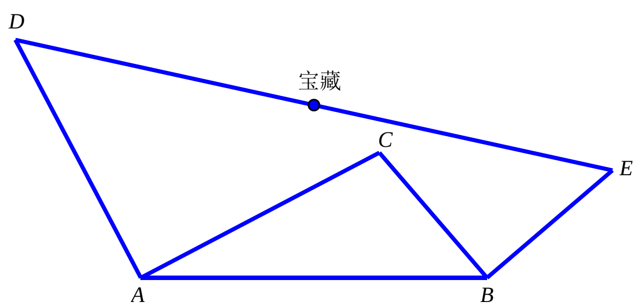


图 10 加莫夫的“荒岛寻宝”问题

众多电影或电视剧中都涉及数学题材，相关的片段可用于数学课堂教学。实际上，除了电影或电视剧，教师还可以指导学生创编数学话剧或制作微电影来呈现有关数学人物、问题、思想和方法，从而拓宽传统的教学方式。

5 留白创造

留白是中国艺术作品创作中常用的一种手法，指书画艺术创作中为使整个作品画面、章法

更为协调精美而刻意留下相应的空白，留下想象的空间。在书画作品中，黑白比例的不同，导致观感的差异，协调的比例让人产生美感（图 11）。

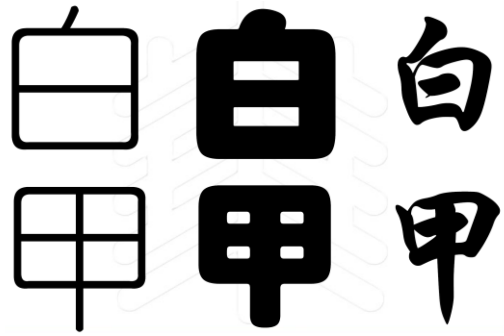


图 11 书法中的留白

人文主义的核心思想是尊重人的地位、价值、尊严和潜能，将艺术中的留白手法运用于课堂，是数学教学人文追求的重要内涵。数学是人类的文化活动，是人创造了数学；数学教学是以学生为中心的实践活动，学生是课堂的主人。因此，教师需要通过课堂留白，为学生留下足够的思维空间和探究机会，让他们充分发挥能动性和创造力，经历新知再创造的过程。

在勾股定理的教学中，教师可以设计正方形拼图活动（图 12-13），让学生在补白过程中发

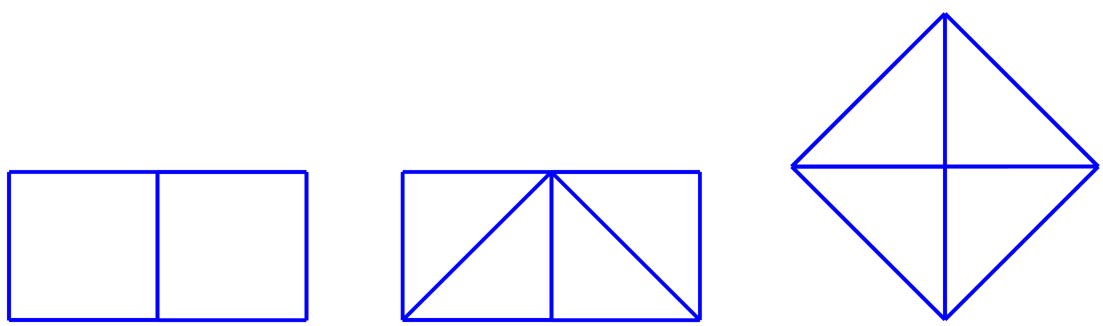


图 12 将两个相同正方形拼成一个正方形

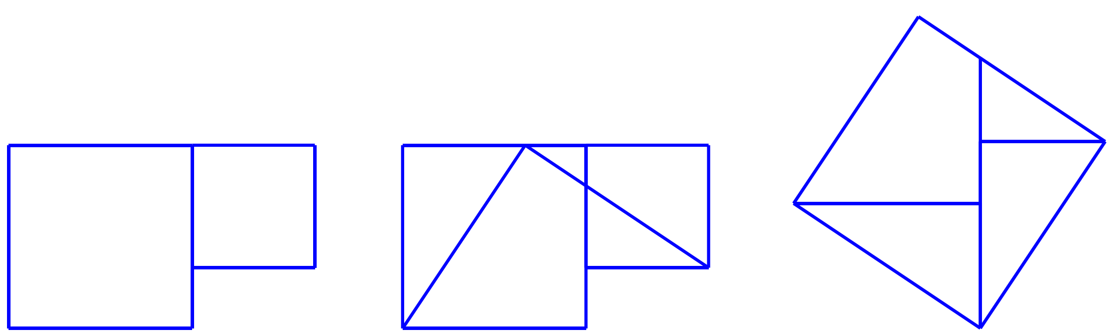


图 13 将两个不同正方形拼成一个正方形

现勾股定理。教师为学生设计拼图任务，留下了“发现之白”。在余弦定理的教学中，教师从勾股定理的证明入手，对赵爽的弦图或大方图进行改造（图 14），让学生根据图形发现余弦定理。基于弦图或大方图的“无字证明”，为学生留下了“发现之白”和“论证之白”。

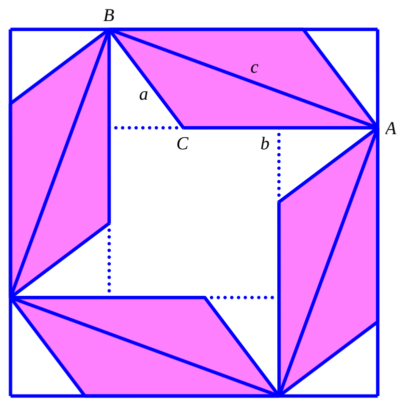


图 14 从勾股定理到余弦定理

在留白创造式教学中，教师还可以为学生留出“陈述之白”“方法之白”“问题之白”和“超越之白”。

6 结 语

博雅的数学教学需要文学的表达、历史的参照、学科的融合、艺术的呈现和留白的手法，一言以蔽之，需要数学文化的浸润。在升学压力山大、内卷日趋严重的今天，实施博雅教育对教师而言是一个巨大的挑战，实属不易。教师需要走出狭小的天地，博观约取，文理兼修，从数学历史中汲取思想养料，从其他学科中获取教学素材，并树立以生为本的留白创造式教学理念；教师还需要加入专业学习共同体，以追求美好的数学教育为己任，不断学习、不断实践、不断研究、不断成长。

目 录

CONTENT

专题研究

“邪不压正”命题的多种证明与教学启示

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

在提倡将中华优秀传统文化融入课程与教学的今天，越来越多的中小学数学教师开始对中算史（即中国传统数学的历史）产生兴趣。为了更好地发挥中算史的教育价值，教师不仅需要“古为今用”，还需要“推陈出新”。数学史研究表明，数学家往往通过“否定属性”策略提出新问题，通过“更换步骤”策略发现新方法，通过“倾听古人”策略发现新课题[1]，一言以蔽之，创新就是补白。

《九章算术》勾股章设题：“今有勾五步，股十二步，问：勾中容方几何？”问题仅涉及直角三角形的一个内接正方形，该正方形与直角三角形有一个公共直角。事实上，直角三角形还有另一个内接正方形，该正方形的一边与直角三角形斜边部分重合（下文简称“弦中容方”）。《九章算术》作者为后人留了白：弦中容方几何？弦中容方与勾股容方孰大孰小？本文拟通过补白，深入探讨中算史在今日数学教学中的应用。全文统一用 a、b 和 c 表示直角三角形的勾、股和弦的长。

1 “弦中容方”公式及其推导

刘徽用出入相补法来证明勾股容方公式，如图 1 所示，将左图矩形中的红色、蓝色直角三角形以及黄色正方形进行重新组合，得到右图中的等积矩形，于是有 $ab=(a+b)s$ ，从而得到勾股容方公式

$$s=\frac{ab}{a+b} \qquad (1)$$

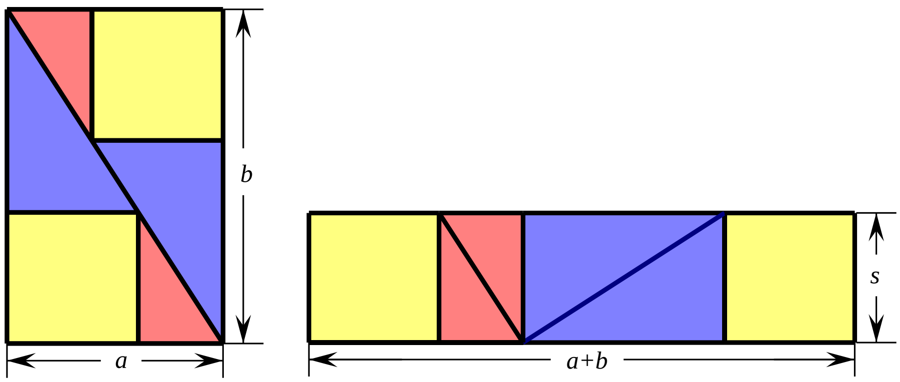


图 1 刘徽关于勾股容方公式的证明

利用刘徽的出入相补法，可以得到弦上内接正方形的边长。如图 2 所示，将左图长方形中的红、蓝、绿三色直角三角形和黄色正方形进行重新组合，并将其中一个绿色直角三角形分割成两部分，可以得到右图中的矩形，其中 h 是原直角三角形斜边上的高。于是，斜边上内接正方形边长为

$$s'=\frac{ab}{c+h} \tag{2}$$

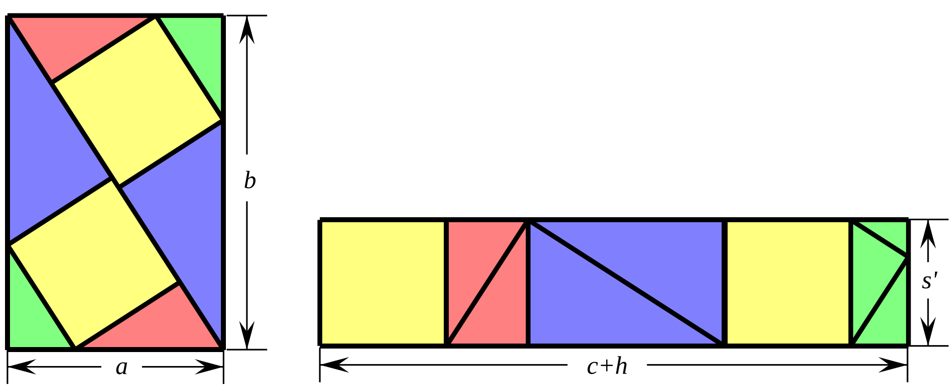


图 2 弦中容方公式的推导

显然也可以利用相似三角形性质得到（2）。

2 “邪不压正”古证

2.1 构造大方，以面识边

赵爽在为《周髀算经》“勾股圆方图”作注时，通过构造“大方”建立勾股并$(a+b)$、勾股差$(b-a)$与弦之间的关系：“倍弦实，满外大方而多黄实，黄实之多，即勾股差实。以差实减之，开其余，得外大方，大方之面，即勾股并也。令并自乘，倍弦实乃减之，开其余，得中黄方，黄方之面，即勾股差。”[2]这段话说的就是以下恒等式：

$$2c^2=(b+a)^2+(b-a)^2\text{。}$$

如图 3，在以$a+b$和$c+h$为边长的两个大方图中分别有

$$(b+a)^2=(b-a)^2+4ab\text{，}$$

$$(c+h)^2=(c-h)^2+4ch\text{，}$$

因$ab=ch$，$b-a<c-h$，故得$(a+b)^2<(c+h)^2$，即$a+b<c+h$，比较（1）和（2）得$s>s'$，这就是所谓的“邪不压正”命题。

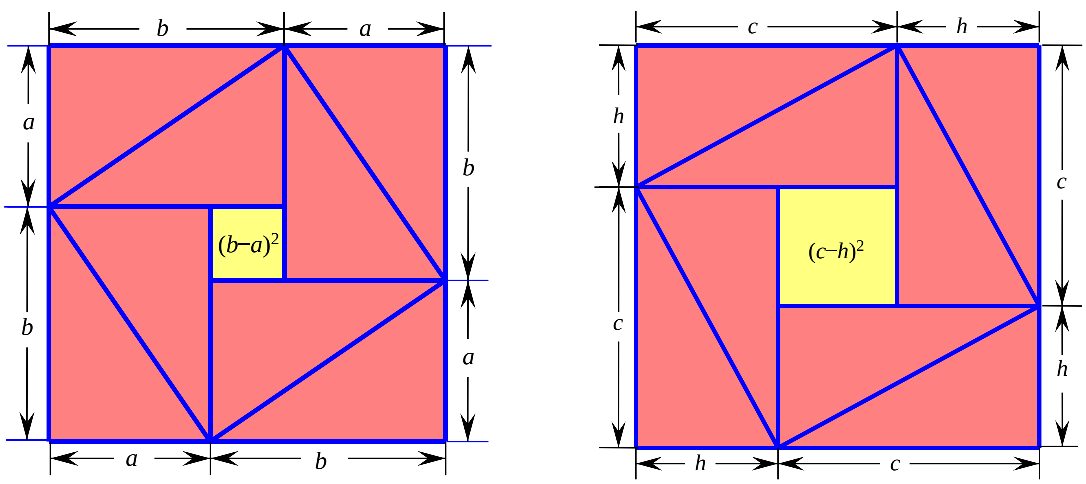


图 3 两个大方图的比较之一

又如图 4，分别将边长为$a+b$和$c+h$的正方形分割成四部分，因$c^2=a^2+b^2$，$ch=ab$，故$(c+h)^2=c^2+2ch+h^2=(a+b)^2+h^2>(a+b)^2$，故得$s>s'$。

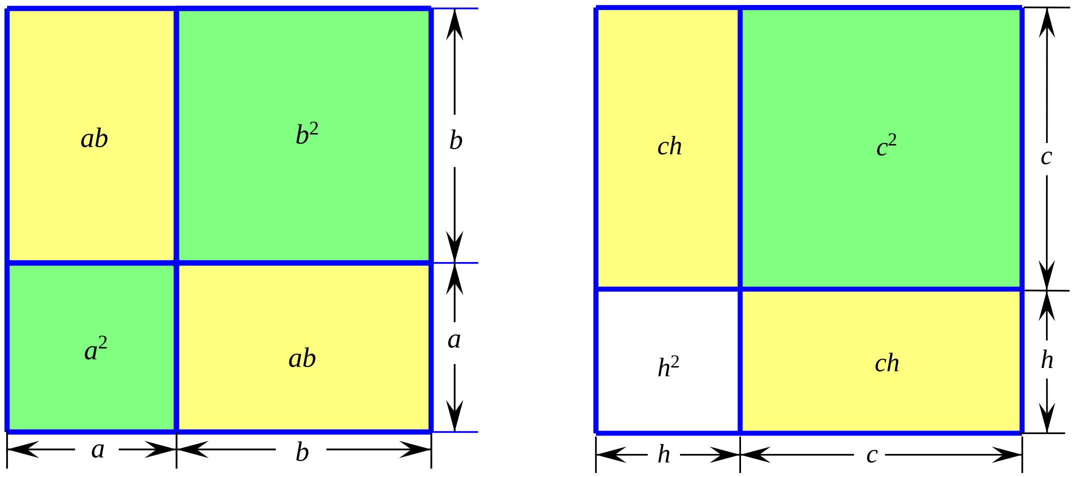


图 4 两个大方图的比较之二

2.2 出入相补，巧用勾股

刘徽利用出入相补法证明了勾股定理："勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂。"[3]清代数学家李锐曾对刘徽的"青朱出入图"作了复原，如图 5 所示，该图在今天已广为人知。在青朱出入图中，作 Rt△ABC 斜边上的高 CD，并反向延长，交 EF 的延长线于点 G，交 HI 于点 J。易证 $FG=a$， $GJ=CD=h$。

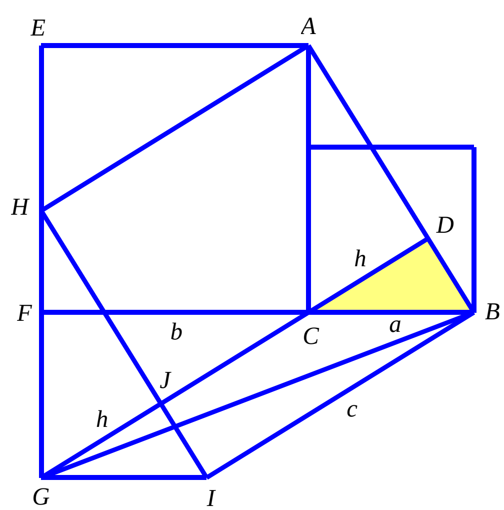


图 5 刘徽的青朱出入图

在 Rt△BGD 和 Rt△BGF 中分别有

$$BG^2=(c+h)^2+BD^2,$$

$$BG^2=(a+b)^2+a^2,$$

故有

$$(c+h)^2+BD^2=(a+b)^2+a^2$$

从而得

$$(c+h)^2=(a+b)^2+a^2-BD^2=(a+b)^2+h^2 \tag{3}$$

受上述方法的启发，也可以直接构造几何图形来证明等式（3）。如图 6，延长 Rt△ABC 的直角边 CA 至点 E，使得 $AE=a$，连结 BE，以 BE 为直径作圆，交 BA 的延长线于点 D，连结

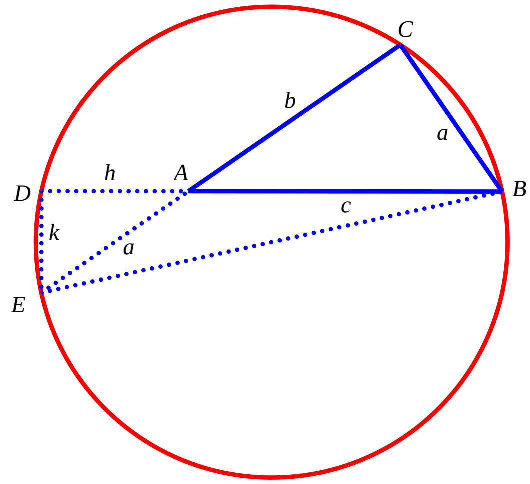


图 6 由青朱出入图启发得到的证明

DE，由相交弦定理知 $AD=h$。又设 $DE=k$，因 $BC^2+EC^2=BD^2+ED^2$，故得 $(c+h)^2+k^2=(a+b)^2+a^2$，整理得等式（3）。

2.3 勾股容圆，比较高径

刘徽在《九章算术》注中利用出入相补法证明了直角三角形内切圆直径公式

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}。$$

如图 7，将直角三角形分割成一对红色直角三角形、一对绿色直角三角形和一个黄色正方形，其中黄色正方形的边长即为直角三角形内切圆的半径。将四个同样的直角三角形进行重组，得到一个长为原直角三角形周长，宽为内切圆直径的长方形，故得所求。

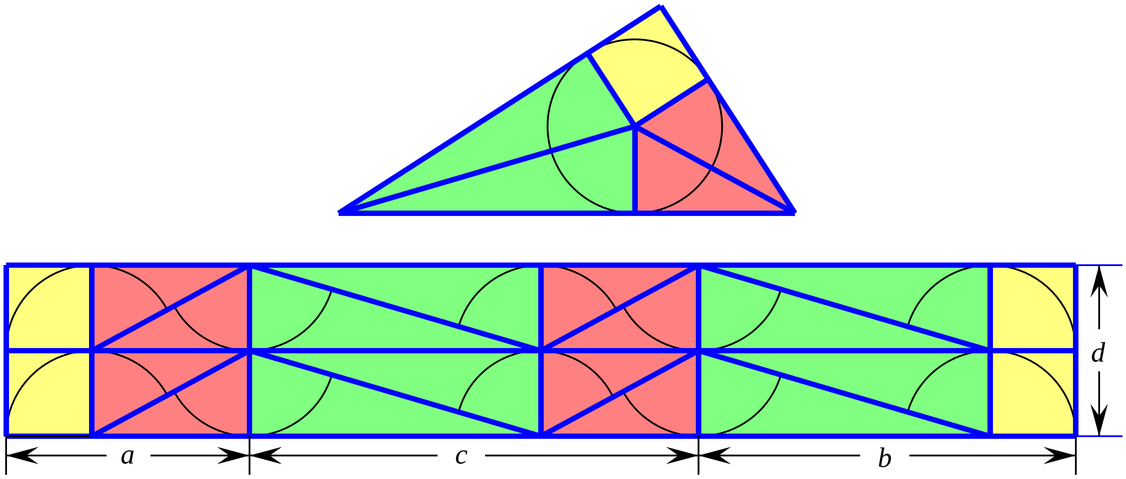


图 7 勾股容圆公式的证明

类似地，如图 8，作直角三角形斜边上的高，则可将四个同样的直角三角形进行重组，得到一个长为斜边、宽为高的矩形，于是得$(a+b+c)d=2ch$。因$a+b+c>2c$，故$d<h$，即

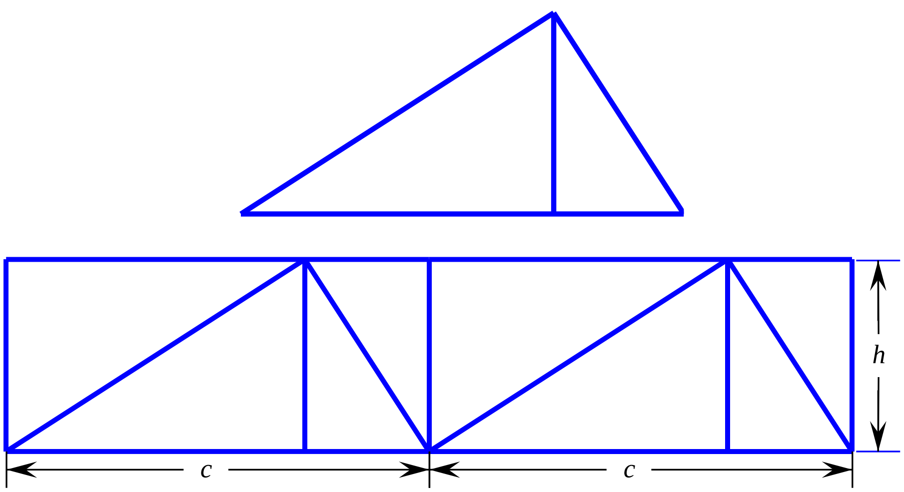


图 8 将四个直角三角形拼成以高为宽的矩形

$a+b-c<h$，从而得$a+b<c+h$。

2.4 矩中填方，考察余积

在勾股容方的情形中，以内接正方形在斜边上的顶点为中心，将直角三角形沿顺时针旋转 180°，旋转前后两个直角三角形共包含四个正方形，如图 9 所示。于是，余下两个小直角三角形的面积为

$$\Delta S = ab - 4\times\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{(b+a)^2}\times ab \tag{4}$$

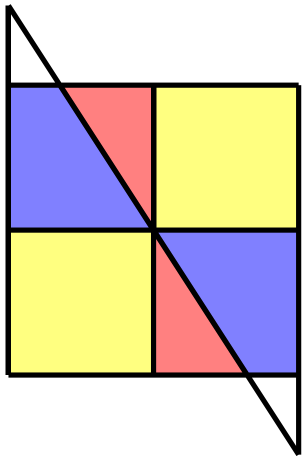


图 9 勾股容方情形中的正方形填充

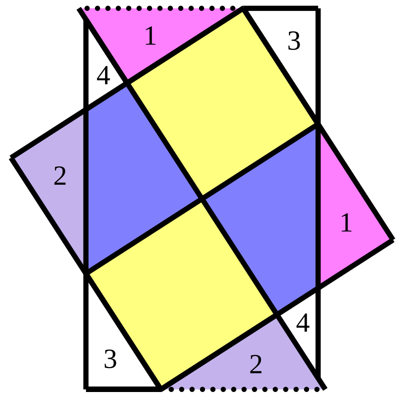


图 10 弦中容方情形中的正方形填充

类似地，在弦中容方的情形中，以内接正方形在斜边上的一个顶点为中心，将直角三角形沿顺时针旋转 180°，旋转前后两个直角三角形共包含四个正方形，如图 10 所示。于是，余下四个小直角三角形的面积为

$$\Delta S' = ab - 4\times\left(\frac{ab}{c+h}\right)^2 = \frac{(b-a)^2+h^2}{(b+a)^2+h^2}\times ab \tag{5}$$

比较（4）和（5）得 $\Delta S < \Delta S'$，故知 $\dfrac{ab}{a+b} > \dfrac{ab}{c+h}$。也可以先对弦上正方形施以等积变换（图 11），再旋转直角三角形（图 12）。比较图 9 和 12，可以直观地看出剩余图形面积的大小关系。

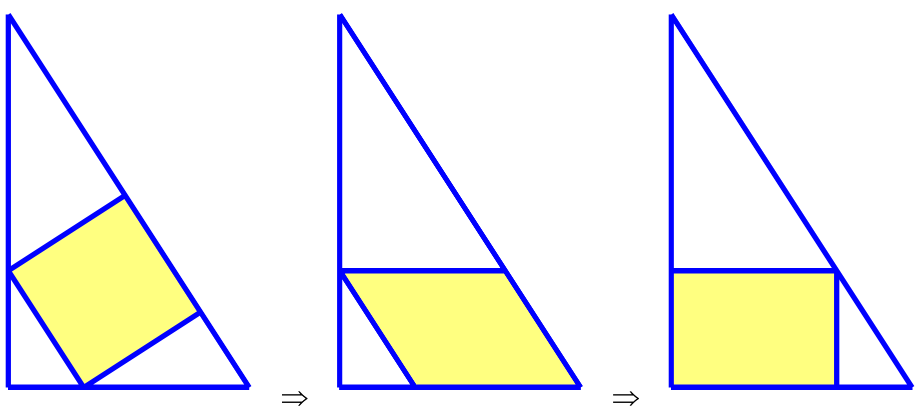


图 11 弦上正方形的等积变换

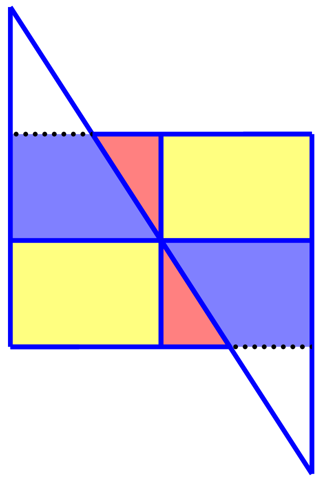


图 12 与弦上正方形等积的长方形的填充

2.5 矩表方里，寻找比例

《九章算术》勾股章的最后一题是一个解直角三角形问题，用今天的语言来说，就是“已知$c-a$和$c-b$，求a、b和c”。刘徽在注中称：“凡勾之在股，或矩于表，或方于里。连之者举表矩而端之。”[3]刘徽构造了一个边长为c的大正方形，并在其中作边长分别为a和b的小正方形，利用其公共部分的面积与小正方形外的剩余部分面积的相等关系，证明了《九章算术》给出的公式。如图 13，正方形 $ABCD$ 的边长为 c，分别以 B 和 D 为顶点，作边长为 a 和 b 的小正方形 $EBGF$ 和 $HIJD$，其公共部分也是一个正方形，其边长 $KI=a+b-c$。易知 $CK=c$。过点 L 作 KC 的垂线，垂足为点 M，则 $LM=h$。因 Rt△LMC ∽ Rt△KIN，故

$$\frac{LM}{KI}=\frac{LC}{KN}=\frac{b}{c-CN}>\frac{b}{c-(c-b)}=1,$$

故得$LM<KI$，即$h>a+b-c$。

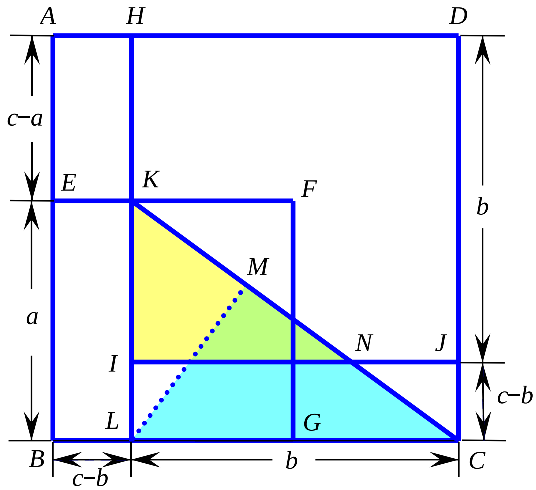


图 13 矩表方里

2.6 分割弦方，建立等式

如图 14，在“矩表方里”图的基础上，将以 c 为边长得正方形分割成四部分得

$$c^2-ac-bc+ab=(c-a)(c-b),$$

即

$$(c^2+ab)-(a+b)c=(c-a)(c-b),$$

于是得

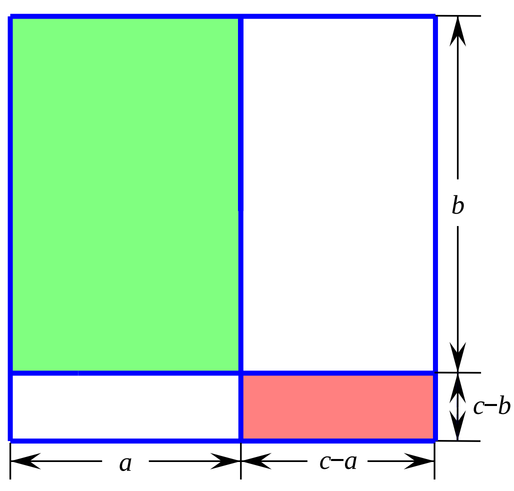


图 14 不等式 $c+h>a+b$ 的证明

$$\left(c+\frac{ab}{c}\right)-(a+b)=\frac{(c-a)(c-b)}{c},$$

此即

$$(c+h)-(a+b)=\frac{(c-a)(c-b)}{c}>0。$$

2.7 勾中容横，股中容直

南宋数学家杨辉在推导古人的“日高公式”时，提出一个几何定理：“弦之内外，分二勾股，其一勾中容横，其一股中容直，二积之数皆同”[4]，如图 15，E 为矩形 $ABCD$ 对角线 BD 上一点，过点 E 分别作 AD 和 AB 的平行线 FG 和 MN，于是矩形 $AFEM$ 与 $ENCG$ 的面积相等。现设 $EN = h$，$EF = a$，$EM = b$，$EG = c$，分别在 EM 和 EG 上取点 P 和 Q，使得 $EP = h$，$EQ = a$，易知 $PQ//MG$。因 $ab=ch$，故 $\frac{a}{c}=\frac{h}{b}$，于是得 $\frac{a}{c-a}=\frac{h}{b-h}$。又因 $a>h$，故有 $c-a>b-h$，即 $c+h>a+b$。

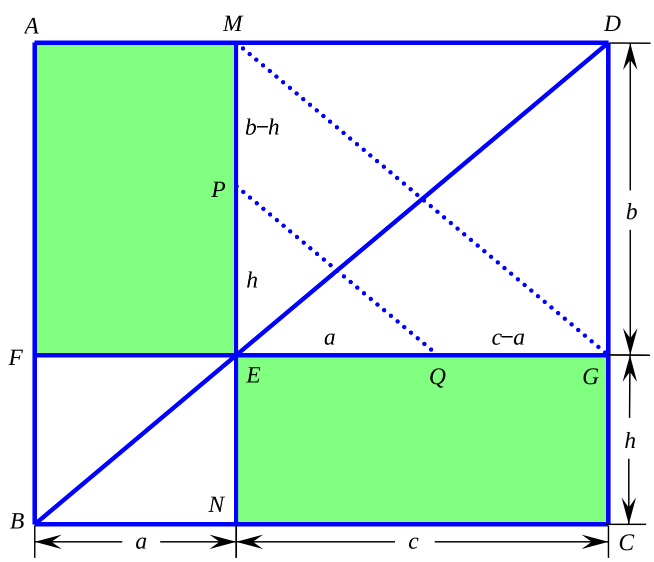


图 15 勾中容横、股中容直

3 “邪不压正”今解

3.1 尺规作图，以角看边

根据勾股容方和弦中容方公式，可以得到直角三角形内接正方形的尺规作图。如图 16，延长 AC 至点 E，使得 $CE = CB = a$，过点 E 作 $EF \perp AE$，且取 $EF = a$，连结 AF，交 BC 于点 I，则 $CI = s = \dfrac{ab}{a+b}$。又延长 AB 至点 G，使得 $BG = CD = h$，过点 G 作 $GH \perp AG$，且取 $GH = h$，易见 GH 恰好经过点 F。连结 AH，交 AB 在点 B 处的垂线于点 J，则 $BJ = s' = \dfrac{ch}{c+h}$。

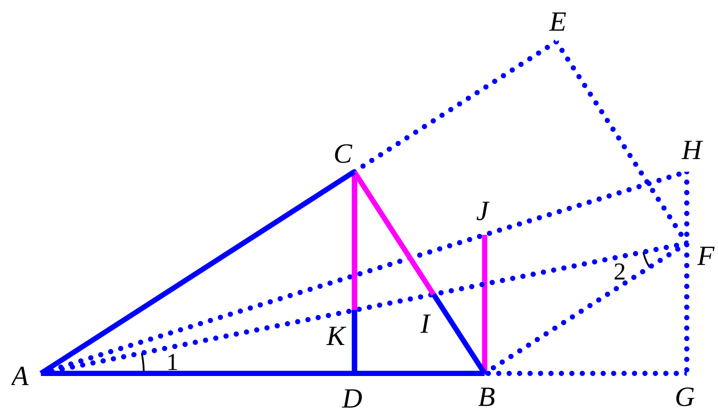


图 16 直角三角形内接正方形的尺规作图

因 $KD = \dfrac{a^2}{c} \times \dfrac{\frac{b^2}{c}}{c+h} = \dfrac{h^2}{c+h}$，故 $CK = h - \dfrac{h^2}{c+h} = \dfrac{ch}{c+h} = BJ$。又因 $AB > BC = BF$，故 $\angle 2 > \angle 1$，$\angle CIK = 90° - \angle 2 < 90° - \angle 1 = \angle CKI$，故得 $CK < CI$，即 $s' < s$。

也可以通过勾股定理证明（3）。因 $AG^2 + FG^2 = AE^2 + FE^2$，故

$$AG^2 = AE^2 + FE^2 - FG^2 = AE^2 + BF^2 - FG^2 = AE^2 + BG^2。$$

3.2 联系边角，巧施代换

设 $\angle A = \theta$，则 $a = c\cos\theta$，$b = c\sin\theta$，于是得

$$\frac{d}{d'} = \frac{c + \frac{ab}{c}}{a+b} = \frac{1+\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}。$$

设 $t = \sin\theta + \cos\theta$（$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$），则 $1 < t \le \sqrt{2}$，于是得

$$\frac{d}{d'}=\frac{\frac{1+t^2}{2}}{t}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)>1\text{。}$$

或者也可以采用作差法

$$\begin{aligned}d-d'&=\frac{c\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}-\frac{c\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta\cos\theta}\\&=c\sin\theta\cos\theta\frac{1+\sin\theta\cos\theta-\sin\theta-\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)}\\&=c\sin\theta\cos\theta\frac{(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)}\\&>0\text{。}\end{aligned}$$

3.3 聚焦函数，关注性质

如图 17，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BE=x$，四边形 $DECF$ 为内接矩形，易知其面积为

$$S(x)=\frac{b}{a}x(a-x)=bx-\frac{b}{a}x^2=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{4}ab\quad（0<x<a）$$

函数 $S(x)$ 在 $\left(0,\frac{a}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{a}{2},a\right)$ 上单调递减，当 $x=\frac{a}{2}$ 时，函数达到最大值。

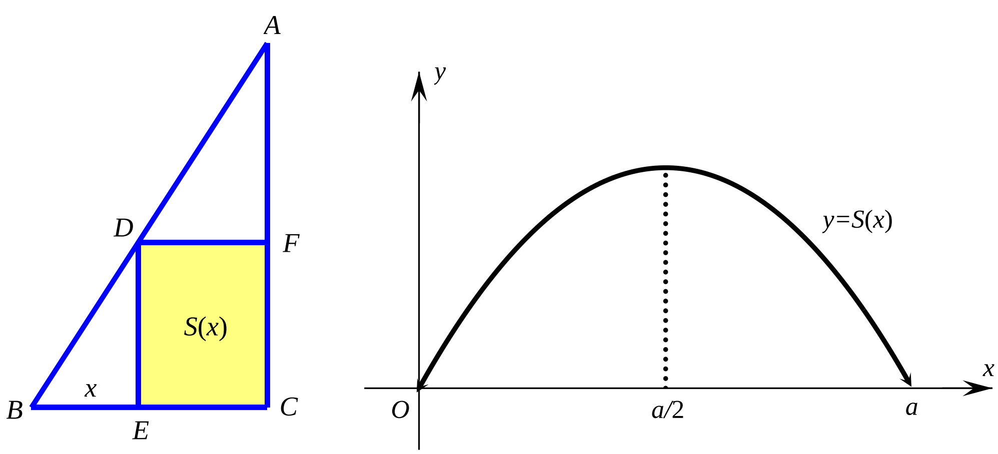


图 17 直角三角形内接矩形的面积函数

据此，可以解决勾股容方和弦中容方问题。在勾股容方的情形中，

$$x_1=a-\frac{ab}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}<\frac{a}{2}\text{。}$$

在弦中容方的情形中，根据图 12，计算可得

$$x_2=\frac{ah}{c+h}=\frac{a^2}{a+\frac{ac}{h}}=\frac{a^2}{a+\frac{c^2}{b}}<\frac{a^2}{a+b}=x_1,$$

因此，$S(x_2)<S(x_1)$。

4 教学启示

以上我们看到，“邪不压正”问题既与中算史上的几何命题和方法有密切联系，又与今日中学数学课程中的代数、三角等方面知识息息相关，古今解法，各美其美，精彩纷呈，交相辉映。从“邪不压正”问题的深入探究过程中，可以获得诸多教学启示。

其一，于古题中寻白，提出新问。

勾股容方问题仅仅关注到“勾中容方”，而忽略了“弦中容方”，因而留下了“问题之白”。任何数学问题都会留白，教师可以利用“否定属性”策略去寻白，进而去补白。图 18 给出了直角三角形的部分条件和目标，根据不同条件和目标，可以提出不同的问题。“勾股容方”和“弦中容方”问题仅仅属于“已知条件为直角三角形边长、目标为内接矩形边长”问题，而这类问题也有很多，如“已知两条直角边长，求直角三角形最大内接矩形的面积”“已知斜边和一条直角边长，求直角三角形内接正三角形的边长”等等。

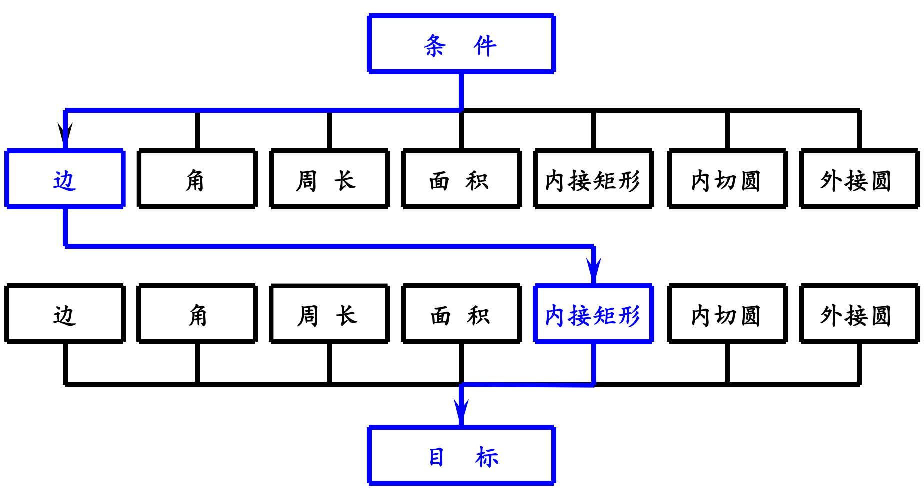


图 18 直角三角形问题的部分条件与目标

其二，于古法中启思，创获新知。

刘徽的青朱出入图、勾股容方图、勾股容圆图、矩表方里图、赵爽的勾股大方图、杨辉的

容横容直图等，无不为“邪不压正”命题的发现和证明提供思想启迪或图形材料，中算史在今日数学教学中的作用昭然若揭。中算史上的这些图形及其背后的思想方法，当然不仅仅局限于本文所探讨的“邪不压正”问题。例如，利用勾股容方图和勾股大方图，可以证明均值不等式[5]；利用赵爽大方图，可以直观地说明“和定积最大”“积定和最小”的结论（图 19 和 20）；利用容横容积图，可以证明“积定和最小”，等等。

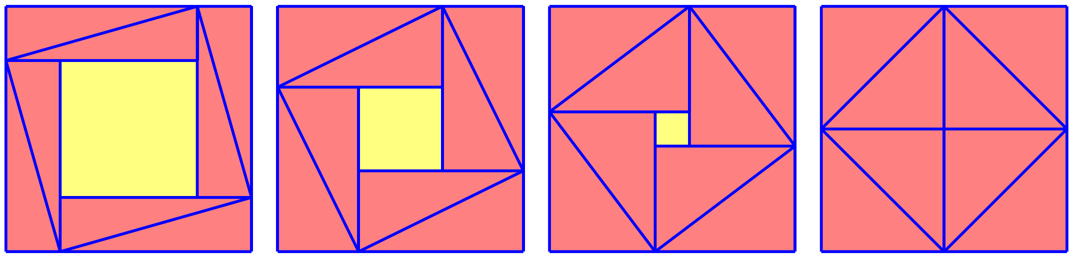


图 19 从大方图的变化看“和定积最大”

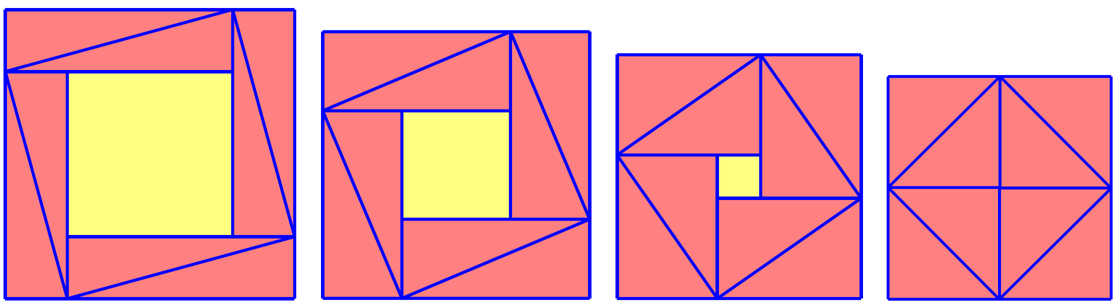


图 20 从大方图的变化看“积定和最小”

其三，于古算中叩问，理解数学。

为什么《九章算术》作者与“弦中容方”问题失之交臂？虽然该问题难于勾股容方问题，但从上文可见，古人完全能够解决该问题。或许，古人已经知道“邪不压正”，他们只是选择了“正”，抛弃了“邪”；或许智者千虑，必有一失，特别是在一个仅仅依赖与几何而缺乏代数工具的时代。无论如何，我们惟有摈弃自我为中心的思维习惯，走进遥远时代的数学家心灵之中，才能对上述问题作出回答，并深刻理解古代数学家的局限性、数学学科的演进性和今日符号代数的优越性。

参考文献

[1] 汪晓勤. 从克拉维斯的《几何原本》注看数学家的创新[J]. 数学通报, 2023, 62(6): 1-6, 30.

[2] 赵爽. 《周髀算经》注. 见: 郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇·数学卷(一)[M]. 郑州: 河南教育出版社, 1994: 11-12.

[3] 郭书春. 汇校《九章算术》[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2004: 409, 422.

[4] 杨辉. 续古摘奇算法. 见: 郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇·数学卷(一)[M]. 郑州: 河南教育出版社, 1994: 1114.

[5] 汪晓勤. 从勾股容方到均值不等式[J]. 数学通报, 2015, 54(2): 7-9.

中华优秀传统数学文化与初中数学留白创造式教学

姚雪凌

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

2021 年 1 月，教育部印发了《中华优秀传统文化进中小学课程教学指南》，并针对数学学科提出了明确要求。《义务教育数学课程标准（2022 年版）》在“课程理念”中明确提出要“继承和弘扬中华优秀传统文化”；在“教学建议”中提出可以通过“中国数学家贡献的素材帮助学生了解和领悟中华民族独特的数学智慧，增强文化自信和民族自豪感”[1]。对数学学科而言，中国传统数学的历史（以下简称“中算史”）是中华优秀传统文化的重要组成部分。但要让中华优秀传统数学文化进课堂，并不是在原有的数学课程内容上简单地增加额外的内容，而是要将中华优秀传统数学文化与相关数学内容的教学有机结合[2]。

“留白创造式”教学指的是以学生为中心，立足育人目标，为学生学习留下充分的思维空间与探究机会，让学生在已有的知识基础上，主动学习、解决问题、创获新知、陶熔品行的教学方式。留白创造式教学有“六白”——陈述之白、方法之白、论证之白、发现之白、问题之白和超越之白[3]。在课堂教学中有六种运用中算史的策略[4]：“古名今辩”指的是用现代的数学语言来解释中算术语；“古题今解”指的是用现代方法或古人的其他方法来解中算史上的某个问题；“古术今推”指的是用现代方法来推导中算史上的某个公式或证明中算史上的某个公式、命题、法则；“古法今用”指的是将中算史上的数学方法用于新情境、解决新问题；“古问今编”指的是从中算史上的数学问题出发制新问题；“古算今思”指的是从中算史中获得思想、精神的启迪。六种策略依次对应于陈述之白、方法之白、论证之白、发现之白、问题之白和超越之白。

本文以中算史中的若干主题为例，探讨中算史在初中数学留白创造式教学中的应用，为教学提供参考。

2 古名今辩与陈述之白

今日数学课程中的数学术语有不同的起源，部分术语源于中算史，部分术语则属于舶来品，对于前者，教师在教学中可以让学生用今天的语言加以刻画。

如，在一元一次方程、二元一次方程组概念、矩形的性质与判定等主题的教学中，教师可以让学生在课前或课后查阅资料，并回答以下问题：为何称未知数为“元”？“方程”一词是如何起源的？长方形为何又称为“矩形”？学生可以在课上分享探究的结果。

- 用“元”来表示未知数，可追溯到宋元时期的“天元术”，即在解代数问题时，先“立天元一为某某”[5]，就是现在的“设某某为 x”。
- 关于“方程”一词，刘徽在《九章算术》注中指出：“群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之方程。”[6]程大位（1533-1606）在《算法统宗》中的解释：“方，正也。程，数也”[6]。“方”即方形，“程”即表达式，将问题中的相关数据并肩排列成方形，则称为“方程”。
- 关于矩形名称，《史记》“夏本纪”称大禹治水时“左规矩，右准绳”[7]，其中，“矩”代表直角尺，因此，长方形即四个角均为直角的四边形，亦称为矩形。

教师也可以让学生用今天的数学语言来表达古代的数学主题，如在有理数运算的教学中，让学生解释《九章算术》中的有理数减法法则“同名相除，异名相益”和加法法则“异名相除，同名相益”(“除”就是今天所说的“减”，“益”就是今天所说的“加”)。

采用“古名今辩”策略的目的是为学生留出“陈述之白”，学生在补白过程中，可以了解数学名称的来源，区分古今涵义的差异，加深对数学概念的理解，并提升数学表达能力。

3 古法今用与发现之白

将中算史融入数学教学时，思想方法是重要的素材之一。教师不仅可以再现古题与古法，还可以引导学生用古法解决新问题。

三国时代数学家刘徽在注释《九章算术》时用“以盈补虚”（出入相补）法来推导“圭田”（三角形）面积公式[8]，如图 1。

在“三角形中位线定理”的教学中，教师可以让学生运用出入相补证明三角形面积公式，

据此发现三角形中位线与底边的位置和大小关系。

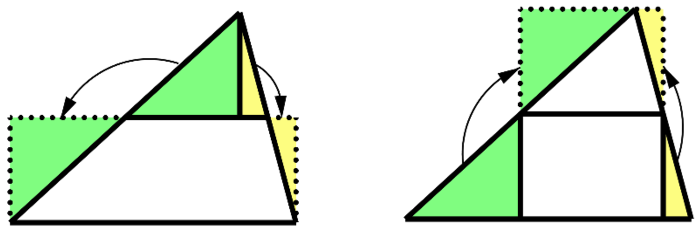


图 1 从三角形面积公式到三角形中位线定理

类似地，在“梯形中位线定理”的教学中，教师也可以让学生利用出入相补法推导梯形面积公式，由此发现梯形中位线定理，如图 2 所示。

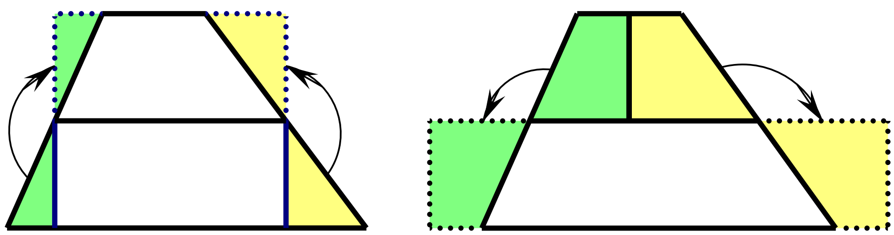


图 2 从梯形面积公式到梯形中位线定理

刘徽还用出入相补法来证明“勾中容方”公式，如图 3 所示，将左图矩形中的红色、蓝色直角三角形以及黄色正方形进行重新组合，得到右图中的等面积矩形，于是得 $ab=(a+b)d$，从而得到勾股容方公式 $d=\dfrac{ab}{a+b}$。

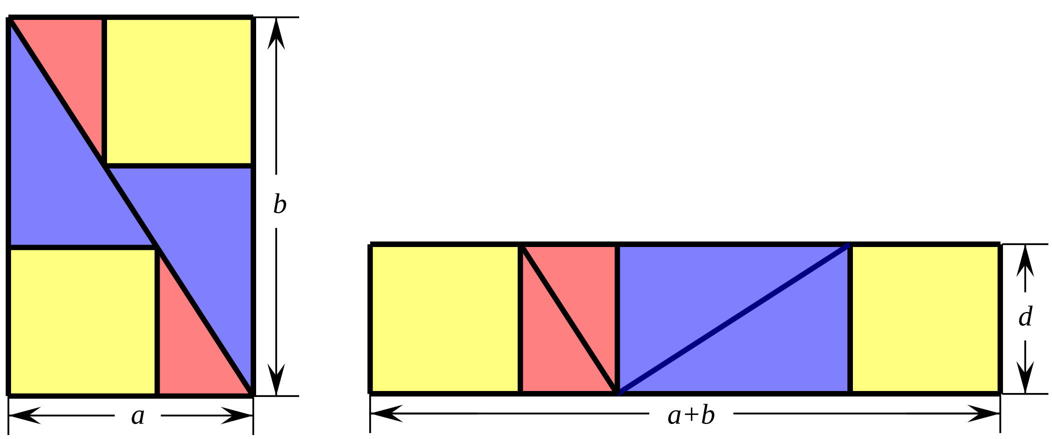


图 3 刘徽关于勾股容方问题的证明

众所周知，直角三角形有两个内接正方形，《九章算术》作者只研究了“勾中容方”而忽视了“弦中容方”。实际上，利用刘徽的出入相补法，也可以得到弦上内接正方形的边长。如

图 4 所示，将左图长方形中的红、蓝、绿三色直角三角形和黄色正方形进行重新组合，并

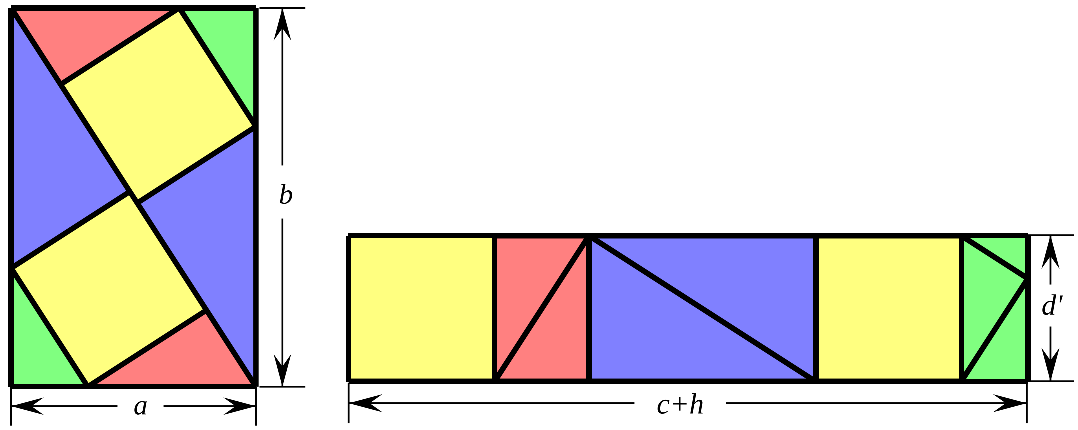


图 4 直角三角形斜边上内接正方形边长公式的推导

将其中一个绿色直角三角形分割成两部分，可以得到右图中的矩形，其中 h 是原直角三角形斜边上的高。于是，斜边上内接正方形边长为

$$d'=\frac{ab}{c+h}=\frac{ab}{c+\frac{ab}{c}}=\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+ab+b^2}。$$

实际上，同样的方法还可以用于一般三角形的情形。如图 5，设任意三角形的底边长为 c，底边上的高为 h，且两底角不为钝角，则将两个同样的三角形进行分割和重组，得到一个长为

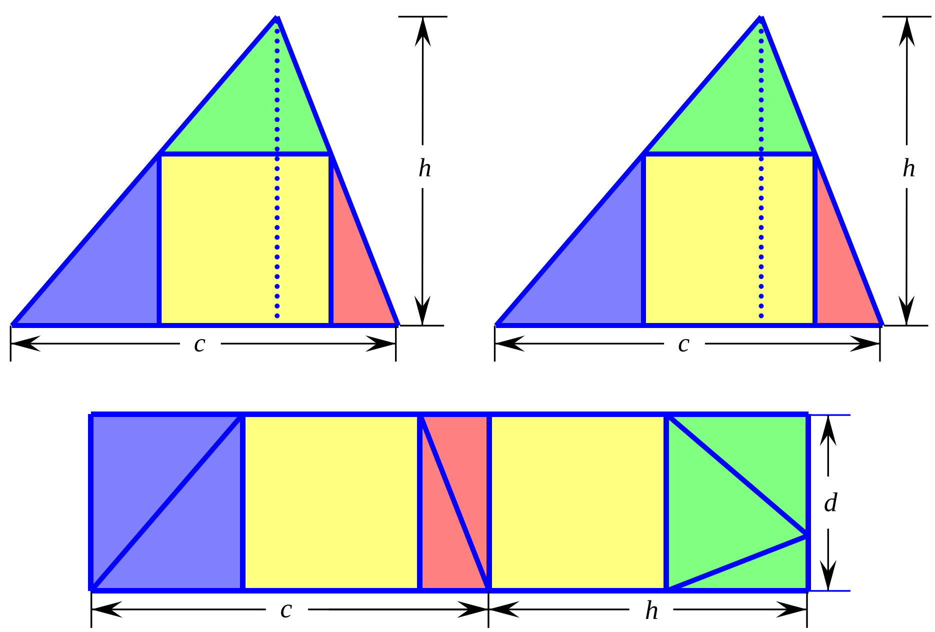


图 5 一般三角形内接正方形边长公式的推导

$c+h$，宽为内接正方形边长的矩形，故得三角形内接正方形的边长为

$$d=\frac{ch}{c+h}。$$

采用“古法今用”策略的目的是为学生留出“发现之白”，学生通过补白可以创获新知，从而提升创新意识和逻辑推理能力。

4 古题今解与方法之白

由于古代数学家没有符号代数，很多今天可用代数方法解决的问题，古人往往要用算术方法或几何方法予以解决，但教师在教学中可以将这些方法视为必要的补充。

如，在进行“勾股定理”教学时，教师可让学生求解《九章算术》勾股章第 13 题：“今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺。问：折者高几何？”[9]设直角三角形的直角边长分别为 a 和 b，其中 $a=3$ 尺，$c+b=10$ 尺。学生往往会利用方程 $3^2+b^2=(10-b)^2$ 来求解。

教师在学生给出现代解法之后，让学生思考：古人没有符号代数，他们又是如何解决这个问题的呢？学生可能会利用平方差公式的几何模型（图 6）得到

$$c-b=\frac{a^2}{c+b}$$

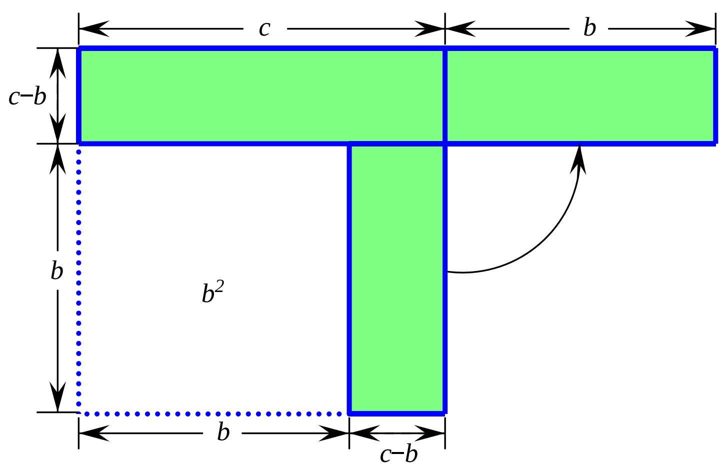


图 6 大风折竹问题的几何解法之一

进而求出 b 和 c；或利用以 $c+b$ 为边长的大方图（图 7）得到

$$2b(c+b)=(c+b)^2-(c+b)(c-b)=(c+b)^2-a^2,$$

进而得到 b 和 c。上述方法分别是赵爽和刘徽的方法。

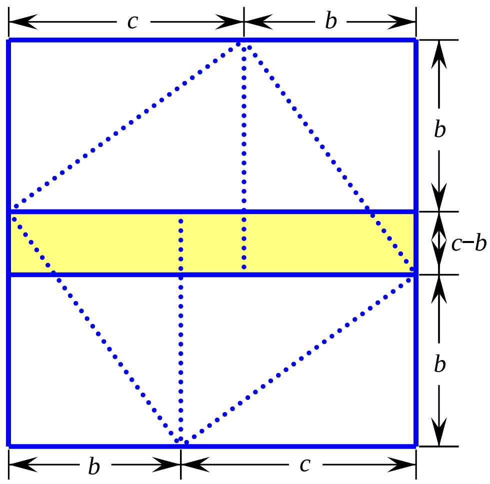


图 7 大风折竹问题的几何解法之二

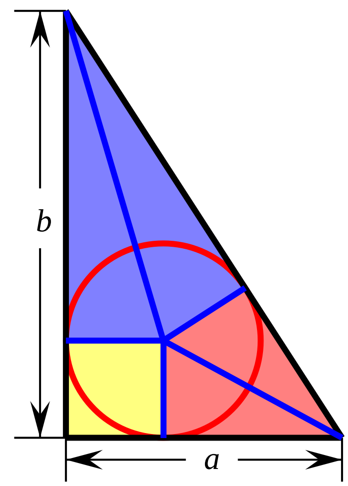


图 8 勾股容圆问题

《九章算术》勾股章设有“勾股容圆”问题：“今有勾八步，股十五步。问：勾中容圆径几何？”[9]原书给出直角三角形内切圆直径公式

$$d=\frac{2ab}{a+b+c} \tag{1}$$

在有关圆的切线的教学中，教师让学生解决上述问题，学生会往往利用切线长定理求得

$$d=a+b-c \tag{2}$$

之后，教师让学生思考：擅长出入相补法的古人可能会采用什么解法？学生可能会采用以下方法。

解法 1：将图 8 中的一对黄色正方形、一对红色矩形和一对蓝色矩形进行组合，得到图 9 所示的大矩形，注意到该矩形的长为 $a+b=c+2r=c+d$，故得（2）。

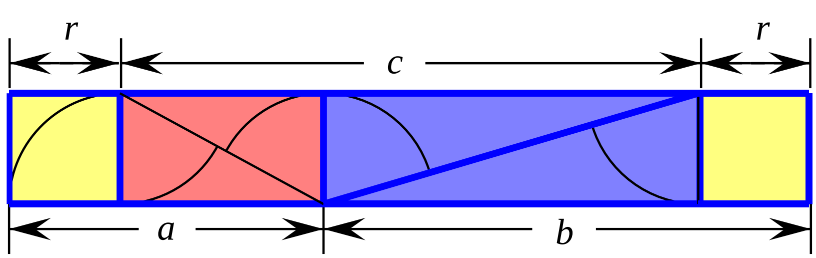


图 9 勾股容圆问题新解之一

解法 2：将组成原直角三角形的一个黄色正方形、一对红色矩形和一对蓝色矩形进行重组，得到图 10 所示的矩形。于是，勾股容圆问题被转化为“已知矩形的面积和长宽之差， 求宽”

问题。构造边长为 $c+2r$ 的大方图（图 11），不难解决这个新问题：因 $c+2r=c+d=\sqrt{c^2+2ab}$，故得

$$d=\sqrt{c^2+2ab}-c \tag{3}$$

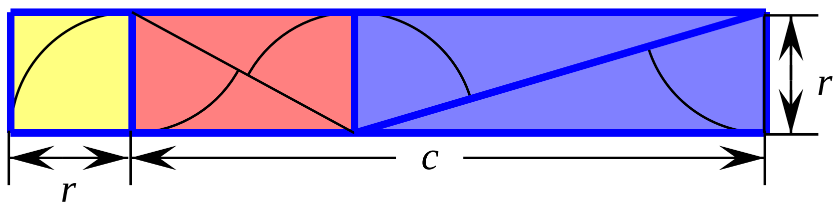


图 10 直角三角形的等积变形

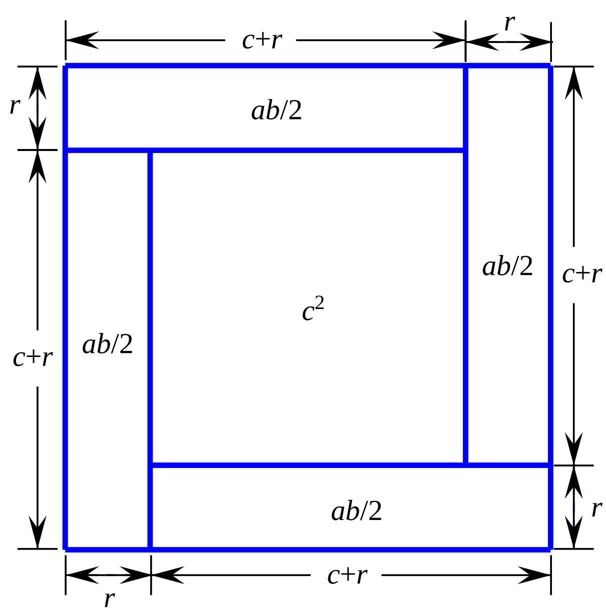


图 11 勾股容圆问题新解之二

解法 3：将组成矩形的一对黄色正方形、两对红色矩形和两对蓝色矩形进行重组，得到图 12 所示的等积狭长矩形，故得 $(a+b+c)r=ab$，于是得等式（1）。

教师将学生所推测的几何方法与刘徽的方法加以对照，并进一步让学生思考：为什么刘徽不采用这三种方法？

采用“古题今解”策略的目的是为学生留出“方法之白”，学生在补白过程中，既可以体会到古代方法的直观性，也可以感悟现代代数方法的优越性，并激发创新思维。

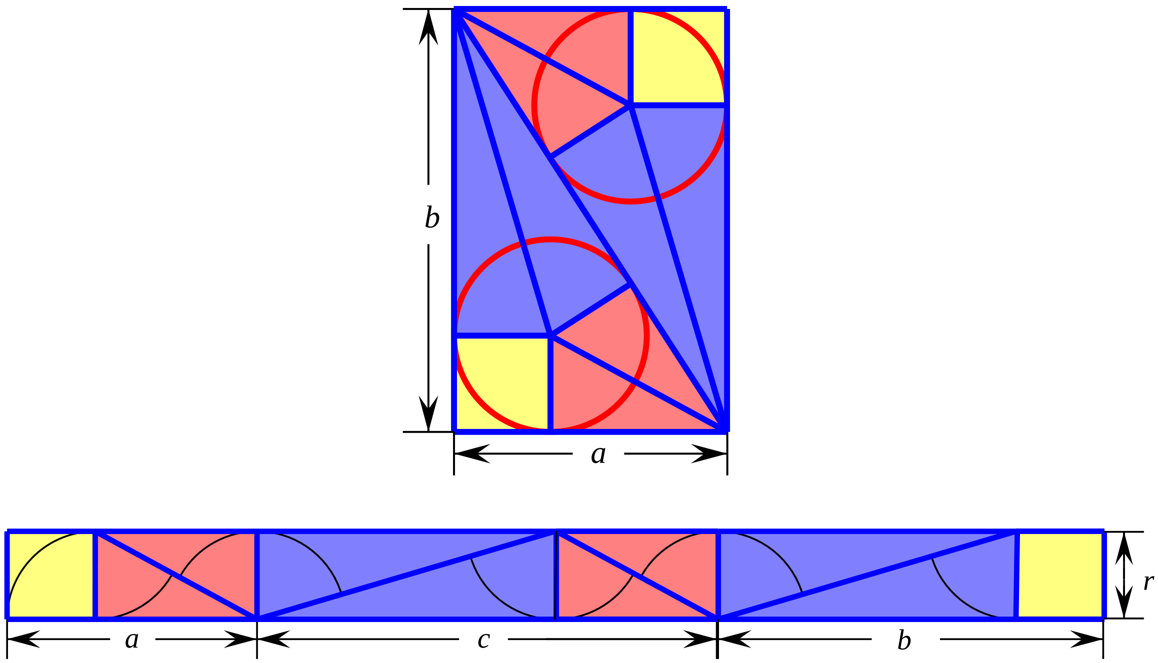


图 12 勾股容圆问题解法之三

5 古术今推与论证之白

中国古代数学家将问题的解法称为“术”，如“今有术”“衰分术”“割圆术”“盈不足术”“方程术”“正负术”和“勾股术”等等。一些“术”呈现了解题的具体程序，还有一些“术”则给出了数学公式、命题、法则等。

刘徽将西汉时期天文学家的“重差术”用于海岛高度的测量，其《海岛算经》第一题为：“今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直，从前表却行一百二十三步，人目着地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目着地取望岛峰，亦与表末参合。问岛高及去表各几何？”[6]如图 13，EF 为前杆，MN 为后杆，AB 为所求岛高，BF 为所求岛离前杆距离，刘徽给出的解法是：$AB=\dfrac{EF\cdot FN}{NC-FD}+GB$。

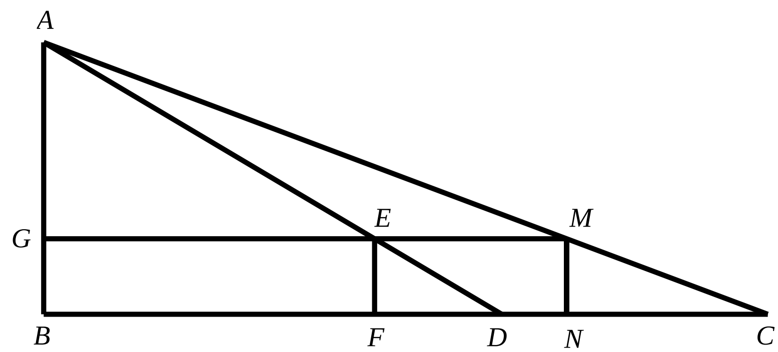


图 13 海岛测量图

在“相似三角形应用”的教学中，教师可以让学生用自己的方法去推导刘徽所用的公式，并思考古人可能采用的方法。教师呈现杨辉的图形（图 14），并让学生根据图形复原古人的推导方法：设 $AB=h$， $EF=a$， $FD=s_1$， $NC=s_2$， $FN=d$，则可得 $(h-a)(s_2-s_1)=ad$，即 $h=\dfrac{ad}{s_2-s_1}+a$。

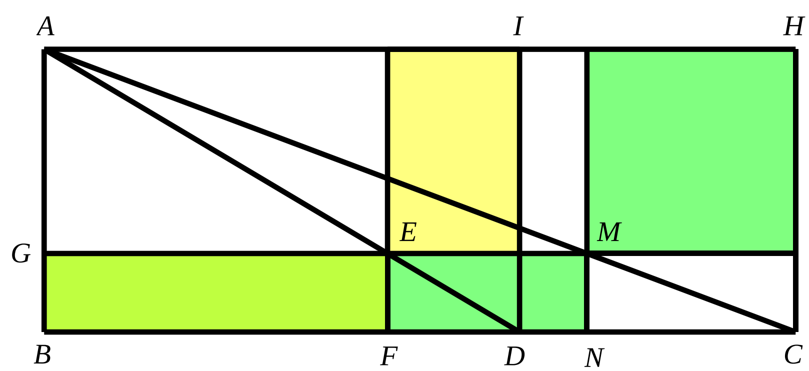


图 14 两个矩形中的勾中容横、股中容直

“盈不足”是中国古代数学的一个重要主题，《九章算术》用整整一章的篇幅来讨论各类盈不足问题的解法，其中最典型的问题是：若干人一起购物，不知人数，也不知物价。若每人出 a_1（货币单位），则多出 b_1（货币单位）；若每人出 a_2（货币单位），则不足 b_2。《九章算术》“盈不足术”说的是：（1）每人出 $\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2}$（货币单位），则总钱数不多不少，刚好等于物价；（2）共同购物的人数为 $\dfrac{b_1+b_2}{a_1-a_2}$；（3）物价为 $\dfrac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1-a_2}$。

在二元一次方程组消元法的教学中，教师可以呈现《九章算术》中的盈不足问题，并让学生用今天的数学语言来表达“盈不足术”，然后让学生对其加以证明，并让学生思考：古人是如何用算术方法得到这些结论的？事实上，设人数为 x，物价为 y，则有

$$\begin{cases} a_1x-y=b_1 \\ a_2x-y=-b_2 \end{cases} \tag{4}$$

解（4）得

$$x=\frac{b_1+b_2}{a_1-a_2}，\quad y=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1-a_2} \tag{5}$$

由此可得每人应出钱数。

但古人的算术方法相当于将（4）改成

$$\begin{cases} a_1b_2x-b_2y=b_1b_2 \\ a_2b_1x-b_1y=-b_1b_2 \end{cases} \tag{6}$$

消去常数项得

$$\left(a_1b_2+a_2b_1\right)x=\left(b_1+b_2\right)y,$$

即

$$\frac{y}{x}=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1+b_2} \tag{7}$$

等式（7）表达的就是每人应出钱数。再将（7）代入（4）中的某一个方程，即得所求。

采用“古术今推”策略的目的是为学生留出“论证之白”，学生在补白过程中，可以提升逻辑推理能力，并走进古代数学家的心灵之中，认识古今方法的差异，感悟古代几何方法之美和今日代数方法之简。

6 古问今编与问题之白

以《九章算术》为代表的中算名著大多为问题集，数学问题丰富多彩，层出不穷。然而，将中算史融入数学教学，不仅仅在于“古题今解”，还在于“古问今编”，即让学生在古算题的基础上提出新问题。

如进行“二元一次方程组”教学时，教师可让学生对《九章算术》盈不足章的第 2 题进行改编：“今有共买鸡，人出九，盈十一；人出六，不足十六。问人数、鸡价各几何。”[9]改变题

目的条件，可得条件式[10]问题："若干人共同买鸡，如果每人出 8 元，少 24 元；每人出 12 元，少 8 元。问一共有多少人？每只鸡多少钱？" 同时改变问题的情境和条件，可得自由式[10]问题："老师给学生分糖，若老师给每个学生 10 颗糖，则少 5 颗；若老师给每个学生 9 颗糖，则多 6 颗，问一共有多少颗糖？有多少学生？" 或"某人用有机肥给土豆施肥。如果每亩土豆施肥 10 千克，则缺 200 千克肥料；若每亩施肥 8 千克，则多 200 千克，问一共有多少亩土豆？多少千克有机肥？"

教师也可让学生对《九章算术》盈不足章第 17 题进行改编："今有善田一亩，价三百：恶田七亩，价五百。今并买一顷，价钱一万。问善、恶田各几何。"[9]同时将问题的情境和条件进行改编，可得自由式[10]问题："某停车场的收费标准为中型汽车 12 元每辆，小型汽车 8 元每辆，现停车场共有 50 辆中、小型汽车，共缴费 480 元。问：中、小型汽车各有几辆？""某停车场的收费标准为大型汽车 16 元每辆，中型汽车 12 元每辆，小型汽车 8 元，现停车场共有 60 辆大、中、小型汽车，大型汽车比中型汽车少 10 辆，共缴费 640 元，问：大、中、小型汽车各有几辆？"

在进行平面几何教学时，教师可以让学生在《九章算术》勾股容方问题的基础上提出各种新的问题。如：

问题 1：已知直角三角形的两条直角边长分别为 6 和 8，求与直角三角形有一个公共直角的内接正方形的边长。

问题 2：已知直角三角形的两条直角边长分别为 6 和 8，求一条边与直角三角形斜边部分重合的内接正方形的边长。

问题 3：已知直角三角形的两条直角边长分别为 6 和 8，求其内接矩形的最大面积。

问题 4：如图 15，已知 Rt△ABC 中，BC=6，AC=8，等边△DEF 的三个顶点分别位于 BC、AB 和 AC 上，且 EF//BC，求 EF。

问题 5：如图 16，已知 Rt△ABC 中，BC=6，AC=8，等边△DEF 的三个顶点分别位于 BC、AB 和 AC 上，且 ED//AC，求 EF。

问题 6：如图 17，已知 Rt△ABC 中，BC=6，AC=8，等边△DEF 的三个顶点分别位于 BC、AB 和 AC 上，且 FD//AB，求 EF。

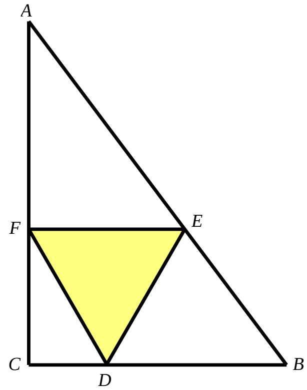


图 15 内接正三角形问题之一

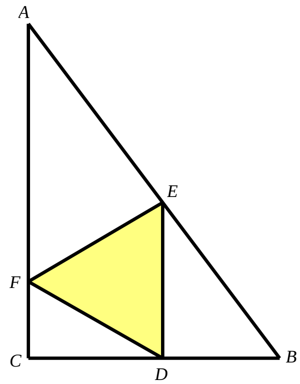


图 16 内接正三角形问题之二

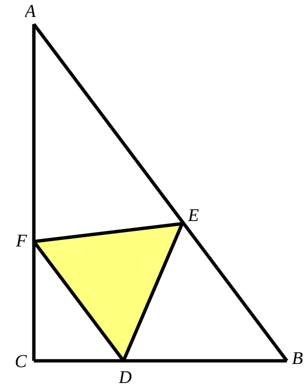


图 17 内接正三角形问题之三

改变内接正三角形顶点的位置，或将直角三角形改为斜三角形，又可提出各种新的问题。

采用“古问今编”策略的目的是为学生留出“问题之白”，通过让学生补白，培养学生的创新意识和提出问题的能力。

7 古算今思与超越之白

将中算史融入数学教学，除了运用具体的术语、问题和方法，还会涉及一般数学思想、中算特色、数学人物等。

在“三角形中位线定理”和“勾股容方”教学中，教师可以让学生思考公式的推导、定理的证明过程中用到了哪些数学思想方法，从中可以获得什么启示。比如古人都曾用出入相补法解决上述问题，启发学生思考：出入相补法背后的思想是什么？是否别的问题也可采用出入相补法进行证明？在处理“大风折竹”问题和“勾股容圆”问题时，都可利用大方图进行求解，大方图还能解决哪些数学问题？类似地，利用赵爽弦图能不能解决这样的问题？背后的数学思想是什么？

对于有多种解法的问题，如“勾股容圆”问题的教学中，教师可以启发学生思考不同证明方法背后有何区别与关联，能从这些方法中获得什么启示。也可让学生对“勾股容方”和“勾股容圆”问题的求解方法进行对比，思考二者解法的同与异。学生基于勾股容方问题自己编制新的问题，启发学生思考所编制问题的解决方法的同时，也让学生明白自己也能像古代数学家一样提出有价值的问题，从而提升学生的自信心。

在“大风折竹”问题中，古人的一种几何证法源于平方差公式的几何模型，教师可让学生思考对于平方差公式，还有没有别的几何证明方法？其中一种几何证明方法是赵爽在注释《周髀算经》时给出的，通过布衣数学家赵爽“负薪余日，聊观《周髀》”的故事[11]，让学生思考从古代数学家身上学到了什么。杨辉通过“勾中容横，股中容直”原理证明岛高公式的路途也并非一帆风顺，他在《续古摘奇算法》中写道：“辉尝置海岛小图于座右，乃是先贤作法之万一。”[11]教师也可让学生思考这体现了古代数学家怎样的品质，能否对自己的学习生活有所帮助。

采用“古算今思”策略的目的是为学生留下“超越之白”，学生在补白过程中，可以感悟中算独特的思想方法、中算家的优秀品质、数学的演进性特征等，从而获得超越知识本身的精神上的洗礼。

8 结 语

要将中华优秀传统数学文化真正融入初中数学教学，不仅需要“古为今用”，更需要“推陈出新”，而留白创造式教学是实现推陈出新的理想的教学方式。我们认为，通过古名今辩、古题今解、古术今推、古法今用、古问今编和古算今思六种策略的运用，基于中算史的初中数学留白创造式教学是有法可依、完全可行的。中算史为教师的课堂留白提供丰富的素材，也为学生的补白提供重要的参照，还可以为教师的补白评价提供思想源泉。

基于中算史的留白创造式教学对教师来说颇具挑战性。首先，教师需要深入学习中算史，认识中算史的世界意义，数典忘祖、崇洋媚外的现象皆源于无知；其次，教师需要深入学习“留白创造式”教学的理念和方法，没有留白，就不会有创新，一言堂的习惯、对学生不放心的心态早已不符合时代的需要；再次，教师还需要深入学习将中算史融入课堂教学的六种方式，在实践中逐渐掌握适合于自己学生的教学策略，并感受中华优秀传统文化巨大的教育价值。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 2, 87.

[2] 曹一鸣. 中华优秀传统数学文化进中小学数学课程: 从意义到实施[J]. 教育研究与评论, 2022(6): 46-49.

[3] 王华, 汪晓勤. 中小学数学“留白创造式教学”教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023: 25, 67-68.

[4] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于中华优秀传统数学文化的高中数学留白创造式教学初探[J]. 中小学课堂教学研究, 2023(9): 1-6.

[5] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 122.

[6] 白尚恕. 九章算术注释[M]. 北京: 科学出版社, 1983: 257, 258, 343.

[7] 李文林. 数学史概论(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 68.

[8] 汪晓勤. 中华优秀传统数学文化融入初中数学教学的若干路径[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2022(6): 34-39.

[9] 郭书春. 汇校九章算术[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2004: 461, 468, 377, 391.

[10] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020, 59(5): 9-15.

[11] 郭书春. 中国科学技术典籍通汇•数学卷(一)[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1994: 1114.

教学实践

中华优秀传统文化融入数学教学的案例与价值分析

胡永强

（苏州市阳山实验初级中学校，苏州 215151）

当前，越来越多的教师和研究者逐渐意识到中华优秀传统文化对数学教学有着十分重要的意义和价值。但是，如何将中华优秀传统文化融入数学教学？融入中华优秀传统文化又将取得哪些效果？下面结合三个案例回答上述问题。

1 中华优秀传统文化融入数学教学案例

1.1 《海涛志》与函数概念

（1）历史素材

唐代潮汐学家窦叔蒙在他的《海涛志》一书中设计一个具有纵横两轴的二维坐标系统，推算一个月的高低潮时。如图 1，这是世界上最早的高低潮时推算图，其中蕴含着函数思想[1]。基于这一历史素材，笔者设计一节函数概念课。

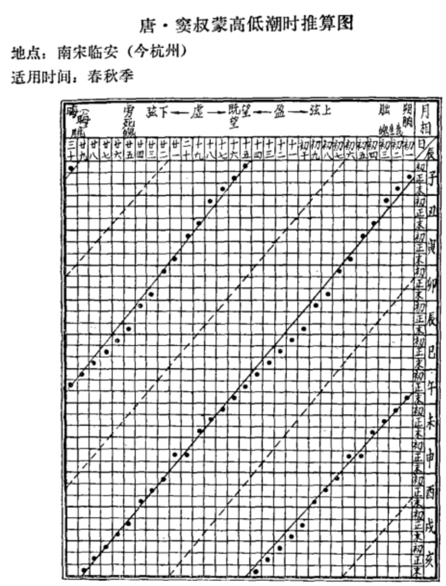


图 1 窦叔蒙高低潮时推算图

（2）教学过程

笔者借助《海涛志》引入新课，以海潮为背景设计三个情境，分别对应函数的解析法、图象法和表格法三种表达形式，引导学生通过“寻找三个情境两个变量之间的共同特征-提炼本质特征-概括函数定义-检验情境是否符合定义”这一流程建构并理解函数概念。

情境 1：一个月内的潮时与日期的关系。教师结合图 1 介绍某地每天涨潮的时间比前一天推迟 48 分钟，若某月初一的涨潮时间为 0:48，设日期为 x（x 取 1-30 中的正整数），涨潮时间为 y（分钟），引导学生思考 y 与 x 之间有何关系？

情境 2：一天中潮高与时间的关系。组织学生观察图 2 并思考，一天中的潮高与时间这两个变量之间有何关系？

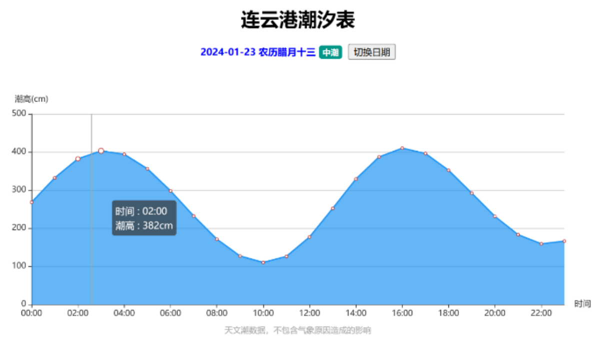


图 2 连云港潮汐表

情境 3：一年中每个月最高潮高与月份的关系。组织学生观察表 1，思考一年中每个月最高潮高与月份之间有何关系？

表 1 最高潮高与月份间的关系

月份/月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
最高潮高/米	4.3	4.7	4.6	4.9	5.2	5.5	5.7	5.6	5.1	4.8	4.4	4.7

在学生建构函数概念后，通过一段微视频介绍函数的发展历史，随后是例题教学和练习及小结环节。

（3）教学效果分析

课后，笔者对 42 名学生进行调查发现：95%的学生表示唐代潮汐学家窦叔蒙揭示涨潮规律的故事，让自己体会到做学问要善于观察、乐于探究、持之以恒、勇于创新，生活中充满变化的问题，函数是研究变化问题的工具。60%的学生表示对函数历史的微视频印象深刻，对窦叔蒙借助二维坐标系统进行潮汐预报比西方早 400 多年的故事感到自豪。我们可以看到，本节

课融入的传统文化素材深受学生喜爱，既有助于学生深刻建构并理解函数的概念，还能让其感受到中华优秀传统文化的魅力，增强文化自信。[2]

1.2 《周礼·夏官司马》、《大衍历》与正切概念

（1）历史素材

《周礼•夏官司马》记述：“土方氏掌土圭之法，以致日景”。由此可知，在周朝已经有了专门掌管土圭的官员，称为土方氏，他们利用圭表（如图 3），通过测量正午时分的影长来划分一年四季。[3]

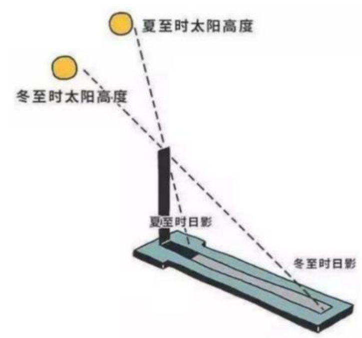


图 3 圭表

我国唐代天文学家张遂（683-727，又名一行）在编制《大衍历》的过程中，制作了一张 0 度到 80 度的正切函数表，这是世界上第一张正切函数表。在该正切函数表中，角的单位是根据四年一闰的规律，把一个圆周等分为 365.25 份，每一份所对应的圆心角称为 1 古度，约为现在的 0.9856 度，表中 45°角的正切值为 0.97767。[4]基于上述两则素材，笔者设计一节正切概念课。

（2）教学过程

首先，通过古人如何确定日期的问题，引出土圭之法情境。其次，设计“杆不变角变”“角不变杆变”“杆角都变”三个探究活动，引导学生逐步探索发现直角三角形的一个锐角与它的对边和邻边之比存在角变比变、角定比定的函数依赖关系，总结提炼出正切定义。然后，借助一段微视频介绍正切的历史。最后，根据定义，计算 45°角的正切函数值，并与一行的正切函数表中的数值进行对比，制造认知冲突，渗透学科德育。[5]

学生在探究过程中体会到函数思想，了解控制变量法、积累“观察-猜想-证明”等科学研究的经验。学生将计算所得的 45°角的正切值与一行正切表中的值对照，发现一行的“错误”，

教师先组织学生对一行的“错误”发表看法，许多学生认为这一“错误”是由于测量存在误差所导致。在此基础上，教师再介绍古度的相关知识，接着，让学生对此谈一谈自己的感想。最后是例题教学和练习及小结环节。

（3）教学效果分析

课后，笔者对 48 名学生进行问卷调查发现：所有学生都表示，愿意了解更多中华优秀传统文化，具体原因包括：借助中华优秀传统文化，可以帮助自己了解知识的源流、增进对知识的理解；提高对数学的兴趣，提升自己的文化底蕴；与古人对话、了解古人的智慧、有助于启迪思维；传统文化需要在传播中继承和弘扬。由此可见，在教学中，以适恰的方式融入中华优秀传统文化，可以增强学生对中华优秀传统文化的理解和认同。88%的学生表示对土圭之法和一行的正切函数表中 45°角的正切值不为 1 的印象深刻，从中了解到古人的智慧，真切体会到做学问既要有质疑精神，又要实事求是，不能主观臆断。

1.3 《九章算术》与二元一次方程组复习

（1）历史素材

《九章算术》是中国古代数学典籍的代表，其中有许多问题与二元一次方程组密切相关[6]，根据教学需要，从中选取以下四道不同类型的问题融入教学，如表 2。

表 2 《九章算术》中的二元一次方程组问题

序号	来源	题目	类型
1	第七章盈不足第 1 题	今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问人数、物价各几何？	$\begin{cases} ax-b=y \\ cx+d=y \end{cases}$
2	第七章盈不足第 16 题	今有玉方一寸，重七两；石方一寸，重六两。今有石立方三寸，中有玉，并重十一斤。问玉、石重各几何？	$\begin{cases} x+y=a \\ bx+cy=d \end{cases}$
3	第八章方程第 7 题	今有牛五、羊二，直金十两。牛二、羊五，直金八两。问牛羊各直金几何？	$\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$
4	第八章方程第 10 题	今有甲乙二人持钱不知其数。甲得乙半而钱五十，乙得甲太半而亦钱五十。问甲、乙持钱各几何？	$\begin{cases} x+ay=b \\ y+cx=d \end{cases}$

基于上述素材，笔者设计一节二元一次方程组复习课。

（2）教学过程

课前，教师布置两组问题，一是上述四道古题（翻译成白话文）让学生用尽可能多的方法解决；二是仿照四道古题编写一些问题考一考汉代《九章算术》的作者。

课上，首先展示学生对四道古题的不同解法，有算术解法、一元一次方程解法和二元一次方程组解法等，体会二元一次方程组解法的优越性。其次，展示学生编制的问题，组织学生列出方程组，同时注意所编制问题的情境是否符合古人的认知，提醒学生学会换位思考。接着，组织学生以上述问题中出现的二元一次方程组为基础，提炼二元一次方程组的一般模型，发展模型观念。最后，利用微视频展示古人解决四道古题的方法，其中前两道古题用算术解法，后两道古题用的是方程组解法，并引导学生思考：四道古题都可以用二元一次方程组求解，古人为何将其写成两章？学生各抒己见后教师补充：人类在 16 世纪才开始大量使用字母表示数，《九章算术》成书于公元 1 世纪前后。教师追问：现在你怎么看待这个问题？你对刚才的回答有何感想？通过这样的设计让学生了解到古人因为没有字母表示数，所以难以抽象出方程组的一般模型，因此将它们写成两章，由此体会到字母表示数的价值以及数学的演进性，增强数学信念。

（3）教学效果分析

课后，笔者对 48 名学生进行问卷调查发现：所有学生都希望在今后的数学课中融入中华优秀传统文化，具体原因包括：中华优秀传统文化让课堂更有趣，开拓视野，让我们更好地走进数学，了解古人的思想，学习古人的智慧，加深对数学知识的理解。84%的学生表示对归纳、提炼二元一次方程组模型环节印象深刻，一些学生写道：许多具体的二元一次方程组可以用一个模型概括，给模型中的字母赋予不同的数值就可以得到不同的二元一次方程组，这让我体会到了数学模型的价值；75%学生表示对同伴编制的问题印象深刻，许多学生写道：赏析同学编制的问题很有趣，同学们编制的问题很新颖，编题让我们体会到创新的乐趣，自己编写的问题被展示很有自豪感，彼此交流编题的思考过程让我明白，编制一道好问题需要付出许多智慧。

2 中华优秀传统文化融入数学教学的价值分析

中华优秀传统文化博大精深、源远流长，笔者根据教学内容和学生认知水平等情况选取中华优秀传统文化素材，进行适当加工后融入数学教学，可以激发学生数学学习兴趣、促进数学

内容理解、达成德育之效等重要价值。

2.1 精选素材创设情境，激发数学学习兴趣

中华优秀传统文化素材浩如烟海，教师应根据具体教学内容挑选素材，结合学生的认知特点对其进行适当的加工，并以适宜的方式呈现，这样可以很好地激发学生学习数学的兴趣。

函数一课选用唐代潮汐学家窦叔蒙《海涛志》中潮时推算图引入新课，以海潮为背景设计三个对应函数三种表达方式的情境帮助学生探究函数的概念；正切一课选用“土圭之法”设计三个情境帮助学生深入探究正切函数的概念；二元一次方程组复习课选用《九章算术》中四道有代表性的问题让学生解决，随后再让学生编制类似问题考一考古人。所选取的这些传统文化素材与教学内容高度相关，经过加工后符合学生的认识水平，深受学生喜爱，很好地激发了学生的数学学习兴趣。

2.2 深度融合链式呈现，促进数学内容理解

促进学生对数学内容的理解是数学教学的重点。数学史融入数学教学的方式有附加式、复制式、顺应式和重构式。[7]若想充分发挥所选传统文化素材的价值，仅用附加式和复制式是不够的，需要将传统文化素材有机融入教学活动。通过采用顺应式或重构式的运用方式，将相关素材以问题链的形式深度融入教学，以此促进学生对数学内容的理解。

函数一课依托海潮情境设计探究“潮时与日期”“潮高与时间”和“月最高潮高与月份”之间关系的问题链，与函数的三种表达方式相对应，促进学生对函数概念的全面理解；正切一课以“土圭之法”为背景设计“杆不变角变”“角不变杆变”和“杆角都变”的问题链，帮助学生探索并总结出正切的定义，加深对正切概念的理解；二元一次方程组复习课构造从解答四道古题，到编制类似问题，再到提炼一般模型的问题链，帮助学生加深对代数优越性及模型价值的理解。三节课都将中华传统文化素材以问题链的形式与教学内容深度融合，较好地促进了学生对相关数学内容的理解。

2.3 自然而然反思超越，达成学科德育之效

落实学科德育是当前各学科都应承担的重要任务。将中华优秀传统文化素材自然而然地融入到教学过程之中，引导学生对相关内容加以反思，促进学生超越知识学习，领悟其中的深层价值，可以达成理想的学科德育之效。

函数一课的历史素材的融入自然连贯，课堂小结以微视频形式介绍唐代潮汐学家窦叔蒙持续观察，研究潮时推算图的故事，学生从中体会到做学问需要有持之以恒的品质以及我国古代科学家曾经建立过领先世界的科学成就，增强民族自豪感和文化自信；正切一课将两则传统文化素材自然顺畅地融入其中，“土圭之法”让学生体会到古人的智慧，一行正切表中 45°角的正切值不为 1 帮助学生领悟到做学问既要大胆质疑，也要小心求证；二元一次方程组复习课从解决古题到自主编题再到提炼模型自然流畅，学生从中体会到数学是不断发展演进的，增强了数学信念。三节课中的传统文化素材与教学活动的结合较为自然，使学生在理性、情感、信念和品质等数学学科德育维度上均有较好的达成。[8]

3 结 语

中华文明光辉灿烂、绵延不绝，需要每一位中华儿女继承和发扬。从这个意义上说，中华优秀传统文化融入数学教学既是响应国家号召和时代要求，也是每一位教师的神圣使命，理应成为每一位教师的自觉行为。我们需要通过自身的不懈学习与钻研，挖掘出更多的中华优秀传统文化素材，将其以恰当的方式融入教学，开发并实施更多的优秀课例，帮助学生在更好地学习数学知识的同时，增强数学学习兴趣、接受文化熏陶、实现文化自信，高质量落实学科育人之目的。

参考文献

[1] 徐瑜. 唐代潮汐学家窦叔蒙及其《海涛志》[J]. 历史研究, 1978(6): 63-67.

[2] 胡永强. 基于传统文化 构建问题情境 走向自明学习—以苏科版八年级“函数”为例[J]. 中学数学月刊, 2023(2): 35-39.

[3] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

[4] 刘金沂, 赵澄秋. 唐代一行编成世界上最早的正切函数表[J]. 自然科学史研究, 1986(4): 298-309.

[5] 胡永强. 融入中华传统文化 促进数学概念学习[J]. 数学通报, 2023, 62(11): 7-13, 18.

[6] 张苍, 等. 九章算术[M]. 南京: 江苏人民出版社, 2011: 160, 171, 188, 190.

[7] 汪晓勤, 栗小妮. 数学史与初中数学教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019: 66.

[8] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. 数学通报, 2020(3): 7-12, 19.

名师访谈

为创造而教——符永平老师访谈录

戴阳，朱彦婕

（苏州大学数学科学学院，苏州 215006）

符永平，江苏省中学数学特级教师，江苏省人民教育家培养对象，江苏省“333 高层次人才培养工程”中青年科学技术带头人，中国创造学会会员，人民教育出版社数学新课标教材培训专家，创造式教学“五神金字塔”创始人。

符永平老师的区域课改管理和引导学生创造式学习系列课型等项目，获 2 次国家基础教育教学成果二等奖、江苏省基础教育教学成果特等奖、全国优课展评一等奖。符永平老师的文章“南通：以乡村课改群推进教育均衡发展”“再论德育要革命”以及课题“数学章前图（单元教学）导学课”等体现出的实操改课经验在各地均有良好影响。

我们有幸访谈了符永平老师，以下是按照专业发展历程、教育教学理念、教学实践经验三个方面采访并整理的访谈内容。

1 拾级而上，渐成风格

访谈者（以下简称访）：作为一名专家型数学教师，您认为您的专业发展可以分为几个阶段？

符永平老师（以下简称符）：我的教学生涯已有 30 多年，回顾过去，我的专业成长可划分成五个阶段。

第一阶段是适应期，是我专业成长的起步阶段。在这一阶段，我主要是通过“模仿”力争“站上讲台”。于我而言，我主要的模仿对象是我的父亲，我在他的熏陶下，对教学基本功和责任有了初步的认知，感悟到“教师能够直接影响学生的人生”。

第二阶段是成长期，是我专业成长的奠基阶段。在这一阶段，我的主要任务是通过辛劳付出向“站稳讲台”不断迈进，并靠苦干在应试成绩方面创造了不少新纪录。然而，老校长曾给我重要的启示：让学生学得轻松，是一个老师的良心。

第三阶段是成熟期，是我专业成长的求索阶段。在这一阶段，我的主要任务是在“站稳讲台”的同时争取“站好讲台”。在这期间，我读了一些关于现代教学论的书籍，开始看到自己的教学缺点。同时，我开始担任班主任工作，发现德育与教学效果高度相关：数学课需遵循学科育人观。

第四阶段是高原期，此时我感觉停滞不前，苦闷徘徊，这是我专业成长的关键时期。在这一阶段，我有幸读到弗赖登塔尔的数学“再创造”原著和创造性思维的一些文献，感觉找到了课堂方向。虽然从“再创造”理论到实践非常艰难，但每次遇到困难，我总以“科学家们在实验室经历上千成万次失败后的坚守”来激励自己。于是，我在课堂上进行了大量探索，努力解决师生遇到的教与学的难题。比如，我开发的“章前图（序言教学）”导学课等新课型在提出之初受到了领导和同行的质疑，甚至被“抨击”：一堂课怎么包含一章内容？我说，这是引导学生对一章内容的构建，是单元教学第 1 课时的摸索。那段时间我虽万分艰难，但从课堂上学生好奇的眼神中看到了无限希望，于是，我继续勇往直前。2008 年，我在南京举办的省“师陶杯”活动中汇报高中立体几何“章前图”的序言课，得到高中数学特级教师仇炳生先生和现场 300 多位老师的鼓励，并将其发表在北师大《高中数理化》[1]。同年初秋，又在广西南宁举办的全国中学数学研讨会上汇报初中课例“一元二次方程”，《中学数学教学参考》亦发表了这篇 3.6 万字的课例，罗增儒教授对此进行了点评，并提出了 20 多个问题与我交流。从此，这种形态的数学大单元课型开始走向全国。15 年过去了，我一直没有停止对它的完善。从当下各地正在探索新课标落地的大单元、大任务出发，引导学生走出碎片化学习的数学单元教学，可以说，这为广大一线教师的难题突破，提供了有力的借鉴和服务。去年《中国教育报》以“留白，成就有创造力的课堂”介绍了这种课型的实操课例。我将继续带着初心和使命，努力服务好更多同行并不断推广[2]。

第五阶段是风格期，我的教学风格是经过 30 多年大量课堂实践和 8 个系列创造式教学课题渐渐形成的。以培养学生的好奇心、想象力、探索欲为目标的创造式教学的五神“金字塔”，是我创造式课堂的灵魂，其操作性与可行性渐为老师所理解和接受，在各地均有良好影响。“为创造而教”永远是我的追求，“站靓讲台”就是尽可能地展示学生个性学习的风采，特别是学困生的精彩，这样才有教师课堂的精彩。

访：在您的专业发展过程中，对您影响深远的事件有哪些？

符：我从乡村学校起步，经过多年的课堂探索，一步一个脚印提高自己，从乡镇骨干教师到省特级教师，再到省人民教育家培养对象，我收获了很多同行和学生的帮助。

第一个事件让我思考教学的意义。1993 年，我第一次担任毕业班班主任，靠实干和苦干取得了中考数学全县第一的成绩，师傅何树基（县教研员）带我到市里开会，把我介绍给著名数学特级教师李庾南老师，并拜她为师。李老师直言："你除了给学生一个高分，你还给了什么？"在之后的 20 多年里，我一直在思考这个问题，终于发现，靠灌输式教学给学生带来的仅仅是考分，但比考分更重要的是给予学生美好的人生。于是，我发表了 1 万多字的"扛着 20 年的问号走来"，以此回答师傅有价值的"问号"。

第二个事件让我扎根创造的课堂。2015 年 4 月，我给陕西师大附中的学生上了一节公开课，课后学生的书面评课中提到"这堂课让我难忘，发现问题比解决问题更重要，学习数学的确很幸福。"50 多位同学大多有这种表达，这更坚定了我的决心——课堂应向着学生自主发现与"再创造"加速"思变"。这些年来，我在各地有 300 多节汇报课，收到了近万名学生"让我们发现"的这类课堂要求。同时，我也在课堂展示中向他们演绎着：世界上顶级的快乐与幸福是在自己的发现与创造中。教师要知道每一个学生的学习需要是什么，因为学生需求是个性化的。于是我提出了"为创造而教"，我的创造式教学观就是：不断创造出学生数学学习的最近发展区，让学生学会数学发现和创造[3]。

第三个事件让我坚定教学的方向。2014 年，我读到《数学通报》上的一篇文章：2013 年 11 月 29 日弗赖登塔尔奖被授予中国香港大学梁贯成教授，这是亚洲学者首次获此殊荣[4]。堪称"数学教育诺贝尔奖"的弗赖登塔尔奖，是全球数学教育的最高荣誉。弗赖登塔尔认为：学习过程必须含有直接创造的侧面，即并非客观意义的创造而是主观意义上的创造，即从学生的观点看是创造。通过再创造获得的知识与能力比以被动方式获得的，在理解上将更好也更容易保持。数学的每次应用都是重新创造，这不可能通过学习现成的数学来培养[5]。可以理解为数学学习的唯一正确方法是实行"再创造"，他认为这是一种最自然、最有效的学习方法。看着这段文字，再想想这些年在"再创造"教学探索中的辛酸和被质疑中的"挣扎"，发现原来自己探索的方向是如此正确，当时真为这迟到的证明而感动，激动于这些年的艰辛与苦痛是值得的。所以，我不停在自己的公开课中呼唤：中国数学教育是该"再创造"了！

访：您对职前以及青年数学教师的专业发展有哪些建议？

符：关于职前以及青年数学教师的专业成长，我有以下几点想法与大家分享。

夯实基础，脚踏实地。很多新教师都有本科或研究生学历，入职前一般都胸怀教育的远大理想，来到新的学校和岗位，可能以高等数学的眼光看初等数学或小学数学，常感觉自己能够胜任教学。事实上，学会认识学情、分析课标和教材等绝非一日之功，所以，新教师要从教学常规做起，认真钻研课标和教材、了解学情、备课、上课、批改作业，实现从“站上讲台”到“站稳讲台”。

学会学习，大胆实践。新教师要学习师傅或优秀教师的课例和教学个案，从中汲取好的经验、灵感和教学现象背后的先进教学观。然而，他们关注的重点可能会偏移，例如，很多新教师关注板书美观、解题熟练、讲解流畅……这些基本功固然重要，但我们更应该去关注这些课例设计的教学观，并努力在实践中结合自己的教学特点，这样自己的教学风格就会渐渐形成。我们必须认识到，时代日新月异，从传统课堂“我讲你听、我说你记、我写你抄、我问你答”的“奴性”课堂走向新课标下的素养课堂已势不可挡。

积极反思，更新观念。刚毕业的大学生的教学观看似一张白纸，其实不然，他们的教学观早已经有了他们中小学或大学教师的烙印。我们要有新课标下的新课堂认知，更新教学观念，在实践反思中调整，在交流比较中完善。此外，最好的专业成长来自常态课堂教学改革的伟大实践。好的教育观、教学思想，不是说得出、说得好、写得好，而是要在实践中尝试做出来，从学生学习展示的操作细节来落实[6]。

2 责任使然，攻坚克难

访：“创造式教学”以培育学生的创造力为宗旨，是主张让学生学会发现、学会创造的教学范式。您提出并深研的五神“金字塔”也是基于此，请您具体谈一谈。

符：我先后紧扣“创造教学”主持过 8 项课题的研究，其中省级以上重点资助课题 4 项。创造，就课堂教学而言，是指对学生创新意识、创新精神和创造性思维的培育[3]。教师通过指导学生学会自主先学、合作学习、踊跃展示、大胆质疑、自主构建等多样学习方式，让学生形成可以不断向上攀登的“梯子”，不断让更多的学生靠近自己的最近发展区，从而让学生学会数学发现和创造，这是具有师生学习生命意义的数学教学方式。

创造式教学的理论基础，除了建构主义理论、主体学习理论外，主要是波利亚的“学习任

何东西，最好的途径是自己去发现”的观点和弗赖登塔尔的“再创造”教学论。所谓“五神”，即“神秘、神奇、神妙、神圣、神话”，是学生学习过程中，五个不同阶段的学习情绪与心理切换（图 1）。图中的“最近发展区”，是学生学习能力的“最近发展区”，“拐杖、支架、梯子、台阶”的作用决定能否顺利拾级而上，从这个意义上说，最近发展区是“五神”金字塔动态攀登的根基。神秘，揭开“神秘”面纱，确立创造意识；神奇，迈入“神奇”殿堂，激发探究欲望；神妙，亲历“神妙”过程，享受创造快乐；神圣，体悟“神圣”使命，磨练学习意志；神话，攀登“神话”塔尖，催生克难动力。在“五神”金字塔的最顶端，我们以“神话”命名，旨在不断唤醒学生创造美好“神话”的梦想。

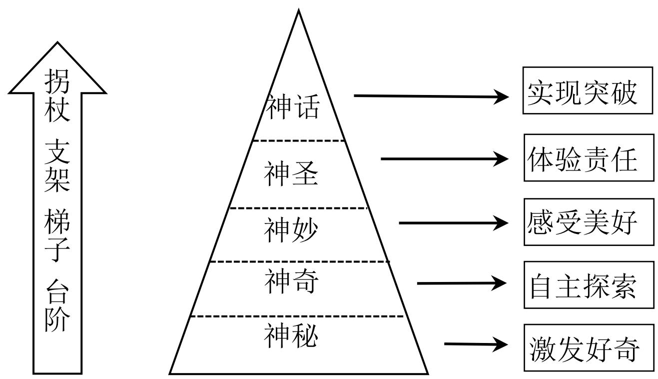


图 1 “五神”金字塔

创造式教学也能够让学困生置身于互助帮学的合作学习的情境中，这对所有学生来说，教学的民主性、平等性、开放性是空前的，让不同学业水平层次的各个学生互相启发、相互认同、互相“碰撞”、相互帮助、共同成长。事实上，改变学困生的本质是学习方式的扭转，这需要创造式教学来实现。

除此之外，创造式教学重视了不同课型的不同实施路径，不是搞“齐步走”的“一刀切”的模式，如新授课、复习课、试卷讲评课等，而是以不同教学内容和学情等确定教学路径，这就需要我们在不同的教学情境、教学环节中运用不同的课型去适应学生的学习[7]。

访：请您通过具体实例谈一谈如何构建“再创造”的教学过程。

符：比如，我曾经在教学“勾股定理”时，并不直接揭示定理内容，而是保持神秘感，让学生大胆发言，学生在好奇心的驱使下自主探索，发现问题，感受数学的神奇。接下来探索问题、研究问题、提出新的问题并解决问题，并在这一过程中充分体验成功的喜悦，感受神妙，

进一步提升创造力[8]。例如，有一位同学说："勾三股四弦五不是定理，只是一个特例。"我给予肯定，因为把勾三股四弦五说成勾股定理，犯了特殊就是一般的错误。学生对数学的理解进一步升华，到了神圣的阶段。这位同学欣喜地把自己的思考和探索定理的过程写进自己的数学小论文。数学小论文是一个很好的"做数学"的研究过程，我希望学生能够充分利用在已有知识获得、技能训练、数学思想的方法提炼中积累的数学活动经验，来唤醒对自己已有学习方式的反思并探索科学学习方法[1][9]，这也可使他们取得神话般的突破。所以，我和我的团队先后指导学生发表数学小论文近 200 篇，有的学生尝试编写教材，有的学生尝试"命题"，有的学生发现新规律和生活中的数学等等，形式多样，覆盖了很多数学知识点，这为高质量数学学习打开了新的视野。

3 教学相长，立学课堂

访：作为一名专家型数学教师，您对于课堂教学有什么自己的见解？

符：我认为让更多学生的学习生命和精神生命站立起来是教师的第一要务。我们将"立"与"学"组成词组来表征课堂内涵，"立"体现为目标与结果，"学"则为过程与方法，合起来有"在学中立"的意味。我们用三个教育隐喻加以诠释：其一，立人之学。课堂学习指向培育"德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人"；其二，立根之学。课堂学习的根，是中华民族的文化根脉、炎黄子孙的情感底色、社会主义的制度优势；其三，立身之学。不仅是物质的，而且是精神的，课堂学习不是呆滞在座位上的，而是踊跃展示经常站起的，课堂学习时学生的精神上是立着的，而非跪着的。学生不是被动接受的，而是自主、理性、质疑的。这三个教育隐喻也恰好回答了"培养什么人""为谁培养人"和"怎样培养人"三个根本问题，而这恰恰是引导学生学会创造式学习的出发点和归宿。

访：您是如何具体实践"立学课堂"让学生"再创造"这个构想的？

符：我们以引导学生学会学习的方案（即"学案"）为改课的"施工图"，给学生留下了大量的思维空间；我们尊重学生的个性，让学生自主去发现，而不是用灌输式；我们让学生提出问题、自主解决并总结归纳，推动学生的创造式学习；我们引导学生通过自己设计问题等方式，将书本知识变成在学生自主探究中"创造"出来，让知识的生成与发现真正成为学生的劳动[10]。张华教授曾提出：让探究与创造成为每一个学生的学习和生活方式，让每一个学生创造着长大

[11]，这正是新课程的核心理念。同时，在课后，我倡导作业改革，这是课堂改革有效进行的保障之一，作业不是反复机械刷题，而是依据学生个性化的学习需要去选择题目，让学生从研究某个简单题开始，延伸与拓展形成系列题型，再将其作为一个小项目来深究实施[12]。

我设计并实施的“图形与面积复习课”的学案[13]。首先，我在课前预习环节给出开放的情境，给学生足够的空间书写自己的想法和疑惑，让学生在课前就充满好奇并深度思考，独立探索“知识树”和综合图形分解等。其次，课堂中需要完成的学案，不是充满各种各样的题目，而是引导学生在互助中解决本节课先学中的基础性问题，让所有的学生都尽可能一起向前。比如，我在学案中设计了一个小组合作学习的环节，注明合作要求“全组每位同学能在互动中解决情境中的基础问题和自己发现的困惑，并将本组的经验、新发现等请最需要帮助的同学在小黑板（一组一块）上大胆展示出来，且与其他组共享。全部完成则全组每人均得满分 5 分，本小组只要有一位同学的基础问题没有解决，大家均得 0 分。”这一“捆绑”式评价，要求课堂上每一个学生都能够参与并得到他人帮助。然后让学生对自己在小组合作中的表现进行自评，比如“我主动问了什么问题？”“我的新发现是什么？”和“我帮助谁解决了什么？”这一系列现代合作学习的要求，让学生的团队精神在课堂中得到培育，让教、学、评融为一体。与众不同的是让学生尝试命题，这是激发学生创造性的实践。在“命题”过程中，学生对已学知识真正理解并充分运用，从而高质量解决问题。最后，学生结合情境中的“知识树”、合作完善并自主归纳，这样远比展示教师制定的“齐步走”的学习目标要有效。当然，课后作业并不只是让学生去做题，而是让学生去评题，让学生运用课堂所学和自己的实际去评价教材上的例题、练习题和复习题，让他们选择最符合自己学情的题目，作业的针对性更强。

在目前的课堂改革中，我们一直追求着学生的个性需要、多样学习方式的自由和民主的课堂，这也是现代课堂的基本特征，也是课堂教学改革进步的重要标志。我们既要建设新课堂，激发新活力，实现新突破，也要因材施教；既需要教育者的无限开放和挥洒自如，更需要遵循教育教学规律、课标和学情，稳步推进课堂教学改革[14]。

4 启 示

从以上访谈可见，符永平老师的专业发展历程经历了适应期、成长期、成熟期、高原期和风格期五个阶段。在数学青年教师的培养方面，符老师认为青年教师应当在练好教学基本功的

同时，跳出旧教学观的束缚，在积极学习和实践的同时主动地更新教育观念。在多年实践中，符老师逐渐形成并且在不断的实践探索中一直坚持创造式教学“五神金字塔”理念，“为创造而教”的教学主张贯穿课堂教学始终，让学生创造式长大，积极响应国家培养创新人才的号召。在课堂教学方面，符老师秉持“立学课堂”理念，关注学生的学习生命和精神生命。

依托以上访谈录，专家型数学教师的专业发展历程和独特教学观念给我们很大启发。教师需要脚踏实地促进自身的专业发展，也应当努力追求自己的教学风格；教师应当在课堂中重视学生的自主发现和创造，创造式教学观可以为数学教学提供更独特的视角，帮助师生共同进步；立学课堂从教育的根本问题出发，让学生拥有创造式学习方式。

参考文献

[1] 符永平. 创造式课堂资源来于学生经验的开发——以学生数学小论文为高中“立体几何”导学[J]. 高中数理化, 2012(2): 4-6.

[2] 王丹凤. 留白, 成就有创造力的课堂——观摩数学特级教师符永平课例有感[N]. 中国教育报, 2021-06-25(6).

[3] 符永平. “五神”金字塔: 创造力培育的实践探索[J]. 中学数学教学参考, 2020(31): 33-36.

[4] 周士民, 王君. 文化差异下东西方数学教育比较——梁贯成教育思想简介[J]. 数学通报, 2014, 53(11): 5-7, 15.

[5] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 上海: 上海教育出版社, 1995: 109-110.

[6] 符永平. 让农村留守儿童成长在中国好课堂[J]. 未来教育家, 2019(9): 37-39.

[7] 符永平. 基于核心素养的创造式课型组合操作体系[J]. 初中生世界, 2019(24): 9-10.

[8] 符永平. 课堂革命: 从“勾股定理是中国的？”说起——引导学生“再创造”的发现式教学研究与实践[J]. 中学数学教学参考, 2008(10): 17-20.

[9] 符永平. 创造式课堂的资源:来源于学生学习经验的开发之中——以学生数学小论文为“教材”的高中“立体几何”导学课[J]. 中学数学, 2011(23): 5-7.

[10] 符永平. 让学生在问题设计中发现——引导学生“再创造”《矩形判定》的教学研究[J]. 中学数学, 2011(24): 19-22.

[11] 张华. 让学生创造着长大——义务教育课程方案与课程标准(2022 年版)的核心理念[J]. 福建教育, 2022(27): 7-9.

[12] 符永平. 课堂革命:从作业革命开始——从做作业的学生怎么说作业说起[J]. 未来教育家, 2020(6): 13-16.

[13] 符永平. 重构教学, 解放学生的创造力[N]. 中国教育报, 2022-07-08(10).

[14] 符永平. 基于“课堂教学生态”的苏中初中发展整体推进研究——以南通市课堂教学改革为例[J]. 教育理论与实践, 2015, 35(35): 7-10.

他山之石

关联相等的表达式：连接图形表征和符号表征的五年级设计研究

陈泓媛

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

代数教育中的一个典型挑战是，许多学生仅通过运用他们认为是没理由的转换规则来证明表达式相等，而无法证明这些规则。一个好的代数理解包括将转换规则与等式的其他特性联系起来（例如，结果等价，即两个表达式描述相同的结果；描述等价，即两个表达式描述相同的情况或图形）。

为了在引入变量之前克服这种困难，在五年级进行了一项设计研究，设计和研究一个早期的代数学习环境，以在不同的心理模型和等式表征之间建立更强的联系。对 14 名五年级学生的设计实验的定性分析揭示了对连接表征的复杂性的深刻见解。许多学生一开始以过于肤浅的方式将这些表征联系起来，而没有建立深刻的连接。分析成功学生的过程有助于确定一个额外的表示方法，可以支持学生在其他表示方法之间建立联系，我们称之为重组等价。通过包括重组等价的学习机会，可以支持学生动态地比较图形表征和符号表征的表达式。该设计研究分解了实现连接多种表征的设计原则的复杂要求，这应该具有超越具体的等价概念的意义，并适用于其他数学主题。

2 设计研究的方法论框架

2.1 数据采集

本研究的第一作者对 7 对五年级学生（10-11 岁）进行了两轮设计实验循环。在第一轮中，从一所综合学校中挑选了 4 对学生。在第二轮中，又抽取了 3 对来自同一班级的学生。该实验持续了两个阶段，每次 90-105 分钟。总共记录了 27.5 小时的视频，并进行了部分转录。

2.2 数据分析方法

通过三个步骤对转录的内容进行定性分析。

- 步骤 1：根据外部表征及所选元素之间的明确联系，对学生的话语和图画进行编码。
- 步骤 2：通过在图 1 的分析框架中理清学生在每个话语中所涉及的元素和连接（通过手势、着色或明确的口头表达）来推断出潜在的心理模型。学生所引用的性质只有在明确表达的情况下才能推断出来，但他们在表达式和图形中看到的结构也可以从元素的手势和颜色中推断出来。

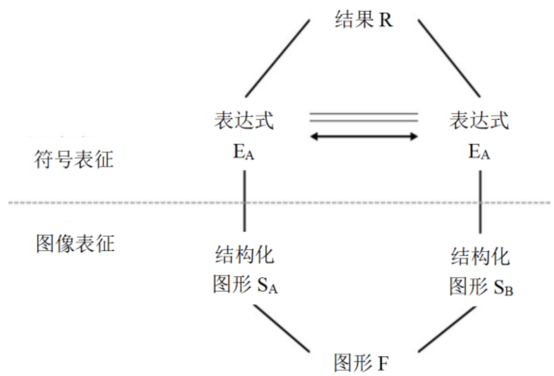


图 1 本文的解析框架：理解表达式等价性的可能连接网络

- 步骤 3：分析框架中的图形概要，将已找到的元素和连接标记为黑色，未找到的元素和连接标记为灰色。连接的细粒度编码允许按时间顺序捕获学生的学习路径。

3 设计实验及其分析

3.1 第一轮中的任务设计：通过几个步骤克服描述和转换等价之间的差距

第一轮中设计的学习环境使用规划儿童房的情境将表达式与几何图形联系起来（图 2）。通过在几何图形中标记各自的结构，来支持对表达式的深层结构的理解。通过讨论确定房间平面图中区域的不同方法，有机会比较不同表达式的描述等价性。在任务之前，学生已经

- 用自己的表达方式描述和结构化图形（房间计划的区域）。
- 根据图形 S_A/S_B 的结构，解释给定表达式 E_A/E_B。
- 论证为什么表达式与结构化图形匹配（$E_{A/B}$—$S_{A/B}$）。

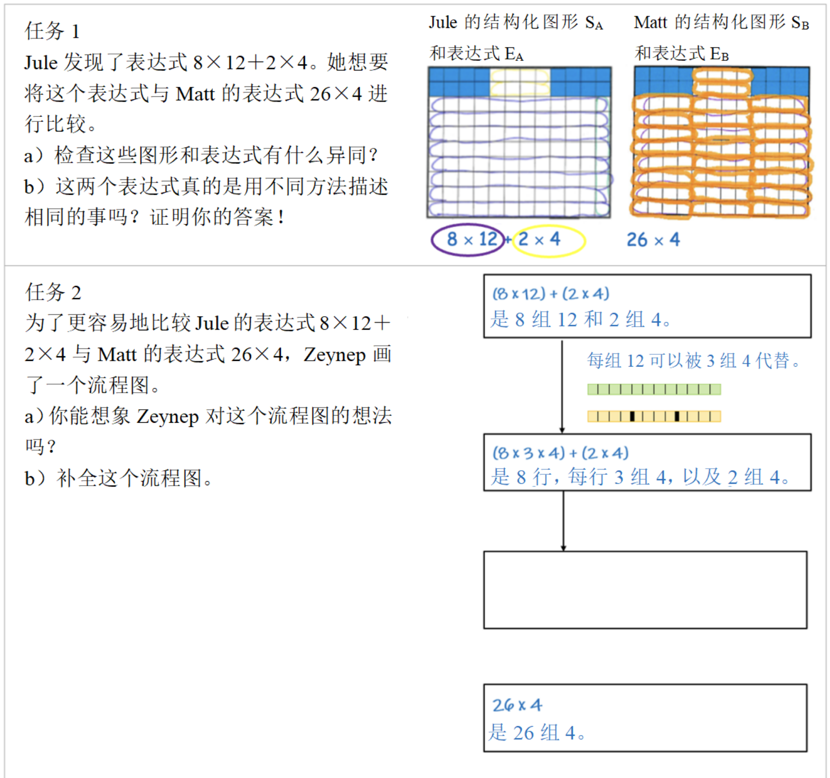


图 2 第一轮的任务，旨在缩小描述等价和转换等价之间的差距

图中的重点任务建立在以下先前的经验之上：为一个已经熟悉的有两张床的房间做计划。任务 1 要求将结构化图形与给定表达式的子表达式进行比较。任务 1a 关注于 E_A、E_B、S_A 和 S_B 之间的比较，而任务 1b 也旨在通过要求证明来推断 $E_A=E_B$ 的描述等价性。通过要求学生将 E_A/E_B 的子表达式与结构化图形 S_A/S_B 中的子结构联系起来，加深了描述等价性这一表示方法。

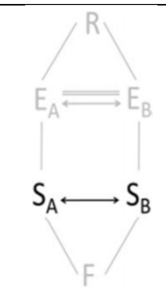
任务 1 通过关注子结构和子表达式为学生完成任务 2 做准备，任务 2 的流程图中列出了从 E_A 到 E_B 的转换步骤，要求学生论证。每个表达式都通过中间表达和底层系统结构描述等价性（引入了额外的括号来支持对表面结构的识别）。使用该流程图和描述等价中中间表达式的逐步证明，该任务旨在将符号变换和图形考虑联系起来，并缩小描述等价中的静态比较与转换等价中的动态转换之间的差距。

3.2 对第一轮学生学习路径的实证见解：发现重组等价作为新的连接方法

以下转录本记录了 Victoria 和 Mira 学习过程的摘录，这两名 10 岁的女孩是班中成绩前 30% 的学生。Victoria 和 Mira 专注于结构化图形，并用不同的话语表达它们。表 1 中的每个回合都

根据她们所指的子结构和子表达式以及学生绘制的连接进行分析。

表 1 任务 1 中 Victoria 和 Mira 过程的转录

回合	说话者	话语	连接分析	找到的子结构
15	Victoria	他打破了这个[*指着结构图 S_B 顶部的一行 12 格*]通过[*指向 S_A 顶部的一行 12 格中的 4 个方格，然后指过从上到下的所有行*]		$S_A \rightarrow S_B$ 一行 12 格分为 3 组 4 格
16	Mira	总是分成三份		$S_A \rightarrow S_B$ 每行 12 格分为每行 3 组 4 格
17	Victoria	是的，这是三列，然后[*指着 3 列，S_B 中每列 8 行 4 格，然后沉默 7s*]，例如，他在这里剪了。这是在一起的[*指着 S_B 左部子图形的 8 行 4 格*]，他也剪了[*指着中间和右部子图形的 8 行 4 格。*]否则，我就不知道了。		$S_A \rightarrow S_B$ 3 列，每列有 8 行 4 格

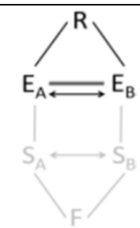
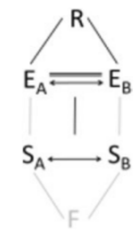
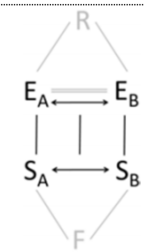
与图 1 中的初始分析方案不同，Victoria 和 Mira 在两个结构化图形 S_A 和 S_B 之间建立了直接联系。她们比较了图形的子结构，并解释了它们如何从 S_A 出现在 S_B 中，每个都给出了图形表征的清晰实物表达，例如“打破”“在这里切”或“分成 3 份”。通过这种方式，两个女孩都成功地解释了结构化图形 S_A 连接到 S_B，不是通过间接的静态比较，而是通过直接的动态方法来重组图形。

尽管 Victoria 和 Mira 将表达式视为描述图形，但她们所做的不仅仅是比较任务 1a 中要求的异同。她们不是通过图 F 绘制间接连接，而是通过将 S_B 重组为 S_A 的过程直接连接了结构化图形。这使得我们在分析方案中引入了 S_A 和 S_B 之间的双箭头，这是以前没有预料到的。

Victoria 和 Mira 对任务进行个人理解的这种动态方式在第一轮的其他案例中也得到了发现。一些学生没有根据结构异同来比较图形，而是使用“打破”和“在这里切入”的动态语言来阐明如何将一个图形重组为另一个图形。从这些孩子身上，我们了解到，动态转换不仅可以通过操纵符号在符号表示中进行，还可以作为图形中的动态重组过程进行。

在任务 1 期间，Victoria 和 Mira 的重组策略尚未与符号表达联系起来。当她们转向任务 2 时，她们继续追求她们的动态策略，并使用它来证明符号操作的合理性（表 2）。

表 2 任务 2 中 Victoria 和 Mira 过程的转录

回合	说话者	话语	连接分析	找到的子结构/子表达式
32	Victoria	好的，嗯，Zeynep 在这里没有写一个 12，只有 8×3×4[*指着在表达式 E_B 中的 8×3×4*]，因为 3×4 是 12，然后他的表达略有不同		E_B-E_A 3×4 代替 12
33	Teacher	嗯。更详细地解释一下。试着合在一起思考，当你知道如何好好说，再告诉我[*9s 停顿*]。这很难，是吧？		
34	Victoria	Zeynep 把 12[*指着 E_B 中的 3×4*]变成一个乘法，然后她，嗯，8[*指着 E_B 中的 8*]——嗯，她漏掉了 她已经打破了 12[*指着 S_B 然而在讨论 S_A 中的 12*]，嗯，变成一个乘法，她只是变成 3×4 因为 3×4 是 12 然后她写了下来		$E_A \rightarrow E_B$ 12 被分为 3×4 $E_A \rightarrow E_B - S_A \rightarrow S_B$： 12 被分为 3×4，即把 12 分为 3 组，每组 4 个
35	Mira	这是 Matt，Matt 所做的[*指着 E_B 中的 8×3×4*]。也就是说，他在这里有由 12 格组成的包[*指着 S_B 中的一行 3 捆 4 格*]，他把它变成了乘法[*指着 E_B*]。8，因为这里是 8，所以[*指着 S_B 中的 8 行*] 然后，乘以 3，也就是这里，这 3 包在每一行 12 格[*连续指着 S_B 中一行 12 格的 3 捆 4 格*]在这些 12−在这 3 包，有 4 格在里面[*指着 S_B 中顶部的一行 12 格中的第一捆 4 格*]		$S_A \rightarrow E_B$：将 12 个一包变成一个乘法 E_B-S_B：8×3×4 与 8 行，每行 3 组 4 个相对应 E_A-S_A：8×12 与 8 行每行 12 个相对应 S_A-S_B：12 与 3 组 4 个相对应

尽管任务 2 最初提倡静态比较以在中间转换步骤之间实现描述等价性，但 Victoria 和 Mira 继续采用动态重组方法。她们通过解释 S_A 如何重组达到 S_B 以及这与表达式中发生的事情的关系，证明了转换步骤 8×12 = 8×3×4。

首先，Victoria 证明了结果等价表达式的转换，但当被要求更详细地解释时，她将表达式的转换与结构化图形的重组联系起来。为此，她借鉴了重组的表达方式，为符号转变赋予意义。在第 35 回合中，Mira 通过解释表达式的每个部分是如何在图的子结构中找到的，来总结重组过程的结果。通过从 $E_A - S_A$ 和 $E_B - S_B$ 和 $S_A \rightarrow S_B$ 推导 $E_A \rightarrow E_B$，女孩们通过一个额外的表示方法共同构建了等价性的合理性，我们后来称之为重组等价。

对学生学习路径的分析记录了检验等价性的静态策略（通过结果等价的结果，间接比较两个给定的表达式，或者间接将它们与描述等价中的图形进行比较）与将一个表达式转换为另一

个表达式的动态策略之间的强烈差异。然而，孩子们在图形表示中展示了一种非预期的动态策略，可以作为等价的第四个表示方法，我们称之为重组等价（图 3）。

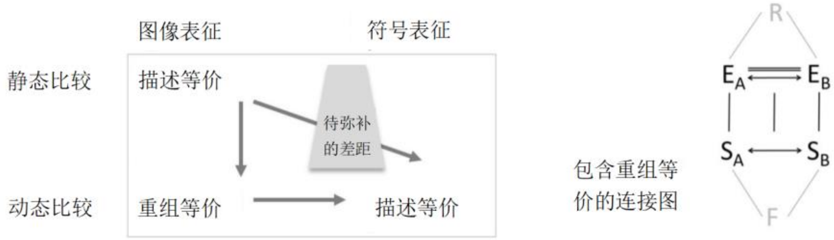


图 3 重组等价作为弥补描述等价和转换等价之间差距的表示方法

作为设计研究人员，我们从孩子那里学到，当结构化图形被直接比较并相互重组时，图形表征不一定需要静态比较，正如 Mira 利用重组等价性来证明两个表达式等价时所表明的那样。

Victoria 更进一步，解释了转换 $E_A \rightarrow E_B$ 如何连接到转换 $S_A \rightarrow S_B$，这导致在水平连接 $E_A \rightarrow E_B$ 和 $S_A \rightarrow S_B$ 之间添加另一条垂直线，象征 $E_A \rightarrow E_B - S_A \rightarrow S_B$。这一联系是转换 $E_A \rightarrow E_B$ 和重组 $S_A \rightarrow S_B$ 之间的显著联系，它不仅保证了等价性，而且通过将该步骤与重组等价性联系起来，证明了转换规则的充分性。

从所分析儿童的这些丰富的学习途径中，我们得出了一个假设，即引入重组等价性也可能对其他学生有希望，因为这种表示方法可以潜在地弥合差距，正如图 3 所示。重组等价可能是一种表示方法，有可能加强从静态比较到动态比较的过渡，同时坚持图形表示。

3.3 第二轮的精细任务设计：包括所有学生的重组等价性

在第二轮中，我们对任务 1 和 2 进行了重新设计（图 4），我们打算通过让所有学生参与动态策略中的重组等价来探索假设。任务 1 只是略作调整，是探究描述等价性的活动，而任务 2 则经过重新设计，因此，重组必须从表达式 E_A 到 E_B 逐步进行。这是通过在流程图中提供动态短语来搭建的。

同时，我们通过消除中间体（8×3×4）+（2×4）来减少规定的转化步骤的数量。通过这种方式，我们打算创造富有成效的挑战并鼓励学生的积极推理，但下次会回到更精细的版本。

任务 2 的目的是让学生

- 了解表达式在每个步骤中是如何以符号方式转换的。
- 为每个中间表达式绘制结构化图形。

- 绘制并解释如何在每一步中对图形进行重组。
- 通过图形表征的重组等价为后期符号表征的转换关联和论证做准备。

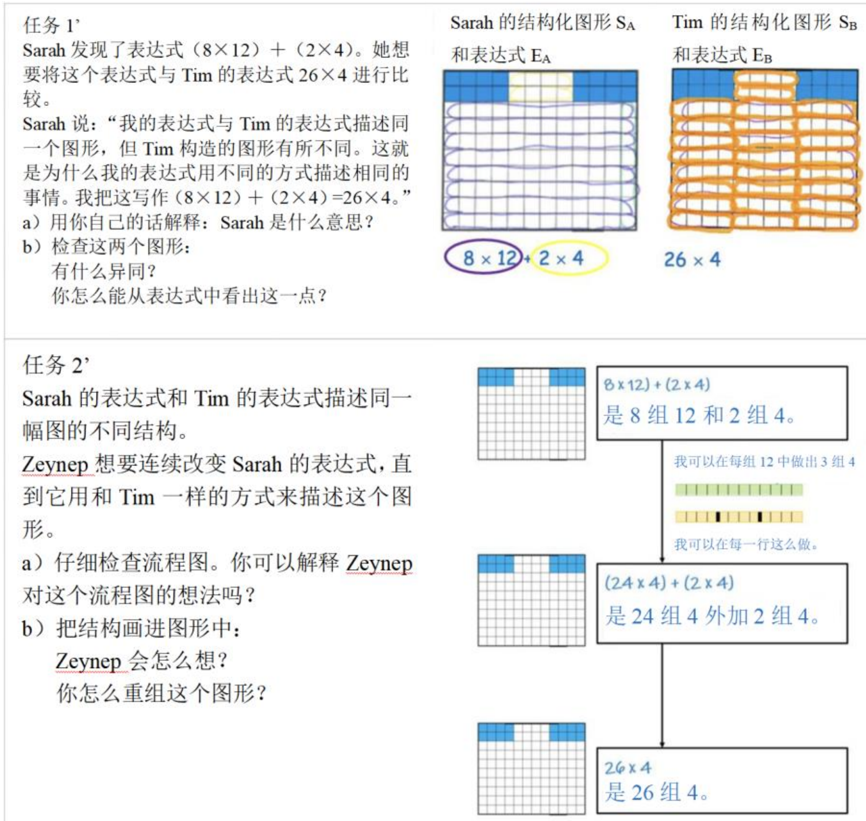
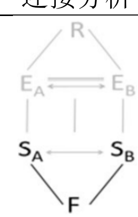


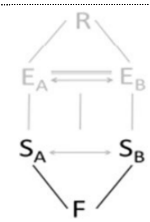
图 4 重新设计第二轮中的任务，以消除描述等价和转换等价与重组等价之间的差距

3.4 对第二轮学生学习路径的实证见解：连接描述和转换等价的可及性和约束

在第二轮中，我们选择了中等成就者（根据老师的综合评估），以便我们调查重新设计的任务是否可以为更多学生提供重组等价性。在表 3 中，Jannika 和 Dilay 的学习路径说明了对任务 2 的需求，这表明在任务 1 中，并非所有学生都能在没有提示的情况下开始重组图形。

表 3 任务 1 中 Jannika 和 Dilay 过程的转录

回合	说话者	话语	连接分析	找到的子结构
30	Jannika	你可以看到，因此，嗯，这个[*指着 Sarah 的结构化图形 S_A*]实际上就是这个[*指着 Tim 的结构化图形 S_B*]。只是她，等等，Sarah 只有，嗯，没有圈出来，但是		S_A-F S_B-F （图 4 中的组图：分组画圈对画线）
31	Dilay	画线了		

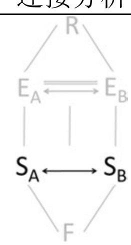
<table>
<tr><td>32</td><td>Jannika</td><td>是的，所以，画线了，所以，嗯，
Tim 把它们圈了出来，但实际上，
这是一样的</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>33</td><td>Teacher</td><td>嗯</td></tr>
<tr><td>34</td><td>Dilay</td><td>所以，对于 Zeynep</td></tr>
<tr><td colspan="5">……</td></tr>
<tr><td>38</td><td>Dilay</td><td>这也有点一样，他们强调了哪里，
这里的例子，他强调了这一点，[指着 S_A 和 S_B 上部的行中的 2 组 4]</td><td rowspan="3">
</td><td rowspan="3">S_A-S_B
在每个结构化图形顶部的 2 组 4</td></tr>
<tr><td>39</td><td>Teacher</td><td>嗯</td></tr>
<tr><td>40</td><td>Dilay</td><td>并且那里[指着 S_A 中的 8 行 12]Sarah 也强调了这一点，他也[指着在 S_B 中的 24 组 4]圈出了它</td></tr>
</table>

Dilay 和 Jannika 比较结构化图形 S_A 和 S_B，并将它们视为描述等价中的等价物。她们还识别相同的子结构，但没有将它们连接到子表达式 2×4。她们在关系活动中采用静态比较，没有明确地连接符号表征和图形表征，也没有主动进行动态重组。

与 Dilay 和 Jannika 一样，第二轮中的另外两对也没有立即开始将 8 行 12 重组为 8 行，每行 3 组 4。相反，他们主要识别相同的子结构：2 组，每组 4。对于图 F 的下部，他们比较了 S_A 和 S_B 通过分组（线与圈）的图形实现，但不考虑数量关系。

只有当明确提示考虑任务 2 中的重组时，她们才会开始以动态方式更深入地关联两个结构化图形，如表 4 所示。转录的内容还表明学生如何学习提供的动态短语。

表 4 任务 2 中 Jannika 和 Dilay 过程的转录

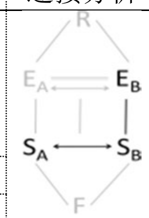
<table>
<tr><th>回合</th><th>说话者</th><th>话语</th><th>连接分析</th><th>找到的子结构</th></tr>
<tr><td>88</td><td>Jannika</td><td>[从任务 2 中大声读]我在每一行里都这样做</td><td rowspan="7">
</td><td rowspan="3">取自任务：
$S_A\rightarrow S_B$
在每组 12 中做出 3 组 4</td></tr>
<tr><td>89</td><td>Dilay</td><td>[从任务 2 中大声读]
我可以在每组 12 中做出 3 组 4</td></tr>
<tr><td>90</td><td>Teacher</td><td>嗯</td></tr>
<tr><td>91</td><td>Dilay</td><td>我相信，那是 12，那些是 12[指着流程图中箭头旁边的 12 一行]和</td><td rowspan="4">单独解释：
$S_A\rightarrow S_B$
12 一组被分为 3 组 4</td></tr>
<tr><td>92</td><td>Jannika</td><td>即[指着流程图中箭头旁边的 3 组 4]</td></tr>
<tr><td>93</td><td>Dilay</td><td>是的，我有，在每一组中，他通过[用她的手指做手势，将其分成 4 个一组]，这些是 1、2、3[依次指着 2 组]</td></tr>
<tr><td>94</td><td>Jannika</td><td>因为那些是……线</td></tr>
</table>

在流程图和任务 2 中提供的短语的提示下，Dilay 可以解释该图是如何重组的，通过分成

三组来表达重组过程。通过这种方式，女孩们可以通过动态策略来丰富他们对任务 1 的静态（和相当模糊）比较，以获得更详细的解释。虽然 Dilay 可以拿起给定的短语并将它们用于她自己的话，但其他学生则与给定的短语保持密切联系。

与 Dilay 和 Jannika 类似，第二轮中的所有三对都可以克服最初纯粹的静态观点，并采用（至少部分）重组的动态策略，表 5 也体现了这一点。

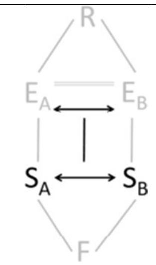
表 5 任务 2 中 Annika 和 Jessica 过程的转录

回合	说话者	话语	连接分析	找到的子结构
75	Teacher	是的，完全正确。但是你能[……]向我解释一下，什么，什么[……]从这里到这里改变了[*流程图中的第一幅和第二幅图*]		$S_A \to S_B$： 8 组 12 分为 24 组 4
78	Jessica	她把 8 组 12 分成 24 组 4		
79	Teacher	嗯。错了，为什么，为什么这些是 24 组 4?		
80	Annika	因为她写在那里[*指着流程图中的表达式 24×4+2×4*]		E_B-S_B 在图中未计数的情况下，从表达式中提取 24 组的数量
81	Jessica	因为这个		
82	Annika	[*开始在 S_B 中计数，但在计数几次时感到困惑*]这不符合！		E_B-S_B： 试图计算 S_B 中的 4 的组数

Annika 和 Jessica 也成功地克服了最初的静态比较，并动态地比较了结构化图形。当 Jessica 在第 82 回合中阐明重组时，她借鉴了任务中结构的逐字表达（“从每组 12 个中得到 3 组，每组 4 个”），但将“我可以得到”改为“拆分”，包括 8 变成 24。有趣的是，24 并非源于 8 乘以 3 的结构思想，而是她从流程图中的下一个表达式中获取数字 24。Annika 首先还引用表达式 24×4+2×4 来证明 24 的合理性，但随后尝试通过计算 S_B 中的组来验证它：由于她对通过计数进行验证的方法总是感到困惑，她得出结论，它“不适合”。尽管有这个发现，但两个女孩无法清楚地说出 24 是从将整排分成 8 行 3 组后出现的。尽管她们在后面的场景中在给定的图片中找到了一个 8×3 结构，但她们无法自我解释这个结构的来源，这也发生在随后的未被包括在内的文字记录中。综上所述，两个女孩可以用语言表达逐步重组，但无法将这种重组与表达式的转变联系起来。这是被观察学生的内容轨迹中的一个典型状态。

与 Annika 和 Jessica 相反，Dilay 和 Jannika 是表 3 和表 4 转录内容中的女孩，可以超越识别重组等价性，并将其与符号转换联系起来（表 6）。

表 6 任务 2 中 Jannika 和 Dilay 过程的转录（续）

<table>
<tr><th>回合</th><th>说话者</th><th>话语</th><th>连接分析</th><th>找到的子结构</th></tr>
<tr><td>95</td><td>Teacher</td><td>嗯。</td><td rowspan="4">
</td><td rowspan="3">/</td></tr>
<tr><td>96</td><td>Dilay</td><td>我，这个，如划分所示。</td></tr>
<tr><td>97</td><td>Teacher</td><td>嗯，是的，好的。请再更加精确地解释一下。什么，她现在在做什么？</td></tr>
<tr><td>98</td><td>Dilay</td><td>这里这个绿色的东西[指着流程图中的 12 格组成的一行]，总共是 12。然后，她把它分成 4 个[用手势表示一个切割的动作]，这就是 3 份，然后。</td><td>$E_A \to E_B$-$S_A \to S_B$：12： 4 对应于 12 被分为 4 组，每组 3 个</td></tr>
</table>

Dilay 将第 39 回合中已经描述的重组与除法（第 96 回合）的特征联系起来，以理解符号相等 12=3×4。她通过用符号语言在图形表示中解释来表达她的想法。当她谈到划分 12 而不是 12=3×4 时，她没有明确提到符号转换 $E_A \to E_B$。然而，她通过手势表示其中一种表示和谈论另一种表示，成功地将图形与符号表示联系起来。

与 Dilay 类似，第二轮中只有另外两名学生通过手势在符号转换和图形重组之间建立这种联系，而另一名学生则停留在前面举例说明上。

这些对第二轮学习路径的简要见解表明，事实上，中等成绩的学生也可以有效地推理重组结构化图形，并将这些图形转换与符号转换联系起来。虽然第一轮中的一些成绩优异的学生自己制定了动态策略（而其他人则没有），但第二轮中成绩中等的学生在采用图形重组之前需要被提示这些可能性。在被提示重组之前，学生在间接静态比较中发现了相同和不同的子结构，但没有直接连接结构化图形。当被要求解释任务 2 流程图中给出的重组步骤时，学生建立了 S_A 和 S_B 更直接的连接，这通过重组等价来支持他们的描述等价性概念。

表 4-6 提供了学生可以开始填补重组等价性差距的第一个迹象。此外，Dilay 在表 6 中的多种方式解释表明了图形表征如何诱导使用手势来表达新出现的表示方法。即使第二轮中的大多数学习路径仍然受限于将重组图形与转换表达式联系起来的明确性，Dilay 表明该途径可以导致使用重组过程证明转换规则。

4 讨 论

在提出的设计研究项目中，我们试图在早期代数学习环境中弥合描述等价和转换等价的差距，在该环境中，首先探索了关于几何图形作为图形表示的描述等价性，以克服对表达式的纯

粹操作观点并发展对更深层次结构的理解，然后鼓励从图形表示中的静态比较到符号表示中的动态转换。从第一轮的高成绩学生那里，我们了解到从静态比较到动态修改的转变已经在图形表示中完成，因为这些孩子发明了我们后来称之为重组等价的东西。而不是通过查找结构 S_A 和 S_B 和图 F 比较两个表达式 E_A 和 E_B，以便我们可以确保两个表达式描述相同的图形（图 5 中勾勒的内容轨迹中的步骤II），第一轮中成绩优异的学生直接修改了结构化图形 S_A 变成重组后的 S_B（图 5 中的步骤III）。当学生的描述等价心理模型建立在通过连接表征的关系识别更深层次的结构之上时，这似乎对培养学生对转换等价的理解非常有用。

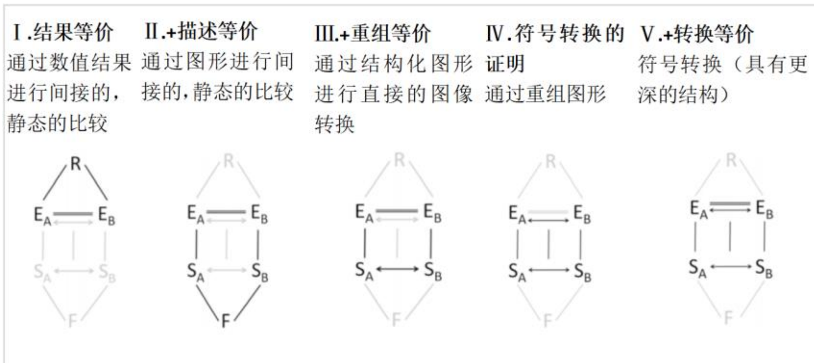


图 5 内容轨迹中的步骤：依次扩展表示方法，并将它们相互连接起来

我们的主要发现是重组等价性这一额外表示方法。额外的表示方法有助于将这种关系理解转移到转换中。第二轮用于探索中等成就者是否也可以进入步骤III，甚至通过重组图形（步骤IV）来证明符号转换，然后将能力也扩展到步骤 V——纯粹的符号、规则引导的转换等价。对三对学生的定性分析显示，学生可以轻松达到步骤III，但步骤 IV 只有部分学生才能进入，因此似乎需要进一步的支持才能使所有人达到。

参考文献

[1] Tondorf, A., & Prediger, S. Connecting characterizations of equivalence of expressions: design research in Grade 5 by bridging graphical and symbolic representations [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2022, 111(3): 399-422.

活动讯息

鉴传统文化，悟留白教学

——“数学文化融入高中数学教学”研讨会暨嘉兴市沈金兴名师工作室 2023 学年第二次研修活动

刘腾琦，仲翊晴，胡紫晗

（苏州大学数学科学学院，苏州 215006）

2023 年 11 月 7 日，“数学文化融入高中数学教学”研讨会暨嘉兴市沈金兴名师工作室 2023 学年第二次研修活动在浙江省桐乡市凤鸣高级中学隆重举行。参与活动的有华东师范大学教师教育学院副院长、教授、博士生导师汪晓勤老师，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师，苏州大学数学科学学院沈中宇老师，桐乡市教育局教研科研室书记、主任王华老师，桐乡市教育局人事科科长费志强老师，桐乡市教师进修学校书记、校长钱应强老师，桐乡市凤鸣高级中学校长钟志兴老师，桐乡市凤鸣高级中学副校长石小丽老师，高中数学教研员嘉兴市学科带头人施娟男老师，以及沈金兴名师工作室全体成员，华东师范大学 HPM 方向的研究生和苏州大学 2023 级学科教学（数学）专业研究生。

【沈金兴名师工作室揭牌仪式】

本次研修活动的第一项议程为嘉兴市沈金兴名师工作室揭牌仪式，仪式活动由桐乡市凤鸣高级中学副校长石小丽主持。

图 1 沈金兴名师工作室揭牌仪式

图 2 汪晓勤老师致辞

汪晓勤老师对沈金兴名师工作室成立致辞。汪老师对沈金兴老师二十年如一日对 HPM 的

默默耕耘表达高度赞扬，并对沈金兴名师工作室提出了两点期望：期望工作室里的青年教师能够通过研究 HPM 成为一个“专业学习共同体”；期望工作室成为中学与大学之间沟通与交流的桥梁，为数学教育做出一份贡献。

接着，王华老师作为指导老师致辞，方蕾老师作为学员代表发言。

图 3 王华主任致辞

图 4 方蕾老师发言

在揭牌仪式的最后，沈金兴老师就工作室研修计划进行了详细的解读，可以归纳为六点目标：积极做好名师职业规划；争取发表一篇 HPM 论文；申报一个教育研究课题；合作开发融入数学文化的课例；努力钻研新课标新教材；认真阅读有关数学教育教学理论方面的专著。

图 5 沈金兴老师解读研修计划

【中华优秀传统数学文化进课堂】

研修活动的第二项议程为两节“中华优秀传统数学文化进课堂”的汇报课，分别是孙冲老师的“祖暅原理与柱体、锥体的体积”以及饶彬老师的“中国古代数学家求数列和的方法”。

孙冲老师通过设计移动小棒、硬币等多个实验，让学生直观感知并理解祖暅原理，切身经历由“线动成面”类比出“面动成体”中的祖暅原理全过程，并应用祖暅原理推导柱体和锥体

的体积公式。

图 6 孙冲老师的课堂教学

图 7 饶彬老师的课堂教学

饶彬老师采用分组合作的学习方式，课堂通过生活情境和历史情境引入，进而介绍中国古代数学家数列求和的方法——垛积术。饶老师同样也采用了实验的方式引导学生探究、推导求和公式，将一次幂和类比到二次幂和，并进一步拓展到三次幂和。

【HPM 研究新进展——中华优秀传统数学文化与留白创作式教学】

研修活动的第三项议程为汪晓勤老师的主题讲座“HPM 研究新进展——中华优秀传统数学文化与留白创造式教学”，汪老师从学术背景、古名今辩、古法今用、古问今编、古术今推、古算今思及未来展望六个方面展开，引经据典，娓娓道来。讲座尾声，汪老师寄语在场的一线教师积极开展融入中算史的留白创造式教学实践，让中华优秀传统数学文化焕发新的生命力。

图 8 汪晓勤老师作报告

【课后交流研讨】

研修活动的最后一项议程为是对两节汇报课的交流研讨。

首先，饶彬老师分享他的汇报课是以一则阅读材料为起点，带着学生一起体会古人绝妙的

"垛积术"，从高维到低维，由繁到简，由多到少，由无限到有限，发展学生降维的思想方法，遗憾的是时间较为紧张，没能让学生进一步分享其他方法。

邹佳晨老师从"课堂留白"的角度进行点评。首先对饶彬老师分组活动的做法予以肯定，分组活动增加了课堂留白机会，能更好地培养学生几何直观素养以及构造的能力，其次呼吁中学教师大胆留白、充分留白，让学生充分补白，最后建议可以让学生一组讲一组评，在师生互动的同时增加生生互动的可能。

沈中宇老师从数学史的教育价值方面进行总结：饶老师从沈括垛积术引入一次幂和到二次幂和，让学生了解到知识和学习的必要性，体现了"知识之谐"；在"探究之乐"上，两位老师都制作了精美的教具，使得课堂更加丰富多彩，分组活动也充分发挥了学生小组的探究能力；在"文化之魅"方面，沈老师提出在融入中算史的同时可以兼顾多元文化；"中华优秀传统数学文化进课堂"的主题无疑体现了爱国主义，两节汇报课亦展现了中国古代数学家的理性精神，即为"德育之效"。

汪晓勤老师对"德育之效"的教育价值进行补充说明，提出可以通过深入挖掘祖暅的人物背景，介绍祖暅在中国古代数学上的重要学术地位，进而挖掘其德育价值。最后，汪老师给在场所有老师及学生留下了"推导二次幂和总共有多少种方法"的"方法之白"。

图 9 课后研讨交流

一天的研修活动在大家的热烈研讨中顺利结束。通过课堂观摩、聆听讲座和研讨交流，我们深入了解了中华优秀传统数学文化融入数学课堂教学的"为什么""是什么"和"怎么做"，同时对"留白创造式"教学有了更进一步的认识，收获颇丰。接下来我们将在学习和实践中努力尝试，不断探索，为传承中华优秀传统文化，共创数学教育的美好未来作出自己的贡献！

探秘循环小数，渗透类比推理

——上海市金苹果学校思维导向课教学观摩与研讨活动

彭纯莉，赵哲栋，于 博

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2023 年 11 月 8 日下午，华东师范大学 HPM 研究团队赴上海市金苹果学校参加小学数学思维拓展课的教学观摩与研讨活动。参与活动的有上海市金苹果学校校长周一飞老师，上海金苹果学校国际部师资教学处主任梅娅琼老师，华东师范大学教务处处长、物理与电子科学学院教授、博士生导师周先荣老师，华东师范大学中文系副系主任、教授、博士生导师汤拥华老师，华东师范大学中文系教授、博士生导师朱志荣老师，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师，以及上海金苹果学校数学教研组成员，华东师范大学 HPM 方向的研究生等。本次观摩课的主题为“循环小数探秘，类比探新”，执教教师为上海市金苹果学校顾斌老师。

课前，顾老师先把导学案发给学生预习，并且让学生完成导学案上“初步探究”的题目。课上，顾老师首先通过复习旧知导入新课，此环节有 4 位学生分享了“循环节的表示方法以及书写注意事项”，随之顾老师引出本节课可以继续探秘循环小数，寻找循环节与被除数、除数之间的联系。

图 1 复习引入环节

图 2 “对学”环节

然后进入本节课的探究环节，分为“对学”和“组学”，顾老师在对学环节给学生 5 分钟的时间校对答案，交流发现，顾老师夸奖全班学生都完成了作业，并且在作业上认真的备注了发现的规律；在组学环节让学生交流统一小组发现的规律。

图 3 “组学”环节

图 4 各组组长上台板书小组发现的规律

经过热烈地讨论，顾老师让 4 个小组的组长分别上台板书循环小数的规律，并且在老师的引导下，学生进行了生生互评，通过组长的举例分析，其他学生的质疑反驳以及补充完善，在此过程中学生甚至提出了一些老师预设之外的问题，如 9÷9，10÷9，进一步完善了发现的规律，使其规律更加广泛适用。最后，顾老师还夸奖了一些学生已经发现导学案上题目所隐含的另一个待探究的规律，被除数可以写成某一个数的乘方，从乘法的视角探究循环小数的规律，并且把这一问题留作课后思考题。在课堂的最后，顾老师强调了本节课的目的不是教会循环小数，而是通过类比推理，培养学生的逻辑思维以及数学素养。

图 5 学生质疑反驳、补充完善

图 6 梅娅琼老师发言

观摩课结束后，与会老师共同对今天的课程展开了研讨。梅娅琼老师对所有参与活动的老师和同学表示了欢迎和感谢，希望能够在培养学生的形象思维和逻辑思维，激发学生的批判性思维和创造性思维的教学实践方面进行自由、开放、充分、深入的交流分享。

顾斌老师介绍了循环小数这节课的设计思路。顾老师引导学生通过类比推理的方法，了解更多书本上没有的循环小数的知识，培养学生的思维能力和发现能力。顾老师贯彻了思维课程的首要理念——放开，在导学案中留了大块的白，产生了许多意料之外的结论。

图 7 顾斌老师分享教学设计思路

图 8 邹佳晨老师点评

邹佳晨老师分享了对于数学思维课程的听课体会，提出了课堂的几个亮点：第一，学生呈现了非常好的学习状态。第二，本节数学思维课充分发挥了留白的理念，复习循环小数的概念时留下了陈述之白；对于一类小数循环节的探寻过程中留下了发现之白；呈现发现的规律时有不同的表达方式，留下了方法之白；学生自己提出了被除数大于除数会怎样和 9÷9 的循环小数表示问题，留下了问题之白。第三，本节课对于学生课堂表现的评价非常到位，有全班评价、个别评价、生生评价。邹老师还讨论了思维课的教学目标，并提出了一些建议，如投屏学生作品、留下论证之白。

周一飞老师补充了授课教师的背景，一者授课教师未参加思维课程教材的编写，二者顾老师有一定的教龄，三者课程未进行过试讲。

图 9 周一飞老师点评

图 10 朱志荣老师点评

朱志荣老师在发言中指出了数学的重要性和中国数学教育在思维方面的优势，肯定了培养学生思维的重要性。

汤拥华老师首先表达了对思维课程和校本教材建设的惊喜之情，并指出，数学和思维是一体的，顾老师的授课完成了思维课程的教学目标，学生搞懂了知识，训练了以类比为主的思维。

汤老师还回应了板书的问题，课程中修改板书的过程使语言更加精确，指出思维课要凸显思维、情感和语言的一体性。

图 11 汤拥华老师点评

图 12 周先荣老师点评

周先荣老师首先阐述了思维课程的意义，随后指出了顾老师的数学课程是非常好的逻辑思维的展示。然后，周老师结合自身的授课经验，分享了自己的思考：回顾知识点的时候可以不断提出问题；可以邀请学生担任助教；要引导全体学生发言；可以有学生思维过程的展示；小组讨论的组织可以包括分享和质疑；可以将思维课的效果延伸到课后；思维课要收放自如；要推进智慧教室的建设。最后，周校长希望思维课程在取得的阶段性成果的基础上，能辐射到兄弟学校，提出了把金苹果学校打造成高端的标志性的学校的目标。

在与会教师的热烈讨论中，本次观摩课圆满结束。本次观摩课呈现了基于原有知识，通过类比推理，培养学生发散性思维的思维导向课范式，课后研讨让我们对思维课程的设计和教学实践有了进一步的认识，并且更让我们意识到了思维培养对学生发展的重要意义，相信在 HPM 工作室成员以及金苹果学校的努力下，会呈现出更多精彩的思维导向课。

2023 年 HPM 论文一览

理论探讨

[1] 汪晓勤, 邹佳晨, 王华. 数学史与留白创造式教学[J]. 数学通报, 2023, 62(3): 1-6.

[2] 汪晓勤, 林雁平. 中华优秀传统数学文化与小学数学留白创造式教学[J]. 小学数学教师, 2023(Z1): 26-31.

[3] 刘梦哲, 孔雯晴, 汪晓勤. ChatGPT 辅助设计 HPM 课例：尝试与感悟[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2023(9): 14-20.

[4] 刘倩雯, 汪晓勤. 无字证明在数学教学中的应用[J]. 中学数学月刊, 2023(9): 21-25.

[5] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于中华优秀传统数学文化的高中数学留白创造式教学初探[J]. 中小学课堂教学研究, 2023(9): 1-6.

教材研究

[1] 刘倩雯, 汪晓勤. 法国初中数学教科书的插图：功能与特色[J]. 数学通报, 2023, 62(8): 4-10, 66.

历史研究

[1] 徐章韬, 李可心, 汪晓勤. 历史上一元二次方程解法的教学解读[J]. 数学通报, 2023, 62(1): 5-8, 22.

[2] 陈雨晴, 韩粟, 汪晓勤. 美英早期三角学教科书中的积化和差公式[J]. 数学教学, 2023(2): 28-33.

[3] 刘梦哲. 美英早期几何教科书中二面角的应用探析[J]. 数学之友, 2023, 37(2): 11-14, 18.

[4] 孔雯晴. 探相似之用寻教学之材[J]. 中学数学月刊, 2023(3): 51-54, 59.

[5] 石城, 汪晓勤. 跨学科视角下美英早期教科书三角学的应用[J]. 中学数学月刊, 2023(3): 55-59.

[6] 汪晓勤. 数学史上的留白与创新[J]. 中学数学月刊, 2023(4): 1-4.

[7] 姚瑶, 汪晓勤. 美英早期三角学教科书中的三角恒等式[J]. 数学通讯, 2023(6): 62-66.

[8] 刘梦哲, 杨舒捷, 汪晓勤. 美英早期教科书中的圆锥曲线的光学性质[J]. 数学通报, 2023, 62(4): 40-44, 48.

[9] 刘倩雯, 汪晓勤. 反三角函数概念的历史演进[J]. 数学教学, 2023(5): 46-50.

[10] 刘梦哲, 汪晓勤. 美英早期三角学教科书中的三角形内切圆半径公式[J]. 数学通讯, 2023(9): 1-5.

[11] 汪晓勤. 从克拉维斯的《几何原本》注看数学家的创新[J]. 数学通报, 2023, 62(6): 1-6, 30.

[12] 韩粟, 汪晓勤. 牛顿迭代法求方程近似解: 从历史到课堂[J]. 数学通报, 2023, 62(9): 12-17.

[13] 韩粟, 汪晓勤. 基本不等式为何“基本”? [J]. 新世纪智能(新高考版), 2023(494): 11-15.

[14] 姚瑶, 汪晓勤. 几何视角下的二倍角公式[J]. 中学生数学, 2023(19): 17-21.

[15] 姚瑶, 汪晓勤. 数学史视角下的三角函数单位圆定义和终边定义[J]. 数学教学, 2023(9): 5-9.

[16] 朱轶萱, 陈泓媛. 同角三角函数关系之源流[J]. 新世纪智能(新高考版), 2023(510): 4-9.

[17] 刘梦哲, 秦语真, 汪晓勤. 美英早期解析几何教科书中的双曲线的渐近线[J]. 数学通报, 2023, 62(10): 8-13.

[18] 刘梦哲, 汪晓勤. 美英早期三角学教科书中的正切定理[J]. 数学通讯, 2023(24): 39-45.

教学实践

[1] 戴祥辉, 刘梦哲, 雷沛瑶. 追溯知识本源 深化概念理解——HPM 视角下圆锥曲线单元复习课的教学[J]. 中学数学月刊, 2023(5): 50-53, 67.

[2] 刘梦哲, 孔雯晴. 探析数学史对高三单元复习课的价值——以两节圆锥曲线复习课为例[J]. 中学数学月刊, 2023(6): 50-53.

[3] 刘梦哲, 邹佳晨, 汪晓勤. 聚焦学生探究, 构建留白课堂——HPM 视角下“异面直线间的距离”同课异构课例分析[J]. 数学教学, 2023(12): 6-12.

[4] 陈雨晴, 刘思璐, 汪晓勤. HPM 视角下的对数定义同课异构课例分析[J]. 中小学数学(高中版), 2023(12): 41-44.

实证研究

[1] 刘思璐, 沈中宇, 汪晓勤. 高一学生函数概念意象的调查研究[J]. 数学教育学报, 2023, 32(1): 7-12.

名师访谈

[1] 姜浩哲, 沈中宇, 邹佳晨. 中美基础教育数学课程发展: 比较与启示——蔡金法教授访谈录[J]. 数学教育学报, 2023, 32(3): 56-63.

[2] 王华, 刘思璐, 秦语真. 我的数学教育一生——奚定华老师访谈录[J]. 数学教学, 2023(4): 23-28.

学术专著

《美英早期三角学教科书研究》

[1] 卢成娴, 汪晓勤. 锐角三角函数的引入, 美英早期三角学教科书研究, 3-14, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[2] 沈中宇, 汪晓勤. 锐角三角函数概念, 美英早期三角学教科书研究, 15-24, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[3] 朱轶萱. 特殊角的三角函数, 美英早期三角学教科书研究, 25-37, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[4] 严珮锦. 任意角, 美英早期三角学教科书研究, 38-52, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[5] 沈中宇, 汪晓勤. 任意角的三角函数, 美英早期三角学教科书研究, 53-63, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[6] 彭思维. 弧度制, 美英早期三角学教科书研究, 64-74, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[7] 韩粟. 周期函数, 美英早期三角学教科书研究, 75-91, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[8] 石城. 三角函数的图像, 美英早期三角学教科书研究, 92-103, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[9] 石城. 三角函数的性质, 美英早期三角学教科书研究, 104-111, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[10] 刘倩雯. 反三角函数. 美英早期三角学教科书研究, 112-125. 上海: 上海教育出版社, 2023.

[11] 陈泓媛. 同角三角函数的关系, 美英早期三角学教科书研究, 129-144, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[12] 鲜宇骋. 诱导公式, 美英早期三角学教科书研究, 145-155, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[13] 汪晓勤. 和角与差角的正、余弦公式, 美英早期三角学教科书研究, 156-186, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[14] 汪晓勤. 和角的正切公式, 美英早期三角学教科书研究, 187-195, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[15] 姚瑶. 倍角公式, 美英早期三角学教科书研究, 196-207, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[16] 刘梦哲. 半角公式, 美英早期三角学教科书研究, 208-225, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[17] 陈雨晴. 和差化积公式, 美英早期三角学教科书研究, 226-238, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[18] 陈雨晴. 积化和差公式, 美英早期三角学教科书研究, 239-249, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[19] 钱益弘. 三角形的面积公式, 美英早期三角学教科书研究, 250-265, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[20] 刘梦哲. 三角形内切圆和旁切圆的半径公式, 美英早期三角学教科书研究, 266-277, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[21] 姚瑶. 三角形中的三角恒等式, 美英早期三角学教科书研究, 278-296, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[22] 姚瑶. 其他三角恒等式, 美英早期三角学教科书研究, 297-314, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[23] 石城. 复数三角形式若干应用, 美英早期三角学教科书研究, 315-324, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[24] 汪晓勤. 正弦定理 美英早期三角学教科书研究, 327-339, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[25] 汪晓勤. 余弦定理, 美英早期三角学教科书研究, 340-353, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[26] 汪晓勤. 正切定理, 美英早期三角学教科书研究, 354-373, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[27] 周天婷, 汪晓勤. 高度与距离的测量, 美英早期三角学教科书研究, 377-390, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[28] 石城. 三角学在航海、物理和天文学中的应用, 美英早期三角学教科书研究, 391-410, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[29] 刘思璐, 沈中宇. 三角学的教育价值, 美英早期三角学教科书研究, 411-423, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[30] 汪晓勤. 三角学的历史, 美英早期三角学教科书研究, 424-441, 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

《普通高中学科核心素养 数学 必修第二册》

[1] 韦润蓉. 平面向量的概念, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 2-5, 上海: 上海教育出版社, 2023.

[2] 王智洋. 平面向量的运算, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 6-9, 上海: 上海教育出版社, 2023.

[3] 刘梦哲. 平面向量基本定理及坐标表示, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 10-14, 上海: 上海教育出版社, 2023.

[4] 韩粟. 平面向量的应用, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 15-20, 上海: 上海教育出版社, 2023.

[5] 狄迈. 复数的概念, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 22-26, 上海: 上海教育出版社, 2023.

[6] 苏福梅. 复数的四则运算, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 27-31, 上海: 上海教育出版社, 2023.

[7] 孔雯晴. 复数的三角表示, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 32-36, 上海: 上海教育出版社, 2023.

[8] 刘梦哲, 刘叶青. 简单几何体的表面积与体积, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 49-54, 57-61, 上海: 上海教育出版社, 2023.

[9] 秦语真. 空间点、直线、平面之间的位置关系, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 62-65, 上海: 上海教育出版社, 2023.

[10] 杨舒捷. 空间直线、平面的平行, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 66-70, 上海: 上海教育出版社, 2023.

[11] 钱秦. 空间直线、平面的垂直, 普通高中学科核心素养 数学 必修第二册, 71-75, 上海: 上海教育出版社, 2023.

2023 年 HPM 与留白创造式教学课题组活动年鉴

- 2023 年 2 月 16 日下午，“留白创造式”教学课题组、华东师范大学 HPM 工作室与华东师范大学基础教育学科教研联盟联合举行高中课例研讨活动。本次活动在上海外国语大学附属普陀实验学校举行。线下参与本次活动的有 HPM 工作室成员、“留白创造式”课题组成员代表与联盟各成员校教师代表，线上线下参与人数共计 100 余人。本次活动研讨的课题为“圆锥曲线的统一性（专题复习课）”与“余弦定理”。

- 2023 年 2 月 20 日下午，华东师范大学 HPM 团队在上海民办华曜嘉定初级中学举行初中课例研究。本次活动研讨的课题为“平行四边形单元教学设计”。

- 2023 年 2 月 22 日下午，华东师范大学 HPM 团队与中国中学高中数学教研组举行课例研讨活动。参与本次活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师，华东师范大学教师教育学院研究生，以及中国中学“中华优秀传统文化融入高中数学教学实践研究”课题组。本次活动研讨的课题为“中算史融入高中数学教学”。

- 2023 年 2 月 23 日下午，“留白创造式”教学课题组、数学史与数学教育（HPM）工作室、华东师范大学基础教育学科教研联盟联合举行初中课例研讨活动。本次活动在华东师范大学第二附属初级中学举行。线下参与本次活动的有 HPM 工作室成员、“留白创造式”课题组成员代表、联盟各成员校教师代表、华东师范大学教师教育学院数学教育方向的研究生。本次活动研讨的课题为“全等三角形的判定（边角边）”“矩形的性质与判定”和“同位角、内错角、同旁内角”。

- 2023 年 2 月 24 日下午，汪晓勤老师为初中生作了题为“跨学科写作的主题与意义”的讲座。
- 2023 年 2 月 28 日下午，汪晓勤老师为小学数学教师作了题为“学科德育在小学数学教学中的实施——数学文化进路”的在线讲座。
- 2023 年 3 月 2 日下午，“留白创造式”教学课题组在北京东路小学举行教研活动。本次观摩课的主题为“形数探秘”。

- 2023 年 3 月 6 日上午，以“历史为主线，留白促创新——HPM 视角下的初中数学教学实践”为主题的华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学联盟第二十次集中研修活动顺利举行。本次活动由华东师范大学广陵实验初级中学承办，参与此次研讨活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师和 HPM 方向的研究生，扬州市教育科学研究院中学教研室主任、中学数学教研员王玉宏老师，以及华东师范大学广陵实验初级中学数学组教师和北京新东方扬州外国语学校的教师。同时，联盟各成员校初中数学教师线上参与本次活动。本次观摩课的主题为“矩形的判定”，研讨的主题是“基于课堂留白的 HPM 初中课例设计与实践”。

- 2023 年 3 月 14 日下午，数学史与数学教育（HPM）课例研讨活动在上海外国语大学附属普陀实验学校举行。本次活动由数学史与数学教育（HPM）工作室、上海市第四期“双名工程”高峰计划王华数学基地联合开展。本次观摩课的主题是“余弦定理”。参与本次活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师，上海市晋元高级中学正高级教师、特级教师王华老师，此外还有来自 HPM 工作室和王华数学基地的教师以及华师

大的研究生共同参与。

- 2023 年 3 月 16 日上午，华东师范大学 HPM 团队与中国中学高中数学教研组举行“中算史融入高中数学教学”第二次教研活动。
- 2023 年 3 月 22 日-23 日，第十届数学史与数学教育(HPM)高级研修班暨首届“留白创造式”数学教学研讨会在上海市晋元高级中学附属学校举行。来自上海、江苏、浙江、湖北、福建、贵州、安徽、甘肃和澳门等地区的 120 余家单位，共计 254 位高校学者、研究生、教研员和一线中小学教师参加会议。

- 2023 年 3 月 27 日下午，以“历史为主线，留白促创新——HPM 视角下的初中数学教学实践”为主题的华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学联盟第二十一次集中研修活动顺利举行。本次活动由华东师范大学弋阳实验初级中学承办，参与此次研讨活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师和 HPM 方向的研究生，上海市普陀区教育学院正高级教师陈兴义老师，华东师范大学弋阳实验学校副校长叶霞老师、初中数学教研组长刘美英老师以及数学组教师。同时，联盟各成员校初中数学教师线上参与本次活动。本次观摩课的主题为“矩形的性质”和“矩形的判定”。

- 2023 年 3 月 28 日，以“历史为主线，留白促创新——HPM 视角下的初中数学教学实践”为主题的华东师范大学基础教育学科教研联盟高中数学联盟第十九次集中研修活动顺利举行。本次活动由华东师范大学上饶实验中学承办，华东师范大学盐城高级中学和厦门市华师希平双语学校协办。参与此次研讨活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师和 HPM 方向的研究生，华东师范大学上饶实验中学校长肖家芸老师、副校长超龙老师以及高中数学组教师。同时，联盟各成员校高中数学教师线上参与本次活动。本次观摩课的主题为“余弦定理”。

- 2023 年 3 月 29 日下午，数学史与数学教育（HPM）工作室在华东师范大学第二附属初级中学举行初中教学观摩活动。本次观摩课的课题为“全等三角形的判定（边角边）”。
- 2023 年 4 月 11 日下午，汪晓勤老师为小学数学教师作了题为“数学文化视角下的小学数学教学实践与案例”的讲座。
- 2023 年 4 月 13 日上午，华东师范大学 HPM 团队与中国中学高中数学教研组举行“中算史融入高中数学教学”第三次教研活动。

- 2023 年 4 月 13 日下午，“留白创造式”教学课题组在普陀区管弄新村小学举行教研活动。本次观摩课的主题为“计算比赛场次”。
- 2023 年 4 月 23 日下午，“留白创造式”教学课题组双城学术交流会在苏州大学数学科学学院举行。参与本次活动的有“留白创造式”课题组成员代表与苏州大学数学科学学院师生代表，参与人数共计 30 余人。

- 2023 年 4 月 27 日下午，汪晓勤老师为嘉定区部分小学校长作了题为“小学留白创造式数学刍议”的讲座。
- 2023 年 5 月 4 日上午，HPM 工作室在上海市长桥中学举行初中教学观摩活动。本次观摩课的课题为“特殊的平行四边形”。
- 2023 年 5 月 13 日，汪晓勤老师为小学和初中教师作了题为“从课堂到书斋——中小学教师论文写作刍议”的在线讲座。
- 2023 年 5 月 17 日下午，华东师范大学 HPM 团队与中国中学高中数学教研组举行“承中

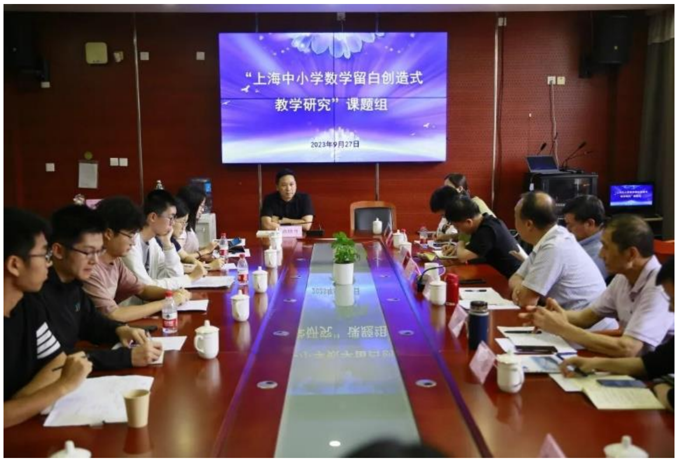
算智慧，创中国未来”的课堂展示及论坛活动。本次观摩课的课题为“以形驭数：等差数列前 n 项的和”和“杨辉三角探秘”。

- 2023 年 5 月 28 日上午，汪晓勤为云南曲靖小学数学教师作了题为“HPM 视角下的小学数学留白创造式教学”的讲座。
- 2023 年 5 月 29 日上午，曲靖师范学院汪晓勤专家工作站挂牌成立，成立仪式之后，汪晓勤老师作了题为“基础教育学校名师成长路径刍议”的报告。
- 2023 年 8 月 16 日，曲靖师范学院教师教育学院主办开展学术讨论班。莅临本场讨论班的有华东师范大学教师教育学院副院长汪晓勤教授，曲靖师范学院科技处处长李正彪教授，曲靖师范学院教师教育学院院长丁晓东教授，云南师范大学初等教育学院小学教育系系主任吴骏教授，杭州师范大学经亨颐教育学院岳增成副教授，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师，曲靖师范学院教师教育学院朱彪老师。同时，华东师范大学教师教育学院部分研究生与来自昆明、曲靖和景洪的一线数学教师也参与了本次活动。

- 2023 年 8 月 17 日，以“数学史融入小学数学教学”为主题的研修活动在曲靖市第一小学举行。

- 2023 年 8 月 18 日，专家工作站团队赴宣威市来宾街道第一小学举行 HPM 教研基地揭牌仪式及课例观摩与研讨活动。课例观摩与研讨活动的主题为“三位数乘两位数”和“格子算法”。

- 2023 年 9 月 13 日下午，汪晓勤老师为初中数学教师作了题为“中华优秀传统数学文化与初中数学留白创造式教学”的讲座。
- 2023 年 9 月 14 日上午，9 月 28 日上午以及 10 月 7 日上午，华东师范大学 HPM 团队与中国中学高中数学教研组举行“中算史融入高中数学教学”的教研活动。研讨主题为“数图同归——三角问题探究”和“以形驭数——基本不等式及其应用”。
- 2023 年 9 月 27 日下午，“留白创造式”教学课题组在上海中医药大学附属闵行晶城中学举行教研活动。本次观摩课的主题为“因式分解”。



- 2023 年 10 月 11 日上午，华东师范大学 HPM 团队在上海市洋泾菊园实验学校举行 HPM 视角下的数学教学主题研讨。本次观摩课的主题为“平方差公式”和“配方法解一元二次方程”。

- 2023 年 10 月 13 日下午，汪晓勤老师为初中教师作了题为“学科教育之人文追求”的讲座。
- 2023 年 10 月 17 日下午，汪晓勤老师为香港中学教师作了题为“上海数学教育前沿”的讲座。
- 2023 年 10 月 18 日下午，上海市中国中学与华东师范大学“中华优秀传统文化进高中数学课堂的设计与实施”项目组和上海市徐汇区高中数学团队、数学史与数学教育（HPM）工作室、上海市“中小学数学留白创造式教学”课题组、华东师范大学基础教育学科联盟高中数学联盟联合举行课例观摩与研讨活动。上海市晋元高级中学特级教师、正高级教师、华东师范大学教师教育学院数学教育研究所首席专家王华老师，闵行区教育学院高中数学

教研员、特级教师、正高级教师杨家政老师，徐汇区教育学院高中数学教研员李幸老师，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师，以及 HPM 工作室高中教师、“中小学数学留白创造式教学”课题组教师、上海市徐汇区高中数学教师和华东师大 HPM 方向的研究生参加了观摩研讨活动。本次观摩课的主题为“以形驭数——基本不等式及其应用”和“数图同归——三角问题探究”。

- 2023 年 10 月 23 日至 24 日，华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学联盟第二十三次集中研修活动于华东师范大学附属三明中学举行，本次研修活动的主题为“中华优秀传统文化进初中数学课堂的探索”。参与此次活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师，华东师范大学弋阳实验学校葛永鑫老师、胡文林老师，华东师范大学附属三明中学校长周宁医老师和全体初中数学教师。同时，联盟各成员校初中数学教师线上参与本次活动。

- 2023 年 11 月 1 日上午，教育部新时代名师名校长培养计划“李德安名师工作室”授牌成立。下午，汪晓勤老师作了题为“学科教育之人文追求”的讲座。
- 2023 年 11 月 3 日下午，汪晓勤老师为小学教师作了题为“德育视角下的跨学科教学初探”的讲座。
- 2023 年 11 月 7 日，上海市“立德树人”数学教育教学研究基地、华东师范大学教师教育学院与嘉兴市“沈金兴名师工作室”共同举办研讨会，探讨中华优秀传统数学文化进课堂的教学。汪晓勤老师作了“HPM 研究新进展”的报告。

- 2023 年 11 月 8 日下午，华东师范大学 HPM 团队在上海市金苹果学校举行教研活动。本次观摩课的主题为“循环小数探秘，类比探新”。

- 2023 年 11 月 9 日上午，汪晓勤老师为西藏日喀则初中数学教师作了题为“中华优秀传统数学文化融入初中数学教学的若干路径”的在线讲座。

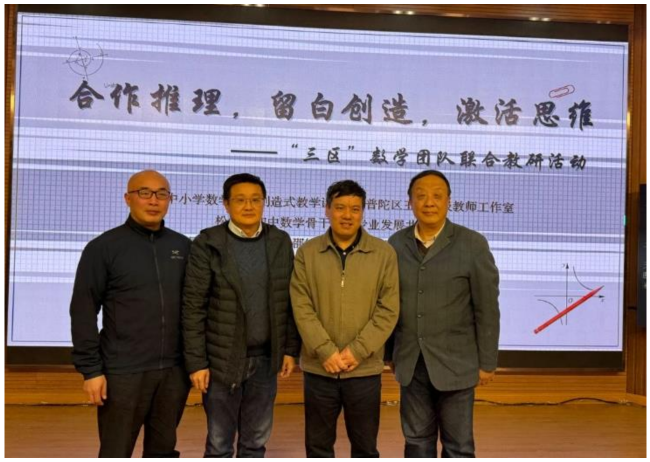
- 2023 年 11 月 21-22 日，华东师范大学基础教育学科教研联盟高中数学联盟第二十一次集中研修活动与初中数学联盟第二十四次集中研修活动于华东师范大学盐城实验学校举行，本次研修活动的主题为“历史为主线，留白促创新”。汪晓勤老师和邹佳晨老师分别作了“勾股定理历史上的留白与创新”、“HPM 课例研究的流程与方法”的报告。
- 2023 年 11 月 23 日-27 日，华东师范大学 HPM 团队赴江苏南京参加中国数学会数学教育分会第二届（2023 年）学术年会。汪晓勤老师、邹佳晨老师、刘倩雯同学和刘梦哲同学作了关于“HPM 研究新进展”的专题报告。

- 2023 年 11 月 27 日，华东师范大学 HPM 团队与杭州第二中学钱江学校数学教研组举行主题教研活动。华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授，杭州第二中学钱江学校副校长、中学数学正高级教师顾予恒老师，杭州第二中学钱江学校数学教研组组长王仁海老师，以及杭州第二中学钱江学校数学组教师、华东师范大学孟宪承书院部分数学方向实习生参加了观摩研讨活动。本次观摩课的主题为“圆锥曲线统一性探究”和“抛物线及其标准方程”。

- 2023 年 11 月 29 日下午，“留白创造式”教学课题组在上海市吴淞中学举行“基于工约 3.0 的留白创造式教学”教研活动。本次观摩课的主题为“用函数观点求解方程和不等式”。
- 2023 年 12 月 2 日-5 日，第十一届数学史与数学教育（HPM）高级研修班在云南昆明举行。来自云南、浙江、上海、河北、西安、广东、贵州和福建等 23 个省份的 156 家单位，共计 425 位高校学者、研究生、教研员和一线中小学教师参加了本次研修班。

- 2023 年 12 月 6 日，“留白创造式”教学课题组赴嘉兴秀洲区王江泾镇实验学校举行教研活动。本次观摩课的主题为“圆与直线位置关系”。

- 2023 年 12 月 13 日下午，“留白创造式”教学课题组与虹口、松江开展“合作推理、留白创造、激活思维”的主题教研活动。本次活动在华东师范大学第一附属初级中学举行。



- 2023 年 12 月 19 日上午，教育部新时代名师名校长培养计划“何丽名师工作室”授牌成立。下午，汪晓勤老师作了题为“数学史融入小学数学教学的实践与价值”的讲座。
- 2023 年 12 月 26 日，华东师范大学 HPM 团队赴苏州市阳山实验初级中学校参加 2023 沪苏双城联合教学展示与研讨活动。本次活动的主题为“数学文化视角下的初中数学教学”。