上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2020 年第 9 卷第 7 期

徐光启（1562-1633）与利玛窦（M. Ricci, 1552-1610）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首新语

徐光启眼中的《几何原本》的教育价值

孙丹丹

（华东师大数学科学学院，上海 200041）

《几何原本》是古希腊伟大数学家欧几里得（Euclid，约 BC330－BC275）的数学经典之作，从古罗马时期起就不断地被翻译成各种文字传播到世界各地，至 19 世纪末，用各种文字出版的《几何原本》达一千多个版本，从来没有一本科学书籍像《几何原本》那样长期成为广大学子传阅的读物，它在各国流传之广、影响之大仅次于基督教的《圣经》。

1607 年，意大利传教士利玛窦（Matteo Ricci, 1552-1610）和徐光启（1562-1610）合作翻译了《几何原本》前 6 卷，这是明末最早翻译为汉语出版的西方数学著作。徐光启极力推荐此书，据徐光启讲，他每天下午三四点钟都到利玛窦的住处学习，利玛窦“口传”，徐光启“从笔受焉”，“反复辗转，求合本书之意，以中夏之文，重复修订，凡三易稿”。徐光启不遗余力翻译《几何原本》，“意皆在欲公诸人人，令当世亟习焉”，他为“习者盖寡”而不安，担心纵“百年之后，必人人习之”，也“习之晚也”。如此投入和期待是因为在徐光启眼中，《几何原本》有着非常深远的教育价值。

一、演绎精神

中国传统数学的最大特点是以算为中心，数学几乎就是“算学”，虽然也有逻辑证明，但却没有形成一个严密的演绎体系。徐光启和利玛窦只翻译了《几何原本》前六卷，但欧氏几何的基础和框架已现端倪，其抽象的陈述形式和严密的逻辑推理都是中国传统科学体系缺少的。

利玛窦在翻译《几何原本》时明确指出，当时中国“即有斐然述作者，亦不能推明其所以然之故，其是者亦无从别白，有谬者，人亦无从辩证”，相对而言，《几何原本》则有着不同的风格，突出表现为“求其故”，具体表现为严格缜密的逻辑证明。徐光启深刻论述了这种体系的特点：“题论之首先标界说，次设公论，题论所据。次乃具题，题有本解，有作法，有推论。先之所徵，必后之所恃。一先不可后，一后不可先……初言实理，至易至明，渐次积累。终竟，乃发奥微之意。”因为这种公理化体系的组织，徐光启认为“此书有四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改”。徐光启还把整个体系的精妙归之于“明”，“似至晦实至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁实至简,故能以其简简他物之至繁；似至难实

至易，故能以其易易他物之至难。易生于简，简生于明，综其妙在明而已。”所谓“明”，一是指其所基于的原理是自明的，二是指其所用的推论规则也是自明的。有研究者认为，在明清两代数学家中，还找不到第二个人达到了徐光启这种对公理化方法和和逻辑严谨性的深刻理解。

二、社会功用

明代末年，受商品经济影响，一部分先进知识分子讲求实际，崇尚真知，力主经世致用，不屑空谈性理。受当时实学思潮影响，除了高度赞赏《几何原本》逻辑结构与推理方法外，徐光启强调了其社会功用，认为“《几何原本》者，度数之宗，所以穷方圆平直之情，尽规矩准准绳之用也”，“是书也，以当百家之用”“几何诸家藉此为用”。徐光启认为《几何原本》中的理论可以应用到与国计民生密切相关的各个领域之中，例如，他主持编纂的《崇祯历书》将西方古典天文学全面介绍到中国，其中托勒密-第谷宇宙模式的全部数学工具正是欧几里得几何学，所以徐光启呼吁“此书为用至广，在此时尤急所需”，“此书未译，则他书俱不可得论”。

更进一步，徐光启认为《几何原本》是一种基础性的经典，对于科学研究有着重要方法论意义，研习此书是授人以渔而非授人以鱼。“昔人云：‘鸳鸯绣出从君看，不把金针度与人’，吾辈言几何之学，正与此异。因反其语曰：‘金针度去从君用，未把鸳鸯绣与人’，若此书者，又非止金针度与而已，只是教人艸冶铁，抽线造针，又是教人植桑饲蚕，湅丝染缕。有能此者，其绣出鸳鸯，直是等闲细事。”

三、学科德育

徐光启还特别强调了学习《几何原本》对个人品质的塑造作用，“言道言理，既皆返跖实，绝去一切虚玄幻妄之说”，这种公理化演绎思想无疑有利于培养人们通过符合逻辑的推理而非经验表象下结论的理性精神，“明此，知向所揣摩造作而自诡为工巧者皆非也；……明此，知向所想象之理，多虚浮而不可挼也。”

徐光启认为细密的心思是一种非常重要的品格，“人具上智而意理疎莽，即上资无用；人具中材而心思缜密，即中材有用”，而《几何原本》可以“能令学理者祛其浮气，练其精心；学事者资其定法，发其巧思”，“能通几何之学，缜密甚矣。”

此书有利于教育人们求真务实，杜绝虚妄，徐光启说，“凡他事，能作者能言之，不能作者亦能言之；独此书为用，能言者即能作者，若不能作，自是不能言。何故？言时一毫未了，向后不能措一语，何由得妄言之。”

“此书有五不可学：躁心人不可学，粗心人不可学，满心人不可学，妬心人不可学，傲心人不可学。故学此者不止增才，亦德基也。”亦即，此书有利于学习者静心、细心、虚心。

此书也是对人综合能力的磨练，徐光启认为，凡有能力和毅力理解此书之人，其他事情也能做好。“能精此书者，无一事不可精；好学此书者，无一事不可学。”

数千年后的今天，《几何原本》的教育价值仍然熠熠闪光。

目　录

CONTENT

教材研究

中法初中数学教科书章前页中的数学文化比较研究

李卓忱

（华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

1 引 言

数学文化在国内受到很大的关注，在课标中地位逐渐提高。2003 年版的《普通高中数学课程标准（实验）》中提到“把数学文化内容与各模块的内容有机结合”[1]，在 2017 年颁布的《普通高中数学课程标准》（以下简称《标准（2017）》）的基本理念中强调了要“注重数学文化的渗透”，要“不断引导学生感悟数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值”[2]。与基本理念相对应的，在课程结构中，数学文化是融入到整个的课程内容中的，其内涵丰富多元，与社会生活的联系紧密，是引导学生用“数学眼光”、“数学思维”和“数学语言”[2]与世界产生共鸣的重要通道。

从二十世纪九十年代开始，国内有研究关注教科书中章前页，探究其教育价值，并根据章前页开展教学应用研究[3][4]。但国内对于教科书中的章前页研究较少，截止至 2020 年 7 月，在中国知网搜索篇名为“章前页”、“章头图”或“章前图”的文献，期刊和学位论文总共仅有 23 篇，目前的研究不够深入且没有较为成熟的理论，但研究者们也在尝试探讨这一主题[5][6]。章前页是教科书中可以承载丰富文化的平台，有其重要的价值，对章前页的研究有一片广阔的天地。

有很多研究关注到法国教材[7]-[10]，但关注章前页中数学文化的文章并不多。法国十分重视数学文化相关内容在课程中的融合渗透，有良好的数学史融入数学教学的传统。在法国 Belin 版数学教科书中，章前页的设计很好地展现了数学文化与数学教育的融合，可以为我们的教育教学和教科书的编写提供更多启示。基于此，本研究试图解决以下研究问题：中法两国初中数学教科书章前页中涉及的数学文化内容有何区别？

2 研究方法

2.1 研究对象

本研究以法国 Belin 版、人教版和北师大版初中数学教科书中的章前页为研究对象。章前页

是指每一章节正式内容开始前的章节起始页，一般由标题、图片和文字组成。人教版教科书中章前页由标题、引言和背景图构成。北师大版的章前页由标题、引言、背景图和学习目标构成。在法国的义务教育阶段中分出了 2、3、4 三个学段，每个学段包括 3 年，其中第 4 学段对应于初二、初三和初四年级[14]，且所用的 Belin 版教科书分别对应于 Math 5、Math 4 和 Math 3，本研究将选择这三本作为研究对象。Math5 的章前页主要由章节标题、图片及其标题、图片相关配文、相关问题、数学游戏这五个模块组成；Math 4 和 Math 3 的章前页主要由标题、一幅主图、文字卡片、漫画或示意图构成。

2.2 分析框架

本文依据《标准（2017）》中数学文化的两层内涵，从操作上对数学文化进行分类，给出数学文化内涵的分析框架。基于数学史的数学文化内涵可分为“知识源流”、“学科联系”、“社会角色”、“审美娱乐”和“多元文化”这五个维度[11]。在该框架的基础上，将各维度的内涵拓展到更一般的数学文化中去，结合有关文献[12][13]所采用的分析框架，并参照 PISA 分类标准[14][15]，建立数学文化分类框架。

表 1 数学文化内涵的分类框架

维度	描述	《标准》中的内涵
知识源流	（1）数学史料内容：概念、命题、思想、方法、工具、符号、术语、问题等； （2）数学家的生平与故事。	数学的思想、精神、语言、方法、观点，以及它们的形成和发展。
学科联系	（1）在生物科学、地球科学、物质科学、高新技术、建筑科学等相关学科中与数学相关联，体现数学的广泛应用； （2）在文学、艺术、建筑、历史等其他学科中与数学相关联，体现数学中人文的一面。	数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及数学相关的人文活动。
社会角色	数学在日常、学校、娱乐、社会、经济、职业生活中的应用。	
审美娱乐	（1）数学审美：简洁、对称、和谐、周期等； （2）趣味数学：数学游戏、数学谜语等。	
多元文化	（1）创造：不同地域、不同时间或不同文化背景下对同一个数学主题做出的贡献； （2）应用：不同地域、文化背景下对于同一数学主题的运用。	

“知识源流”是指数学史料内容，分为六个子维度：“概念与术语”、“命题与法则”、“问题与求解”、“符号与工具”、“思想与方法”和“人物与事件”。“学科联系”是指数学与其他学科的关联，分为“科学技术”与“人文艺术”，其中“科学技术”包含生物科学、地球科学、物质科学、高新技术和建筑科学，“人文艺术”包含人文、美术、音乐和建筑艺术等四类，其中“建筑科学”强调数学与建筑结构的稳定性、适用性等的联系，“建筑艺术”着重于数学与建筑美观性的联系。“社会角色”是指数学与现实生活的联系，分为日常生活、学校生活、社会生活、娱乐生活、经济生活和职业生活。“审美娱乐”包含数学审美与趣味数学两层含义，数学审美是指对称美、简洁美、和谐美，趣味数学是指数学游戏、数学谜语、数学趣题等。“多元文化”强调了地域文化背景的不同，分为创造和应用两类。

2.3 编码过程

先对研究对象进行了前后三轮编码，分别为预编码、初轮编码和二轮编码。预编码阶段确定以模块为分析单元，初步确定研究框架。模块大致分两种情形，一是整段且相对独立的文字内容，单独拿出来也能够表达出完整含义，二是图片和文字的组合，文字与图片之间是描述、解释或延伸的关系。不同段落的文字或不同图片及其所配文字构成不同的模块，若不同段落、图片是在同一个语境或情境背景之下，则合并为一个模块。另外，北师大版中的“学习目标”这一模块是该版本教科书在三版中所独有的模块，其他两个版本教材中没有可比较的对象，且该模块与数学文化关系不紧密，不纳入统计中。

在预编码过程中发现，北师大版和人教版教科书中，存在单个模块中包含多个情境的情况，每个情境用简短的短语来表达，这样的模块中并没有表达完整的情境，在分析过程中认为该模块不属于任何一类数学文化类型。但同时，为了体现北师大版和人教版教材章前页中存在的这些数学文化点，进一步以内容点为标准，凡是出现了数学文化情境，都记为一个内容点，来统计所有出现的情境的个数。

预编码阶段确定以模块为分析单元，初步确定研究框架，并进行了数量统计，如表 2。

表 2 各版本教科书中的章节数与章前页中的模块数统计表

	Belin 版	人教版	北师大版
章节数	43	29	34
模块数	129	76	87

之后，根据初步拟定的分析框架开始正式的初轮编码，记录编码结果。三个月后再开展二轮编码，与初轮编码的结果作对比，查看编码有差异的单元并完善初步的分析框架，明确分类细则，确定最终分析框架和编码结果。

3 研究结果

3.1 整体统计结果

采用上述研究方法对三个版本的教科书章前页中的数学文化内容按照五个维度进行分类并统计，分析各个版本章前页中的每个模块所属的数学文化维度，统计了四组数据：各维度下的模块的数量、各维度下的内容点的数量、涉及到每一个维度的章节数量、这些章节数分别占各版本的章节总数的百分比，如表 3 所示。

表 3 各版本教科书章前页中数学文化统计表

	知识源流			学科联系			社会角色			审美娱乐			多元文化		
	Belin	人教	北师	Belin	人教	北师	Belin	人教	北师	Belin	人教	北师	Belin	人教	北师
模块数①	46	2	5	39	7	1	21	20	14	20	1	4	18	0	0
内容点数②	46	2	8	41	17	24	18	9	43	20	1	5	18	0	0
章节数③	20	1	5	26	8	2	17	15	8	18	2	4	18	0	0
章节占比④	47%	3%	15%	60%	28%	6%	40%	52%	24%	42%	7%	12%	42%	0%	0%

注：①：属于该维度数学文化的模块的数量；

②：属于该维度数学文化的内容点的数量；

③：含有该维度数学文化的章节的数量；

④：含有该维度数学文化的章节数（③）在该版本教科书总章节数中的占比

根据表 3 中①③④的数据可得知，Belin 版教科书章前页中知识源流维度的内容非常丰富：涉及到该维度的章前页中，平均每章约为 2 个模块属于“知识源流”，对数学史非常重视；整体来看四个维度从数量上和在章节中的分布占比来看都相对比较平均，“学科联系”维度最多，较为重视数学与其他学科之间的联系，强调数学的应用性和广泛性；亦有约 $\frac{1}{3}$ 的章节中明确涉及到多元文化，这些章节中出现了不同地域的文明，强调了文化的多样多元性。人教版和北师大版教科书章前页中，除了“社会角色”维度，其他维度的数学文化明显没有法国 Belin 版教科书丰富，且国内两版均未涉及多元文化。人教版中，“社会角色”维度的数学文化非常明显，有约一半的章节都讨论生活中涉及到的数学；“学科联系”维度排在第二位，但涉及到的章节数量仅有“社会角色”维度的约一半，可以看出人教版教科书还是在尝试在数学和其他学科之间建立桥梁。北师大版中，涉及到“社会角色”维度的章节数量最多，但明显比人教版中的少；

“知识源流”维度排在第二，可见有意识地在尝试给学生介绍知识的来源、数学史相关内容，以此帮助学生理解数学。

将表 3 中的模块数（①）与内容点数（②）中的内容进行对比，可以发现，Belin 版变化不大，而人教版和北师大版中的变化非常明显，尤其是“社会角色”和“学科联系”。可以看出，国内两版教材中，各维度的内容点是十分丰富的，在一小段语言中往往涉及到数个不同的情境，但每个情境都没有深入讨论。这个特点，北师大版教材中尤为明显，例如在八年级上册第三章“位置与坐标”的章前页中，有如下表述：“生活中我们常常需要确定物体的位置。例如，确定学校、家庭的位置，确定地图上城市的位置，在棋盘上确定棋子的位置，在海战中确定舰艇的位置……”这段话中包含了 4 个不同的情境，但每个情境都仅是一句短语。而法国 Belin 版教科书中，往往是多段文字都在说同一个话题，这样可以有更深入地讨论，更充分地利用该情境，让学生对于该情境中涉及的数学文化有更多的思考，留下更深的印象。

3.2 各维度内容分析

3.2.1 知识源流

数学史就是数学本身，展现了数学发展的脉络，数学的来龙去脉对学生的学习而言有着至关重要的作用，帮助学生抓住数学本质。“知识源流”则展现了数学的自身发展历程，是数学文化的重要组成部分。

依据知识源流的内涵，对“知识源流”维度中的内容进行分类，内涵与案例如表 4 所示。

表 4 “知识源流”维度的分类及案例

维度	内涵	案例(法国教科书)	案例（我国教科书）
概念与术语	数学概念、名词、术语等	阿布·韦发(Abu-Wefa, 940- 998)的著作中可以看到负数来源于正数；中国人曾使用红色算筹作为正，黑色算筹为负。（Belin 版“负数”）	—
命题与法则	数学命题、定理、公式、法则等	介绍斐波那契数列，并思考连续两个数字的商与 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 之间的大小关系。(Belin 版“平方根”)	《周髀算经》中记载勾三股四弦五。而后人们进一步发现并证明了直角三角形三边关系。（人教版“勾股定理”）

问题与求解	历史名题、数学问题、解答过程等	泰勒斯(Thales, 前6世纪)测量金字塔的高度的方法。（Belin 版“中位线与平行线”）	丢番图墓志铭上记载的问题。（北师大版“一元一次方差”）
符号与工具	数学符号、数学工具、用数学原理制作的工具等	介绍古罗马沟算盘。(Belin 版“运算律”)	—
人物与事件	人物生平、肖像、事件等	法国数学家迈耶(P. A. Meyer, 1934-2003)与中学生们互动,分享用方程解决问题的好处。(Belin 版“方程与问题解决”)	2002 年数学家大会在北京召开，会徽与勾股定理有密切关系。（人教版“勾股定理”）
思想与方法	函数与方程、数形结合、公理化、抽象、概括、分类、建模、特殊化、化归等思想方法	—	用几何与代数分别来表示平方和与平方差公式,体现数形结合的思想。（北师大版“整式的乘除”）

对三个版本教材中的“知识源流”维度中各子维度进行统计，以模块为分析单元，并数出所含内容点，统计结果如图 1 中所示。其中每个版本中统计了模块数和内容点数，以此体现出各版本教科书中的特点。

法国 Belin 版中一共有 46 个“知识源流”维度的模块，分布在 20 个章节中，约占全部 43 个章节中的一半，知识源流非常丰富，往往是一个主题下有多个不同的数学史相关内容，其中，“人物与事件”是最多的，“命题与法则”较少。

国内两版教科书中的数学史都非常少。人教版中仅有 2 个模块属于“知识源流”维度，都位于八年级第十七章“勾股定理”；北师大版中有 5 个模块属于“知识源流”维度，分布在 5 个章节，还有一些章节中展示了数学家的肖像，但没有配上任何与肖像有关的文字，相关内容不明确，故而仅作为内容点统计。

该维度中 Belin 版比国内两版都明显有更多的内容。国内两版教材中，该维度的相关数学文化都很少，北师大版虽然比人教版多一些，但仍然是仅有非常少量、浅显的内容。

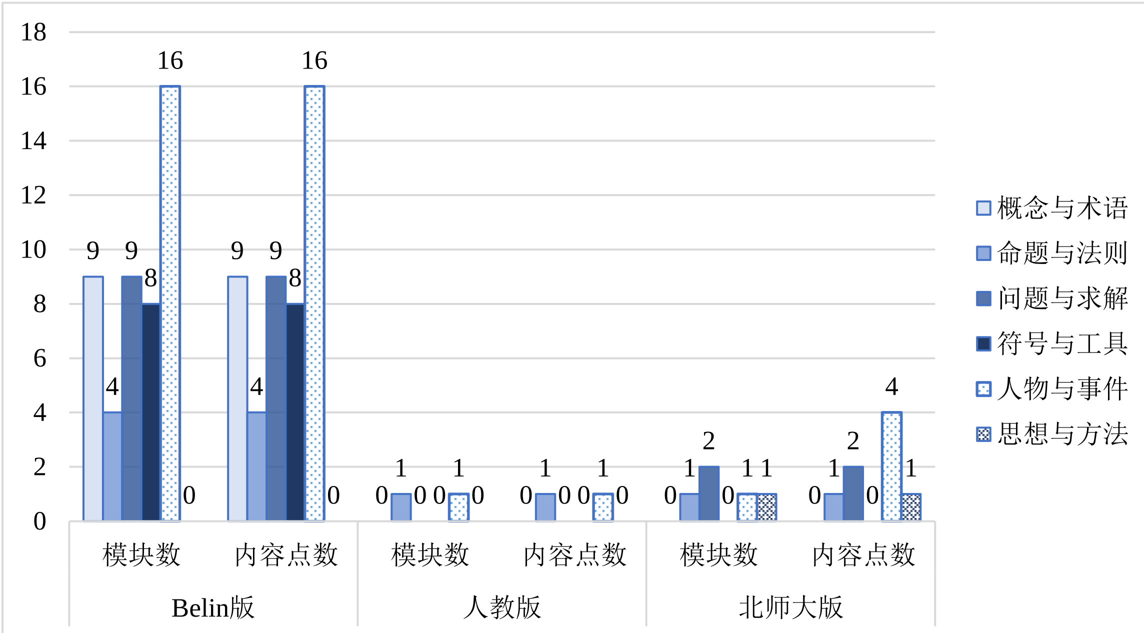


图 1 各版本教科书章前页中“知识源流”维度模块数统计图

3.2.2 学科联系

在其他学科领域中，数学仍然扮演着重要的角色。让学生用数学的眼光去观察各个学科领域，发现无处不在的数学。数学文化在此彰显出了它的学科联系内涵的魅力，数学并不是一个孤立的学科，数学与其他文化之间的相互融合丰富着这个大千世界，也丰富了数学世界。

基于依据 PISA 分类[14][15]，对已有的分类框架略微调整后，得到表 5 中的“学科联系”子维度的分类，主要分为科学技术和人文艺术两大类。

表 5“学科联系”维度的分类及案例

维度		内涵	案例(法国教科书)	案例（我国教科书）
科学技术	生物科学	生态学、生物学、医学、生命健康、运动健康等	南丁格尔（F. Nightingale，1820~1910）将统计学的知识用于克里米亚战争，使死亡率从 40%降低到 2%。(Belin 版“数据处理”)	骆驼体温的变化。(北师大版“变量之间的关系”)
	地球科学	地质学、天文、航海、自然资源、环境、灾害等	地球表面无法平铺，所以世界地图其实并不是精确的。(Belin 版“棱锥与圆锥”)	高山上海拔高度与对应的气温有函数关系。(人教版“一次函数”)

科学技术	物质科学	物理学、化学等	例如苯分子的大小约 10^{-10} 米，如果没有科学计数法，这些数字会很长。(Belin 版“指数幂”)	人踩在木板上，人和木板对地面的压力一定时，木板面积变化，对地面压强如何变化？(北师大版“反比例函数”)
	高新技术	航天学、航空学、信息技术等	—	计算宇宙飞船离开地球所需要的第一宇宙速度与第二宇宙速度，这要用到平方根的概念。(人教版“实数”)
	建筑科学	与建筑的结构、稳固等相关的内容	桥越长，越脆弱，也越昂贵。为了尽可能短，桥应垂直于河流或两岸，例如公元 1 世纪建造的嘉德水道桥。(Belin 版“距离”)	古埃及的金字塔，巨大的钢架桥，微小的分子结构，到处都有三角形的形象。(人教版“三角形”)
人文艺术	人文	文学、语言、历史	贝热拉克(S. C. de Bergerac, 1619 - 1655)是法国剧作家，也是剧本中的人物，他讽刺另一个人太胖时说：“即使离他很远，我们也觉得他很近。”物体越远看起来越小，这与泰勒斯定理密切相关。(Belin 版“距离”)	中国的方块字中有些也具有对称性。(人教版“轴对称”)
	美术	绘画、雕塑、手工艺品	比利时画家马格里特(René Magritte)的作品《欧几里得大道》(*Les Promenades d'Euclide*, 1955)中，展示了透视的误导性。(Belin 版“棱锥与圆锥”)	在设计人体雕像是，使雕像的上部（腰以上）与下部（腰以下）的高度比，等于下部与全身的高度不，可以增加视觉美感。(人教版“一元二次方程”)
	音乐	歌曲、乐器、乐理	—	—
	建筑艺术	世界知名建筑	威尼斯的孔塔里尼宫标志着哥特式和文艺复兴风格之间的过渡，它的旋转楼梯位于圆柱形塔内。(Belin 版“圆柱体”)	国家体育场（鸟巢）、国家游泳中心（水立方）等建筑中，你能找到一些熟悉的图形吗？(人教版“几何图形初步”)

对三个版本教材中的“学科联系”维度中各子维度进行统计，以模块为分析单元，结果如

图 2 中所示。

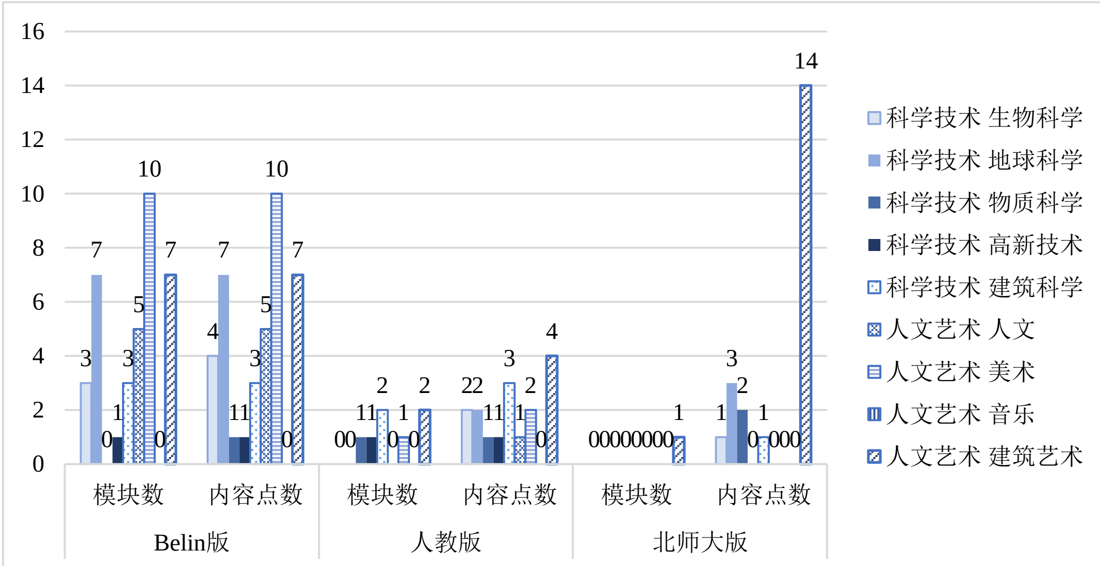


图 2　各版本教科书章前页中“学科联系”维度统计图

法国 Belin 版教科书章前页中共有 36 个模块属于“学科联系”，体现出了数学与其他学科之间广泛的联系，例子非常丰富。法国 Belin 版中模块数和内容点数是很接近的。在分类统计中，法国教科书中“人文艺术”比“科学技术”所属模块更多，可见法国教科书中的人文性是较强的；“美术”和“建筑”是“人文艺术”中最多的两个类别，也是“学科联系”中最多的两个类别，其中，属于“建筑”的 10 个模块中，有 3 个属于建筑科学，涉及了与建筑结构、稳固有关的数学知识，有 7 个属于建筑艺术；属于“地球科学”的 7 个模块中有 4 个属于天文，其他 3 个属于与地球表面、世界地图的测绘相关的情境。

人教版和北师大版教科书中，属于“学科联系”的模块数都非常少，分别是 7 和 1，但是若统计内容点数，却是多了很多，分别达到 16 和 21。在人教版中，内容点分布相对较均匀，提到建筑科学和建筑艺术共有 7 个内容点，在北师大版中属于建筑艺术的有 14 个内容点、建筑科学有 1 个，总体来看国内教科书在建筑中着墨较多，“学科联系”的呈现形式还不够多样，且大部分的内容点都是非常精简的一句话或没有配字的图片。

在“学科联系”维度上，模块数、内容点数、所涉及的内容维度，法国教科书都比国内两版教科书更丰富。法国教科书的内容点数和模块数十分接近，表明每一个内容点有足够的文字和图像作为支撑，能独立构成一个模块；而国内两版教科书虽然内容点有一定数量，但是每个内容点即每个情境都相对单薄，且建筑居多，内容点数和模块数相差较大，能够独立成模块的数量非常少。

3.2.3 社会角色

数学在社会发展中也扮演着重要的角色，同时社会文化也同样对数学起着推进的作用。数学文化的“社会角色”内涵，展现了数学与社会的关系，主要涉及到个人的与公共的。

基于依据 PISA 分类[14][15]和王建磐等[12]对“数学与现实生活”的分类，表 6 中呈现了的“社会角色”的分类与案例，主要有个人生活与公共生活两大类。

表 6 “社会角色”维度的分类及案例

维度		内涵	案例(法国教科书)	案例（我国教科书）
个人的	日常生活	个人体征、家庭用品、常见事物、日常活动等	有种蛋糕名为“四分之四”，它的四种主要成分的含量相等，这正是它名字的由来。(Belin 版“整数与有理数”)	我们生活在一个变化的世界中，时间、温度，还有你的身高、体重等都在悄悄地发生变化。(北师大版“变量之间的关系”)
	学校生活	学习成绩、班级概况、学校实施、学校活动等	—	为了举办校园活动，在学校中统计学生们喜欢的节目类型。(人教版“数据的收集、整理与描述”)
	娱乐生活	体育运动、比赛、游戏、彩票、度假、娱乐活动等	应对不同高度的跳台，跳水池的深度与水位的应该如何设计。(Belin 版“相反数的加减”)	根据甲、乙、丙三人的射击成绩的折线图，判断谁的成绩更好？更稳定？如何判断？(北师大版“数据的分析”)
公共的	社会生活	基本常识、人口问题、公共设施、公共服务、社会现象、政治选举、社会调查等	统计学家需要非常注意如何采集数据。假设他们想要确定一个地区每个家庭的平均子女数，采访成年人与采访孩子或许将获得不同的数据。(Belin 版“统计与概率”)	喷泉喷出的水珠弧线上高度与水平距离之间的关系。(人教版“二次函数”)

经济生活	工业生产、商品销售、产品质量、金融投资、利益最大化等	旧的英国货币体系的换算，以及利润计算。(Belin 版“复合度量与单位”)	商场推出了不同的优惠方案，选哪家购物花费少？(人教版“不等式与不等式组”)
职业生活	工资薪金、福利、工作情况、求职等	—	—

对三个版本教材中的“社会角色”维度中各子维度进行统计，结果如图 3 中所示。其中每个版本中统计了模块数和内容点数。

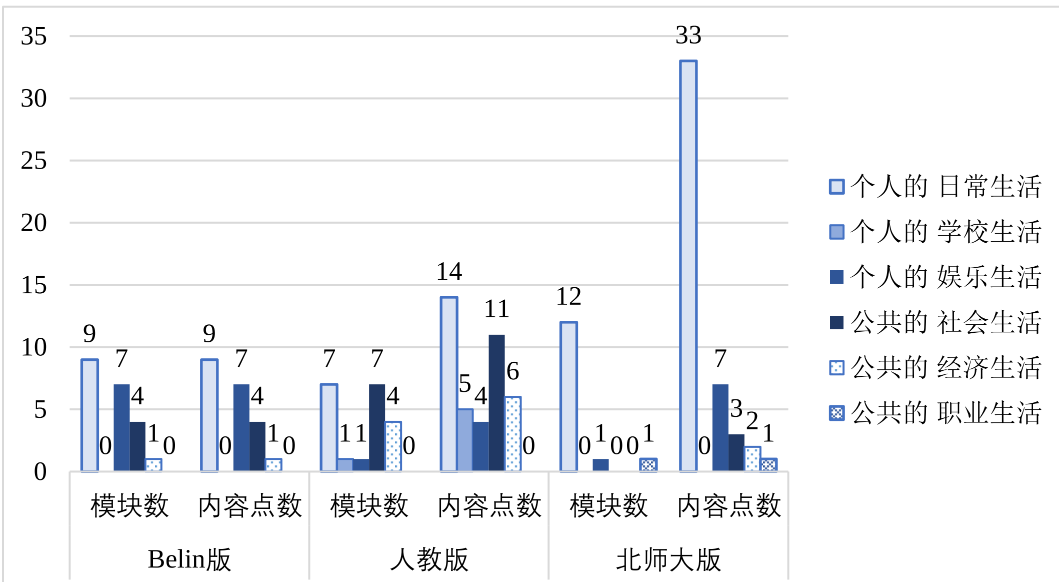


图 3　各版本教科书章前页中“社会角色”维度统计图

法国教科书中共有 21 个模块属于“社会角色”，其中个人生活情境较多，公共社会生活也有一定的涉及。其中，日常生活和娱乐生活占据了大部分“社会角色”的模块，可见 Belin 版较为注重数学的趣味性，强调数学在日常生活的重要性。

“社会角色”是人教版和北师大版都占比最大的维度，分别涉及 20 和 14 个模块、40 和 46 个内容点，可见国内两版教材都最看重数学与现实生活之间的联系。从内容点数和模块数的比较来看，人教版和北师大版仍然均表现出内容点数明显大于模块数，即大部分内容点是以简短的形式呈现出来，且北师大版比人教版的情况更为明显。人教版教科书中关于个人日常生活和公共社会生活都比较关注，对公共经济生活也有一些模块涉及，兼顾了个人生活与公共生活；北师大版主要关注个人的日常生活，公共生活涉及到很少。相比来看，人教版的内容更多、更充实，且维度上也更丰富。

两国教科书都重视数学与现实生活之间的关系，其中人教版更关注社会生活与数学之间的关系，Belin 版和北师大版都更关注个人生活与数学的联系。从统计的整体数量来看，三版的模块数相差不大，但人教版和北师大版的内容点数非常多，举出更多的情境，但也更碎片化。

3.2.4 审美娱乐

审美娱乐维度有两个层面的内涵，一方面是数学审美，另一方面是趣味数学。数学不仅有实用价值，更是有美学价值，并让学生体会数学好玩之处。

“审美娱乐”维度主要分为“数学审美”和“趣味数学”两大类[12]，子维度和描述与案例如下表 7 所示。其中，虽然在建筑等其他方面里也有非常多的对称、和谐的图形，但本维度仅针对数学本身的美与趣味。

表 7 “审美娱乐”维度的分类及案例

维度		内涵	案例(法国教科书)	案例（我国教科书）
数学审美	对称美	展现数学中的对称美	科赫雪花曲线图及其生成步骤。(Belin 版“分数运算”)	圆也是一种美丽的图形，具有独特的对称性，无论从哪个角度看，它都具有同一形状。(人教版“圆”)
	简洁美	展现数学中的简洁美	用指数幂来表示一长串的数字，更加简洁。(Belin 版“整数指数幂”)	—
	和谐美	展现数学中的和谐美	使用几何软件，在直角三角形的外接圆上移动直角顶点 A，可以发现角 A 始终保持是直角。(Belin 版“直角三角形与外接圆”)	用“数学海螺图”展现出一系列有形的无理数。(北师大版“实数”)
趣味数学		数学游戏、数学趣题、谜题等	已知用火柴棍表示出如图的罗马数字的算式，在不碰火柴棍的情况下，使得等式成立。(Belin 版“运算律”)	随便想一个自然数，将这个数乘 5 减 7，再把结果乘 2 加 14，无论开始想的自然数是什么，所得数的个位数字一定是 0。(北师大版“整式及其加减”)

对三个版本教材中的“审美娱乐”维度中各子维度进行统计，统计数据如图 4 中所示。其

中每个版本中统计了模块数和内容点数。

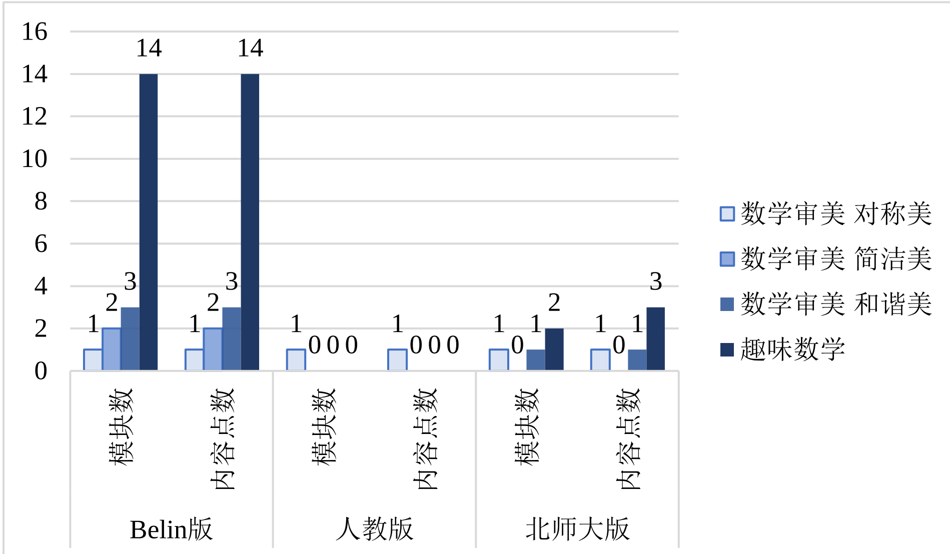


图 4 各版本教科书章前页中“审美娱乐”维度统计图

Belin 版教科书中“审美娱乐”维度共有 20 个模块，其中“趣味数学”占绝大部分比重，主要分布在 Math 5 中，Math 5 中每章章前页都有一个“谜语”或“怎么办”栏目，都是数学游戏和数学谜题。

国内两版教材中“审美娱乐”维度的内容都比较少，分别有 1 个和 4 个模块，人教版教科书中仅有一处体现数学的对称美，相比之下北师大版教科书中该维度的内容略丰富一些。

在“审美娱乐”维度上，法国教科书在趣味数学上做了更多的努力，主要集中在 Math 5 中；而国内两版在数学的审美娱乐层面做得较少，尤其是人教版基本忽视了数学的趣味性和美学价值。

3.2.5 多元文化

“多元文化”维度下，对于一个数学主题，有不同时期、不同地域的数学家们对此做出了贡献，跨越时空，看到数学的历史长河中丰富的历史发展；也有不同地域文化下，对于同一数学主题进行运用，不同的文化之间相互碰撞出数学智慧的火花。

（1）分析框架与统计结果

“多元文化”维度主要分为“创造”和“应用”两大类，共同特征是地域差，具体描述与案例如下表 8 所示，案例中是该章节内涉及到的内容概括。“创造”维度是从数学史的角度，体现出了数学主题发展的历程中不同时空中的数学家做出的贡献，强调史实；“应用”维度侧重于文化的丰富性，体现同一数学主题下的不同的地域文化。

表 8 “多元文化”维度的分类及案例

维度	内涵	案例(法国教科书)
创造	不同地域、不同时间或不同文化背景下对同一个数学主题做出的贡献。	古希腊的毕达哥拉斯简介，意大利画家拉斐尔（Raffaello）的《雅典学院》（1510~1511）中绘有毕达哥拉斯，古巴比伦时期泥版上的证明，美国总统加菲尔德（Garfield）年轻时给出过证明，英国牧师数学家亨利·佩里加尔证明了该定理并将其刻在了墓碑上。(Belin 版“毕达哥拉斯定理”)
应用	不同地域、文化背景下对于同一数学主题的运用。	比利时画家马格里特所绘的《欧几里得大道》，中式锥形帽子，古埃及金字塔等。(Belin 版“棱锥与圆锥”)

对三个版本教材中的“多元文化”维度中各子维度进行统计，结果如图 5 中所示。“多元文化”维度不同于前面四个维度，是对整个章前页的描述，以章节为分析单元，看一个章节中是否包含多个地域信息，且以显性文字信息为准，不配有文字的图片很难判断其地域信息。

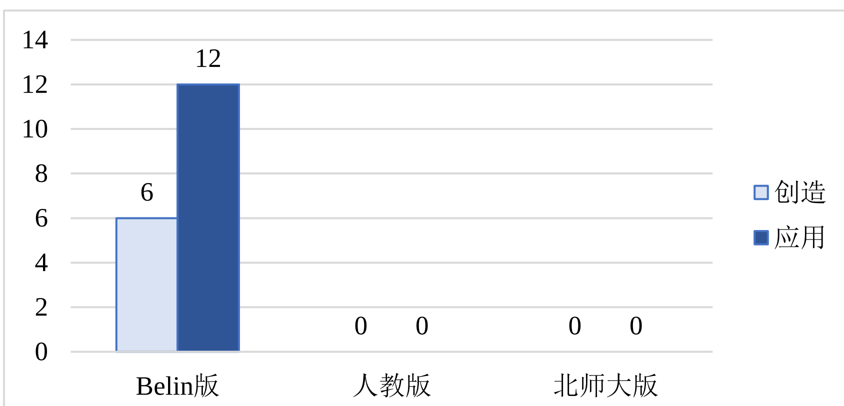


图 5 各版本教科书章前页中“多元文化”维度统计图

Belin 版教科书中有 18 个章节体现了“多元文化”，这些章前页打破了时间空间的界限，不仅能看到古人们的对话，共同推进数学的发展，还能看到数学像一个纽带，跨越时间空间将世界各地的文化串联起来。Belin 版教材的多元文化特点不仅在单个章前页中有突出表现，纵观整套教科书章前页，共涉及到了 20 个国家，提及了 46 位名人，其中 39 位是欧洲人，法国人有 17 位。

从单个章节的“多元文化”来看，国内两版教材并未出现显性的不同地域文化下的数学，但是也有其明显的地域文化特色。人教版十分重视中国本土文化，除了古希腊金字塔和意大利比萨斜塔，其他的选材都是来自中国的，所选图片也很有中国特色，其中明确点出是北京的章节有 8 章；北师大版中，仅有 6 章从文字上体现出了地域特点，除了我国，还提到了古希腊的丢番图和古希腊的毕达哥拉斯，地域特征较弱。

法国教科书比我国教科书更重视数学的多元文化。我国教科书中本土文化较重，多元文化特征不明显，文化来源较为单一；法国教科书在弘扬本土文化的同时，还展示了不同的文明。

4 讨论

从数学文化的教育价值来看，丰富的数学文化能够帮助学生体会到数学里的文化之魅，法国教科书在章前页中较好地做到了这一方面，我国教科书的章前页还可以展现得更多。

我国教科书中十分强调我们本国的文化，并展现了很多社会生活与数学的关系，这一特点在课程标准中也有迹可循。在《义务教育数学课程标准（2011 版）》（后面简称《标准（2011）》）中的前言中提到“课程内容的选择要贴近学生的实际”，在课程总目标中强调要让学生能体会“数学与生活之间的联系”[16]。

法国是艺术大国，而法国政府对文化事业的重视由来已久，可一直追溯到中世纪，法国各界政府都将文化看做是法兰西民族的“软实力”[17]。在法国的课程改革中，一直以来都在强调人文教育，十分重视欧洲文化的教学[18]，“艺术与文化教育”是其教育体系中的重要部分[17]。这让法国的数学课程中也充满了艺术与人文的色彩，在法国 2008 年出版印刷的初中数学课程标准中，特别指出了艺术史和数学的融合，对数学课程中呈现的艺术史素材作了说明[19]，可见艺术在法国数学课程中也占据了重要地位。同时，法国曾经是近现代数学的中心，有诸多法国数学家在历史舞台上贡献出了精彩的成果，这些也都成为法兰西民族文化中的重要部分。正是基于这样的教育理念以及法国在近现代数学中的地位，再有课程标准中的明确要求，教科书呈现出较多法国本土文化内容，也展现了丰富的欧洲文化，还兼顾了世界其他地区的文化对数学与艺术的贡献，向学生展开历史文化的画卷。除了数学和艺术史，法国初中课程标准还强调，要让学生保持对数学的兴趣，要联系数学与其他学科[19]，法国教科书较好地践行了这些要求，在数学的趣味性上做出了很多努力，并且广泛联系了其他学科。这也解释了为何法国教科书章前页中各个维度的数学文化都有很好的呈现。

5 结论与启示

首先，行文风格上来看，法国教科书较为详细，图片多、文字多，内容充实且丰富，国内两版教科书简洁细碎，内容点多但一笔带过；第二，法国教科书中丰富的数学史是其特色，国内两版教科书中相关内容较少；第三，法国教科书中各维度内容较为均衡，我国两版教科书都尤为偏重于“社会角色”维度，格外重视数学与现实生活的联系却忽视了其他；第四，法国教科书中关注本土文化的同时较好地呈现了数学中的多元文化，我国两版教科书更关注中国本土文化。

章前页是一个能让学生充分体会数学的价值的平台，设计好章前页不仅能更好地统领整章，还能带给学生较好的数学学习情感体验，而文化的融入对落实立德树人的教育目标有着重要意义。法国 Belin 版教科书提供了诸多数学文化素材，章前页的设计特点鲜明，内容丰富，对今后教科书的编写有借鉴的价值。由此，得到如下启示：

（1）提高内容的丰满度

首先，可增设章前页中的模块，目前国内两版教科书的章前页整体内容较少，空白较多，图片、文字都较为单薄，可以在章前页中增加更多的数学文化内容，充实章前页。

再者，我国两版教科书中内容点数非常多，而完整的模块数却很少，情境碎片化严重，目前章前页中的只言片语并不能让学生真正体会其中蕴含的文化内容，而充实的内容则可以帮助学生了解更多。因此，需丰富已有的内容点，让碎片化的情境丰满起来。

（2）重视教育取向的数学史的融入

已有研究指出数学史能够展现文化之魅，且数学文化的知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐和多元文化这五个维度分别与课标中数学的四大价值之间有着对应关系[11]。在教科书中的章前页中大量地融入数学史，对学生的数学学习和长远发展而言都有重要的意义。一方面，从知识的角度来说，不仅能够丰富学生的数学史知识，对老师而言也是一种知识的补充；另一方面，教科书作为一种教学素材的重要来源，承担着重要的育人的责任，让学生喜欢数学、体会数学中的文化与魅力是学科德育最重要的部分之一，而教育取向的数学史内容则是一个很好的载体。而目前我国两版教科书章前页中数学史内容非常少，因此建议填充更多的数学史内容。

（3）丰富数学文化各维度内容

目前我国使用率较高的这两版教材中，数学文化类型较为单一，主要聚焦于数学与现实生活之间的联系，而数学的魅力不止于此。因此建议加入更丰富的数学文化内容，让学生能从各个维度体会数学文化的内涵，丰富学生的数学学习体验，引导学生感悟数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。

首先，数学和其他学科之间有着紧密的联系，数学不仅在现代科学中有广泛的应用，也有其人文的一面，数学与其他科学的整合能发挥数学教育的科学价值和文化价值。目前我国两版教材中人教版有一些学科联系维度内容，北师大版非常少，因此建议增加与其他学科相关的数

学文化内容。

再者，让学生喜欢数学是数学学科德育的重要内容，章前页担负着提高学生学习兴趣和审美情趣的重要任务，体现数学的审美价值。国内两版教材中都缺乏数学的审美娱乐维度内容，建议根据学生的年龄特质增设数学游戏、数学趣题和数学审美的内容。

最后，多元文化教育对学生甚至全民都有重要的意义，能够促进世界文化的多样性发展、文化间的相互尊重和世界和平[20]-[22]。国内两版教科书中的文化来源较为单一，不利于展现文化的多元性，建议在发扬本土文化的同时兼顾多元的数学文化，以适应当今的全球化形势。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（实验）[S]. 北京人民教育出版社, 2003.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京人民教育出版社, 2017.

[3] 雷波. 重视章前图及引言、读一读、想一想的教学[J]. 数学教学通讯, 1999，(6): 30.

[4] 李爱萍, 姜晓翔. 浙教版章前语、章前图及章后小结的作用发挥[J]. 上海中学数学, 2013，(7-8): 66-68.

[5] 钱晓燕. 人教版初中数学教科书章前图的特征及使用状况研究[D]. 徐州: 江苏师范大学, 2018.

[6] 刘瑞, 于鸿丽. 初中数学教材章头图、章头语的内涵分析[J]. 新课程研究, 2019，(27): 53-54.

[7] 蒲淑萍. 中、法数学教材“方程”内容中的数学史[J]. 数学通报, 2012, 51(10): 3-7.

[8] 汪晓勤. 法国初中数学教材中的数学史[J]. 数学通报, 2012, 51(3): 16-20+23.

[9] 蒲淑萍, 汪晓勤. 数学史怎样融入数学教材:以中、法初中数学教材为例[J]. 课程·教材·教法, 2012, 32(8): 63-68.

[10] 张玉环,吴立宝,曹一鸣. 法国初中数学教材特点剖析及启示[J]. 数学教育学报, 2016, 25(6): 32-37.

[11] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019, (2): 37-43.

[12] 王建磐, 汪晓勤, 洪燕君. 中、法、美高中数学教科书中的数学文化比较研究[J]. 教育发展研究, 2015，(20): 28-32.

[13] 姜浩哲, 汪晓勤. 美国《线性代数及其应用》教材中的数学文化研究[J]. 高等理科教育, 2019, (3): 74-80.

[14] OECD. Knowledge and Skills for Life: First Results from the OECD Programme of International Student Assessmeet（PISA）2000 [EB/OL]. http://www.pisa.oecd.org/

[15] OECD. Learning for Tomorrow's World: First Results from the OECD Programme of International Student Assessmeet（PISA）2003 [EB/OL]. http://www.pisa.oecd.org/

[16] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2011 年版）[S]. 北京：北京师范大学出版社, 2012.
[17] 刘敏. 浅议法国传统文化教育[J]. 比较教育研究, 2014, 36(6): 23-27.
[18] 庄金秋,陈勇. 法国小学课程设置与发展对中国教育的启示[J]. 外国中小学教育, 2011，(12): 47-51.
[19] 曹一鸣主编. 十三国数学课程标准评介 小学、初中[M]. 北京：北京师范大学出版社, 2012: 106-145.
[20] 唐恒钧,张维忠. 国外数学课程中的多元文化观点及其启示[J]. 课程.教材.法, 2014, 34(4): 120-123.
[21] 陈时见. 全球化视域下多元文化教育的时代使命[J]. 比较教育研究, 2005，(12): 37-41.
[22] 张维忠, 岳增成. 澳大利亚数学课程中的文化多样性及其启示[J]. 外国中小学教育, 2013，(11): 61-65.

文献研究

美英早期代数教科书中的中项性质*

赵丽红

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

早在公元前 6 世纪，古希腊毕达哥拉斯学派已经研究过算术、几何与调和三类中项；后来，毕氏学派又相继研究了另外七类中项。公元前 5 世纪，阿契塔（Archytas）在《论音乐》中给出了上述三类中项的定义[1]。在古希腊音乐理论中，基本协音对应特定比率：四度（4:3），五度（3:2），八度（2:1）。这三种比率关系可以合为最简单的表述：12、9、8、6，其中 9、8 分别是 12 和 6 的算术中项与调和中项[2]。基本协音比率中的四数 1、2、3、4，既构成等差数列，且和是毕氏学派认为最完美的数 10；对应取倒数后又构成调和数列，若琴弦长度满足此调和数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，…则可弹出和声，这就是术语和谐（harmonical）或音乐比例（musical proportion）的来源[3]。在几何上，公元 3 世纪末，帕普斯（Pappus）已经给出了三类中项的几何作图法。

新人教 A 版、沪教版、苏教版和北师大版高中数学教科书均含有算术中项与几何中项的内容，而调和中项被视为拓展性知识。其中，“不等式”章着重考察三类中项的大小关系，而“数列”章则侧重从和与项、积与项的关系来考察算术、几何中项。可见，各版教材均从不同角度关注了三类中项的性质。这些性质及其证明蕴涵着数学抽象与逻辑推理等素养。

教育取向的历史研究对课堂教学具有重要意义[4]。已有的教学实践表明，HPM 视角下的基本不等式教学较多地运用了几何方面的史料，而很少使用代数方面的史料，或者涉及的中项性质较为单一[5][6]。为此，本文就三类中项的性质，对 19-20 世纪中叶美英早期代数教科书进行考察，为 HPM 视角下的数列或基本不等式的教学提供教学素材和思想启迪。

*上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中落实立德树人的研究”（A8）系列论文之一。

2 研究方法

2.1 对象选取

选取 1820-1959 年间出版的 155 种美英早期代数教科书作为研究对象。其中，149 种出版于美国，6 种出版于英国，书名主要有《代数基础》、《初等代数》、《大学代数》、《中学代数》、《大中学代数》等。对于同一作者不同时间出版的教科书，若书名与内容一致，则视为同一种教科书，并选取最早版本；若书名或内容有所变化，则视为不同教科书。以 20 年为一段，则各种教科书的时间分布情况如图 1 所示。

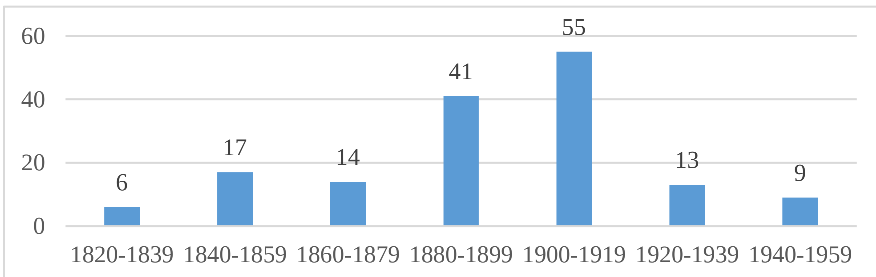


图 1 155 种教科书的时间分布

2.2 统计方法

第一步，按年份从有关数据库中查找并摘录研究对象中的中项内容。具体包含：中项的类型、分布章节、定义与公式；随中项给出的定理、命题、性质、推论、注解等；例题与习题中与中项有关的典型证明题。对于仅以习题形式出现的中项，也视为统计对象。

第二步，对中项的性质进行界定，然后以此为依据从摘录的代数内容中初步筛选相关内容，并关注其出现的频次。在教科书中，有关中项的内容并不是特别多，中项性质的分布也较为散落。鉴于此，对于同一中项的性质，仍以性质的形式进行提炼；而对于不同中项之间的关系，以命题的形式进行提炼。

第三步，根据频次挑选较为典型的中项性质，最后进行分类与总结。

3 中项的类型

3.1 分类

考察发现，各种教科书呈现的中项主要有算术、几何与调和三类中项。其中，有的教科书只给出了算术与几何中项，而有的教科书则同时给出了三类中项，具体分布如图 2 所示。

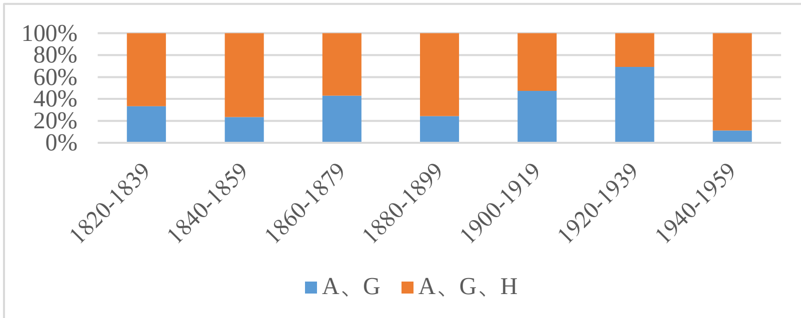


图 2　155 种教科书的中项分类

3.2 分布

在所考察的代数教科书中，三类中项主要出现在数列、级数、数列与级数、数列与极限、等差数列与等比数列、比与比例、比例与数列、不等式等章节。鉴于三类中项的定义比较明确和统一，我们主要将其划分在“数列”和“不等式”两类章节。其中，所有教科书的“数列”章都呈现了中项内容；而在“不等式”章，只有少数教科书在习题中出现了中项，但都不涉及中项的概念介绍，只涉及中项三类大小关系的比较：（1）$A>G$；（2）$A>H$；（3）$G>H$。

3.3 定义

对于三类中项的定义和公式，大多数教科书直接以知识点的形式给出，而少数教科书仅仅以习题的形式呈现。此外，个别教科书是从算术比、几何比、调和比的视角来分别引入算术、几何、调和中项。

已知两个正数 a 和 b，大多数早期教科书给出的其三类中项定义与今天一致。此外，少数教科书给出了古希腊毕达哥拉斯学派所采用的定义：对于三个正数 a、c、b，若分别成立 $\frac{a-c}{c-b}=\frac{a}{a}$，$\frac{a-c}{c-b}=\frac{a}{c}$ 和 $\frac{a-c}{c-b}=\frac{a}{b}$，则称 c 为 a 和 b 的算术中项、几何中项与调和中项[7]。

4 中项的性质

算术、几何与调和中项在数学、几何、音乐、建筑、财经以及统计等领域都有广泛的应用，这实际上与各类中项所蕴含的性质息息相关。Skinner（1917）在介绍三类中项时指出，求平均数时必须非常小心地使用适当的中项[8]。纵观 155 种早期教科书中的三类中项，它们的性质丰富，但是分布较为零散。因此，我们分别从同一中项与不同中项的角度来分类提炼性质。

4.1 同一中项的性质

在美英早期代数教科书中的“数列”章，算术与几何中项较为常见，其性质也极少被单独呈现，更多的是融入在数列中。

4.1.1 算术中项性质

性质 1 等差数列各项的平均数等于首末项的算术中项[9]。

设等差数列的首末项分别为 a_1 和 a_n,则其前 n 项和为 $S_n = n\cdot\left(\dfrac{a_1+a_n}{2}\right)$,即 $\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{a_1+a_n}{2}$ 。

4.1.2 几何中项性质

性质 2 若 G 是正数 a、b 的几何中项，则有 $\dfrac{a}{a+G}+\dfrac{b}{G+b}=1$ [10]。

性质 3 若正数 a、b、c、d 成等比数列，则 $b+c$ 是 $a+b$ 和 $c+d$ 的几何中项[11]。

4.1.3 调和中项性质

早期教科书对调和中项的性质介绍较多。一些教科书指出，调和性质在几何与声音理论中具有重要作用，并且常以音乐比例作为引例。

性质 4 若 H 是 a、b 的调和中项，则 $\dfrac{a}{a-H}=\dfrac{a+b}{a-b}$ [12]。

性质 5 若 H 是 a、b 的调和中项，则有 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{H-a}+\dfrac{1}{H-b}=\dfrac{2}{H}$ [13]。

性质 6 若 H 是 a、b 的调和中项，则有 $\dfrac{H+a}{H-a}+\dfrac{H+b}{H-b}=2$ [14]。

性质 7 若 H 是 a、b 的调和中项，则 $\dfrac{a}{H+b}$、$\dfrac{H}{a+b}$、$\dfrac{b}{a+H}$ 构成调和数列[15]。

证明 因为 $\dfrac{1}{a}$、$\dfrac{1}{H}$、$\dfrac{1}{b}$ 构成等差数列，则 $\dfrac{a+H+b}{a}$、$\dfrac{a+H+b}{H}$、$\dfrac{a+H+b}{b}$ 亦是等差数列，也即： $1+\dfrac{H+b}{a}$、$1+\dfrac{a+b}{H}$、$1+\dfrac{a+H}{b}$ 为等差数列， $\dfrac{H+b}{a}$、$\dfrac{a+b}{H}$、$\dfrac{a+H}{b}$ 为等差数列，故

$\frac{a}{H+b}$、$\frac{H}{a+b}$、$\frac{b}{a+H}$ 构成调和数列。

性质 8 若 H 是 a、b 的调和中项，则 a，$a–b$，$a–H$ 与 b，$b–a$，$b–H$ 也构成调和数列[14]。

性质 9 在 a、d 之间依次插入两个调和中项 b、c，则 $ab+bc+cd=3ad$ [14]。

性质 10 在 a、d 之间依次插入两个调和中项 b、c，则 $\frac{ab}{cd}=\frac{a-b}{c-d}$ [16]。

4.2 不同中项之间的关系

4.2.1 大小型

不等关系是日常生活中的一类重要关系，历史上有丰富的史料可用于求证不同中项之间的大小关系。在我们所考察的教科书中，只有部分涉及三类中项中项之间的大小关系，且并考虑取等的情况。

命题 1 两个正数 a 和 b 的（$a\neq b$）算术、几何与调和中项分别为 $A=\frac{a+b}{2}$、$G=\sqrt{ab}$、$H=\frac{2ab}{a+b}$，则满足大小关系：$H<G<A$ [17]，此即著名的均值不等式。

命题成立基于下述三个不等关系：$A>G$、$G>H$、$A>H$，图 4 给出了教科书编者对三类中项大小关系的关注情况。

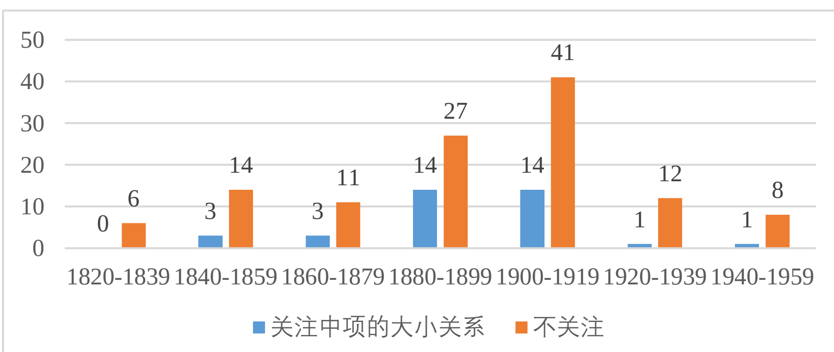


图 4　155 种教科书中三类中项的大小关系

4.2.2 比例型

早期教科书呈现了与算术、几何、调和中项相关的一些典型的比例关系。

命题 2 两个正数 a 和 b 的几何中项 G 是其算术中项 A 与调和中项 H 的几何中项[17]。

证明 因 $A\times H=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$，故有命题的结论。

命题 2 揭示了算术、几何与调和中项之间十分重要的比例关系，很多早期教科书都对该命题给予了关注（如图 5 所示），并配置了相应习题。

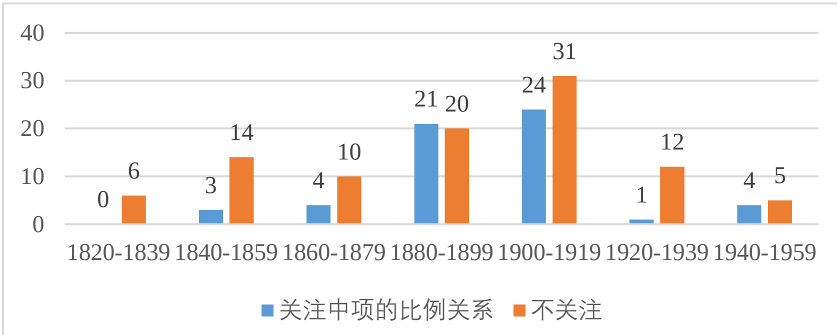


图 5　155 种教科书中三类中项的比例关系

命题 3 在 a、d 两数之间插入两个中项 b、c，使得 a、b、c 构成等差数列，b、c、d 构成调和数列，则有 $a:b=c:d$ [18]。

证明 因 a、b、c 构成等差数列，故 $2b=a+c$；b、c、d 构成调和数列，故有 $c=\dfrac{2bd}{b+d}$。进而有 $c=\dfrac{(a+c)d}{b+d}$，所以 $bc=ad$，即 $a:b=c:d$。

根据《几何原本》第 5 卷命题 23[19]，易知 $a:b=c:d$ 也是 a、b、c 与 b、c、d 的一组波动比例。此外，若四数分别取：6、8、9、12，则 $6:8=9:12$ 还表征音乐中的四度音程。不过，教科书的编者并未提及此命题的比例关系与和谐音程有关联。

推论 若 a，b，c 构成等差数列，b，c，d 构成调和数列，则 a，$\dfrac{c^2}{d}$，c 与 b，$\dfrac{ad}{b}$，d 构成调和数列。

命题 4 若 b 是正数 a、c 的几何中项，则 a、b 的算术中项与调和中项之比等于 b、c 的算术中项与调和中项之比[20]。

命题 5 在正数 x 和 y 之间依次插入两个算术中项 a_1、a_2、两个几何中项 g_1、g_2、两个调和中项 h_1、h_2，则 $\dfrac{g_1g_2}{h_1h_2}=\dfrac{a_1+a_2}{h_1+h_2}$ [14]。

证明 由等比与等差性质，有 $xy=g_1g_2$、$a_1+a_2=x+y$、$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{h_1}+\dfrac{1}{h_2}$，则

$\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{a_1+a_2}{g_1g_2}=\dfrac{h_1+h_2}{h_1h_2}$，所以$\dfrac{g_1g_2}{h_1h_2}=\dfrac{a_1+a_2}{h_1+h_2}$。

4.2.3 组合型

Young & Jackson（1913）在“历史注解”部分提到，一块巴比伦泥版刻有一列数：

5，10，20，40，80，96，112，128，144，160，176，192，208，224，240。

前 5 构成等比数列，后 11 项构成等差数列，用来表示月相变化[21]。此外，早期教科书还呈现了算术、几何与调和三类中项的其他组合关系。

命题 6 若 a 是正数 b、c 的算术中项，b 是 a、c 的几何中项，则 c 是 a、b 的调和中项[22]。

证明 因为$2a=b+c$，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$，利用等比性质有$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{b+c}$，则$\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{a+b}{2a}$，$c=\dfrac{2ab}{a+b}$，故 c 是 a、b 的调和中项。

命题 7 已知各数均为正，若 b 是 a 和 c 的算术中项，c 是 b 和 d 的几何中项，d 是 c 和 e 的调和中项，则 c 是 a、e 的几何中项[23]。

证明 因为$b=\dfrac{a+c}{2}$，$d=\dfrac{2ce}{c+e}$，则$c^2=bd=\dfrac{a+c}{2}\times\dfrac{2ce}{c+e}$，化简可得$c^2=ae$。

4.2.4 转化型

命题 8 两数 a 和 b 的调和中项是其倒数$\dfrac{1}{a}$、$\dfrac{1}{b}$的算术中项的倒数[21]。

命题 8 实际上揭示出调和中项与算术中项之间的内在关系，显化了调和中项所具备的倒数性质。

命题 9 若两个正数 a、b 之间的算术中项、几何中项分别为 A、G，且 R^2 是 a^2 和 b^2 的算术中项，则 A^2 是 G^2 和 R^2 的算术中项[24]。

证明 由已知，$A^2=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$、$G^2=ab$、$R^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}$，则满足$2A^2=G^2+R^2$。

进一步考虑，显然 G^2、A^2 和 R^2 为递增的等差数列，因此开方后满足均值不等式 $G<A<R$（$R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，称为均方根）。

命题 10 若b是正数 a 和 c 的算术中项，在 a、b 与 b、c 之间分别插入几何中项 x 与 y，

则 b^2 是 x^2 和 y^2 的算术中项[25]。

证明 由于 $2b=a+c$，$x^2=ab$，$y^2=bc$，则 $x^2+y^2=ab+bc=b(a+c)=b\times 2b=2b^2$。

命题 11 若 b^2 是 a^2 和 c^2 的算术中项，则 $c+a$ 是 $a+b$ 和 $b+c$ 的调和中项[26]。

证明 因为 $b^2-a^2=c^2-b^2$，即 $(b+a)(b-a)=(c+b)(c-b)$，等式两边同时除以 $(b+c)(c+a)(a+b)$，可得 $\frac{b-a}{(b+c)(c+a)}=\frac{c-b}{(c+a)(a+b)}$，此式等价于

$$\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}。$$

推论 若 b^2 是 a^2 和 c^2 的算术中项，则 $\frac{1}{c+a}$ 是 $\frac{1}{a+b}$、$\frac{1}{b+c}$ 的算术中项。

命题 12 若 y 是 x 和 z 的调和中项，则 $(z+x-y)^2$ 是 $(y+z-x)^2$ 与 $(x+y-z)^2$ 之间的算术中项[14]。

证明 运用分析法，若 $(z+x-y)^2$ 是 $(y+z-x)^2$ 与 $(x+y-z)^2$ 的算术中项，则：

$(z+x-y)^2-(y+z-x)^2=(x+y-z)^2-(z+x-y)^2$，化简可得 $x(y-z)=z(x-y)$，即 $\frac{x}{z}=\frac{x-y}{y-z}$，满足 y 是 x、z 的调和中项。

命题 13 若 b 是正数 a、c 的几何中项，则 $2b$ 是 $a+b$ 与 $b+c$ 之间的调和中项[27]。

证明 要证 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{2b}$ 成立，需证 $b(b+c)+b(a+b)=(a+b)(b+c)$，即 $b^2+bc+ab+b^2=ab+b^2+ac+bc$，故只需证 $b^2=ac$。

命题 14 已知各数均为正，若 b 是 a、c 的调和中项，则 b 是 $2a-b$ 与 $2c-b$ 的几何中项[27]。

证明 由调和比例 $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$，则 $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{b-c}$，利用合比、分比性质可得 $\frac{a}{2a-b}=\frac{c}{b}$、$\frac{c}{2c-b}=\frac{a}{b}$，两式左右分别相乘得到 $\frac{ac}{(2a-b)(2c-b)}=\frac{ac}{b^2}$，所以 $(2a-b)(2c-b)=b^2$。

推论 若 $\frac{1}{b-a}$、$\frac{1}{2b}$、$\frac{1}{b-c}$ 构成等差数列，则 a、b、c 构成几何中项。

命题 15 若 b 是 a、c 的算术中项，且 b^2 是 a^2 和 c^2 的调和中项，则 b 是 $-\frac{a}{2}$、c 的几何中项[27]。

证明 因为 $a-b=b-c$，且 $\frac{a^2}{c^2}=\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(b+c)(b-c)}$，则 $\frac{a^2}{c^2}=\frac{a+b}{b+c}$，变形可得 $b(c+a)=-ac$，即 $2b^2=-ac$，所以 $b^2=\frac{-ac}{2}$。

命题 16 已知各数均为正，若 x、y、z 是调和数列，a、x、b 是等差数列，且 a、z、b 是等比数列，则

$$y=2(a+b)\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{-2}$$ [28]。

实际上，此命题的结论是指两个正数的算术中项与几何中项的调和中项。

命题 17 若 b 是正数 a 和 c 的几何中项，在 a、b 与 b、c 之间分别插入算术中项 x 与 y，则有 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}$，$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$[14]。

证明 因为 $a=2x-b$，$c=2y-b$，则 $b^2=ac=(2x-b)(2y-b)$，化简可得 $2xy=b(x+y)$，进而变形为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}$。同理，$b=2x-a$，$b=2y-c$，则 $ac=b^2=(2x-a)(2y-c)$，化简为 $2xy=xc+ay$，故有 $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$。

命题 18 在 x 和 y 之间依次插入两个算术中项 a、b 与两个调和中项 u 和 v，则 $xy=av=bu$ [14]。

证明 设等差数列 x，a，b，y 与 $\frac{1}{x}$，$\frac{1}{u}$，$\frac{1}{v}$，$\frac{1}{y}$ 的公差分别为 d_1 和 d_2，其中 $d_1=\frac{y-x}{3}$、$d_2=\frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{3}$，则 $a=x+d_1=\frac{y+2x}{3}$、$b=x+2d_1=\frac{2y+x}{3}$；同理有 $u=\frac{3xy}{2y+x}$，$v=\frac{3xy}{y+2x}$，故有 $xy=av=bu$。

5 若干启示

由上可见，美英早期代数教科书呈现了较为丰富的中项性质以及它们之间的关系，为今日教学提供了丰富的素材，从中我们可以获得如下教学启示。

（1）关注三类中项的定义源流。在部分早期教科书中，除了给出我国教材中中项的定义外，

还引入了毕达哥拉斯学派所采用的定义，这值得我们借鉴。借助数学史，在揭示三类中项定义源流的同时，帮助学生深化对中项的理解。

（2）注重三类中项的比例之用。$A:G=G:H$ 揭示了三类中项之间的内在关系，而我国教材中并未涉及这一重要的比例关系。对于这一空缺的知识，实际上可作为学生课上探究的资源，拓展学生的知识圈。此外，《标准》在 D 类课程中设置了“音乐中的数学”，其中的一些乐理与三类中项息息相关。在教学中，教师可以向学生介绍音乐比例的术语来源,也可以充分利用命题 3 来巧妙引入音程的概念。数学融入音乐，既能营造课堂之趣，也能让学生感受文化之魅。

（3）设置三类中项的综合问题。在早期代数教科书中，呈现了许多三类中项整合在一起的代数问题，比如不同中项之间的比例型、组合型与变形转化型，可谓题型多元、视角新颖。对于今日教学，教师可以从中汲取思想的养料，指导自己编制一些三类中项的综合问题，并以此来培养学生的数学抽象与逻辑推理能力，进而达成能力之助。

（4）借助中项定义，考察不等关系。基于毕达哥拉斯学派给出的三类中项的定义，若 $0<a<c$，教师可让学生经历代数推理的过程，自行发现三类中项之间的不等关系。

（5）插入中项，判断数列单调性。课上引导学生从插入中项的角度出发，再结合数列的单调性，易判断出中项之间的不等关系，进而实现算术平均数、几何平均数、调和平均数与数列中的等差中项、等比中项、调和中项之间的沟通。

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 206.
[2] 费多益. 无形之和谐-古希腊早期自然哲学的表达和诠释[J]. 自然辩证法研究, 2002, 18(3): 1-3.
[3] Loomis, E. *A treatise on algebra* [M]. New York: Harper & brothers, 1850: 201.
[4] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006, 15(1): 16-18.
[5] 孙冲. 基于 HPM 视角的均值不等式教学[J]. 中小学数学(高中版), 2015, (9): 38-41.
[6] 沈金兴. 基于 HPM 视角的均值不等式证明[J]. 数学通报, 2016，(2): 36-39.
[7] Colenso, J. William. *The elements of algebra designed for the use of schools* [M]. London: Longman & co., 1849: 123.
[8] Skinner, E. Brown. *College algebra* [M]. New York: The Macmillan Co., 1917: 194.
[9] Gillet, J. A. *Elementary algebra* [M]. New York: H. Holt and company, 1896: 340.
[10] Nowlan, F. Stanley. *College algebra* [M]. New York: McGraw-Hill Book Co., 1947: 153.
[11] Marsh, W. R. *Elementary algebra* [M]. New York: C. Scribner's Sons, 1905: 360.

[12] Morgan, F. Millett. *College algebra* [M]. New York: American book company, 1943: 184.
[13] Miller, E. Brenneman., Thrall, R. McDowell. *College algebra* [M]. New York: Ronald Press Co, 1950: 350.
[14] Smith, C. *Elementary algebra: for the use of preparatory schools* [M]. New York: Macmillan, 1896: 397-398.
[15] Smith, G. W. *A complete algebra to accompany Ray's series of mathematics* [M]. New York: American Book Co., 1890: 290.
[16] Hind, J. *The elements of algebra: designed for the use of students in the university* [M]. Cambridge, England: Printed by John William Parker, 1837: 196.
[17] Bowser, E. A. *College algebra: for the use of academies, colleges, and scientific schools. With numerous examples* [M]. New York: D. Van Nostrand, 1888: 368.
[18] Hall, T. G. *The elements of algebra: chiefly intended for schools, and the junior classes in colleges* [M]. London: John W. Parker, 1840: 200.
[19] 欧几里得. 几何原本(兰纪正, 朱恩宽译)[M]. 北京：译林出版社, 2014: 137-139.
[20] Cowles, W. Henry Harrison., Thompson, J. Edgar. *Algebra for colleges and engineering schools* [M]. New York: D. Van Nostrand company, 1947: 150.
[21] Young, J. W. A., Jackson, L. L. *A high school algebra* [M]. New York: D. Appleton and Company, 1913: 489.
[22] Wentworth, G. A. *A school algebra* [M]. Boston: Ginn & co., 1890: 322.
[23] Gillet, J. A. *Elementary algebra* [M]. New York: H. Holt and company, 1896: 359.
[24] Hall, H. S., Knight, S. R. *Elementary algebra for schools* [M]. London: Macmillan, 1885: 292.
[25] Van Velzer, C. A., Slichter, C. Summer. University algebra [M]. Madison, Wis.: Tracy, Gibbs & Company, 1892: 341.
[26] Milne, W. J. *Advanced algebra for colleges and schools* [M]. New York: American Book Co., 1902: 362.
[27] Dickson, L. E. *College algebra* [M]. New York: J. Wiley & Sons, 1902: 72.
[28] Dupuis, N. F. *The principles of elementary algebra* [M]. New York: The Macmillan company, 1900: 203.

教学实践

高三复习的三重境界——术、道、源

——以“和差术”为例

高振严

（上海市行知中学，上海 201900）

1 引 言

高三复习课需要温故，也要知新。这里的“故”是指高一、高二已经学习过的知识，而“新”则是指对原有知识新的认识。“温故”是重复性、机械性的，而“知新”是有深度的、有创造性的。那么如何才能做到知新呢？HPM 给我们带来了一种全新的视角。

在整个高三的复习中有大量的二元问题需要解决，二元方程、二元不等式、二元函数等等。这一类问题往往需要学生有较强的数形结合能力、化归转化能力，属于较难题目的范畴。本节高三复习课，从历史上的最早的二元问题—古巴比伦泥板上的数学问题入手，学习利用和差术这一特殊的化归方法解决二元方程组的问题；接着利用和差术的向量模型轻松解决较难的向量数量积问题；并且将向量、三角、不等式、函数等内容抽象成和差术相关的二元问题；挖掘和差术的数学内涵：利用对称性的化归方法解决具有对称性的二元数学问题。从而培养学生对数学问题进行由方法到思想，再到数学内涵的思考方式也就是本文标题所提的术、道、源三重境界。

2 数学史材料及应用

在古巴比伦数学泥版上，含有大量的二元问题 $\begin{cases} x \pm y = a \\ f(x,y) = b \end{cases}$，其中 $f(x,y)$ 具有 $px+qy\left(p^2 \ne q^2\right), xy, x^2+y^2$ 等形式。[1]这些泥版，大部分是巴比伦王国（约公元前 1894-前 1595）全盛时期汉谟拉比（Hammurabi）时代（公元前 1792-前 1750）的产物，有的还可能上推到公元

前 2250 年。在时间上比其他地区出现大致相当的计算早一千年以上，至少就现有的史料看是如此。[2]

以泥版 YBC6967 为例，它上面记录了这样的问题：两数互为倒数，两者之差是 7，求这两数。列成方程组表示为：已知 $\begin{cases} xy=60 \\ x-y=7 \end{cases}$，求 x,y。泥版上的解答可分为以下步骤：

[1] $\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{7}{2}$

[2] $\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2=\dfrac{49}{4}$

[3] $\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2+xy=\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{49}{4}+60=\dfrac{289}{4}$

[4] $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{17}{2}$

[5] $\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{2}=y=5$

[6] $\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2}=x=12$

泥版上数以百计的问题都是这样解答的，这说明古巴比伦已经熟练掌握了这种解方程的技巧。这种已知两个数的和或差，从而将这两个数表示为半和或半差与一个未知数的和与差的方法就是所谓的“和差术”。

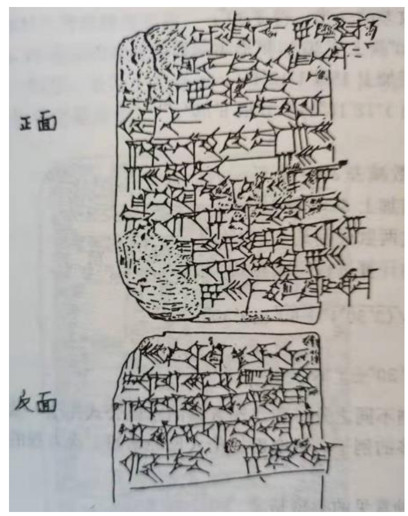


图 1　泥版 YBC6967 临摹图

3 教学过程

3.1 初识和差术——向量的数量积与和差术

师：昨天的作业中的第 5 题比较难，大部分同学解的比较繁琐，但是刘同学的方法比较简洁，我们请刘同学来给大家讲讲，她是怎么做的。

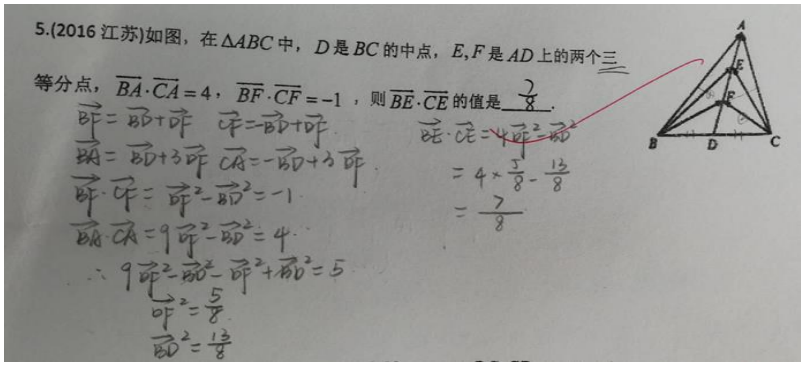


图 2

生： 利用基向量的思想，将 $\overrightarrow{BF}$、$\overrightarrow{CF}$、$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{CA}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{CE}$、用 $\overrightarrow{BD}$、$\overrightarrow{DF}$ 表示，则题目中涉及的向量的数量积表示为：

$$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2=-1，\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=9\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2=4，\ \overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=4\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2，$$

由前两个等式可以求出 $\overrightarrow{DF}^2=\frac{5}{8},\overrightarrow{BD}^2=\frac{13}{8}$。所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=4\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2=\frac{7}{8}$。

师： 刘同学的做法非常简练，却不容易想到。但是如果你学习了“和差术”，这样的问题将不在话下。

设计意图： 学生课前作业中向量数量积某一类问题做的普遍较差，虽然有个别同学能简练的解决该问题，但仅限于就题解题。如何能做到举一反三，总结方法，解决这一类向量的数量积问题，学生并未进行过深入的思考。以此为切入点，激起学生探究和差术的积极性。

3.2 初探和差术—对称消元

师： 什么是和差术呢？我们来看作业 1 $\begin{cases} x+y=1800 \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=500 \end{cases}$

师： 这是一个很古老的数学问题，它被镌刻在 4000 多年前的在古巴比伦的数学泥版 VAT8389 上。这个问题大家是用什么方法解决的呢？

生： 加减消元法。

师： 还能怎么解？

生： 行列式。

师： 解决这个问题的方法很多，但当时并没有加减消元法和行列式，那么古巴比伦的祭司是如何解决这个问题呢？我们一起来学习。

古巴比伦祭司采用的解法如下：

$$x=900+t, y=900-t$$

$$\frac{2}{3}(900+t)-\frac{1}{2}(900-t)=500$$

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)t=350$$

$$\frac{7}{6}t=350$$

$$t=300$$

$$x=1200, y=600$$

师：古巴比伦祭司的解法虽然与现代的解法不同，两者的解题思想是否一致？

生：一致，都是化双变量为单变量，都属于化归思想。

师：祭司为什么设 $x=900+t, y=900-t$；令 $x=1000+t, y=800-t$ 不可以吗？

生：祭司的方法具有对称性！

师：非常好，大家能够发现祭司的做法具有对称性。几何上的对称性有没有？

教师在黑板上画出数轴，并在数轴上标出 x, y 点。

师：900 这个数标在哪里？

生：$900=\frac{x+y}{2}$，所以 900 是 x, y 的中点，x、y 关于中点 900 对称。

师：那么 t 有什么意义？

生：$t=x-900=x-\frac{x+y}{2}=\frac{x-y}{2}$，表示 x、y 点到中点的距离。

师：综上我们可以得到：

$$\begin{cases} 900=\dfrac{x+y}{2} \\ t=\dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$

在解题过程中祭司利用以下基本公式：$\begin{cases} x=900+t=\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{2} \\ y=900-t=\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{2} \end{cases}$

这种已知两个数的和或差，从而将这两个数表示为半和或半差与一个未知数的和与差的方法就是所谓的“和差术”，这种方法在古代的应用很多。

设计意图：笔者并没有先讲授和差术的概念，而是抛出课前练习中的问题，让同学比较传统消元法与和差术的异同。发现和差术不同于消元法的是其具有对称性；而它们的相同点则是

它们都体现了化归思想，将二元问题化归为一元问题解决。本环节不仅讨论了和差术的代数对称特征，还引导学生探究了其几何上的对称性。待和差术对称性得出之后，给出和差术的概念。

3.3 再探和差术—简化运算

师：古人为什么用这种具有对称性的方法消元解不等式？它的优势体现在哪里？这个问题值得我们思考。

问题 1. 数学泥板 YBC4663 ：涉及求解方程组 $\begin{cases} x+y=6\dfrac{1}{2} \\ xy=7\dfrac{1}{2} \end{cases}$

师：古巴比伦时期掌握了和差术解方程的秘诀的祭司，被认为是十分智慧的人。我们现在进行一下，同桌左边的同学用和差术解决这个问题？

生：设 $x=\dfrac{13}{4}+t, y=\dfrac{13}{4}-t$

$$xy=\left(\frac{13}{4}+t\right)\left(\frac{13}{4}-t\right)=\frac{169}{16}-t^2=7\frac{1}{2}$$

$$t=\frac{7}{4}$$

$$x=5, y=\frac{3}{2}$$

师：不用和差术怎么解?

生 1：消元得到一元二次方程 $x^2\text{-}6\dfrac{1}{2}x+7\dfrac{1}{2}=0$ 。

生 2：利用韦达定理构造一元二次方程 $t^2\text{-}6\dfrac{1}{2}t+7\dfrac{1}{2}=0$ 。

师：利用和差术解方程与上述方法有何区别?

生：利用和差术得出得方程 $\dfrac{169}{16}-t^2=7\dfrac{1}{2}$ 不含一次项，解起来更简单。

师：是的！我们发现和差术消元有简化运算的作用，用和差术得出的不含一次项的一元二

次方程更容易求解。并且由和差术可以提炼恒等式 $xy=\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$，这个式的意义何在?

生：任意两数之积等于半和与半差的平方差。

设计意图：将和差术进行初步应用，熟悉新概念，探究和差术所具有的对称性在解一元二次方程时的优越性—简化运算。为接下来和差术在向量中的应用做好铺垫。

3.4 三探和差术—运算降阶

师：如果将上式中 x, y 替换为 $\vec{a}, \vec{b}$ 等式是否成立?

生：成立。

师：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)^2-\left(\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)^2$ 这个公式也被称作极化恒等式。向量的数量积还可以怎么求?

生：两向量半和的平方减去半差的平方。

师：可以在图上标出两向量的半和与半差吗?

生：半和长为三角形的中线，半差长为三角形底边的一半。

师：我们返回本节课初的问题：由和差术可知，要求 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$，只需求 $\left|\overrightarrow{BD}\right|$ 与 $\left|\overrightarrow{DE}\right|=2\left|\overrightarrow{DF}\right|$ 即可。已知 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，由和差术可得 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=9\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DF}^2-\overrightarrow{BD}^2=-1$。学习了和差术之后，就很容易联想到利用三角形的中线与三角形底边半长解决向量数量积问题。

师：通过解第 6、7 两题，同学们思考一下，什么情况下用极化恒等式解向量数量积问题?

生：如果中线与底边半长确定，可以求数量积的值。

师：如果中线与底边半长两者，一个确定，一个不定呢?

生：可以求数量积的取值范围。

师：为什么用和差术解决数量积问题会比较简便?

生 1：将代数问题转化为几何问题。

师：是的，化归为几何问题后，问题呈现更直观。高一我们学习的对数有什么作用?

生 2：对数将乘除运算降阶为加减运算，从而实现运算降阶。

师：和差术在向量的运算上起到了什么作用?

生 3：与对数类似，同样实现了从数量积到加减运算的运算降阶。

设计意图：本环节与学生共同探讨了和差术的向量模型（极化恒等式）解决向量的数量积问题，引导学生思考满足怎样条件的数量积问题适合使用极化恒等式解决，进一步探讨为什么使用极化恒等式解决这一类问题比较简便。通过与对数的运算相类比，学生发现极化恒等式将向量的数量积运算降阶为向量的和差运算，从而使运算变得更为简单。

3.5 四探和差术——完全对称

师：和差术这种方法虽然在解方程的过程中已经不太使用，但是它的影响实际上已经深入数学的各个分支，大家能否从下列问题中提炼出和差术相关的代数恒等式?

问题 1.已知$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$,且$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$,则$\sin x\cdot\cos x=$_______

问题 2.求函数$y=3(4^{x}+4^{-x})-10(2^{x}+2^{-x})$的值域_______________

问题 3.方程$x^2-4x+m=0$的两根为α,β，且$|\alpha-\beta|=6$，求实数$m=$_______

学生通过讨论，提炼出以下恒等式：

（1）$ab=\dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}$

（2）$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

（3）复数$|\alpha-\beta|=\sqrt{\left|(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right|}$　　　实数：$|a-b|=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$

师：从以上几个恒等式中，我们可以发现哪些基本的代数式?

生：四种代数式$a+b,|a-b|,ab,a^2+b^2$。

师：根据以上恒等式可以得出怎样的结论?

生：已知其中两个可以求其余两个。

师：这四个代数式还具有怎样的共同特征？

生：交换 a 和 b 的位置，四个代数式不变。

师：我们把代数式具有的这种性质，叫做完全对称性。正是因为具有了完全对称性，这四个式子之间才可以两两相互表示。

教师播放 PPT 向学生介绍对称在数学中的重要性。正是基于对称性，天才数学家伽罗瓦创立了群论，他谈到"跳出计算，群化运算，按照它们的复杂度而不是表象来分类；我相信这是数学未来的任务，这也正是我的工作所揭示出来的道路。"

师：伽罗瓦的话对于高三复习有什么提示呢？我们在高三复习中不仅归纳题型总结方法，更要提炼思想，实现从"术"到"道"的升华；不仅要提炼思想，更要深入探究题目的数学内涵，实现从"道"到"源"的提升。只有把握住了问题的数学本源才能举一反三，以不变应万变。

设计意图：通过将三角函数、函数、一元二次方程中的不同问题抽象出共同的问题：$a+b,|a-b|,ab,a^2+b^2$ 之间的关系，锻炼学生归纳总结与数学抽象能力。进一步抽象 $a+b,|a-b|,ab,a^2+b^2$ 的共同点：完全对称，介绍对称在群论产生过程中的作用，让学生意识到对称的重要性。通过伽罗瓦对群论的描述，让学生体会数学抽象的重要性，培养学生追问问题数学本源的习惯，转变学生只重技巧而不重数学本质的思考习惯，增强学生的数学素养。

4 学生反馈

课后，我们搜集了 41 名学生对本节课的反馈信息。

关于利用和差术解决二元二次方程组问题，95%的学生会用和差术化归消元，83%的学生利用和差术解得了方程组的正确答案；关于利用和差术模型中 $ab,\dfrac{a+b}{2},\dfrac{a-b}{2}$ 的关系解决向量问题， 95%的学生会用和差术的向量模型，求解向量问题。

关于和差术所蕴含的数学思想，大多数同学提到了对称思想与消元思想：76%的同学提到了对称思想，49%的同学提到了消元思想，34%的同学提到了数形结合思想，34%的同学提到了数形化归思想。

关于这节课印象最深的方面，和差术的历史和向量的和差术模型最为同学所关注，34%对向量的和差术模型即极化恒等式解决向量问题印象最深；41%的同学对古巴比伦祭祀使用和差术解决二元方程问题印象最深刻。关于学习和差术对于学生的帮助，学生高票回答的是：简化运算（37%）.

5 结 语

从 HPM 角度思考高三复习课是一个全新的角度，与其他视角不同的是，HPM 视角更具历史的深度与厚度，更凝练，更具内涵。笔者人认为 HPM 给高三复习课带来了五个“一”的启示。

一个源头，在 HPM 视角下，笔者将高三复习中的二元问题追溯到 2000 多年前的古巴比伦泥版上的数学问题，为高三复习中的二元问题找到了源头，也为解决二元问题的方法找到了源头。这提示高三的学生，对一类有共同特征的问题要学会追根溯源，源头找到了，问题往往也就解决了。

一种方法，通过数学史的学习掌握了和差术这样一种方法，并使用和差术的向量模型轻松解决了数量积难题，并归纳总结了使用这种方法的所要满足的已知条件。

一种思想，和差术二元一次方程组所蕴含的化归消元思想与现代的消元法有异曲同工之妙；四种代数式 $a+b,|a-b|,ab,a^2+b^2$ 之间的相互转化更是体现了和差术化归思想运用之妙。高三数学复习更是强调化归思想的应用，数学难题的解决往往得益于化归思想的灵活运用。

一种内涵，和差术所蕴含的对称性可以简化运算，保证了对称二元代数式之间的相互化归，是和差术不同于其他方法的内涵所在。高三复习中不仅仅要强调题型的归纳，方法的总结，数学思想的提炼，更要追问数学题目背后的数学内涵是什么？随着对数学认识的深入，数学题目自然就会理解的更加透彻，数学成绩的提高也就自然是水涨船高的事情了。

一种核心素养，利用和差术将以三角函数、指数函数、一元二次方程为背景的问题，统统抽象为二元对称代数式之间的关系问题，体现了一种从抽象到更加抽象的高阶数学抽象能力。这种“万法归一”的数学抽象能力，是高三复习中能够“举一反三”的前提。正所谓“好看的皮囊千篇一律，有趣的灵魂万里挑一”，我们需要利用数学抽象从万千的题目中挑出有趣的数学灵魂。

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[2] 梁宗巨, 王建青, 孙宏安. 世界数学通史（下册一）[M]. 辽宁: 辽宁教育出版社，2001.

古今碰撞，迈好证明第一步*

——以苏科版 “三角形内角和定理”为例

姜鸿雁[1] 秦语真[2] 孙丹丹[3]

（1.江苏省无锡市河埒中学 214063；2.华东师范大学教师教育学院 200062；

3.华东师范大学数学科学学院 200241）

1 引言

“证明”是数学学科至关重要的内容，渗透到数学的枝枝蔓蔓。苏科版教材以七年级下册第 12 章专讲“证明”，教材首先在第 1 节“定义与命题”中介绍了什么是定义和命题。第 2 节“证明”分为 3 个课时层层推进，第 1 节课时，教材从图形（视错觉图）、代数式等多个例子，说明眼见不一定为实、举有限的例子所得结论不一定“真”，以此说明“证明”的必要性；第 2 节课时，通过例题说明“什么是证明”以及“证明与图形有关的命题的一般步骤”，并给出了规范的“三段论”证明格式；第 3 课时主要内容为“三角形内角和定理”的证明及其推论[1]。

日常教学往往以内容为中心，将本节课目标简单定位为三角形内角和定理的证明，但苏科版第 7 章《平面图形的认识（二）》中已经对三角形内角和为 180°的缘由进行过说理，尽管不甚严谨。该课时目标是否只是为了严格将该定理再证明一遍？显然不是。三角形内角和定理位于“证明”一章中，按照教材编排思路，应该作为内容载体服务于“证明”的教学，承载更大的价值。因此，我们借助三角形内角和定理丰富的历史素材，以思想方法为中心设计开展了本课时教学。

现有的教学设计中，依托数学史进行教学设计的案例不在少数[2]~[5]，笔者认为，这些设计基本上都聚焦“知其然、知其所以然”两个层面，没有很好地解决“知何由以知其所以然”这一方法论问题，而以具体内容为载体，助力学生对一般证明思路的洞察是本节课应该承载的价值。此外，以往课例对方法多样性本质的提炼、育人价值的挖掘不够充分，笔者认为，学生在

---

* 本文系 HPM 网络研修系列课例之一。

探究证明方法多样性的过程中，应该对为何证明、证明特点以及怎么开展证明等问题有更多的思考，这样的上位认识对将来的数学学习非常重要。基于以上分析，本节课的教学目标设定如下：

（1）通过理解并掌握三角形内角和定理及其证明的过程，加深对命题证明的全过程的认知，进一步体会文字语言、图形语言、符号语言的转换以及证明的必要性；

（2）通过构造平行线的过程，初步体会由果索因、由因推果的逻辑推理的方法，感悟转化思想在几何证明过程中发挥的作用，加深对“转化”思想的认识；

（3）通过探究和了解历史上的多种证明方法，感受几何证明方法的灵活多样性，增强自我挑战的信念，在了解多元文化的过程中欣赏数学多元美。

2 史料介绍与分析

从古希腊七贤之首泰勒斯（Thales，公元前 6 世纪）发现“三角形内角和等于二直角”以来，历时两千多年，数学家们一直探索这个结论的不同证明方法，经久不衰。就证明而言，首先是毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 560—480）学派证明了这个定理（如图 1），过顶点 A 作边 BC 的平行线，由两直线平行，内错角相等，实现角的转移，结合平角证得结论[6]。

之后，欧几里得（Euclid，约公元前 330—270）在《几何原本》中给出新的证明方法（如图 2），过顶点 C 作 AB 边的平行线，由两直线平行线，内错角、同位角相等，结合平角得到结论[6]。

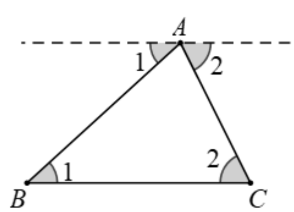


图 1 毕达哥拉斯的证明方法

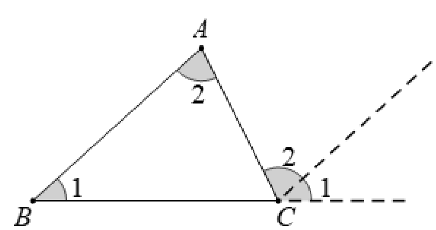


图 2 欧几里得的证明方法

在公元 5 世纪，古希腊评注家普罗克拉斯（Proclus，410—485）用了两种方法证明了这个定理，经历了从特殊到一般的过程[7]。第一种证明方法如图 3 所示，先是分别过 A、B、C 三点作 BC 边的垂线，则 $BE // AD // CF$，通过两直线平行，内错角相等转化角，由两直线平行，同旁内角互补证得结论。第二种证明方法，将辅助线一般化（如图 4 所示），在 $\angle BAC$ 内部任意

作线段 AD，分别过 B、C 作 AD 的平行线，本质与作垂线的方法一致。

18 世纪法国数学家克莱罗（A. C. Clairaut，1713—1765）过点 A 作 BC 的平行线，由两直线平行，内错角相等、同旁内角互补证得结论（如图 5）[7]。

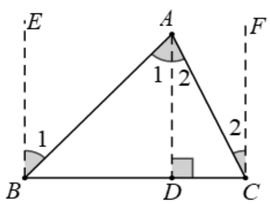


图 3 普罗克拉斯证法 1

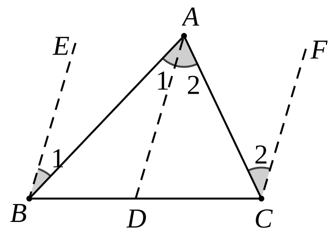


图 4 普罗克拉斯证法 2

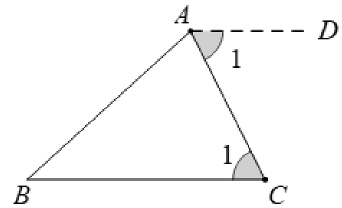


图 5 克莱罗的证明方法

此外，在 18-20 世纪英美一些教科书里分别过边上任意一点、形外一点、形内一点作平行线，给这个定理多种新的证明方法（如图 6）[8]。

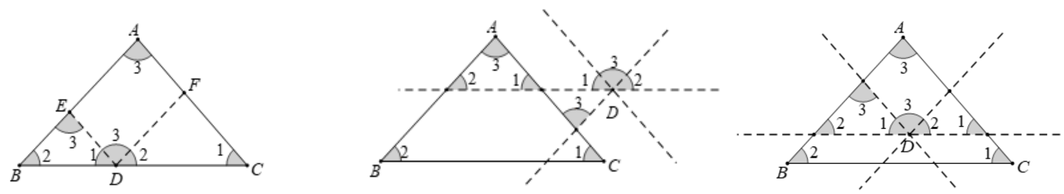


图 6 英美早期教科书证明方法

从历史发展来看，人类对这个定理的认识从公元前 6 世纪延续到今天，展示它强大的“生命力”，多种多样的证明方法这为本节课定理证明的教学提供了多方面的启示。

首先，为什么产生如此多的不同证明方法？面对 180°产生联想的角度不同，则影响着思维的走向。比如毕达哥拉斯、欧几里得、英美教材中的多种证明方法都是通过平角解决问题，而克莱罗、普罗克拉斯的方法则是平行线下的同旁内角互补解决问题，这是教师引领学生证明方法多样性的“点拨思维的风向标”，也是实现“知何由以知其所以然”的关键之一，还是教学生“由果索因”发展逻辑推理能力的重要抓手，这对刚刚跨进几何证明大门的七年级学生来说尤为重要。

其次，众多方法的共性是什么？在“异”中发现“同”——利用平行线转化角，这是一种数学方法的抽象，在提炼转化思想的过程中促进学生的深度思考。为什么古代数学家们都要平行线？因为三角形的三个内角是分散的，需要将“角”集中到一起形成平角或同旁内角，“转移角”成为必须，而平行线可以通过生成相等角实现转移，这何尝不是实现“知何由以知其所

以然”的另一个关键所在？最后，为什么从公元前 6 世纪直到 20 世纪，横跨 2000 多年，这一伟大的定理的验证、证明方法一直保持着活力与生机？是什么力量支撑着人们追求多种方法验证结论、证明结论？这显然是人类在认识自然过程中，一种自我挑战信念的传承与发展，这是在课堂教学中实现德育之效的“活素材”。

3 教学设计与实施

3.1 新课引入

PPT 放映形状大小不一样的三角形若干。

师：在不一样的事物中研究并发现共同的特征是数学的任务也是数学的魅力，你能说出这些形形色色的三角形具有什么共同特点吗?

生 1：两边之和大于第三边、两边之差小于第三边；三个内角的和等于 180°。

师：研究几何图形常常从边、角两个方面入手，其中边的数量关系在第 7 章曾经研究过，今天主要研究三个内角的和等于 180°。（板书）

师：你是怎么知道这个结论的？

生 1：我是证出来的。

生 2：用量角器量每个角的度数，加起来，可得 180°。

生 3：拼图拼出来的。

师：通过前面学习我们知道，生活中很多事情眼见不一定为实，度量会产生误差，拼图也是如此，所以需要严格的证明。因为同学们的想法肯定是不拘一格、各有特色的，所以证明往往不止有一种方法，下面大家就各显神通一起探究吧。

【片段解读】初步体会研究数学的任务之一是发现变化中不变的结论；几何图形的“抓手”是边、角；“唤醒”证明的必要性，鼓励不同证明方法，为下一步教学准备。

3.2 证法探寻

师：我们首先将文字语言化为图形与符号语言如下：

已知：如图，$\triangle ABC$ 有三个内角 $\angle A$、$\angle B$ 和 $\angle C$。

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$。

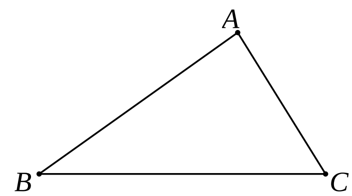


图 7　三角形的内角和

师：你是怎么证明这个结论？（指向前面回答“证明”的生 1）

生 1：我是利用外角性质证明的。

（在教师追问中得知，生 1 认为外角和性质是由内角和得来的，这可能是受第 7 章教材相关内容影响，学生发现自己落入“旋涡”，并在师生对话中明白这是循环论证，在证明过程中是要不得的，不少学生恍然大悟。）

生 4：我想到一种证明方法（同毕达哥拉斯方法）。

师：你是怎么想到这样证明的？

生 4：是平行线让我想到的。

师：你是怎么想到作平行线的？

生 4：这样可以用“两直线平行，内错角相等”来证明角相等。

师：为什么要证明角相等，为什么要转化角？

生 4：因为三个角很分散，要集中到一起！

师：很好！最终是借助哪个特殊的角证得 180°的？

生 4：平角。

师：这说明，结论中等号右边——180°，可以联想到平角；等号左边是三个分散的角，将它们集中到一起成为必须，从而联想到平行线可以转化角，于是将问题解决。

（教师在黑板上写下详细证明过程）

师：这是“由果索因”的思维过程，它是打开证明思路的一种重要的方法，在写推理的过程时，是从已知或辅助线作法一步步推“果”的过程，这是“由因推果”的思考方法，当“因果打通”时，问题便得到解决。

师：我们可以感受到证明过程步步有根有据、言必有据的理性力量，从此运用这个结论时，

底气就足了！我们把经过证明的真命题叫“定理”，它可以作为其它命题的证明或计算的依据。

师：有不同的证明方法吗?

生 5：由 180°我想到了由平行线得同旁内角互补。

师：看来面对同样的 “果”，联想到的“因”可能不一样，则会影响着证明的思维走向。

（教师在黑板上画出图形，学生根据图形说明了完整的思路，同克莱罗的证明方法）

师：还有其它方法吗?

随后生 6 用欧几里得的证明方法，学生根据老师画出的图形说明了完整的思路。

【片段解读】在对证明思路的不断追问中，将学生“潜在思维过程”显性化，顺其自然解释辅助线及做辅助线的目的，渗透“由果索因、由因推果”的证明思路，辅助学生迈好证明的第一步，努力达到几何教学三境界：知其然，知其所以然，知何由以知其所以然，在此过程中培养学生逻辑推理能力。在历史的启发下，鼓励并给学生呈现讨论不同证明方法的机会，体会证明的灵活多样，享受探究之乐。

3.3 古今碰撞

师：早在 2000 多年前，人们就发现了这个结论（有学生低语：是欧几里得发现的），同学们观看下面这个视频，你可能了解得更多！

（教师播放“三角形内角和史话”小视频。视频勾勒了从泰勒斯通过拼图发现结论到毕达哥拉斯学派证明结论，再到近代数学家不断用不同方法证明结论的历史演进，详见上文史料，此处不赘述。其中英美教材的证法，没有展示“点”在形内。）

师：（视频播放结束后，指明生 5、生 6 的证明方法分别是克莱罗、欧几里得的证法）看来同学们刚才在重演历史！在英美教材中的证明方法的启发之下，还有其它证明方法吗？

生（齐）：“点”可以取在三角形形内。

师：纵观如此多的证明方法，发现有什么共同特征？

生（齐）：都用平行线转化角。

师：既然泰勒斯已经通过拼图发现、验证这个结论，为什么帕斯卡、提波特还要用不同的方法验证？既然毕达哥拉斯已经对定理进行了证明，为什么后人还在追求不同的证明方法？这

体现了人类在认识世界时的一种什么力量？

生（你一言我一语）：创新、探索、钻研、自我挑战……

师：说得太好了！这就是数学带给人们一种向上的信念！

【片段解读】通过附加式运用数学史，首先，拓宽学生知识视野，在众多的方法中，提炼共同的特征——利用平行线转化角，感受方法之美，落实数学抽象。其次，在老师“小毕达哥拉斯、小克莱罗、小欧几里得” 的称呼中，让学生享受成功的喜悦。再次，纵向历史发展让学生对数学证明本身有更深刻的认识，在多种方法的熏陶之下，向上的信念油然而生，发挥了数学史在培养理性精神，激发积极情感，树立正确数学信念方面的作用[9]。

3.4 学以致用

（1）如图 8，$\angle ACD$ 是$\triangle ABC$ 的外角，已知$\angle A=70°$，$\angle B=40°$，求$\angle ACD$ 的度数？

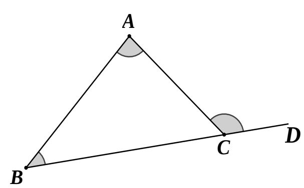


图 8 例 1 图

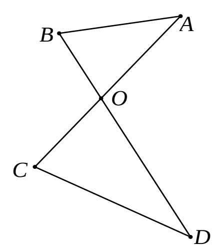


图 9 例 2 图

（2）已知直角三角形的一个锐角等于 35°，求另一个锐角度数。

（3）已知（如图 9），AC、BD 相交于点 O，求证：$\angle B+\angle A=\angle C+\angle D$。

（4）已知，$\triangle ABC$ 三个内角度数之比是 2:2:5，求三个内角的度数。

【片段解读】第 1、2 题，体现定理在运算过程中作为依据，并在学生解决问题之后，改变角的度数、再求解，并观察结果，发现结论并表达结论，在从特殊到一般的过程中（这也是泰勒斯、普罗克拉斯发现、证明三角形内角和等于 180°的历程），分别为两个推论的生成作铺垫，并将证明推论作为课后作业。第 3 题，体现定理在推理过程中作为依据。第 4 题，表明定理也可以作为列方程的相等关系。

3.5 总结归纳

师：同学们，老师想听你们说说这节课学到了什么？

生 8：我学到了一题多解，三角形内角和有非常多的证明方法，可以拓展我们的思维。

生 9：通过三角形内角和等于 180°，我们可以得到很多推论，解决更多的问题。

生 10：我学到了通过转化的方法来证明。

师：大家说得都很棒，这节课我们首先学习了转化的方法，转化在代数中十分有用，如今在几何中也逐步体现着价值。我们还学习了打开证明思路的方法，可以由果索因，也可以由因推果；我们还学习了认识世界的方法，由特殊到一般。

最后回到三角形内角和，泰勒斯通过拼图发现这个伟大的结论，此后，数学家前仆后继对这个结论进行归纳、猜想和严格证明，这体现了数学的理性精神，和人们认识世界过程中不断探索完善、创新突破的精神。平行线是三角形内角和证明的“助推器”，同学们不妨继续思考：如果不用平行线，能证明吗？《几何原本》从五条基本事实入手，对许许多多的结论加以证明。公理就像“种子”一样，借助推理“萌发”出一个又一个新的定理，由此建立起平面几何的大厦。

【片段解读】这不仅是学生讲收获，也是老师带领学生“梳理”关于三角形内角和定理的“前世、今生与将来”。从平行线的性质定理出发，证明了它，并以它为依据，得到“外角的性质定理”和“直角三角形两个锐角互余”这两个推论，而且还有曾经学过的多边形的内角和定理、外角和定理等等，让学生初步感受到公理、公设像种子一样，通过推理，诞生了一个个定理，点点滴滴建立起平面几何的大厦！产生道生一、一生二、二生三、三生万物……的厚重感，并借此机会充实教材中关于《几何原本》的介绍，体现知识之谐和文化之魅。

3.6 布置作业

（1）在三角形形内取一点，证明三角形内角和定理。

（2）证明命题：三角形的外角等于与它不相邻的两个内角之和；直角三角形两个锐角互余。

（3）查阅与三角形内角和定理相关数学史，写篇数学小论文。

【片段解读】将课堂上的探究延伸到课外，让学生带着思考走出课堂。第 1 题是课堂上学生生成的灵感在课后的落实，也是课堂小视频英美教材方法多样性的补充；第 2 题是课堂“学以致用”环节，从特殊到一般探究过程中学生形成的结论，但并未进行严格证明的定理的两个

推论，课后跟进，既是对命题证明过程的巩固，也是定理学习的完善；第 3 题旨在学生通过阅读老师提供资料或自己查阅与本定理相关资料，进一步拓宽知识面，打破课堂时间有限的局限，并以形成文字的形式以培养反思的习惯。

4 学生反馈

课后，我们通过问卷调查进一步了解了学生的收获和体会。问及“有助于我们证明一个命题的思想方法有哪些”时，学生给出了由果索因及由因推果、添加辅助线、转化等等思考问题的方法，对“何以知其所以然”有了更深的体会。在“看到‘证明’你会想到什么”的问题回答中，学生提到了公理、定理、严谨、由果索因、由因推果，言必有据、方法多样性、不可以循环论证等等，这节课的主题是“证明”，显然经过这节课的学习，学生对“证明”概念意向更加丰富。

多种证明方法的探索对学生认识和情感上都有较大影响，有学生发出“许多证明方法，而且很巧妙，让我茅塞顿开”的感叹，有学生思考了方法论问题，“抓住问题核心（180°），可以从多角度深入得到结果”，也有学生对数学本身有了更多的思考，“数学很美，一个命题可以有多种证明方法”、“数学具有理性精神”。这些方法的历史背景也发挥了独有的价值，培养的学生自信心，有同学回答“我和毕达哥拉斯的方法是一样的，仿佛我和数学家进行了思想碰撞”，培养了学生数学兴趣和挑战精神，同学们提到“定理证明的历史悠久，让我对数学感兴趣”、“三角形内角和等于 180°原来在 2000 多年前就证出来了，后来还有这么多证明方法，说明人们具有探索挑战的精神”、“都是转化的思想、体现了创新、探索、自我挑战的一种精神”等。

还有学生提出了想进一步了解的疑惑或问题，如“欧几里得是怎么写《几何原本》的？”“公理怎么来的？”“还有其它方法证明这个定理吗？”“数学家遇到困难的时候，他们是如何克服的？”等等。

从反馈不难看出，数学史可以在学生的心中播种下理性、好奇、兴趣、积极信念等等充满希望的“种子”，也为刚刚入门几何证明的七年学生迈好证明第一步“添砖加瓦”。

5 反思与总结

（1）以史为纲，解读教材编写结构

结合历史发展，仔细分析苏科版教材，笔者认为教材为学生本节课学习做足了“心理上”、“技术上”的准备。具体地讲，一方面，基于实验几何（小学拼图学习经验）发现了三角形内角和为 180°的结论，接着在动态过程中猜想了结论的合理性，进行了初步说理，另一方面，对“证明的必要性”进行了阐释，对“证明命题步骤”进行了说明。两条线索交织，以三角形内角和定理的严谨多样化证明为载体进一步洞悉证明思路、认识证明特点便水到渠成！对比历史，人类对该定理的认识，起源于泰勒斯的拼图，发展于诸多数学家实验操作，成就于众多数学家的多样化的证明，人类这一漫长的认识过程，在相关章节里逐一呈现，真可谓“草灰蛇线、伏脉千里”。

（2）以史为鉴，启发课堂教学设计

研读相关历史，多样化的证明方法在浩瀚历史长河中熠熠生辉，进而促使笔者思考方法的灵活多样性、多样性背后的共性、产生的原因等，为深化课堂教学设计提供了灵感。要给学生开放的探究机会，以问题引导学生分析思维过程，以达到“知其然”、“知其所以然”，而且“知何由以知其所以然”。这是学生跨好“几何证明”第一步的良机，是促进学生思维更加灵活深刻的宝贵资源，是培养学生积极信念的活素材。

数学史除了隐性地启发和影响教学，也显性走进了课堂，通过微视频的形式附加式展示三角形内角和从发现、验证到证明的发展过程。学生见识多种证明方法，体会不一样的思维花火是“由薄到厚”的过程，面对纷繁多样的证明方法，提炼发现运用平行线转化角的共同思维特点是“由厚到薄”的过程，在双向贯通中感受数学家不断求索的探索创新精神，体会方法的严密美、灵活美。

此外，第 7 章已经学习“多边形外角和是 360°”这一结论，不排除学生用三角形的外角性质“证明”三角形形内角和定理的可能，犯循环论证的错误。课上学生的确出现了类似的想法，教师及时抓住学生想法，因势利导，创造了渗透公理化思想的契机。

参考文献

[1] 杨裕前, 董林伟. 义务教育教科书 • 数学 七年级 下册[M]. 江苏: 江苏科学技术出版社, 2014.

[2] 唐秋飞. “三角形内角和”: 在多个环节中渗透数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015，(7): 40-44.

[3] 廖飞, 王进敬. HPM 视角下的“三角形的内角和”教学[J]. 黑龙江教育(理论与实践),2016，(5): 88-90.

[4] 陈丽娜. 运用数学史的三角形内角和教学[J]. 上海中学数学, 2016，(Z1): 20-22.

[5] 贾彬, 栗小妮. HPM 视角下的“演绎证明”教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018，(5): 44-49.

[6] 汪晓勤. 三角形内角和定理:从历史到课堂[J]. 中学数学月刊, 2012，(6): 38-40.

[7] 汪晓勤, 栗小妮. 数学史与初中数学教学——理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019.

[8] 瞿鑫婷, 汪晓勤. 美英早期平面几何教科书中的三角形内角和定理[J]. 中学数学月刊, 2019，(9): 49-52.

[9] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. 数学通报, 2020，(3): 7-12, 19.

文献综述

近二十年（2000-2019）来我国中学微积分教育研究综述

张佳淳

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

中学微积分一直是国内外数学教育领域的热点问题。21 世纪以来，6 届国际数学教育大会（ICME）持续关注微积分的教与学[1]，3 次高级国际数学与科学研究（TIMSS Advanced）的测评内容也都包括微积分，其中 1995 年结果显示，美国参加大学先修课程（AP 课程）的十二年级学生表现得相当好，超过了除法国外的其他所有国家[2]。各国对中学微积分的设置和定位虽各不相同，但微积分都是数学课程中不可或缺的内容。

在我国，中学微积分教学则是“几进几出”。1978 年《全日制十年制学校中学数学教学大纲（试行草案）》首次将微积分初步的内容正式纳入高中数学课程，但经过几年试验后发现，教师和学生普遍都不能适应。于是，到了 1983 年底，微积分成了选学内容，但由于高考不考，绝大部分学校在实际教学中均未予以落实。此后，1986 年和 1990 年的教学大纲都将微积分内容附于大纲之末，教科书也削弱了“微积分初步”在高中数学课程中的地位[3]。直到 1996 年，《全日制普通高级中学数学教学大纲（供试验用）》将“微积分初步”列入选修课，并区分文理科要求。2003 年，《普通高中数学课程标准（实验稿）》改革课程内容，揭示了微积分的实用性，微积分教学研究逐渐受教师的普遍重视，同时也引发了不少争议。例如：中学生是否学习微积分？如何确定中学微积分教学的广度和深度？大学与中学的课程衔接如何把握？师资储备如何进行？

如今，《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》对微积分的学习和教学提出新的要求与建议。在选择性必修板块要求通过“一元函数导数及其应用”这一单元的学习，帮助学生通过实际背景直观理解导数概念，感悟极限思想，掌握导数的基本运算，运用导数研究函数的性质，并解决实际问题，知道微积分创立过程，以及微积分对数学发展的作用；在选修

A、B、E 类课程也都包含微积分专题[4]。时至今日中学微积分在理念和实践上取得了一定的地位，国内不乏有真知灼见的相关研究成果。有鉴于此，本研究试图对已有研究成果进行系统梳理，希冀从已经积累的微积分教学经验和教学研究成果中获取对今日微积分教与学的启示。

2 研究方法

利用中国知网、万方、维普三大数据库的“专业检索”模式，以“题名（或关键词）”为字段，主要围绕“微积分”、“导数”、“微分”、“积分”、“极限”、“切线”编制检索式进行文献检索，例如用于中国知网的检索式为“TI=(微积分+导数+微分+积分+极限+切线)*(中学生+高中生+中学+高中+师范+'大学先修') -物理”，发表日期限定为 2000 年至 2019 年。为防止遗漏，补充部分已收集文献中的参考文献。剔除无关、重复、书评类、高等教育类、习题讲解类等文章，最终遴选出国内代表性文献样本 226 篇，同一作者、同一期刊刊发的系列论文合并算一篇。其中，期刊文章 101 篇，学位论文 122 篇，会议论文 3 篇。采用内容分析法，以 Bicomb2.0 共词分析软件和 SPSS21.0 为主要研究工具，对所选文献进行统计描述、聚类汇总、对比分析，从发文年份、论文作者、高频关键词和研究主题四个维度进行量化与质性相结合的宏观把握和微观解读。

3 研究结果与分析

3.1 发文年份纵向分布

图 1 给出中学微积分教育研究文献的时间分布情况。

图 1 各年度发文量

由图 1 可知，国内面向中学微积分教育的研究文献总体呈现上升趋势，大致可分为三个阶段：2000-2003 年，研究处于萌芽阶段，增速缓慢，文献总量为 7 篇，约占比 3%；伴随 2003 年实验课标的颁布，微积分教学研究开始兴起，2004-2011 年，突现井喷式增长，明显的发力点位于 2006 年，文献总量为 69 篇，约占比 31%；2012-2019 年，研究步入正轨，其中伴随 2014 年启动中国大学先修课程（CAP）试点项目和 2017 年颁布新课标，分别达到两次高峰 22 篇和 23 篇，期间虽多次波动，但平均年发文量高达 19 篇。由此可见，各阶段发文情况与微积分初步在我国数学课程中的变迁步调基本一致。

3.2 作者横向影响

从作者的合作情况和核心群体探析研究队伍的规模及影响。首先，在 Bicomb2.0 中对文章作者进行统计，共有 241 名作者，其中仅 40 篇由两个及以上作者合作完成。说明中学微积分教育研究以个人独立研究为主，同时表 1 表明，合作主要是高校研究者间的对话与共事；但总体不局限于同事或师生所在的封闭圈，跨单位合作共计 22 篇，外在合作关系较为明显。另一方面，40 篇文章占比 18%，被引量为 447 次，贡献了约 24%的被引量（总被引量为 1836 次），说明学术共同体的研究成果质量较高、影响较广。

表 1 合作情况统计

合作类型	高校研究者间（包括教师、研究生）		高校研究者与中学教师	中学教师间		高校研究者与考试院人员	中学教师与教研员
	校内合作	跨校合作		校内合作	跨校合作		
篇数	16	11	8	2	1	1	1

其次，考察研究的中坚力量，根据普莱斯定律 $M=0.749\sqrt{n_{\max}}$，其中 $n_{\max}$ 表示最高产作者的论文数，M 表示核心作者最低发文量[5]。在 226 篇文章中 $n_{\max}$=4 得 $M\approx1.5$，则共有 20 位学者发文量不少于 2 篇如图 2，属于该领域核心作者。其中，宋宝和和房元霞对微积分教育进行了持续的研究，先后开展了微积分课程价值的思辨研究、对“无极限导数”教学状况以及高中生与大学生对导数概念理解程度的实证研究。张景中院士和林群院士都关注微积分初等化教育，并有多本兼顾严谨与浅显直观地介绍微积分的著述，影响较大。其他部分作者的研究内容相对集中，如王芳等立足于 HPM 视角；胡典顺主要关注教育价值；张玉环、俞求是分别关注课

程标准的国际比较和国内研究；朱虹关注 AP 课程；马峰关注 AP 课程与 IB 课程；徐芳芳关注高中数学教师的导数知识；张波则关注职前教师对极限概念的理解。

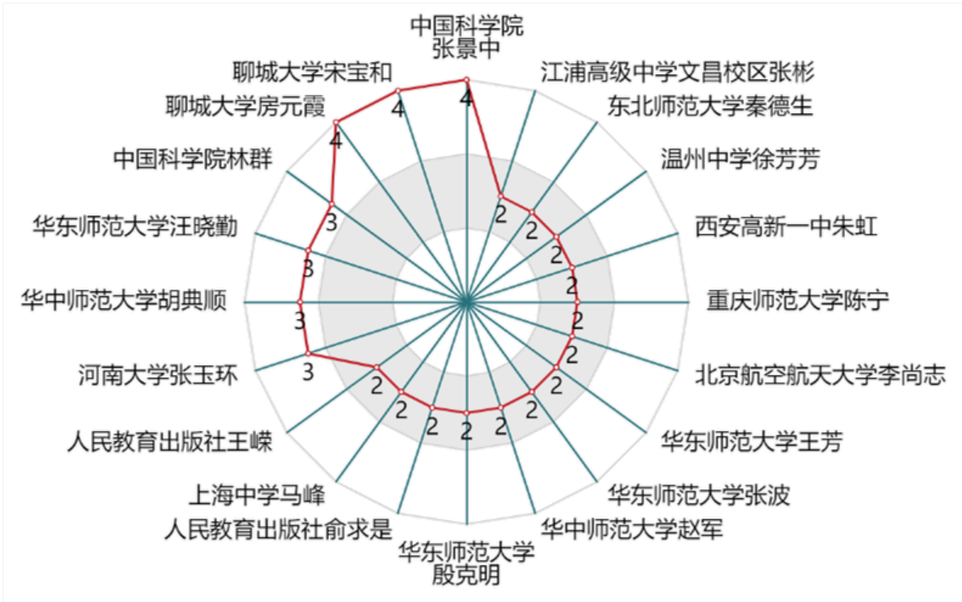


图 2 核心作者发文量

3.3 高频关键词统计分析

统计高频关键词可以反映研究热点前沿。首先，将关键词进行标准化处理，合并部分同义词、近义词，如将“数学课程标准”、“数学课标”、“课标”、“课程标准”统一为使用频次最多的“数学课程标准”。进而在 Bicomb2.0 中提取出 29 个词频大于等于 5 次的高频关键词，并进行共词分析生成词篇矩阵。然后，将词篇矩阵导入 SPSS21.0，使用组内联接方法进行聚类分析并生成树状图，从而把关联密切的关键词聚集在一起形成类团，同时生成 Ochiai 系数相似矩阵。根据树状图的结构，所有关键词大致可分为五类，但无法明确各组在微积分教育研究领域中处于核心还是边缘地位。因此，再将相似矩阵转化成相异矩阵导入 SPSS21.0 进行多维尺度分析并绘制知识图谱，结果显示模型的拟合指标为 Stress=0.16996，RSQ=0.84221，拟合效果良好。结合聚类分析树状图，在知识图谱上绘制主题如图 3 所示，例如数学课程标准与导数概念在树状图上属于不同类团，所以应当绘制于不同主题。由图 3 可知，主题 2、4、5 靠近中心位置表明其为核心主题。

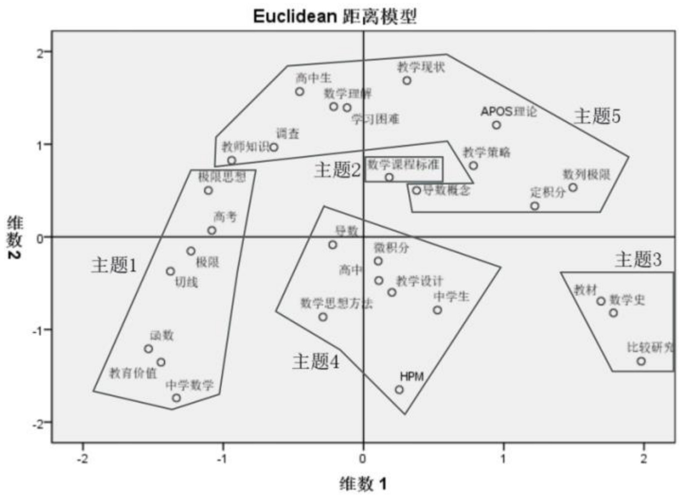


图 3 多维尺度分析知识图谱

综合以上分析，对所有文献进行精读，最终将中学微积分教育的研究热点分为五大主题，每篇文章按主要内容归属一个研究主题，如表 2 所示。其中主题 2 只有一个高频关键词，且不同于另两个核心主题 4、5，其篇数较少，究其原因在于很多学者将教学大纲等文本也称为课程标准，同时很多研究都涉及课程标准的分析，但没有作为主体内容。

表 2 中学微积分教育的研究主题分类

序号	主题类别	部分高频关键词（频次）	篇数
1	教育价值研究	极限（14 次）、教育价值（6 次）	36
2	课程纲领性文本研究	数学课程标准（7 次）	16
3	教材研究	教材（14 次）、比较研究（9）	29
4	教法研究	教学设计（32 次）、HPM（8 次）	63
5	教学现状研究	导数概念（12 次）、教学现状（7 次）、数学理解（6 次）、调查（6 次）、教师知识（5 次）	82

3.4 研究主题分析

3.4.1 教育价值

中学阶段是否学习微积分，首要问题就是明晰微积分在中学的教育价值。

（1）文化价值。其一，存在大众文化需求。学生对微积分有一种潜在的好奇心，他们通过报刊、数学或物理等学科教师的介绍早对微积分有所耳闻，有的学生甚至想了解到底是什么驱使数学家创立了微积分[6]。其二，研究表明，学生不知道概念的引入与发展史，也就无法理解概

念的本质[7]。早在两千多年前就有人试图用分割策略解决求曲面面积和切线等问题，但始终难以突破分割过程中的“无穷小”量和“极限”过程的问题[8]，16-17 世纪，随着力学、航海和天文学的发展，积分学产生于研究长度、体积、面积和天体间引力等问题，而后微分学产生于研究瞬时速度和加速度、曲线切线以及炮弹射程的最值等问题[9]，所以微积分的诞生既是数学内部需要，又有外部因素驱动。微积分的出现使运动与变化的定量描述成为可能，其本质是一种变量数学。最后，文化价值也包含美学价值，如极限的意境美、和谐美、奇异美[10]。

（2）思想价值。宋宝和等提出，微积分课程的核心价值是导数概念的核心与基础“变化率思想”[6]。极限思想更是在低年级就开始非正式地逐步渗透在课堂教学中，从小学圆面积公式，到初中 π 的近似值求法，再到高中无穷递缩等比数列求和等。更有以直代曲、无限逼近、用局部研究整体、由有限到无限等思想。

（3）思维价值。微积分使“辩证法进入数学”，学习微积分有利于学生形成辩证思维，摆脱以往对数学的单维认识，体验到数学运动、可变、无限的一面。另外，学生能从高等数学的角度重新认识初等数学，改变认识世界的思维模式。例如，常用三角函数表、对数表可用函数的幂级数展开计算造出，自然对数的底数 e 实际上是一个数列的极限，祖暅原理要用积分方法证明等[11]。

（4）科学价值。主要指微积分在中学数学中的工具性。首先是优化解题过程，除了统计国内部分高考卷中导数试题的占比、分值、考察内容等，不少研究者强调了导数作为解决问题的便捷工具在高考中的重要地位，特别用于函数的单调性、零点、极值和最值，数列，不等式与恒等式证明，求曲线切线，判断超越方程解的个数等问题。其次是增强中学数学教学的严谨性，例如完善切线定义，从而解决圆锥曲线甚至一般曲线的切线问题[12]。

（5）社会价值。微积分更是课程现代化的体现和社会发展进步的需要。陈重穆先生等曾在世纪之交提出，21 世纪的素质教育，应想办法缩短学生必经发展进程以尽快达到现代化的前沿，而微积分是近代数学的入门，高中学习微积分是现代化的需要[13]。很多行业和专业也都需要微积分知识，这也体现了微积分的实际应用价值。

3.4.2 课程纲领性文本研究

为了实现微积分的教育价值，确定符合学生学情的教学目标、学时安排、课程内容等，就成为课程纲领性文本的迫切任务。多年来我国微积分课程内容不断调整，田宇卓梳理了自 1978

年至 2003 年 10 本教学大纲或课程标准对微积分内容的要求[14]。不变在于，从 2000 年教学大纲首次加入数学文化后，一直持续关注数学文化的要求。较大变动在于，2003 年实验课标取代教学大纲，一改思路，不以极限概念为基础，改为通过实际背景和具体应用实例，感悟瞬时变化率从而引出导数；二改内容，删去极限、不定积分等内容，并第一次列入“生活中的优化问题举例”。在此基础上，2017 年新课标一增一减，一增是保留实例引入方式，重新纳入极限思想，有志于数理、经济等专业的学生才要求以极限概念为基础；一减是不见“生活中的优化问题举例”。由此可见，注重文化价值，夯实实例引入，凸显科学工具作用，体现课程人性化，是越来越得到强化的理念。另外，迄今为止针对最新版课标中微积分内容的研究较少，以下若无特殊说明，研究对象均为 2003 年课标。

研究其他国家和地区的课程设置能有所启示。不少学者关注美国 AP 课程考试大纲和新加坡 JC 教学大纲，两者都强调用图像、数值、分析及语言的“四原则”多元表征方式来直观、多样地描述概念、结论和问题[15, 16]。

除了研究某个国家的微积分课程设置，中外比较也是一个研究热点。张玉环、Alain Leger 对比发现法国教学目标更明确，即利用导数、积分等数学工具解决现实生活问题；因材施教更到位，不仅文理科各有侧重，而且不同层次学生要求不同；更有学科交叉渗透，设置了交叉性学科的开放性课题供学生自主讨论[17]。在较大范围的国际比较中，严虹以同为亚洲儒家文化圈的中、新、韩、日四国的文本作为研究对象，发现四个国家的微积分内容在高中课程的比重和分布不同，我国占比最低，且基本内容明显倾向于微分学；认识水平要求也不同，相比韩国、日本，我国的要求偏低偏易[18]。张玉环、王沛对 10 个国家、地区课程纲领性文本中的微积分内容进行定量、定性比较分析[19]，结果显示我国大陆课标在绝对难度上的排名垫底，是唯一一个既不包含极限也不包含不定积分的文件。另外，不少国家的纲领性文本都重视现代教育技术的融入，特别是对图形计算器计算定积分与发现导数值的肯定[15]，法国还具体说明算法的实施和软件（如 Dynamic Geometry Software）的使用，目的是避免学生在计算技巧上耗时[17]。相比之下，我国现行课标虽在教学建议提及“教师应重视信息技术的运用”[4]，但无具体说明或结合知识点示例。

3.4.3 教材研究

除了不断调整的课程纲领性文本，教材更为开设可行性提供了保障。而很多国家和地区都实行“一纲多本”制，因此教材研究更加多元化。袁桐分析台湾《理科数学（上）》，指出教材

对极限、导数、积分等概念的建立采取了“淡化”而不“马虎”的做法；反常规地将函数极限与数列极限分开；同时坚持了“先定积分、后原函数、微积分基本定理”的历史过程，重视数学史[20]。对我国大陆教科书的评析则类型丰富，第一类是比较某个出版社同一时间的不同版本教材，例如胡明涛比较人教 2007 年 A、B 两版教材的编写理念、教材结构、教材内容、例题习题等[21]。第二类是比较某个出版社不同时间出版的教材，例如田宇卓定量和定性地研究了 1980-2006 八年间的 9 本人教版教科书中微积分的内容设置、编写方式、例题、习题等几个方面[14]。第三类是比较不同出版社的教材，例如胡典顺列举 3 本人教版和 2004 年北师大版教材中的导数应用实例，说明我国教材一直关注现实情境和实际应用，而不是仅仅将微积分作为一些规则和步骤来学习[12]。

TIMSS 国际协调员 D.F. Robitaille 认为，在每个国家，数学教科书对数学的教与学都有相当大的影响，因此了解各国教科书在内容和编排方式上的差异是一个重要的研究领域[22]。
首先，与课程纲领性文本的研究热度相一致，不少研究者认为美国 AP 微积分教材独具一格的编写方式能为中国大学先修课程 CAP 的微积分教材开发提供参考借鉴。例如王海青、汤志娜归纳美国 Saxon 出版社的教材编写特色在于：遵循“螺旋式递进”的编写原则打破了体系分散了难点；注重先运用方法“做”后“说”原理或证明；贯彻“递增式发展”原理展开新知等[23]。其次是国际比较研究。高雪芬对比了人教 A 版和新加坡 EPB Pan Pacific 出版教材中性质定理的严格性水平、引入方式和呈现方式，发现新加坡教材更像一个公式大全，常直接给出性质定理，而我国教材更强调例证和说理，尽管不是严谨证明，但学生易于接受，且我国教材在引入方式和表征方式上更多样化，如通过数学史、数学问题、现实问题引入[24]。

为全面把握数学课程的深度和难度，朱雪芳、叶立军采用史宁中在 2005 年建立的“课程难度模型”对人教 A 版和澳洲 IBID 版教材进行量化分析，从而得出人教版内容少，课时短，教材编排“窄而简”，总体而言两者课程深度基本相同，人教版课程难度更低[25]。任晓峰使用鲍建生提出的“数学题综合难度多因素模型”，对苏教版教材和新加坡教材中的微积分例题和习题进行比较，从结果来看，我国微积分题在背景和推理水平上要高于新加坡，在探究、运算和知识含量水平上则低于新加坡[26]。夏明结合史宁中在“课程难度模型”基础上提出的“教材难度模型”和鲍建生的上述模型，从教材知识团的广度、深度及习题综合难度三个方面的比较得出：中国教材微积分内容的综合难度低于英国 A-Level 教材，主要原因在于中国教材微积分章

节中的习题数量不足[27]。

进一步地说，基于国际教材比较结果，大部分学者都指出，对于中国教材，强调生活应用是自身优势。但在课程广度上，内容知识点少，缺乏完整性与系统性；在课程深度上，更像是蜻蜓点水，概念点到即止，对高水平认知层次的要求较低，缺乏应用性和挑战性的习题和例题；在课程地位上，课时量较少，与微积分的重要地位不相匹配。

3.4.4 教法研究

在课程实施过程中，如何促进标准文本中的课程理念与作为半成品的教材向教师教学行动有效转化是一大难题。微积分的教学难点主要在于极限概念、切线概念，教学方式的创新也是一大难题，国内学者对此进行了大量的探索性研究，并取得了有益的研究成果。

首先，极限一直是争议不断的话题，2003 年开始新课标避开形式化极限概念而突出变化率，有学者表示这一做法是基于数学教育是教育科学不是科学数学的需要[28]。房元霞、宋宝和所实施的“无极限导数概念”教学实验研究证明，讲导数想避开极限是不可能的，但应淡化形式，重在极限思想的描述[29]。张景中从平均变化率和 3 个经典例子出发，建立了不用极限的微积分框架[30]。任芬芳等考察美国早期教科书，诠释了教科书中给出的部分对极限加以阐释的直观例子，建议在教学设计时采用“引例+定义+举例”的形式[31]，这一设计思路与最新的课程标准选修部分的设置不谋而合。总之，很多学者认为，对极限的教学在理论上不要求严谨，一定的推理训练以及几何直观更便于学生理解。

其次，微积分有漫长的历史，许多学者建议从 HPM 视角寻找微积分的教学素材，数学史也是攻克切线概念不可或缺的元素。王嵘从两个角度分别给出了教学案例，即单纯式地介绍微积分发展史并引出导数是怎么产生的、为什么要建立微积分的基础等问题，以及渗透式地运用微积分史使学生感受切线概念的扩展及其精确化的必要性[32]。王芳也实施了数学史融入“导数几何意义”的教学研究，不同于王嵘使用莱布尼兹的方法，他们借助刘徽的割圆术，在切线的静态定义与动态定义之间架起了桥梁[33]。另外，王芳还实施了 HPM 视角下导数的概念、以直代曲的数学思想、导数应用的设计与教学[34]。

再次，还应重视信息技术的加入。吴华、周鸣以 APOS 理论为依据，借助 GeoGebra 软件设计导数、定积分概念的教学，展示 GeoGebra 能帮助学习者发现知识的内在联系，建立深层图式，形成概念体系[35]。陈晓玲则实施了准实验研究，发现实验班的学生通过对图形计算器的使

用可以发现导数与函数单调性间的关系，对比班的学生通过观察教师准备好的几何画板材料同样得到结论，但无法通过动手操作掌握自主探究新知识的方法[36]。

然而，现有研究在教学评价方式上比较单一，忽视了过程评价、创新性评价、数学素养评价等方式。文卫星以数学写作作为课后作业，评价学生对极限美的感悟理解程度[10]。

3.4.5 教学现状研究

课程教学改革不仅意味着课程设置、教材编写、教学方法等的变革，还包含学生学习方式和教师主体能动性的变革[37]。因此，可以对我国微积分教学现状进行如下梳理。

着眼于学生方面，不少学者调查统计学生在微积分学习中的障碍、困难或易错点，并提出教学建议、策略。例如吴晓波从认知障碍、心理障碍、操作障碍三方面归纳出若干导数学习障碍[38]。最常见的障碍是不能运用导数的几何意义，尽管学生学过“切线是割线的极限位置”的近代分析定义，但仍沿用圆的切线想当然地推广到一般曲线的切线[39]。还有学者调查高中生在学习“导数及其应用”模块时运用学习策略的情况，分析存在的问题[40]。

另一方面，反对将将微积分纳入中学数学课程的常见理由之一是在中学讲会造成‘夹生饭’，既达不到理论要求，又使得学生难以消化。庄白[41]、马峰[42]分别调查大一学生、国外留学生的中学微积分经验对大学学习的影响，结果显示中学微积分经验形成的良好基础对大学的学习有促进作用。房元霞等[43]、秦德生[44]分别比较了大学生与高中生对导数概念的理解水平，都发现高中生的理解更重实质与直观化，大学生的理解趋向符号化、形式化。实际上，缩小高中与大学微积分的知识跨度与完善课程衔接的问题讨论已久。不少学者认为高中微积分课程不需在理论上过于严格，应注意直观性、实用性、广博性[12]，大学再考虑严谨性、系统性。

着眼于教师方面的研究层次丰富。研究对象包括职前教师[45-47]与在职教师[48-51]；在研究方法上，问卷调查和访谈是主要方式，课堂观察有时作为反映教学实际情况的辅助方式。其中，对知识水平的测试问卷有来源于对已有测试卷的借鉴改编[45, 49]，也有自行编制[46]；对观点态度、教学方式的调查问卷则多为自行编制[48, 50, 51]。还有研究者另辟蹊径，用思维导图作为研究工具[47]。

一系列调查研究发现，在知识水平上，职前教师在导数学科内容知识方面缺乏深层次理解且举反例能力欠缺；在教学内容知识方面存在年级差异，分歧主要来源于是否参加过教育实践[45]。影响这两方面知识的主要因素包括教师所在学校类别、年龄、职称、是否参加过中学学科竞赛、

教师实践反思等，专家型教师丰富的导数内容知识也支撑其更能在课堂中谈古论今，调动学生思维[49]。而在数列极限的学科内容、教学内容知识两方面也不乐观[46]，存在各种错误或不完善的理解[47]，许多教师认为避开极限来讲微积分更好[48]。其次，在观点态度上，广大师生都对微积分持有积极态度，认同微积分的价值，教师认为高中应当开设微积分，并且只要教师教得好就不会是“夹生饭”[48]，但教学方式上，存在讲授多、启发少；信息技术与课程整合程度不高，“探究与发现”等栏目使用率不高；部分内容的教学设计较难把握等问题[50, 51]。

3.5 研究总结

纵观上述内容，可见学者们达成了中学微积分教育研究领域的纵深建构。一方面，在内容上的深化挖掘具备两个特点。一是，日益全面化。从最开始仅关注教材、课标内容的处理，到广泛探讨微积分在品质、能力以及情感、态度与价值观等方面的作用，调查学生学习困难、教师专业知识等认知因素，情感、观念等非认知因素，再到精细研究导数、积分、极限等子领域内容。二是，日益系统化。现有研究足以形成一个初步的研究框架：首先，肯定微积分的育人价值；其次，调查微积分课程的教学现状；再次，为改善现状引入课程内容的调整建议或教法学法的创新设计。

另一方面，在时间线上的数量积累可展望未来研究趋势，以 4 年为一段，各主题的时间分布情况如图 4 所示。由此可知，教学现状研究出现较晚，一方面表明关注教育教学主体的研究取向的出现比较滞后；另一方面也与研究方法的缺失有关，前期发表的论文往往是介绍自己的看法或对教学经验的总结，更多地讨论应然问题，随着数学教育研究理论的引入和范本的出现，研究方法愈发多样化，尤其是内容分析、实验研究、行动研究、调查研究、历史研究等方法的使用带动了各主题的实证研究与混合研究。课程纲领性文本研究的比例一直增长，随着 2017 年课标的变动，可以推断这一范畴在未来发文量可能再上升。教育价值研究在近年来有反弹趋势，说明对中学微积分的价值定位仍未讨论完备。教材研究与教法研究的变化趋势相似，可见两方面关系密切，随着新教材逐渐面世，相信这两方面的研究也会再次兴起。

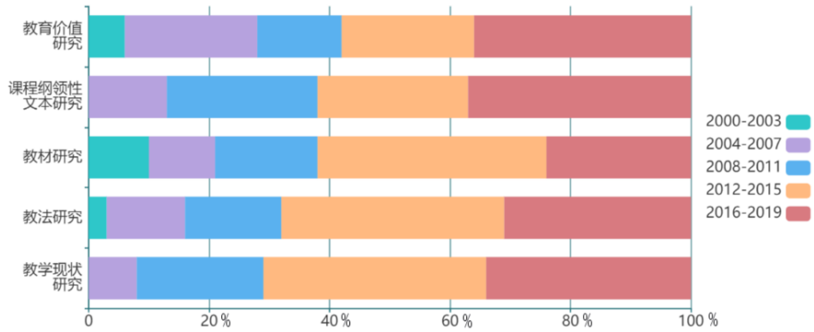


图 4 各主题年份分布

4 研究启示

4.1 研究内容有待拓宽

纵观中学微积分教育的已有文献，在研究对象上，涵盖了教育环境中的实物、理念、教学主体等各类要素，但随着中国教育改革的持续推进，未来仍有不少问题值得研究。譬如，随着 21 世纪对数学人才培养的普遍重视，中国优秀高中生发展途径也愈发多元化，CAP 课程便是其中之一。除了开展教育实验和试点工作，推进教育信息化以兼顾教育公平也刻不容缓。目前，全国 40 余所高水平大学和代表中学联合发起的中国慕课大学先修课，由大学教授与高中教师精心设计，作为在线课程面向全国学生开放。另外，中国科协通过“数学英才”公众号推送文章和微视频，为学有余力的青少年搭建高层次学习平台。但如何构建 CAP 考评体系与评价方式？如何测评 CAP 线上课程的教学效果？CAP 课程的发起也是为了促进高中与大学的衔接，但更多针对的是卓越的学生群体，能否参考 CAP 课程，缩小选择性必修课程中的初等数学与高等数学知识点之间的跨度？鲜有作者给出切实可行的方案，或许这需要两个学段的教育工作者们通力合作。

4.2 研究方法有待规范

已有文献既有基于教学经验、有理有据的思辨类文章，也有立足于教学中既存问题进行研究的实证类文章。然而，思辨类文章的通病有二：其一是缺乏从日积月累的教学经验中归纳提炼出具有个人风格的教学理念；其二是无法客观理性地升化，尤其是在教育价值研究的文章中，很多观点重复出现且仅是简单罗列。对于实证类文章，部分量化研究过程简陋、忽视测量工具的信效度检验，数据收集方法以问卷调查为主，少数辅以访谈、课堂观察、实物分析等，数据

分析多关注相关系数的显著检验、*T* 检验、卡方检验等统计方法。对于质性研究，行动研究多是研究者亲身经历教学探索，形成教学案例、策略，对叙事研究、案例研究、历史研究等研究方法的使用较少。总而言之，应促进研究方法规范化、多元化、混合化使用。

4.3 他山之石有待借鉴

在研究视野上，针对纲领性文本、教材的研究中出现国际比较是常态，因为参考其他国家的课程设置可调整我国中学微积分教育的广度和深度。而教法研究和教学现状研究则较少借鉴他山之石，主要是推广美国学者杜宾斯基的 APOS 理论，利用其四个阶段设计导数、定积分等概念的教学过程，少数文章还进行了教学实验研究和学习状况调查。HPM 视角下的研究，教育取向的数学史研究很少，外国教科书的数学史研究有待挖掘。除此之外，还可参考高等教育的教学设计，考虑整合各国广泛关注的探究性学习、项目式学习、数学建模、STEM 教育等。在以考促学的背景下，国内针对学生学习结果的评价工作也较为单一，内容多为概念掌握、问题解决的测量，功能多为总结性评价，标准多为绝对评价，可参考新版教科书中“文献阅读与数学写作”等模块和国际研究，设计学生日记、设计题、口头讲演、自我评定等多元评价方式。

参考文献

[1] 陈昊, 王建磐. 21 世纪国际数学教育在关注什么——基于 ICME 中 TSG 主题的分析[J]. 数学教育学报, 2020,29(2): 41-48.

[2] GONZALEZ E J, O'CONNOR K M, MILES J A. How Well Do Advanced Placement Students Perform on the TIMSS Advanced Mathematics and Physics Tests?[M]. MA: TIMSS International Study Center, 2001: 15.

[3] 杨慧娟, 孟梦. 微积分初步在新中国高中数学课程中的历史变迁[J]. 数学教育学报, 2016,25(1): 25-27.

[4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[S]. 2020: 39-73.

[5] 邱均平. 信息计量学[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007: 192-194.

[6] 宋宝和, 郭兆明, 房元霞. 变化率思想:高中开设微积分课程的价值[J]. 课程.教材.教法, 2006，(9): 44-47.

[7] FURINGHETTI F. The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching[J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2000,31(1): 43-51.

[8] DUNHAM W. 微积分的历程：从牛顿到勒贝格[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010: 1.

[9] 孙卫军. 新课程理念下高中微积分课程的教育价值及其教学研究[D]. 苏州大学, 2007: 8.

[10] 文卫星. 引导学生欣赏与发现数学美——以极限教学为例[J]. 数学教育学报, 2012,21(2): 56-60.

[11] 饶汉昌. 高中数学试验课本新增内容初探[J]. 课程．教材．教法, 1997，(7): 18-23.

[12] 胡典顺. 新课程中的微积分及其教育价值[J]. 数学教育学报, 2010,19(1): 13-16.
[13] 陈重穆, 曾崇燊, 宋乃庆. 从素质教育看 21 世纪的高中数学课程[J]. 课程．教材．教法, 1995，(9): 40-44.
[14] 田宇卓. 高中数学教科书中微积分的变迁研究[D]. 内蒙古师范大学学科教学(数学), 2013: 14-46.
[15] 张守波. 新加坡高中数学教学大纲的特色与启示[J]. 数学教育学报, 2013,22(6): 58-61.
[16] 李祥兆. 美国高中“AP 计划”微积分课程评述[J]. 数学通报, 2009,48(10): 1-3.
[17] 张玉环, LEGER ALAIN. 中法高中数学课标微积分内容比较研究[J]. 数学教育学报, 2014,23(2): 19-24.
[18] 严虹. 中、新、韩、日四国高中数学课程标准的比较研究——以微积分内容标准为例[J]. 教学与管理, 2016，(3): 112-115.
[19] 张玉环, 王沛. 高中微积分课程国际比较研究——基于十个国家和地区的十四个课标研究[J]. 数学教育学报, 2016,25(2): 36-43.
[20] 袁桐. 台湾高中数学教材中初等微积分内容的处理和思考[J]. 数学通报, 2000，(7): 27-29.
[21] 胡明涛. 人教 A 版、B 版高中数学教材“微积分”部分比较研究[D]. 山东师范大学, 2011: 3.
[22] LI Y, CHEN X, AN S. Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction division[J]. ZDM : The International Journal on Mathematics Education, 2009,41(6): 809-826.
[23] 王海青, 汤志娜. 大学先修课程背景下美国 AP 微积分教材的编写特色与启示[J]. 数学教育学报, 2018,27(2): 74-77.
[24] 高雪芬. 中国与新加坡高中数学教材微积分内容比较研究[J]. 数学通报, 2012,51(12): 4-6.
[25] 朱雪芳, 叶立军. 中国和澳大利亚高中数学微积分教材比较研究[J]. 数学教育学报, 2014,23(2): 25-27.
[26] 任晓峰. 中国新加坡两国高中微积分课程难度的比较研究[D]. 苏州大学教育·教材教学, 2009: 39.
[27] 夏明. 中英高中数学教材微积分内容的比较研究[D]. 上海师范大学, 2015: 3.
[28] 何小亚. 高中数学新课程微积分的课程设计分析[J]. 数学通报, 2006，(4): 9-13.
[29] 房元霞, 宋宝和. 没学过极限，学生能学会导数吗？——新课程“导数"概念教学的实验研究[J]. 数学通报, 2007，(9): 10-14.
[30] 张景中. 不用极限怎样讲微积分[J]. 数学通报, 2008,47(8): 1-9.
[31] 任芬芳, 汪晓勤, 陈玲玲. 美国早期数学教科书中的极限概念[J]. 数学教育学报, 2017,26(4): 38-43.
[32] 王嵘. 从历史出发讲授微积分[J]. 数学通报, 2010,49(4): 9-13.
[33] 王芳, 汪晓勤. HPM 视角下“导数几何意义”的教学[J]. 数学教育学报, 2012,21(5): 57-60.
[34] 王芳. 数学史融入导数教学的行动研究[D]. 华东师范大学, 2012: 47-95.
[35] 吴华, 周鸣. GeoGebra 环境下基于 APOS 理论的数学概念教学研究——以导数概念为例[J]. 数学教育学报, 2013,22(2): 87-90.
[36] 陈晓玲. 利用图形计算器研究“函数的单调性与导数”的关系之案例分析: 第 14 届亚洲数学技术年会[C], 北京, 2009: 175-177.
[37] 项贤明. 基础教育课程改革如何从理念转化为行动——基于我国 70 年中小学课程改革历史的回顾与分析[J]. 课程.教材.教法, 2019，(10): 41-51.
[38] 吴晓波. 高中生“导数及其应用”学习障碍的探究[D]. 山东师范大学, 2013: 35.
[39] 汪晓勤, 殷克明. 高中生对切线的错误理解[J]. 数学通报, 2013，(10): 14-17.

[40] 徐真. 高中生“导数及其应用”学习策略研究[D]. 山东师范大学, 2015: 12.
[41] 庄白. “高观点”下的中学微积分教学研究[D]. 华东师范大学, 2010: 62.
[42] 马峰. 基于实践的高中微积分课程比较研究[J]. 数学教育学报, 2011,20(6): 59-63.
[43] 房元霞, 连茂廷, 宋宝和. 高中生对导数概念理解情况的调查研究——兼与大学生的比较[J]. 数学通报, 2010，(2): 32-36.
[44] 秦德生. 学生对导数的理解水平及其发展规律研究[D]. 东北师范大学, 2007: 80-81.
[45] 郭玉峰, 刘佳. 师范院校学生“导数”内容知识和教学内容知识理解情况的调研[J]. 数学教育学报, 2014,23(1): 57-62.
[46] 杨芳. 职前教师对数列极限概念的理解研究[J]. 数学教育学报, 2012,21(1): 58-60.
[47] 景敏, 张波. 基于思维导图方法对职前教师极限概念理解的研究[J]. 数学教育学报, 2006，(2): 61-63.
[48] 张玉环. 高中微积分教与学现状的调查研究[J]. 课程·教材·教法, 2012,32(8): 83-89.
[49] 徐芳芳. 高中数学教师导数知识研究[D]. 东北师范大学, 2008: 10.
[50] 许霞. 新课程背景下高中微积分教学策略研究[D]. 重庆师范大学, 2008: 11.
[51] 彭顺英. 高中微积分教学现状的调查与分析[D]. 湖南师范大学学科教学(数学), 2014: 14-15.

学术讯息

首届小学数学教师 HPM 网络研修班开班仪式在线举行

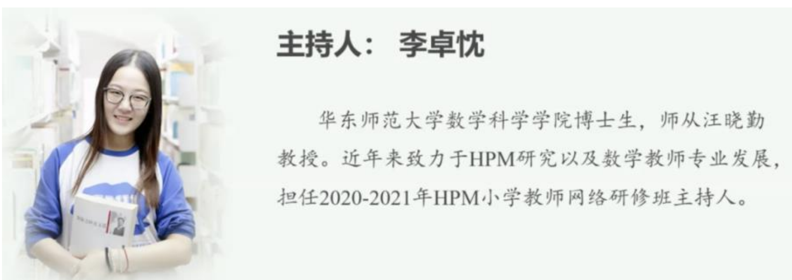
岳增成

（杭州师范大学教育学院，浙江杭州 311121）

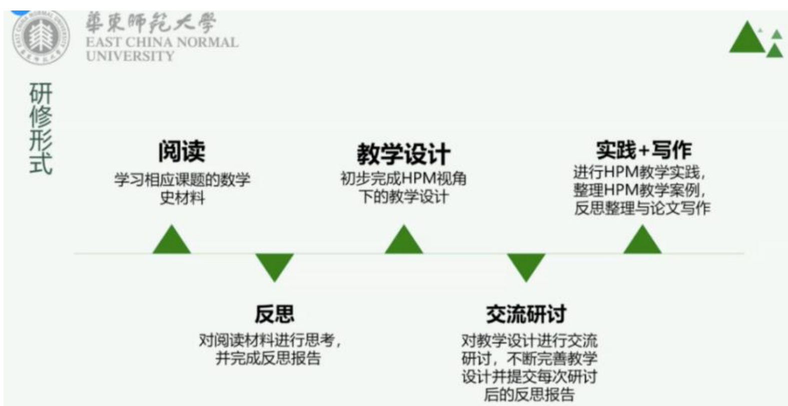
经历了前期的专家团队组建，学员招募、遴选、公示，2020 年 7 月 15 日，HPM 小学教师网络研修班在 7 位专家组成员，来自全国 17 个省、自治区、直辖市 75 位学员的见证下正式启动。

研修班规划：

开班仪式由华东师范大学数学科学学院博士生李卓忱主持，她是汪晓勤教授指导的第二个研究小学 HPM 的学生。她首先热烈欢迎各位专家和学员的参与，并着重强调了规则意识，一是学术规范，二是准出机制，其次介绍了研修形式与研修安排。



2020HPM 小学教师网络研修班主持人李卓忱

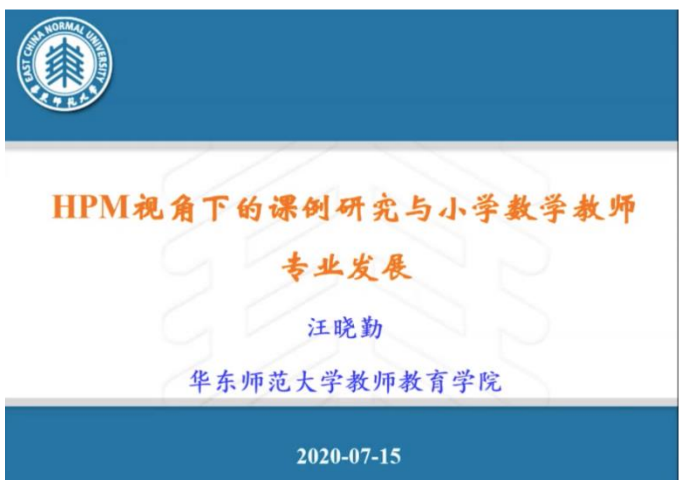


HPM 小学教师网络研修形式

HPM 小学教师网络研修安排

专家讲座：

HPM 网络研修班发起人汪晓勤教授

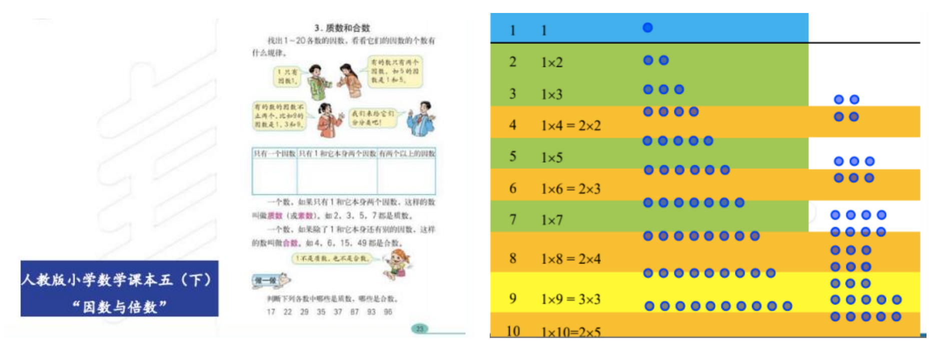


专家讲座主题

华东师范大学教师教育学院教授、博士生导师、HPM 工作室创始人汪晓勤老师作了题为“HPM 视角下的课例研究与小学数学教师专业发展”的讲座。汪老师以“百年修得同船渡”的隐喻作为开场白，用此形容研修班这一专业学习共同体，期望大家共同乘坐 HPM

之船，扬帆远航，实现专业成长。他的讲座分为三部分，HPM：一个富有魅力的研究领域，简单地介绍了 HPM 的发展与内涵；HPM 与 MKT，利用众多案例阐明了 HPM 与教师专业发展的基础——教师知识间的关联；HPM 视角下的课例研究，这是 HPM 促进教师专业发展的主要形式，教师在设计、实施、反思、写作等环节的循环中实现专业成长。

鸡兔同笼问题及其变式，说明了 HPM 与教师专门内容间的联系



如何讲清楚 1 既不是质数也不是合数，2 是质数，HPM&KCT

HPM 与教师专业发展

专家组成员发言：

（蔡宏圣，江苏省苏州市姑苏区教师发展中心小学数学研训员，特级教师，江苏省教学名师，正高级教师）

寄语：感恩彼此，抓牢机遇，并肩前行

（岳增成，杭州师范大学教育学院教师，小学 HPM 重要的研究者）

邹佳晨，华东师范大学教师教育学院教师，中小学 HPM 重要的研究者

寄语：聚焦实践，关注反思，融入历史，落实数学学科德育

专家组的其他成员玉溪师范学院的文萍老师、玉溪聂耳小学的飞惠玲老师、华东师大数学科学学院博士生孙丹丹因事不能出席，但事先准备了发言。

文萍，玉溪师范学院数学与信息技术学院教师，中小学 HPM 研究者

飞惠玲，云南玉溪聂耳小学教师，全国模范教师，名师工作室主持人

孙丹丹，华东师范大学数学科学学院博士生，中小学 HPM 重要研究者

热烈祝贺HPM网络研修顺利开班！

数学史是人类文明史的重要组成部分，为严谨的逻辑思维注入了璀璨的人文光辉，使数学成为一门极富科学性的艺术，激发着人类对理性和美的追求。

徜徉于数学史的长河中，既可一览众山小，窥数学之全貌，又可博观而约取，推陈出新。

让我们穿越时空，像数学家一样思考，探索数学奥秘！

让我们追根寻源，品味数学史里程碑中的经典片段，重温数学之美！

以史为鉴通古今，化识为智达中外。

祝大家学有所获，学有所成！

——云南玉溪聂耳小学　飞惠玲 邱良斌

飞惠玲老师寄语

“如果您决心和大家一起走进这段HPM旅程，希望您坚持投入，只要您真的投入到研修活动，我也相信您一定会收获满满。研修末尾有老师跟我说研修后，觉得自己以前是在‘地下室’生活的，现在住‘楼上’了，看到了新的世界。希望最后您也有登高望远风景独好的体验，让我们一起努力吧，投入越多、收获越大！”

孙丹丹博士寄语片段

学员代表发言：

山东郑玲玲、江苏张平、江西陶醉三位老师作为学员代表，发表了对网络研修班的期待与展望，郑玲玲老师的“专业指导、共同开发、关注实践、辐射更广”代表了学员们的心声。

郑玲玲老师（左）与陶醉老师（右）

开班仪式的最后一项是互动交流，专家组成员与学员们的疑惑进行了交流沟通。

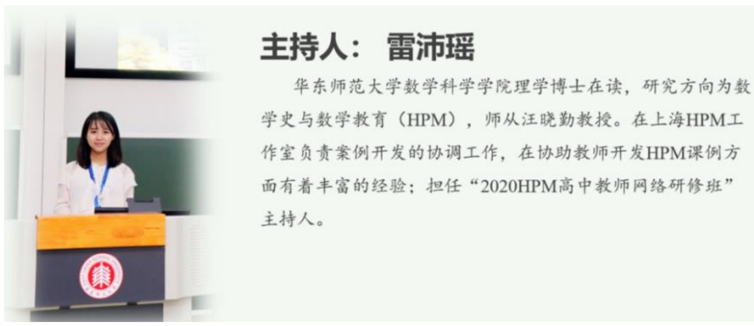
历时两个小时的开班仪式圆满结束，HPM 小学教师网络研修活动正式拉开序幕，让我们走进数学史感受不一样的数学，走进 HPM 感受和而不同的数学教育。

首届高中数学教师 HPM 网络研修班开班仪式在线举行

雷沛瑶

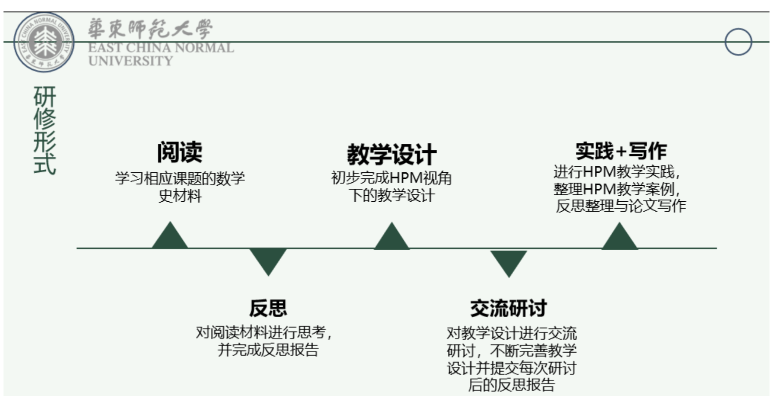
（华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

7 月 15 上午，2020 数学史与数学教育（HPM）高中教师网络研修班开班仪式在线举行。研修班的专家团队、教师学员与义乌市教研基地的教师们共同参与了此次开班仪式，为高中 HPM 网络研修拉开序幕。



2020HPM 高中教师网络研修班主持人雷沛瑶

开班仪式由华东师范大学数学科学学院博士生雷沛瑶主持，雷沛瑶作为 HPM 高中教师网络研修班的主持人具体介绍了研修班的准出机制、研修课题范围、研修形式和研修安排，帮助教师学员了解研修活动的大致流程。



HPM 高中教师网络研修形式

随后，开班仪式进入专家讲座环节。华东师范大学教师教育学院教授、博士生导师、HPM 工作室创始人汪晓勤老师，作了题为“HPM 视角下的课例研究与高中数学教师专业发展”的开班讲座。

HPM 网络研修班发起人汪晓勤教授　　　　HPM 与 MKT

报告中，汪老师对 HPM 研究领域的发展和研究方向作了简要介绍，利用二项式定理、圆与椭圆之间的关系等高中数学内容阐明数学史与数学教育之间的关系。同时，汪老师基于 MKT 理论，结合斜率、虚数、对数、三角公式、点到直线距离公式等内容说明数学史与教师知识之间的密切联系。最后，汪老师介绍了 HPM 视角下的课例研究流程，提出 HPM 课例研究是通过丰富教师 MKT 而促进教师专业发展的重要途径，期待在 HPM 高中教师网络研修班专业学习共同体中的教师们能够实现“交流、合作、互补、共赢”。

精彩报告之后，HPM 高中教师网络研修班的专家组成员陆续发言，浙江省诸葛中学张小明老师回顾个人的 HPM 研究历程，提出 HPM 是一线教师应该重视的领域，是教师专业发展的重要抓手和切入点，期待在此届 HPM 高中教师网络研修班中获得进一步的成长。

专家组成员张小明老师　　　　专家组成员张海强老师

江苏省宜兴中学张海强老师回顾了个人对 HPM 认识发展的各个阶段，并以等比数列前 n 项和公式等教学案例说明数学史对于教学实践的价值，总结 HPM 对于个人专业发展的影响。张老师提出，HPM 能够改变教师的信念、提升专业水平、革新数学课堂和造就学生。

华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师指出，HPM 为教师专业发展提供了一条可操作、可实践、可复制、可推广的路径，期待教师学员以网络研修班为平台，关注自身的专业发展。

同时，邹老师结合整数集 Z 背后的历史故事，从“为数学课堂增加人的元素”这一角度补充说明数学史融入数学教学的价值，期待和老师们一起品味历史、学习历史、运用历史来提升教学，一起开启 HPM 网络研修之旅。

专家组成员邹佳晨老师　　　　专家组成员沈西德老师

四川省都江堰中学沈西德老师遗憾由于公务无法参与此次开班仪式，但沈老师将会作为专家组成员之一全程参与此次研修活动。

华东师范大学数学科学学院博士生孙丹丹是 HPM 高中教师网络研修班的特邀顾问，由于正在丹麦访学，通过寄语的方式分享了 HPM 初中教师网络研修班的开展经验。

HPM 高中教师网络研修班顾问孙丹丹　　　　上海市 HPM 工作室成员杜金金老师

最后，来自上海市建平中学的杜金金老师作为上海市 HPM 工作室成员分享了 HPM 课例研究对其专业发展的影响。杜老师结合课例“函数的概念”的实施情况，用函数值 $f(0)$ 到 $f(+\infty)$ 生动形象地介绍了将数学史融入数学教学对个人专业发展的影响，总结加入数学史与数学教育（HPM）工作室的成长与收获。

历时两个小时的开班仪式圆满结束，HPM 高中教师网络研修活动正式拉开序幕，来自全国各地的一百余位一线数学教师，通过网络汇聚于 HPM 高中教师网络研修班，将在“交流、研讨、实践、反思、写作”中开启教师专业发展的新征程。

2019-2020 年数学史与数学教育（HPM）初中教师网络研修班结业典礼纪要

刘思璐[1] 邵爱娣[1] 孙丹丹[2]

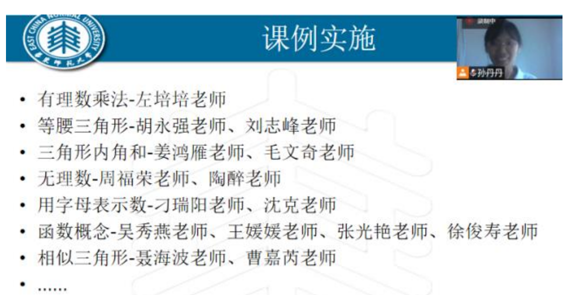
（1.华东师大教师教育学院，上海 200062；2.华东师大数学科学学院，上海 200041）

2020 年 7 月 19 日，第一届数学史与数学教育（HPM）初中教师网络研修班结业典礼借助腾讯会议平台线上召开。会议旨在回顾过去一年的研修历程，总结研修收获与成果，分享研修心得和体会，以期为未来的教师专业发展提供思想启迪。来自网络研修班的五十余位一线初中数学教师、四位专家委员会老师和若干硕博士研究生参加了本次会议，汇聚云端，盘点过去，展望未来。

会议分为 6 个环节，分别是研修总结、小组代表研修收获与感悟分享、教师自由分享、研修考核、线上合影和总结展望。

一、研修总结

在研修总结环节，研修班主持人、华东师范大学数学科学学院的孙丹丹博士首先回顾了研修阶段划分及侧重点、研修参与人员等，然后带领大家从素材学习、交流研讨、课例实施、反思分享四部分回顾概览了过去一年所开展的系列研修活动及大家参与情况，最后从课例写作、课题申请、公开课三方面总结了过去一年老师们的各种显性研修成果。孙博士希望也相信各位老师在一年研修期间积累的能量会有效助力老师们将来的教研活动，期待各位老师更多教研实践及成果。



孙丹丹博士总结

二、小组代表研修收获与感悟分享

在小组代表研修收获与感悟分享环节，7 位教师代表 7 个研修小组分享了他们的研修心得和感悟，这些学员的教学经验从 6-24 年不等，他们展示了 HPM 与有着不同教学经验的教师所碰撞出的别样思想火花。

河南省汤阴县实验中学的王媛媛老师结合函数主题讲述了自己的研修感悟。王老师指出对于函数这节课自己以前并没有过多的思考，基本是按照课本编排上课。参加了研修班以后，在 HPM 潜移默化的影响下，自己发生了很大的改变，知道了函数的概念是动态发展的，意识到要用发展的眼光看问题，这种思想的转变在一定程度上也能影响到自己的学生。现在自己在教学上也有了方向，备课的时候会思考这节课体现的数学本质是什么，思考如何让学生真正成为学习主人，课堂上也会更多地让学生去思考、探索和总结。

上海市复旦大学第二附属中学的张海燕老师从如何让数学课更有吸引力谈起，认为将数学史融入到数学课堂教学能够有效激发学生内在学习兴趣。进入研修班以后，自己从阅读中找到了连接曾经知识碎片的纽带，形成了网状结构，收获到了重生般的体验。课例实施阶段，自己也在教学设计的不断讨论、修改以及实施过程中实现了由量到质的飞跃。最后张老师提到教师要站在更高的观点去理解 HPM，通过古今对话探寻教学内容本质，拓宽知识视野俯瞰当下知识结构，顺其自然将数学史融入课堂。

王媛媛老师分享

张海燕老师分享

四川省武侯实验中学的刁瑞阳老师从需求、研思和成长等几方面介绍了自己的研修经历及体会。刁老师首先讲述了自己从大学以及刚进入工作时期开始阅读数学史书籍到加入研修班这样一个与 HPM 结缘的过程，接着从在上海交流、参与学习、课例实践和深入研讨四个方面详细地讲述自己在研修班的学习生活，研修促使自己阅读更多的文章以及总结与写作。在教学实践活动部分，刁老师从教育理念的改变、学生数学史展示和课例研究三个部分说明了研修的收获。最后刁老师分享了自己成长的感悟，指出要把被动的要求变成主动的研究。

广东省经济技术开发区第一中学的周福荣老师主要围绕三个改变分享了自己的研修感悟。第一个改变就是教育观念的转变，自己要“不当教书匠，争当育人师”，在以后教学中努力培养学生良好的学习习惯，更好地认识数学的本质。第二个改变是学习行动上的改变，现在的自己爱上了阅读，并且享受自己的课堂。第三个改变是思维模式的转变，现在的思维更广、更有好奇心，在评课的时候自己会有更多的想法跟其他老师一起分享。周老师表示一年的网络研修使自己走出了职业发展倦怠期，走进新的教研天地。

刁瑞阳老师分享

周福荣老师分享

聂海波老师分享

海南省农垦中学的聂海波老师做了“妙味无穷的 HPM 网络研修之旅”的分享。聂老师从自己与 HPM 网络研修班的邂逅谈起，表示非常幸运能够进入研修班。在研修班的材料阅读和案例讨论的思维碰撞中发现自己的不足，促进自我的收获与成长。这样的学习过程也使得自己经历了从初读文本的尝试运用，到初步使用的不够自然，以至深化应用这样一个过程的转变。聂老师提出一种思想的形成和落实仅靠一个人是非常困难的，HPM 学习共同体至关重要，正是经过团队的帮助和讨论才使得自己逐步深入理解和走近 HPM。

苏州市阳山实验初级中学校的胡永强老师做了题为“心之所向，素履可往；行而不缀，未来可期”的分享。胡老师首先表达了自己的感恩之情，感谢研修班的主持人、导师以及幕后的工作者给自己树立了做学问的好榜样。接着胡老师表示一年的研修让自己切实领会到了 HPM 们的魅力与价值，承诺在今后的数学课堂教学中要努力践行 HPM 理念并将其落实到行动中，把一年来的研修收获真正用于自己课堂，促进学生的数学学习。最后胡老师表明结业典礼不是终点，自己要在今后的日子里倾注更多的时间和汗水研习 HPM，牢记徐光启“吾迎难，难自消微。必成之”的教诲，保持力争上游的最美姿态。

胡永强老师分享　　　　　　　　姜鸿雁老师分享

最后，江苏省无锡市河埒中学的姜鸿雁老师做了以“高端纯粹 恩泽师生”为题的分享。姜老师的分享以研修进程为主线，首先从研修初期感受——一个充满希望的开始谈起，回顾了自己在“研修制度”鞭策下不断前行的研修阶段一。接着分享了“充盈”的研修阶段二，研讨和调查为自己的专业成长打开了一扇窗，自己小组主题的纵向深入与其他小组主题的横向拓展交织，让自己对不同的知识和自己曾经的设计都有了新的认识。姜老师结合自己三角形内角和的亲身实践谈到“纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行”，写作能够促进反思升华思想，“你听过的课，听过的讲座，生发的思考，一定会投射到你未来的课堂上”。

每位老师都真诚地与大家分享了自己一年来的研修故事和感悟，有理性的思考，有感性的抒发，混合着兴奋、温馨、感动与力量，将结业典礼气氛推向高潮。

三、教师自由分享

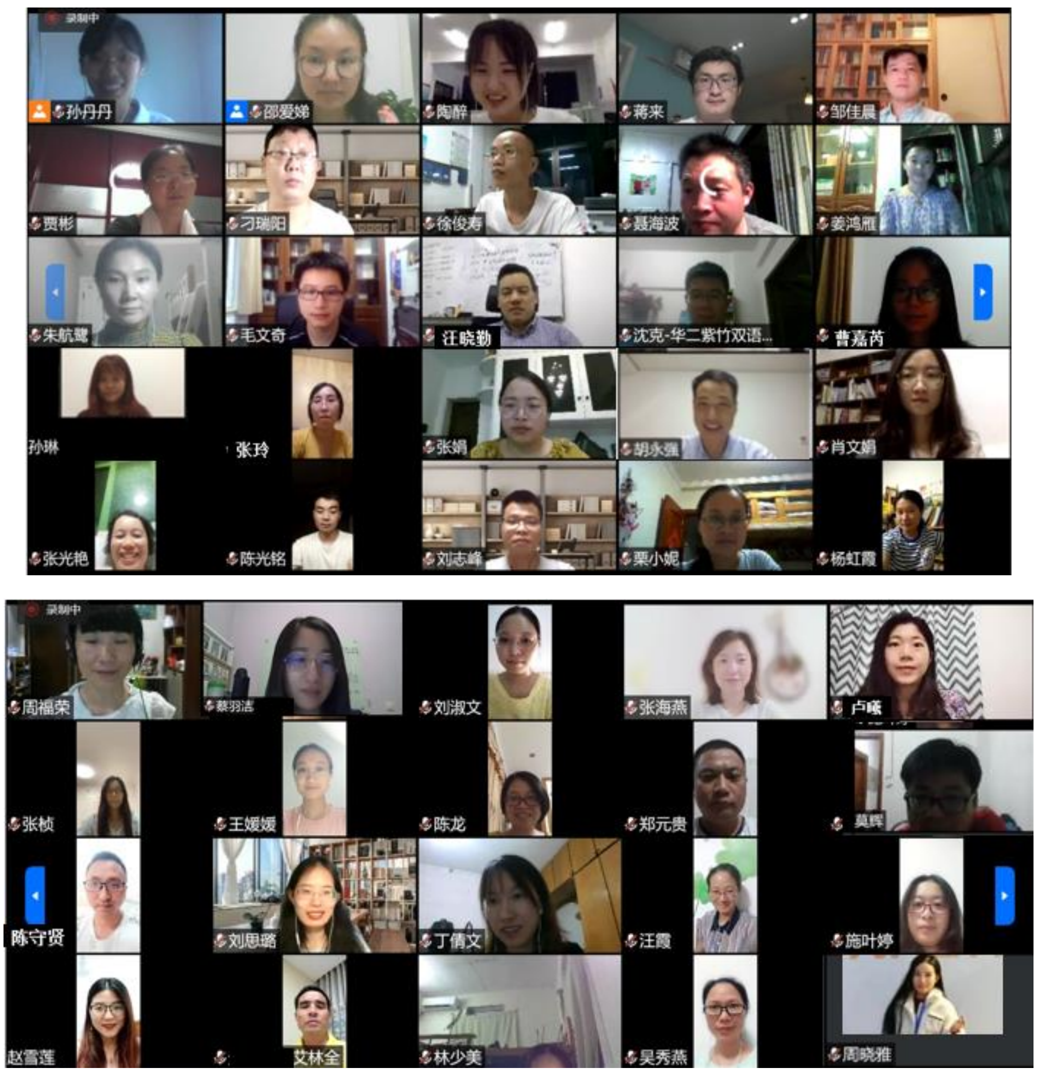
教师代表分享结束后，研修班其他老师也自由分享了自己研修体会。上海市浦东模范中学东校的左培培老师简单介绍了自己与 HPM 结缘的过程，研修班让自己有机会系统地学习 HPM，特别感谢研修班负责人的一路鼓励和支持。广东省湛江市第二中学的吴秀燕老师表示感恩研修班的引领和指导，自己在实施函数课例前后教学观念发生了很大的转变，不仅仅体现在对函数的理解上，更多的是在方法上，知道了怎么去做研究。江西科技师范大学的陶醉老师表达了对研修班的感谢，感谢汪老师团队给青年教师提供的成长机会，让自己在教育方式、学生成绩和数学核心素养之间找到了切入口。由于时间有限，其他老师没能在典礼上与大家进一步分享，但相信每一位老师都有自己独特的研修收获和感受。

四、研修考核

在研修考核环节，华东师范大学教师教育学院的邹佳晨老师先给大家简要介绍了 HPM 网络研修班成立的缘起，之后邹老师公布了学员考核情况，其中有 40 位老师完成了所有研究计划，64 位老师准予结业，同时公布了优秀学员评选标准并表彰了 40 优秀学员。邹老师对所有研修班学员表示祝贺并展望了未来 HPM 网络研修的计划，也邀请各位老师参加第八届 HPM 高级研修班，线下相聚。聊天框里弹出的一个个“留级”申请将结业典礼气氛再次推向高潮，相信不舍是对这段经历最好的嘉奖。

邹佳晨老师宣读研修考核结果

五、线上合影



线上合影

六、总结展望

总结展望环节，研修班委员会指导教师之一，上海建平远翔学校的贾彬老师提到在教学生涯中离不开团队，HPM 团队是一个引发自己教学理念改变的团队。贾老师表示研修班老师的好学、分享以及协作精神令人感动，自己也不断地被这种精神激励和鞭策。最后贾老师分享了自己线上实施 HPM 课例过程中学生精彩纷呈的探究成果，感慨让学生自己去探究数学过程非常重要。接着，华东师范大学教师教育学院的栗小妮博士表示参与研修班的课例研讨对自己来说是一次重新学习的过程，不同阶段的研讨都会促使自己再一次去研读史料，而每一次阅读和研讨都会对数学史、数学本质、数学教学产生更深层次的认识。栗博士建议大家今后要不断回顾数学史料，研修班不是一个结束，而是一个新的开始，希望大家在一个大的共同体中继续一起学习，一起推广 HPM。

在最后的总结点评中，汪晓勤教授首先祝贺了首届 HPM 网络研修班老师顺利结业。汪老师表示 HPM 初中网络研修班的效果超乎预想，并用“五个新”进行了总结。

- 新团队。相约云端，发现宝藏。共话教育，研讨问难。古今贯通，共同成长。
- 新阶段。就 HPM 实践促进专业发展而言，研修班学员已经走过“为历史而历史”的初级阶段，打破了数学史诠释学循环和数学教学诠释学循环之壁垒，逐渐走向成熟期。
- 新观念。老师们的感悟分享表明很多老师已经知道了不断学习的重要性。尼采曾说“一个热爱学习的人，是不会觉得生活枯燥乏味的”，史密斯也曾说“不断学习、不断教书、不断写作，其乐无穷。”
- 新成果。目前已经有很多老师发表或写作了新的论文，申请了新的课题，也期待将来仍有新的教学成果产生。
- 新旅程。大家来自全国各地，能够相聚学习一年是非常不容易的，之后应该继续 HPM 的名师之旅。

汪老师还表达了两点感谢，一是自己从研修班老师那里汲取了精神的力量；二是感谢了大家加强了自己的信念，研修班的老师让自己看到 HPM 对教师专业发展的有效促进。最后，汪老师将自己曾经填过的一首词（临江仙）赠给大家，与大家共勉。

知识之海望无垠，数学风骚独领。

多少难题只庸平。回溯千年史，翰墨书香盈。

畴人智慧博而精，涤荡凡俗心灵。

云端研修携手行。教育多歧路，青史为明镜！

典礼末尾，研修班主持人孙丹丹博士给大家送上了惊喜彩蛋——一个由研修班老师们照片及各自研修感悟整理而成的短视频，在浸润着感动和不舍的影像和旋律中，结业典礼画上句点。

以 HPM 网络研修促进教师专业发展已然行进在路上，向曾经荒芜的领地迈进，行进者是 HPM 学习共同体。第一届数学史与数学教育（HPM）初中教师网络研修班结业典礼是一种结束，但更相信这也会是一份新的开始。