上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2018 年第 7 卷第 5 期

16 世纪德国版画—几何学家在测量

刊首语

《普通高中数学课程标准（2017 年版）》指出：“数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点以及他们的形成和发展，还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及与数学相关的人文活动。”

数学史是数学文化的重要载体。基于数学史的三角学教学，向学生展示三角学发展的历史画卷，展示数学文化的知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐和多元文化等五个内涵。如课例“正弦定理”以 10 世纪天文学家阿尔•库希（Al-Kuhi, 约 940—1000）的流星测量方案引入，揭示正弦定理对于人类认识流星本质的重要性，突出数学与天文学的学科联系。“余弦定理”复习课借鉴欧几里得（Euclid，约公元前 325—公元前 265）“新娘的座椅”的证法展示勾股定理的证明，再借鉴《几何原本》探究余弦定理的证明，最后以德摩根（A. De Morgan, 1806-1871）证法衔接正弦定理与余弦定理，体现数学的知识源流。在课例“任意角”的新知探究部分，教师引入古代计时仪器日晷与《周髀算经》中测量四季的方法，引导学生感受静态角与动态角在确定时间上的社会角色。同时学生既欣赏韦达外接圆方法的精彩，也领略中国数学家梅文鼎（1633-1721）同径法的美妙，感受数学的多元文化。课例“周期函数”引导学生经历从“描述性定义”到“形式化定义”的过渡，在古今对话中体会三角函数奇妙的周期之美。

HPM 视角下的三角学教学，引导学生以数学的眼光观察现实生活的三角学，以数学的思维思考三角学的数量关系与空间形式，以数学的语言表达三角学研究的内容和方法，认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。张奠宙先生指出：“如果数学课堂能够有广博的文化知识滋养，充满高雅的文化氛围，弥漫着优秀的文化传统，数学教学可以说达到最高境界了。”未来，基于数学史的高中数学常态课开发，有如下的研究工作。

（1）加强历史研究。HPM教学的“文化之魅”始于历史研究，而数学史蕴含着丰富的教学素材和思想养料，加强历史研究是未来HPM课例中数学文化多元维度开发的基础环节。

（2）夯实理论基础。HPM研究的基本进路是“自下而上”，未来需要基于一线教学实践经验，不断对数学文化的内涵做出更深刻的理论研究。

（3）立足教育现实。HPM视角下的数学教学不可能脱离教育现实来进行，不能为文化而文化，为历史而历史。

随着 HPM 理论与实践研究的深入，充满文化芬芳的高中数学课堂必将彰显“立德树人”的教育价值，焕发更加强大的生命活力。

目　录

CONTENT

理论探讨

初中 HPM 课例中的数学文化内涵分析

林庄燕

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引 言

所谓HPM视角下的数学教学，是指借鉴数学的历史、采用适当的方式运用数学史料以提升教学有效性、优化数学教育价值的一种教学方式。大量教学实践表明，数学史可以揭示知识之谐，呈现方法之美，营造探究之乐，达成能力之助，展示文化之魅，实现德育之效[1]。其中，“文化之魅”是指历史为数学赋予了文化价值。丹麦学者Jankvist将数学史的教育价值分成“工具”和“目标”两个维度[2]，即，数学史既是教学的工具，又是教学的目标。“文化之魅”属于“数学史作为目标”的价值取向。

近年来，HPM 视角下的数学教学日益受到一线教师的关注和推崇，相关的教学案例颇受他们的欢迎。许多教师乐于学习HPM的理论，并开展教学实践。但是，在升学压力之下，教师对于数学史的教育价值还持有片面的理解，对“文化之魅”的内涵还缺乏深刻的认识。根据已有的关于数学史教育价值的理论探讨，结合高中数学课程标准中所提出的课程目标，建立了“基于数学史的数学文化内涵”分类框架，该框架包含知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐、多元文化五个维度[3]。知识源流是指某个知识点的历史发展过程，以及相关的人物、事件、思想等；学科关联是指数学与其他知识领域（科学技术、社会科学、人文艺术等）之间的关联；社会角色是指数学对人类文明进步、社会发展所起的重要作用；审美娱乐是指数学美和趣味数学；多元文化是指不同文明、不同地域在同一数学课题上的成就和贡献。

有了上述框架，我们自然想了解：已有的初中HPM课例体现了哪些数学文化内涵？有何特点与不足？我们希望通过课例分析来回答上述问题，以期为未来的HPM课例研究以及关于数学文化内涵的进一步探讨提供有益的启示。

2 课例的选取

笔者选取的是2014-2018年发表或待发表的12个初中HPM课例[4-15]作为研究对象。这些

课例大多由HPM学习共同体开发。下表扼要展示了各课例的教学过程，涉及数学史内容的部分，在后面3.1节（知识源流）会做介绍。

表1 12个HPM课例的信息

课例	教学过程	数学史运用方式	实施时间
字母表示数	通过古埃及数学问题引入，让学生设未知数，列一元一次方程；再通过丢番图的二元一次方程组问题，提出“字母表示任意数或一类数”的思想；最后通过火柴棍搭正方形问题，进一步巩固“字母表示任意数或一类数”思想。	重构式，复制式	2017
反比例函数	通过《太上感应篇》中的故事引出称重活动，揭示重量、砝码、力臂之间的关系，引入反比例函数概念；再以问题串的形式让学生辨析反比例函数概念；最后设计三个不同类型的练习题，进一步巩固学生对概念的理解和掌握。	重构式，顺应式，附加式	2016
三角形内角和	通过泰勒斯拼地砖的故事引入，通过三角形拼图活动，让学生自主探究并发现三角形内角和；再引导学生用严谨的方法进行说理；最后改编美国几何教科书中的问题丰富和强化学生对三角形内角和性质的理解与应用。	附加式，复制式，顺应式，重构式	2015
平方差公式	通过佃户租地的故事引出平方差公式；用赵爽的“面积割补法”证明公式；在巩固练习之后，提出丢番图的二元问题，借助“和差术”，利用平方差公式加以解决。	附加式，复制式，顺应式，重构式	2014
分数指数幂	首先让学生通过类比和猜想得到$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；然后通过 4 道思考题体会分数指数幂和方根之间的关系，引出分数指数幂与根式之间的一般关系；最后展示分数指数幂符号的演进过程，并设计两道以数字为底的常规题目和两道以字母为底的历史素材作为练习。	重构式，复制式，顺应式	2015
一元二次方程配方法	复习巩固开平方法；通过改编花拉子米的方程问题，引导学生认识代数意义上的“配方”对应于几何意义上的“将长方形割补成正方形”；接着，让学生探究古巴比伦一元二次方程（一次项为负）的几何解法。	重构式，附加式，顺应式	2015
邻补角、对顶角	通过“如何测量墙角线的夹角”的问题引出邻补角和对顶角概念；利用视错觉图，揭示仅根据图形观察所得结论未必可靠的道理；让学生对“对顶角相等”进行说理。接着，通过微视频讲述泰勒斯的故事以及“说理”的历史背景；最后运用新知解决问题。	附加式，复制式	2018
演绎证明	结合生活实例，引入数学证明；通过回顾“对顶角相等”的证明，让学生感知数学中的“演绎证明”；播放微视频，让学生了解证明的由来，并认识泰勒斯、欧几里得和《几何原本》；最后让学生证明三角形内角和定理。	附加式，复制式	2018
三角形中位线	通过四等分三角形土地问题引出中位线概念；通过实验操作猜想中位线性质；让学生用多种不同的方法对性质进行证明；最后通过微视频介绍中位线定理的历史。	顺应式，附加式，复制式	2018

实数的概念	通过 A4 纸的长宽之比问题的探究，引入$\sqrt{2}$；再通过求近似值的计算来体验$\sqrt{2}$是无限不循环小数，从而建构无理数的概念；最后播放微视频，回溯无理数的历史。	附加式	2017
完全平方公式	设计“已知正方形面积，求边长”的问题来引入课题；再设计“从符号表征下的公式推导到图形表征下的公式解释”和“从和的平方到差的平方”的探究过程；最后通过例题和练习，让学生理解和掌握公式。	重构式，复制式，附加式	2018
等腰三角形的性质	利用古罗马时期的墓碑设置问题引入课题；再利用等腰三角形纸片，让学生观察、操作并猜想等腰三角形具有的性质并推理论证；最后让学生复原古人测山高的方法。	顺应式，附加式	2018

3 初中 HPM 课例中的数学文化内涵

3.1 知识源流

歌德曾说过：“一门科学的历史就是这门科学本身。”[16]在HPM视角下的数学教学，就是需要用不同方式运用相关的数学史，让学生了解数学知识发展的过程、重要结果、主要人物、关键事件，让学生认识到概念与术语、问题与求解、命题与证明、工具与符号等数学史内容，感悟知识的渊与源。

表2　12个课例中的数学史内容

课例	人物与事件	概念与术语	问题与求解	命题与证明	工具与符号
用字母表示数	丢番图用字母表示未知数	—	古埃及一元一次方程问题；丢番图的二元一次方程问组题	—	—
反比例函数	欧几里得定义反比例	“反函数”一词中的“反”的含义	—	—	—
三角形内角和	泰勒斯发现三角形内角和定理	—	美国早期几何教科书中的问题	毕达哥拉斯学派、欧几里得、克莱罗、美国早期教科书给出的不同证明	—
平方差公式	赵爽证明平方差公式	—	丢番图二元二次方程组问题	面积割补法	—

分数指数幂	斯蒂菲尔将幂指数从非负整数推广到负整数；沃利斯将正整数幂的运算推广到任意有理数幂	—	沃利斯和欧拉的有关分数指数幂问题	—	详见图 4 中分数指数幂符号的历史
配方法	花拉子米用几何方法解一元二次方程	—	花拉子米的一元二次方程及其几何解法	—	—
邻补角、对顶角	泰勒斯开创演绎证明之先河	—	—	演绎证明的必要性；泰勒斯关于“对顶角相等”的证明	—
演绎证明	《几何原本》奠定了数学证明的模式	—	—	欧几里得关于“三角形内角和”和“对顶角相等”的证明	—
三角形中位线	欧几里得用面积方法证明平行线分线段成比例定理（三角形中位线定理为其特殊情形）	—	古巴比伦泥版记载的土地分割问题	刘徽的出入相补法	—
实数的概念	毕达哥拉斯学派发现无理数	无理数的辞源	—	—	根号“$\sqrt{\ }$”的历史
完全平方公式	刘徽用几何方法解释开方法	—	“已知正方形面积，求边长”问题	完全平方公式的几何证明	—
等腰三角形的性质	古埃及和古罗马人使用水准仪	—	16 世纪的测山高问题	—	水准仪

3.2 学科联系

数学史告诉我们，数学与其他学科（自然科学、人文科学、社会科学）之间有着紧密的关联，这种关联正是课堂上数学文化的内涵之一。

课例“反比例函数”[5]的新课引入环节，教师讲述了我国古代的劝善书《太上感应篇》中记载着一个关于杆秤的故事：明朝万历年间，扬州有一家大南货店，店主在临死的时候吩

咐儿子说：“我平生起家，全靠这杆秤。这杆秤乃是乌木合成，中间空的地方藏有水银，称出的时候，就将水银倒在秤头，称入的时候，就将水银倒在秤尾。这样‘入重出轻’，就是我致富的原因。但是，目前竞争激烈，也只能惨淡经营。希望你更加努力，争取扭转局面。”从而引出问题：店主究竟是怎样“入重出轻”的？他这样做的利和弊是什么呢？利用杆秤的故事和天平实验引出反比例函数的概念，让学生体会到数学与物理之间的密切联系。

课例“演绎证明”[11]中，教师用博物学家达尔文（C. R. Darwin, 1809-1882）的故事来说明演绎证明的意义：有一个农场主，他的猪总是养不胖，因此他忧心忡忡。这件事被达尔文知道了，他告诉农场主：多养猫，猪就会胖起来。理由是猫吃田鼠，多养猫便少田鼠；田鼠吃土蜂，少田鼠便多土蜂；土蜂传播三叶草，多土蜂便多三叶草；猪吃三叶草，多吃三叶草，猪便会胖起来（如图1）。

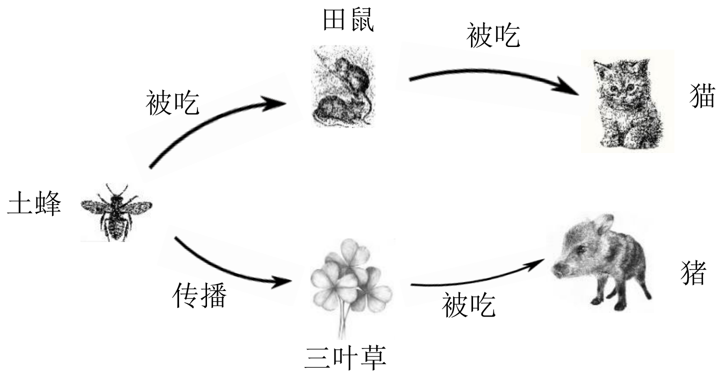

图1 农场的生物链关系

这段史料看上去是在讲生物学中关于食物链的故事，与数学似乎无关，但是关于食物链的推理实例更有利于学生对逻辑推理的理解和对证明作用的领会。这恰好说明了演绎证明不仅仅局限于数学，利用生物学中的食物链来教数学，是数学教学中体现学科联系的途径之一。

3.3 社会角色

数学对人类文明的进步、社会的发展起到了的重要作用，而应用的广泛性正是数学的重要作用之一。数学文化中的“社会角色”就是指的数学的应用价值。

课例“等腰三角形性质”[15]为我们展示了古代埃及和巴比伦通过生活经验的积累制作的由一个等腰三角形及悬挂在顶点处的铅垂线组成的水准仪。土地丈量员在测量调整底边的位置，如果铅垂线经过底边终点，就表明底边垂直于铅垂线，即底边是水平的，我们从中就可以发现这实际上运用到了等腰三角形三线合一的性质。直到文艺复兴时期，水准仪

（如图2）这种工具也被广泛地运用着，那个时代的测量员正是利用水准仪来测量山的高度（如图3）。

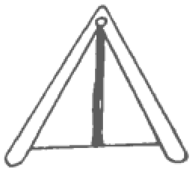

图2 水准仪

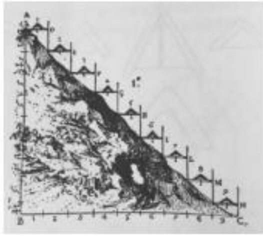

图3 16世纪的山高测量问题

课例“三角形内角和”[6]中设计“泰勒斯拼图”活动，再现三角形内角和的发现过程。公元前6世纪古希腊思想家、哲学家泰勒斯在装修房子时发现了一个非常有趣的事实：六块同样的正三角形地砖恰好铺满某一点的四周而不重叠，也不留任何缝隙。这就表明，大小相同的六个角相加恰好等于360°，其中三个角相加恰好等于180°。泰勒斯发现三角形内角和的过程，让学生感受到数学知识来源于生活，数学的应用是无处不在的。

教师将发生在古希腊的欺骗性土地分配事件，改编为“庄园主与佃户”的故事来引入“平方差公式”[7]的教学：从前，有一个狡猾的庄园主，把一块边长为a（$a>5$）米的正方形土地租给佃户张老汉。第二年，他把这块土地的一边减少5米，相邻的另一边增加5米，继续租给张老汉，租金不变。教师引导学生比较边长变化前后的土地面积来判断张老汉是否吃亏。由此可见，数学与我们现实生活息息相关。

课例“三角形中位线定理”[12]中教师利用古巴比伦时期数学泥板上记载的六兄弟分割三角形土地的问题，巧妙设计“四兄弟分土地”问题的情境：在古巴比伦两河流域，有四兄弟本来相安无事的生活着，直到一天他们的父亲去世打破了这一平静，大家为了分割父亲留下的一块土地而争论不休，教师让学生设计方案中解决四兄弟矛盾。

上述课例中所提到的历史故事都让学生感受到数学在现实生活中的应用价值，深刻体现了数学的社会角色。

3.4 审美娱乐

数学史告诉我们，促进数学发展的不仅有实际应用，还有美学标准、智力好奇和趣味娱乐。英国哲学家和数学家罗素（W. Russell, 1872-1970）说过：“数学，如果正确地看，不但拥有真理而且也具有至高的美。”[17]数学美包括简洁美、奇异美、对称美和统一美。

课例“分数指数幂”[8]展示了分数指数幂的符号从14-17世纪这三百余年来的完善过程，符号的形式越来越简洁、直观（如图4）。

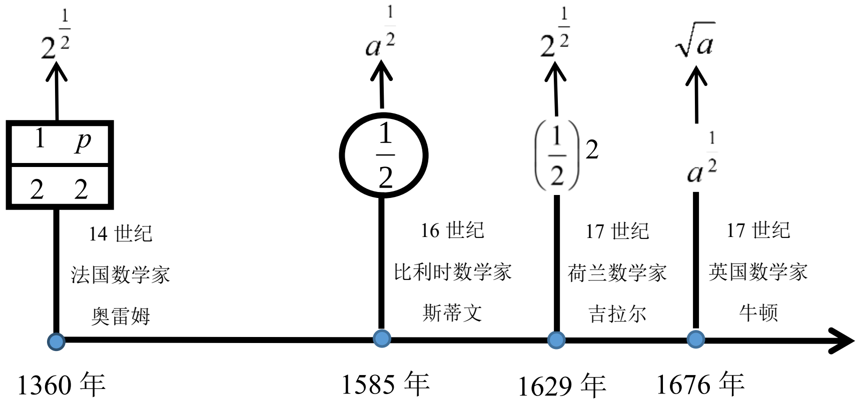

图4 分数指数幂符号的历史

课例“字母表示数”[4]中教师给出了古埃及时期莱因德纸草书上的一个问题：“一个量，加上它的$\frac{2}{3}$，它的$\frac{1}{2}$和它的$\frac{1}{7}$，等于33，求该量。”让学生感觉到现今符号语言的简洁之美。

课例“平方差公式”[7]展示了数学解题方法中的对称美。教师将古希腊丢番图《算术》中的一个问题作为例题：已知两正数和为20，两数积为96，求两数。由于学生没有学过一元二次方程，教师采用丢番图的“和差术”：假设所求两数分别为$10-x$和$10+x$，则$(10-x)(10+x)=96$，即$10^2-x^2=96$，故$x=2$，故所求两正数分别为12和8。学生或许会困惑为什么将两数设为$10-x$和$10+x$，但从解题过程中，可以看到“和差术”的方法对于简化计算的优势，这正是体现了对称之美。

在课例“邻补角、对顶角”[10]中，教师通过趣味数学中的视错觉图形（图5），告诉学生“仅凭观察得到的结论未必可靠”的道理。

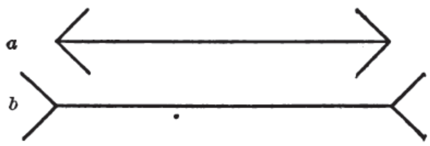

图5 关于线段大小关系的视错觉图形

实际上，早期几何教科书为了说明演绎证明的重要性，常常使用这类图形，图 6 是关于直线位置关系的两种视错觉图形。

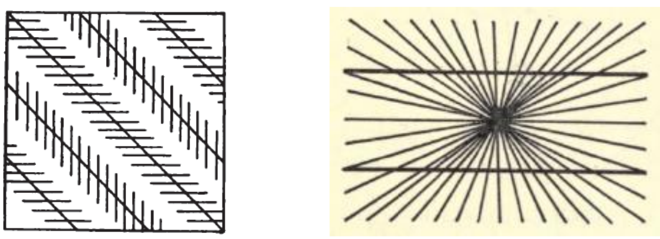

图6 关于直线位置关系的视错觉图形

3.5 多元文化

历史上不同时空的数学家对于同一个数学主题往往都做出了各自的贡献，数学史揭示了数学文化的多元性。因此，“多元文化”构成了数学文化的重要内涵。

课例“一元二次方程的配方法”[9]中让学生经历配方法的产生过程，重新发现古埃及祭司、古巴比伦祭司、欧几里得（公元前3世纪）、《九章算术》作者、花拉子米（Al-Khwarizmi, 9世纪）的几何方法，完成与古代数学家的一次“跨越时空的心灵之约”，拉近了他们与数学的距离，让他们感悟数学文化的魅力。课例“完全平方公式”[14]展示了古希腊数学家欧几里得、中国数学家刘徽（3世纪）、古希腊数学家席翁（Theon, 4世纪）、阿拉伯数学家花拉子米、印度数学家婆什迦罗（Bhāskara, 1114-1185）、意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci, 13世纪）、法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）等对完全平方公式的图形（几何）形式、文字形式和符号形式所做出的贡献（如图7），呈现了多元文化。

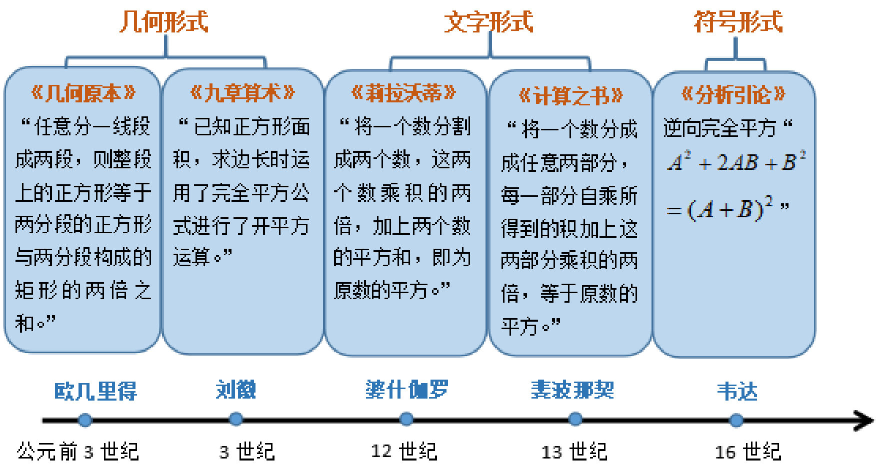

图7 完全平方公式的历史

4 讨 论

图 8 给出了数学文化五个维度的频数分布。

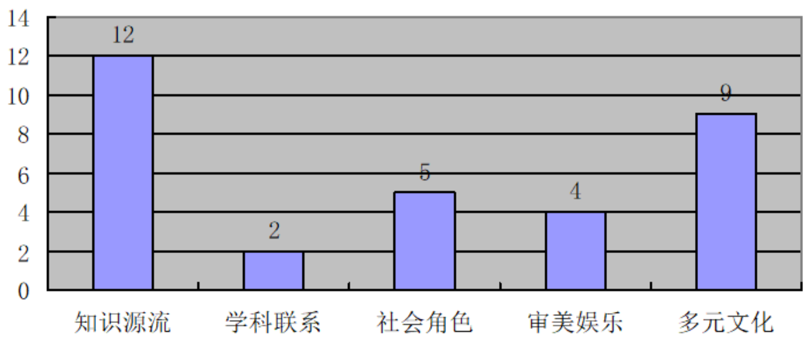

图 8 数学文化内涵不同维度的频数分布

由图 8 可见，五个维度的利用很不均衡。由于借鉴知识的发生和发展过程、运用相关的历史素材是HPM视角下的数学教学的基本特点，因此，12个HPM课例都涉及“知识源流”这一维度。数学史上，任何概念、公式、定理或问题都不是某一个数学家，也不是某一个国家或地区的专利，不同时代、不同文明、不同地域的数学家都可能做出各自的贡献（如问题的提出、公式的推导、定理的证明、符号的创造等等）。因此，当教师将数学史融入教学时，往往会涉及多元文化，这就是为什么“多元文化”这一维度出现的频数仅次于“知识源流”了。然而，社会角色、审美娱乐和学科联系三个维度很少出现在所考察的HPM课例中，因此，许多课例尽管采用了HPM的视角，但实际上其“文化味”是不足的。究其原因，有三种因素制约了数学文化元素的多元应用。

一是教师在数学文化内涵认识上的局限性。数学史是数学文化的重要组成部分，所以，泛泛地说，数学史融入数学教学就意味着数学文化融入数学教学。但事实上，教师可能只聚焦于“知识源流”（自然涉及“多元文化”），而忽视其他维度，因而影响了历史素材的选择和运用。

二是教师所掌握的数学文化素材较少。大多数HPM课例所运用的历史素材都比较单一。例如，古巴比伦人在土地丈量的实践中提出“已知长方形面积以及长宽之差，求长和宽”问题，在没有代数符号的情况下，他们只能依靠几何方法，通过割补将长方形转化为正方形来求得原长方形的宽。BBC制作的《数学的故事》（第一集）中包含了上述内容。如果融入上述素材，那么，课例“解一元二次方程的配方法”就多了数学文化的“社会角色”维度。又如，许多绘画作品，如16世纪意大利艺术家弗朗西斯卡（P. della Francesca, 1406-1492）的《基督受鞭图》，其长宽之比满足 $\sqrt{2}:1$ 。于是，课例“实数”就有了数学文化的“学科联系”维度（数学与艺术），等等。

三是数学教学的现实条件。HPM课例都是在常规课堂中实施的，教师要完成常规的教学目标，就必须有一定的巩固练习时间。事实上，中学的教学进度并不允许一节常态课运用太多的历史素材。因此，当我们去分析HPM课例中的数学文化内涵时，不应忘记，理想和现实之间是存在差距的。

5 启 示

以上我们看到，虽然数学文化内涵的五个维度在所考察的 HPM 课例中都有体现，但在“学科联系”、“社会角色”和“审美娱乐”三个维度的运用情况并不如人意。要在HPM课例

中更深刻地体现数学的文化价值，让数学课堂充满数学文化的芬芳，HPM专业学习共同体还应在以下方面下功夫。

（1）深入开展教育取向的数学史文献研究。数学史是一个巨大的宝藏，可用的素材取之不尽、用之不竭。没有历史研究，HPM课例就成了无源之水、无本之木，数学的“文化之魅”不易呈现。

（2）夯实HPM的理论基础。在HPM领域，理论和实践始终保持着良性互动：课例研究为HPM理论的建构提供论据，而HPM的理论择反过来指导课例研究。根据课例分析，我们得出基于数学史的数学文化内涵的五个维度，反过来，数学文化的五个维度又指导我们更有针对性地对历史材料进行选择、裁剪和加工。

（3）HPM研究不可能脱离学校数学教育的现实。在教学进度无法更改、课堂时间极其有限的情况下，要多维度展现“文化之魅”，融入更多的数学史素材，理想的策略是在多个教学环节中运用史料，如根据历史材料编制数学问题作为例题或练习题，制作简短的HPM微视频，等等。

我们有理由相信，随着实践研究的深入开展，HPM课例必将越来越有“文化味”，越来越有吸引力。

参考文献

[1] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A categorization model for educational values of history of mathematics: an empirical study [J]. *Science & Education*, 2017, 26: 1029-1052.

[2] Jankvist U.T. A categorization of the ‘whys’ and ‘hows’ of using history in mathematics education [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, 71: 235-261.

[3] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2018, 待发表.

[4] 孙洲. HPM 视角下的“字母表示数”教学[J]. 数学教学, 2017(6): 28-30.

[5] 王进敬, 栗小妮. “反比例函数”: 实验重构数学史, 故事凸显价值观[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(6): 118-123.

[6] 唐秋飞. “三角形内角和”: 在多个环节中渗透数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015(7): 69-73.

[7] 李玲, 顾海萍. “平方差公式”: 以多种方式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014(11): 35-39.

[8] 汪晓勤, 叶晓娟, 顾海萍. “分数指数幂”: 历史发生的视角看规定[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015(4): 57-61.

[9] 沈志兴, 洪燕君. “一元二次方程的配方法”: 用历史体现联系[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015(10): 109-113.

[10] 顾海萍, 孙丹丹. HPM 视角下的邻补角、对顶角教学. 中学数学月刊, 2018, (9): 45-48.

[11] 贾彬, 栗小妮. HPM 视角下的“演绎证明”教学. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018, (5): 44-49.

[12] 张莉萍, 栗小妮. HPM 视角下的“三角形中位线”的教学. 数学教学, 2018, (7): 11-15.

[13] 宋万言, 栗小妮. “实数的概念”: 折纸、拼图中发现，计算、比较中建构. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017, (7): 41-47.

[14] 栗小妮, 沈中宇. 完全平方公式: 从历史中找动因、看形式. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018, (3): 46-51.

[15] 汤雪川, 栗小妮. 等腰三角形的性质. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018, (11): 待发表.

[16] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M].北京: 科学出版社, 2017.

[17] 代钦. 试论数学美及其教育价值[J]. 内蒙古师大学报(自然科学文汉版), 1992, (1): 20-25.

历史研究

20 世纪上、中叶美英三角学教科书中的锐角三角函数引入方式

卢成娴

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

近年来，将数学史融入初中数学教学受到一线教师的广泛关注，相关的教学案例也日渐增多。鉴于数学史“高评价、低应用”的现实，我们建立 HPM 专业学习共同体来开发 HPM 课例。由大学研究人员与中学一线教师组成的共同体的建立，使一线教师摆脱了教学资源匮乏的困境。大学研究人员通过文献研究，勾勒相关主题的历史发展脉络，并获得有关素材；中学教师利用这些素材进行初步的教学设计，经过交流、研讨、修正、试教，最终形成较为完善的设计。无疑，理想的 HPM 教学设计是建立在深入的历史研究和丰富的历史资料基础上的。

锐角三角函数是初中数学的重要内容之一，它既是直角三角形边角关系的进一步拓展，又为后面学习解三角形以及高中三角函数内容奠定基础。目前，大部分教科书都通过创设情境来引入锐角三角函数概念，但不同版本教科书所创设的情境互有不同。人教版教科书将正弦作为三角函数的切入点，通过“水管问题”，引导学生探索直角三角形中角的对边与斜边的关系；而北师大版、苏科版和沪教版则以正切为切入点，分别利用梯子的倾斜程度、台阶的陡缓程度以及测量金字塔高度的测量引入概念。从现有文献来看，大部分教学设计都采用与教科书相似的情境来引入新课[1]-[8]；而一线教师希望能够看到 HPM 视角下的锐角三角函数教学设计。

为此，我们需要对锐角三角函数的历史进行深入研究。文[9]已经对三角函数概念的发展历史进行过探析，但并未揭示三角函数概念发展过程中的历史动因。我们希望了解：历史上的三角学教科是如何引入锐角三角函数概念的？是如何揭示锐角三角函数的价值的？对我们今日的教学有何启示？

2 三角教科书的选取

我们选取 1900-1959 年间出版的 49 种西方三角学教科书，对其中的锐角三角函数引入方式进行考察。在 49 种教科书中，46 种教科书出版于美国，3 种出版于英国；10 种是中学教科书，39 种是大学教科书。图 1 给出了各种教科书的年代分布情况。

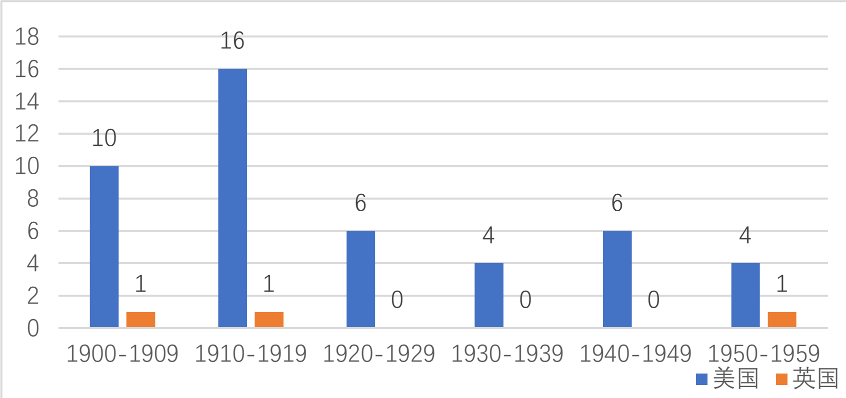

图 1　49 种三角学教科书的时间分布

3 锐角三角函数的引入

在 48 种教科书中，对于锐角三角函数的引入，大致可分为以下六种方式。

3.1 直接定义法

第一种，直接在一个直角三角形中定义锐角三角函数[10]。

如图 2 所示：$\sin\theta=\dfrac{\text{对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{\text{邻边}}{\text{斜边}}=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{\text{对边}}{\text{邻边}}=\dfrac{y}{x}$

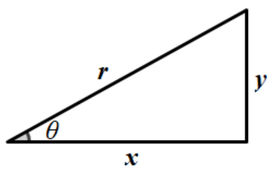

图 2

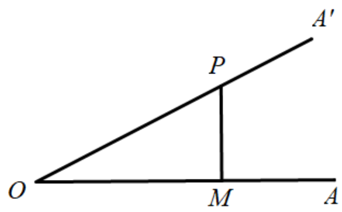

图 3

第二种，先构造直角三角形，再直接定义[11]。

如图 3 所示，在∠O 的一边上任取一点 P，过 P 点作对边的垂线段 PM，在直角三角形 POM 中，$\sin\theta=\dfrac{MP}{OP}=\dfrac{\text{对边}}{\text{斜边}}$，$\cos\theta=\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$，$\tan\theta=\dfrac{MP}{OM}=\dfrac{\text{对边}}{\text{邻边}}$。

3.2 终边定义法

20 世纪的大多数教科书已经将角推广为任意角，因此，定义三角函数时针对的也是任意角。先在四个象限中利用终边定义法定义任意角的三角函数[12]，如图 4 所示。设$\angle\theta$为任意角，在其终边上任意取一点 P，过点 P 作 $X'X$ 轴的垂线段，垂足为 A，设点 P 的坐标为

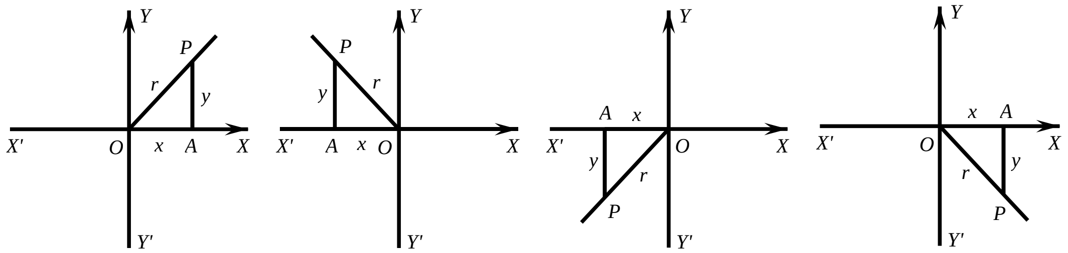

图 4

(x, y)，线段 OP 的长度为 r，则 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$。而锐角三角函数则为其中一种特殊情形。当$\angle\theta$为锐角时，其终边落在第一象限，此时终边上点 P 的横坐标与纵坐标分别为直角三角形 POA 中该角邻边和对边的长度。故 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{\text{对边}}{\text{斜边}}$，

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\text{对边}}{\text{邻边}}$。

3.3 相似三角形引入

第一种：直接给出 2 个或 3 个相似直角三角形，探究这几个三角形边与角的关系[13]。

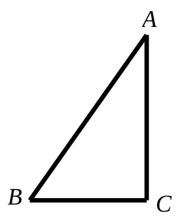

图 5

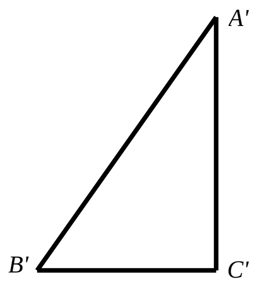

图 6

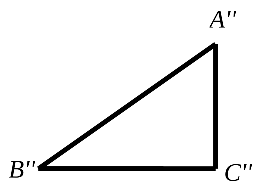

图 7

如图 5 和图 6 所示，ΔABC 与 $\Delta A'B'C$ 是 2 个相似的直角三角形。根据相似三角形对应边成比例知 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{A'C'}{A'B'},\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{B'C'}{A'B'},\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{A'C'}{B'C'}$，确定了三角形中$\angle B$ 的值，这三组比值也就唯一确定。如果保持 $AB=A''B''$，改变$\angle B$ 的大小，比较图 5 与图 7，此时三组比值也相应发生变化。也就是说，这三组比值是关于$\angle B$ 的函数，因此，将这三组比值分别定义为$\angle B$ 的正弦、余弦和正切函数，即 $\sin B=\dfrac{AC}{AB}$，$\cos B=\dfrac{BC}{AB}$，$\tan B=\dfrac{AC}{BC}$。

将ΔABC与$\Delta A'B'C'$以及$\Delta A''B''C''$进行对比，从函数的观点说明三组边的比值与$\angle B$的关系，有助于学生理解锐角三角比的函数本质。将斜边 AB 的长度固定，当$\angle B$ 变化时，三组边的比值也随之变化。也有教科书将ΔABC和$\Delta A''B''C''$置于同一圆中，学生可以更清楚地看出比值的变化情况。

第二种：在角的一边上取多个点分别作对边的垂线段，构造多个相似的直角三角形，探究边的比值关系[14]。

如图 8 所示，若$\angle O$ 是任意一个锐角，在一条边上任意取点 A、C，过点 A、C 分别作另一条边的垂线段 AB、CD，利用相似三角形的性质可知，$\frac{AB}{OB}=\frac{CD}{OD}$，$\frac{AB}{OA}=\frac{CD}{OC}$，$\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OC}$，即$\frac{\angle O\text{的对边}}{\angle O\text{的邻边}}$，$\frac{\angle O\text{的对边}}{\angle O\text{的斜边}}$，$\frac{\angle O\text{的邻边}}{\angle O\text{的斜边}}$为定值，从而引出正切、正弦、余弦函数的定义。

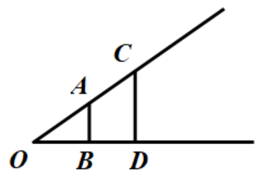

图 8

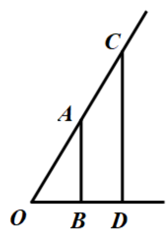

图 9

3.4 探究式引入

（1）如图 9，先做出一个 59°的$\angle O$，在 O 的一条边上任意取一个点 A，过点 A 作另一条边的垂线，垂足为 B，量出 AB，OB 的值，并计算$\frac{AB}{OB}$的值；改变点 A 的位置（设为 C 处），重复上述的过程，你有什么发现？

（2）再做出一个 32°的角，重复（1）中的过程，（1）中发现的结论是否依旧成立？

（3）如果将一个角的度数固定，上述的比值是否也随之确定？

由上述探究过程可见，在直角三角形中，确定一个锐角，就确定了对边与邻边的比值。于是，将该比值定义为锐角的正切函数。类似可得正、余弦函数的定义[15]。

3.5 现实情境引入

部分三角学教科书通过创设现实情境来引入锐角三角函数概念，具体的情境大致可以分为三类。

情境 1：坡度刻画

设直角三角形 ABC 为一山坡截面，如图 10 所示。可以用两种方式来刻画山坡的倾斜程

度：一是倾斜角$\angle CAB$的度数，二是坡面的垂直高度与水平宽度的比$\frac{BC}{AB}$。这两种方法实际上把角度与边长联系起来，若$\angle CAB$变化，则坡比$\frac{BC}{AB}$也随之发生变化，因此，坡比是角的函数。由此引出正切函数以及正、余弦函数。[16]类似的情境还有铁轨的斜面、屋顶的斜面等。

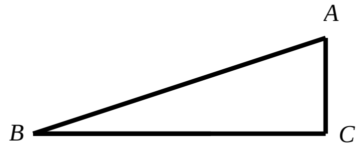

图 10

情境 2：以影推高

古人通常利用日影来测量高度。如图 11，要测塔高h，先测得其影长 122 英尺，并在塔的旁边垂直竖立一根长为 10 英尺的木竿，测得竿影为 20 英尺。因光线可视为平行，故利用相似三角形性质得$h:122=10:20$，得$h=61$。[17]

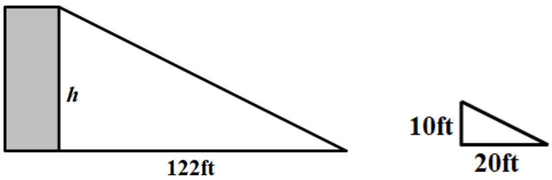

图 11

公元前 6 世纪，古希腊哲学家泰勒斯（Thales）正是利用上述方法测得金字塔的高度。值得注意的是，塔的高度与竿的长度无关。只要太阳光照射角度不变，竿高和它的影长之比是一个定值。随着照射角度的变化，比值也随之变化。由此可知，这个比值是与太阳光照射角度有关的一个函数，由此得到锐角三角函数的定义。

多数教科书均含有利用日影测高的实例，如测云杉的高度、梯子的高度等，本质都是利用相似三角形性质来探究边长与角度之间的关系。

情境 3：水管求长[18]

假设 *A* 地为水源，*B* 为房屋，*A*、*B* 之间因为一片沼泽地分隔开来，现要用一根水管将 *A* 处的水流引到 *B* 处，请问需要多长的水管？（即计算 *AB* 的长度）

若沼泽位置如图 12 所示，则能够另外找到一点 *C*，使得$\angle ACB=90°$，且 *AC*、*BC* 的长度均易于测量。测得 *AC*、*BC* 的长度，即可利用勾股定理计算 *AB*。但若沼泽地位置如图 13 所示，此时，我们无法直接找到点 *C*，使得$\angle ACB=90°$。另一方面，可以测出 *AC* 和 *BC* 的长度以及$\angle ACB$的度数，若能求得图中 *AD* 和 *CD* 的长度，即可求出 *AB* 的长度。于是，需要解决如下问题：已知直角三角形的斜边和一个锐角，如何求得直角边？我们需要引入新知——三角函数。有了三角函数，就可以根据直角三角形的一个锐角，求得其各条边的比值。

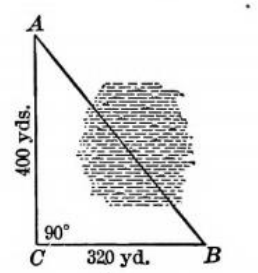

图 12

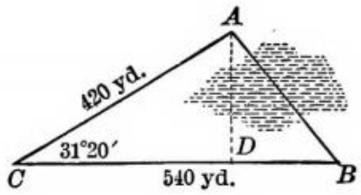

图 13

从学生熟悉的生活情境引入三角函数概念，可以让学生体会到学习三角函数的意义，从而激发他们的学习动机和兴趣。

3.6 三角学意义概述

部分教科书为了引入锐角三角函数概念，先对三角学的意义进行概述。

3.6.1 三角学的应用价值

三角学源于天文学，是天文学家实施天文推算的工具。利用三角函数，不仅能够计算天体的质量与运行速度，还能根据已有的运行轨迹预测未来的运动[19]。三角学在其他应用领域也是不可或缺的。在现实生活中，利用三角学可以测量山高或河宽，解决不易直接测量的问题；在地理上，利用三角学可以测出某地的经度和纬度；在航海上，利用三角学可以确定舰船的航行路线；在军事上，飞机轰炸理论、海陆炮火的定向等都离不开三角学，海战中的测距仪正是利用了三角学原理 [20]。可以说，三角学是数学中最为实用的分支之一。

3.6.2 三角学与几何学的优劣比较

三角学可以完善三角形中边角关系理论。在直角三角形中，勾股定理告诉我们各边之间的关系，三角形内角和定理告诉我们各角之间的关系。利用上述两个定理，已知直角三角形的两条边，可求出第三条边，已知直角三角形两个角，可求出第三个角，但我们无法知道其他两个内角。几何学告诉我们，已知直角三角形两边，就能确定该直角三角形，即直角三角形的两个内角是唯一确定的。可见，直角三角形的边和角之间一定还存在某种关系，有待于我们去发现[16]。

另一方面，三角学可以提高测量结果的精确性。在实际测量中对于某些测量问题，早期人们是通过几何作图的方法，利用全等或相似三角形性质进行计算。如图 14 所示，要测量河两岸点 A 和 B 之间的距离，过 A 作 $AC\perp AB$，AC=100 英尺，$\angle C = 41°$。按照某个比例构造 RtΔ CAB，使得 AC=100 英尺，$\angle C = 41°$，直接量出 AB 的长度[21]。这种方法虽然能为求解未知量提供一种有效的途径，但在实际作图时难免存在误差。为了获得任意精度，需要引入三角学。

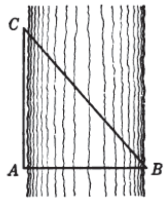

图 14

图 15 给出了 6 种引入方式在 49 种教科书中的分布情况。图 16 则给出了各方式在不同阶段的分布情况。

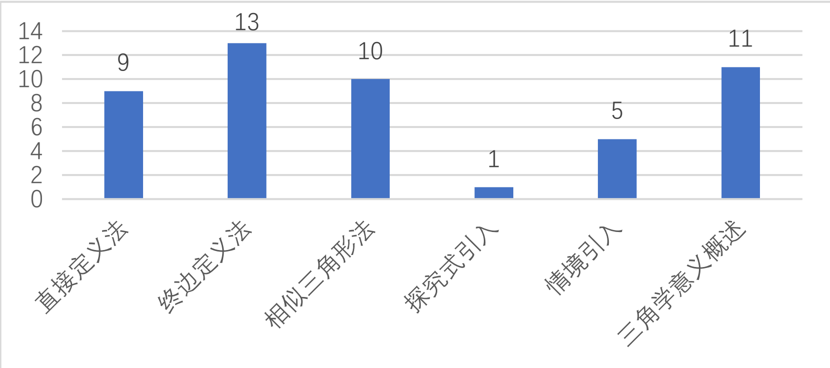

图 15

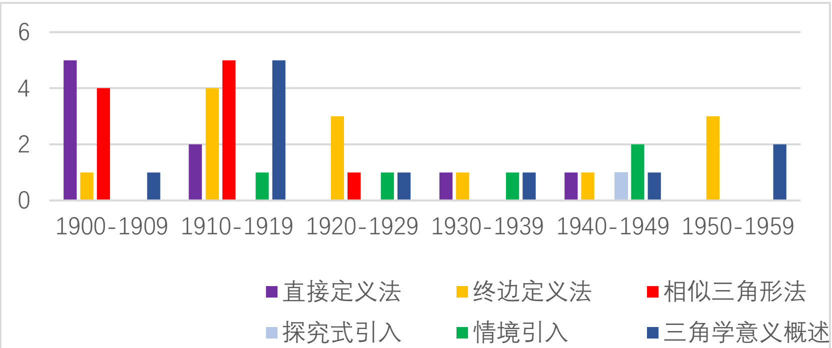

图 16

由图 16 可知，随着时代的发展，“直接定义法”占比较 20 世纪初期有所减小，而“终边定义法”和“三角学意义概述”贯穿各个历史时期，且比重较大。另外，自 1910 年起，西方教科书中开始出现“情境引入法”。这一变化其实与当时的课程改革背景有密切的关系。受英国“培利运动”、德国数学家 F·克莱因（F. Klein, 1849-1925）“数学实用”教育主张的影响，在 1908-1909 年，美国数学教育界设立“十五人委员会”制订几何课程大纲，旨在寻求“形式主义”和“实用主义”之间的平衡[22-23]。美国几何课程的改革对三角学课程产生了重要的影响。1910 年，美国数学家杜雷尔（F. Durell, 1859-1946）就在《平面与球面三角学》的前言中指出，他编写此教科书的目的是在现有数学原理的基础上挖掘三角学的应用价值[18]。此外，他还在书中专设一章阐述了三角学的实际应用。由此可见，自课程改革后，越来越多的教材编写者开始关注数学的实际应用价值。

4 结 语

以上我们看到，本文所考察的 20 世纪上叶美英三角学教科书主要采用六种方式来引入锐角三角函数概念。20 世纪初期，多数教科书采用“直接定义法”与“相似三角形法”引入，后来受课程改革影响，“情境引入法”与“三角学意义概述”开始占有一席之地。六种引入方式各有特色，对 HPM 视角下的教学设计有一定的启示。

（1）设计探究活动。教学中，可让学生作一个特定的角，引导他们探究比值与角度之间的关系。教师可以借助几何画板对学生的探究结果加以检验。

（2）强调函数本质。在“相似三角形法”中，除了说明“角固定，比值就唯一确定”外，还要让学生看到“角发生变化，比值就发生变化”，让学生感受到比值是角的函数。

（3）展示实际应用。通过生活中的测量问题（如建筑物高度、山高、河宽等），让学生体会“数学来源于生活又服务于生活”的道理；通过揭示“仅有勾股定理等几何命题，不足以有效解决测量问题”，凸显三角学的必要性。另一方面，通过阐述三角学在天文、物理、地理、航海、军事等领域的广泛应用，展现三角学的重要性，进一步激发学生的学习动机。

（4）挖掘学科联系。由三角学与几何学之间的关系入手，展示三角学的优越性：几何学只是定性地说明三角形边角之间存在依赖关系，而三角学则定量地揭示了这种依赖关系；几何学告诉我们已知三角形的三边、两边及其夹角或两角一边，可以确定该三角形，而三角学则帮助我们计算出其余的边和角；几何学上的作图不可避免会产生误差，而三角学能够提高结果的精确性。因此，三角学弥补了几何学的局限性。

参考文献

[1] 周孝辉. 课例: 锐角三角函数(第 1 课时)[J]. 中学数学教学参考(中旬), 2018(8): 26-28.

[2] 沈威. 锐角三角函数的数学本质与教学过程设计[J]. 中学数学教学参考(中旬), 2018(1): 131-135.

[3] 陈可剑. 基于“三个理解”的数学概念教学——从锐角三角函数导入谈起[J]. 上海中学数学, 2017(5): 28-30.

[4] 朱启州, 李丽. 基于培养学生逻辑思维能力的课例——以锐角三角函数教学为例[J]. 中学数学(初中), 2018(4): 20-22.

[5] 杨红芬. 基于过程教育的“锐角三角函数(第 1 课时)”课例及说明[J]. 中学数学(初中), 2018(4): 22-25.

[6] 蒋小飞. 基于“陡”的描述——正切的教学设计[J]. 数学教学通讯, 2018(20): 22-24.

[7] 李兴. “锐角三角函数”教学设计[J]. 中国数学教育, 2018(6): 15-18.

[8] 李津. “锐角三角函数”教学设计[J]. 中国数学教育, 2018(6): 21-23.

[9] 沈中宇, 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方三角学教科书中的三角函数概念[J]. 中学数学月刊, 2015(10): 39-41.

[10] Rothrock, D. A. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Co., 1910.

[11] Conant, L. L. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1909.

[12] Passano, L. M. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1918.

[13] Durfee, W. P. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1901.

[14] Wentworth, G. A. & Smith, D. E. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1915.

[15] Hearley, M. J. G. *Modern Trigonometry*[M]. New York: The Ronald Press Company, 1942.

[16] Wilczynski, E. J. *Plane Trigonometry & Applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914.

[17] Dickson, L. E. *Plane Trigonometry with Practical Applications*[M]. Chicago: Benj H. Sanborn & Co., 1922.

[18] Durell, F. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: Merrill, 1910.

[19] Rider, P. R. & Davis, A. *Plane Trigonometry*[M]. New York: D. van Nostrand Co.,1923.

[20] Hart,W. W. & Hart W. L. *Plane Trigonometry, Solid Geometry & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Co.,1942.

[21] Rosenbach, J. B., Whitman, E. A., Moskovitz, D. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1937.

[22] 汪晓勤, 洪燕君. 20 世纪初美国数学教科书的几何应用——以建筑为例[J]. 数学教育学报, 2016, 25(2): 11-14.

[23] 汪晓勤. 20 世纪初美国几何教材中的勾股定理. 中学数学月刊, 2014, (6): 48-52.

教学实践

HPM 视角下的两角和与差的余弦公式教学*

蔡东山[1] 陈晏蓉[2] 沈中宇[3]

（1.华东师范大学第二附属中学，上海，201203；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062；3.华东师范大学数学科学学院，上海，200241）

1 引言

函数是贯穿高中数学课程的主线，而三角函数是一类最典型的周期函数，在最新修订的《普通高中课程标准（2017 版）》中要求学生探索和研究三角函数之间的一些恒等关系，其中特别提到让学生经历两角差余弦公式的过程，知道两角差余弦公式的意义[1]。研究表明，高中生在三角公式上的理解质量总体不高，学生更关注公式的实用性，但对和角公式证明的理解相对薄弱[2]。同时，新课程标准也提出了培养学生直观想象素养的要求，三角函数是沟通几何与代数的桥梁之一[3]，因此，如何在三角公式的学习中培养学生的直观想象素养，就成为了需要考虑的问题。最后，三角函数的教学需要通过再创造来恢复学生火热的思考，才能把教科书上冰冷的美丽变为学生丰富的联想[4]。

已有研究表明，数学史具有多元的教育价值，数学史可以帮助学生理解数学，通过古今数学方法的对比，拓宽学生思维[5]。同时，数学史有助于培养学生的直观想象素养，将数学史融入教学之中，给学生提供了探究机会[6-7]。从而让学生回到知识的发生之时，体验像数学家一样探索的过程。

有鉴于此，在本节课的教学中，教师将数学史融入其中，带领学生了解并掌握两角差公式的历史由来以及证明公式的几何模型的妙处。具体的学习目标如下：

（1）理解两角和与差的余弦公式，并能够进行简单的化简和求值；

（2）经历两角和与差的余弦公式的推导过程，掌握多种证明方法；

（3）体会数形结合、转化等数学思想方法，培养直观想象等数学核心素养；

（4）激发数学学习兴趣，体会数学探索的乐趣，培养动态的数学观。

* 本文是华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

2 历史材料及其运用

2.1 两角差的余弦公式的几何模型

由于两角差的余弦公式中含有$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$和$\cos\beta$中两两相乘的项，我们构造两对斜边为 1 的直角三角形，其中一对各含锐角β，不妨设$\alpha\geq\beta$。如图 1 所示，为了获得四个乘积，需要将两对三角形进行组合。从而可以得到两角差的余弦公式的三类几何模型，分别是菱形模型、矩形模型和梯形模型[8]。

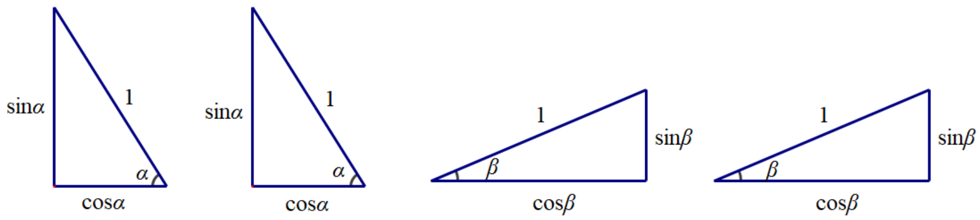

图 1 两对斜边为 1 的直角三角形

菱形模型类似于赵爽在其“勾股圆方图注”中所用的弦图，如图 2（左）所示，中间补充一个长和宽分别为$\cos\beta-\cos\alpha$和$\sin\alpha-\sin\beta$和的长方形，得到一个边长为 1、一个内角为$\alpha+\beta$的菱形，其面积为$\sin(\alpha+\beta)$，分别计算四个三角形面积和中间小正方形的面积，得到和角正弦公式$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。若以$\frac{\pi}{2}$-$\alpha$代替$\alpha$，则得到图 2（右）所示的拼图方案，菱形面积为$\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=\cos(\alpha-\beta)$，故得差角余弦公式为$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

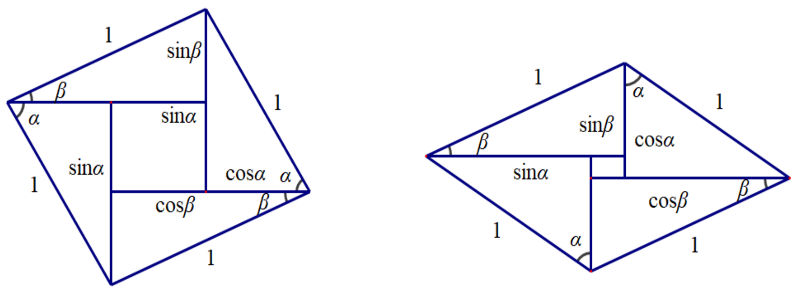

图 2 两角差余弦公式的菱形模型

矩形模型类似于赵爽在其“勾股圆方图注”中所用的“大方”图，如图 3（左）所示，整个矩形的长为$\cos\alpha+\cos\beta$，宽为$\sin\alpha+\sin\beta$，中间是边长为 1、内角为$\alpha+\beta$的菱形，其面积为$\sin(\alpha+\beta)$，分别计算矩形和四个三角形面积的面积，得到和角正弦公式$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。若以$\frac{\pi}{2}$-$\alpha$代替$\alpha$，则得到图 3（右）所示的拼图方案，菱形面积为$\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=\cos(\alpha-\beta)$，故得差角余弦公式为$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

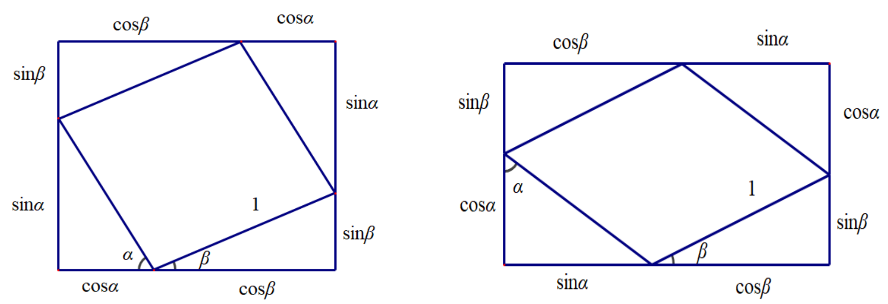

图 3 两角差余弦公式的矩形模型

我们可以将上述矩形模型简化为直角梯形模型，如图 4（左）所示，讲左右两个深色直角三角形与一个浅色等腰三角形做成一个直角梯形，分别计算梯形的面积和三个三角形的面积和，得到和角正弦公式$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。如图 4（右）所示，若以$\frac{\pi}{2}$-$\alpha$代替$\alpha$，得差角余弦公式为$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

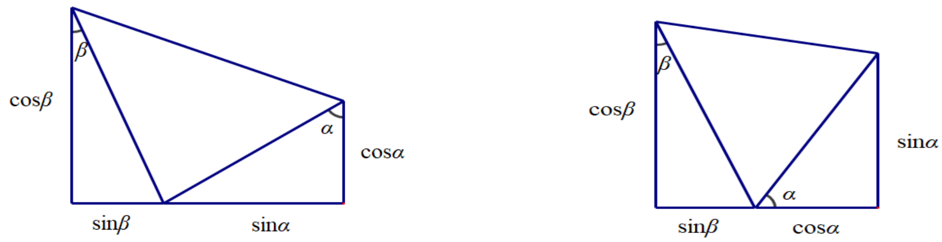

图 4 两角差余弦公式的梯形模型

2.2 余弦公式的单位圆模型

19 世纪法国数学家萨吕斯（P. F. Sarrus, 1798~1866）在《纯粹与应用数学年刊》上发表论文，根据两点之间的距离公式来推导公式，进而导出其他公式．如图 5（左），在单位圆内构造∠AOB=α，∠AOC=β，则$BC^2=\text{Chord}^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$，从而得到$\text{Chord}^2(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$，另$\beta=0$，得$\text{Chord}^2\alpha=2-2\cos\alpha$，用$\alpha-\beta$代替$\alpha$得到$\text{Chord}^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)$，将其与之前的式子比较，得差角余弦公式为$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

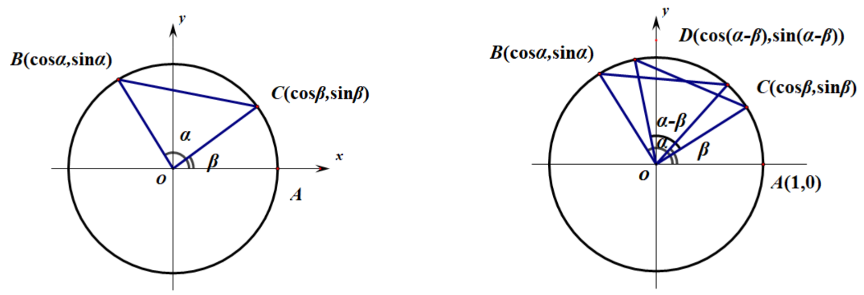

图 5 萨吕斯和麦克肖恩的方法

1941 年，美国数学家麦克肖恩在《美国数学月刊》上发表论文，避开弦长公式，重新对公式$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$进行推导。如图 5（右），在单位圆$O$中构造

$\angle AOB = \alpha$ ，$\angle AOC = \beta$，将ΔBOC沿顺时针旋转，使得OC与OA重合，OB与OD重合，由$AD = CB$，利用两点之间距离公式即得差角的余弦公式[9]。

3 教学设计与实施

3.1 课题引入

本节课由30°、45°特殊角三角比的回顾入手，进而让学生猜想15°、75°的正余弦值。并由15°是30°、45°的两角之差，75°是30°、45°的两角之和，引出本节课的内容。随后，教师分析了三角学的英文词源，介绍了本节课将要学习的两角差的余弦公式的地位：

师：我们来回顾一下，三角学的英文单词 Trigonometry。这个单词的前半部分的意思是三角，后面一半的意思就是测量，所以最原始的三角学源于生活中的三角测量，而后它在天文学中也有应用。那么，三角和与差的正余弦公式，通常被称为平面三角学最基本的公式，它有非常悠久的历史。打开 20 世纪中叶以前任何一部西方三角形著作，这些公式至少有一个使用几何方法来推导证明的。那么在最早期的时候，在三角学里面，一般是研究锐角的情形，或者说，0°到 90°之间。

而后，教师向学生介绍了研究两角差的余弦公式的方法。

我们要考虑一个问题：在研究一个复杂问题的时候，因为现在我们这个角可以任意度量角可以变成任意角；那么任意角的这些公式成立不成立不知道，但是我们可以把问题进行特殊化，比如我们先用锐角来研究，也就是说，我们在研究问题的时候，一般先将问题特殊化，看有没有什么结论。之后我们再把这个问题进行推广，看有没有一般性的结论，这是我们研究问题的方法。

随后，教师带领学生回忆初中已经学过的利用三角板拼图的等面积法勾股定理证明方法。

师：我们初中学过的勾股定理。那么我们回想一下，用 2 个或 4 个全等三角形，通过等面积法证明勾股定理。大家分组讨论一下。

生 1：四个三角形，拼成边长为 c 的正方形的形状，利用等面积法，正方形面积等于四个三角形的面积加一个中心小正方形的面积，得出勾股定理的结论。（如图 6 左 1）

生 2：四个三角形，拼成边长为 $a+b$ 的正方形的形状，利用等面积法，正方形面积等于四个三角形的面积加一个中心小正方形的面积，得出勾股定理的结论。（如图 6 左 2）

生 3：利用两个三角形拼成梯形形状，利用等面积法，梯形面积等于三个三角形的面积，得出勾股定理的结论。（如图 6 左 3）

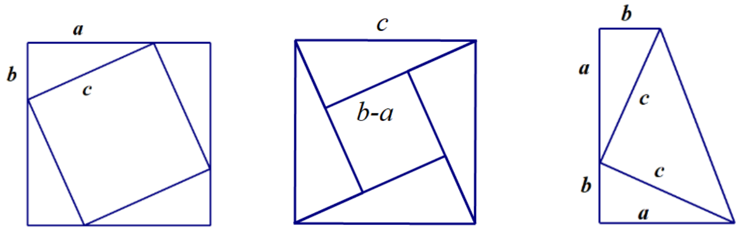

图 6 三角板拼图（证明勾股定理）

3.2 学生探究

由类似勾股定理的方法，给学生四个三角形图形，让学生分组讨论，得出两角和的正余弦展开公式.

师：刚才我们得到了三种不同拼图的勾股定理的证明方法。下面我们想象一下，根据古代勾股定理的这种思想，用三角形拼图的方式，能不能得出两锐角差的余弦公式的展开形式。我们用斜边等于 1，内角一个是 α 角，一个是 β 角。

生 1：我们这一组学生合作得出方法是：用四个三角形拼成一个菱形形状的图形。（如图 7 左 1）

第一组学生合作得出方法是：通过等面积的思想，得出：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+(\cos\beta-\cos\alpha)(\sin\alpha-\sin\beta)$$

$$\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

将 α 换成 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，得出两角差的余弦展开式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

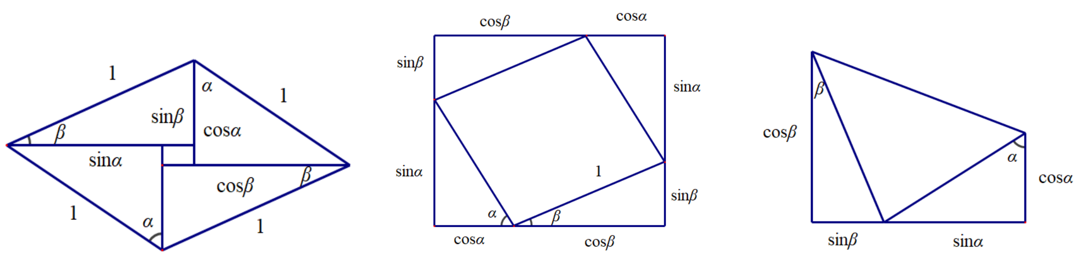

图 7 三个小组的证明图示

生 2：我们这一组学生合作得出方法是：用四个三角形拼成一个正方形形状的图形。（如图 7 左 2）

第二组学生合作得出方法是：

$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

将α换成$\frac{\pi}{2}-\alpha$，我们得出两角差的余弦展开式$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

生 3: 我们这一组学生合作得出方法是: 用两个个三角形拼成一个梯形形状的图形。(如图 7 左 3)

第三组学生合作得出方法是:

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)=\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta+\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

将α换成$\frac{\pi}{2}-\alpha$，我们得出两角差的余弦展开式$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

3.2 公式推广

由于上述方法局限于锐角的情形，教师引入萨吕斯单位圆法和克肖恩两点距离公式法将这一公式进行推广。

(1) 萨吕斯单位圆法模型

师: 19 世纪法国数学家萨吕斯，他发表过一篇论文，做了一些工作，画了一个单位圆取角 α、角 β，以这个图（如图 8 左）为例，这个 B、C 点坐标可以表示的，那么利用两点间距离公式，B、C 两点距离为$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$，然后这个$Chord^2(\alpha-\beta)$表示圆里面，$\alpha$-$\beta$ 这个扇形的角所对应的弦长；那么同一个圆里面如果这个这个扇形的角固定弦也固定. $|BC|^2=Chord^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$，然后把这个式子展开，变成这样一个式子：$|BC|^2=Chord^2(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$，那请问一下下一步怎么做呢？你们猜一猜，下一步应该怎么做。

生：代入高，或者用那个，三角形的……勾股定理，或者……我看一下。

师：那这样，你先坐。我提示一下，先把 β 取成 0，就变成这样一个式子$Chord^2\alpha=2-2\cos\alpha$，那么这个式子什么意思？$\alpha$角对应的弦长的平方，就是对任意角$\alpha$，比如说 10°、20°、30°，通过式子可以写出来的，我们高一学过函数迭代思想，下面应该怎么做？

生：将 α 取成 α-β。

师：好，他刚刚说了，把这个 α 取成 α-β，之后呢，它就变成这样一个式子$\mathrm{Chord}^2(\alpha-\beta)=2-2\,cos(\alpha-\beta)$，则上下两个式子就取等号了$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。弦对应的角一般认为是什么角？0°到 180°对吧。好了，这个是法国数学家做的一个工作，

这个工作对于后来的数学家影响很大。

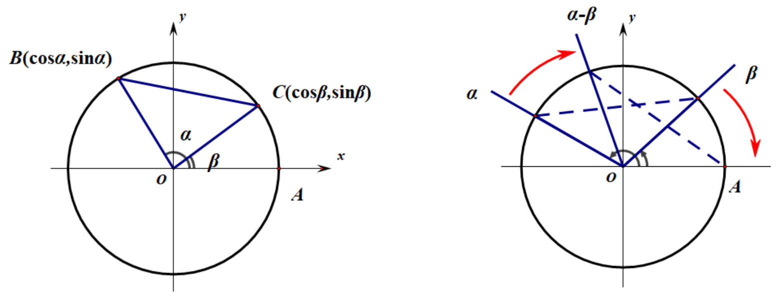

图 8 萨吕斯单位圆法模型（左）麦克肖恩法（右）证明图示

(2) 麦克肖恩两点距离公式模型

随着三角学的发展，任意角概念的出现，这些最早的模型都需要修正，建立任意角的两角差的余弦公式的方法。

师：刚才那个图我这样画的话这两个角坐标可以表示的，对吧，那么任意角的话，点坐标写法是一样的吧。那么，把 β 取成 0 其实就是将一边移到 x 轴上。如果是三角形固定不动的话，把 C 移到 x 轴上就是 β 取成 0 对吧，那么，你说一说，B 哪去了？

生：B 这个角就……嗯……到边……

师：就这个边成的角啊，这样转过来嘛，对不对。

生：它转到 90°以内。

师：转到 90°以内，那这个角就表示什么呢？比如说这个角就叫 α，这个角叫 β，那转过这个角表示什么？表示 α-β。这就是 1941 年美国数学家麦克肖恩在美国数学周刊里面发表的论文中提到的证明，它对于两个任意角一样是成立的。它是这样一个图形对吧，然后经过旋转以后，把这个边跟 x 正半轴重合，OC 这个边到 OB 上去；那么 A 点坐标是(1，0)点，B 点坐标是什么？

生：B 点坐标应该是(sin(α-β)，cos(α-β))。

师：三角形经过旋转之后有什么一个等量关系？弦相等吧？大家同意吗？刚刚这个做完之后，这样转完之后，这两个弦应该是相等的关系的对吧。下面怎么做？你说。

生：嗯…

师：这四个点坐标都知道的，对吧，然后怎么做？

生：两点间距离公式。

师：然后两点间距离公式，对吧。好，因为两个弦应该是长度一样对吧，然后这四个点坐标都知道的，然后利用两点之间距离公式。好了，那么我们就看一下，那个美国数学家的做法：C 点坐标知道，B 点坐标也知道，经过旋转之后，B 坐标和 A 坐标也知道；下面利用

这两个弦长是相等的关系，就 BC 和 DA 是相等的关系，然后再利用两点之间距离公式，这个 CB 距离 $|CB|^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$，把它展开一下，变成这样一个式子，$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$ 同时，DA 距离 $|DA|^2=[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2=2-2\cos(\alpha-\beta)$ 我们把它代进去，展开变这样一个式子 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 好了，我们得到了这个结论。

再利用诱导公式，得出两角和与差四组公式。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

3.4 练习巩固

例题 1：求 $\sin15^\circ,\cos15^\circ,\sin75^\circ,\cos75^\circ$ 的值.

例题 2：已知 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5},\alpha\in(0,\pi)$，求 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{6})$ 的值。

例题 3：已知 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{4},\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，求 $\cos\alpha$ 的值。

思考习题：

1、已知 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2},\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{10}$，求 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值。

2、已知 $\cos(2\alpha+\beta)+5\cos\beta=0$，求 $tan(\alpha+\beta)\,tan\,\alpha$ 的值。

3.5 课堂总结

首先，本节课学习了和差角的正余弦公式，掌握了它的证明，同时我们也领略了历史上各种和差角的正余弦公式的精彩证明。其次，本节课我们学习了多种数学思想，如从特殊到一般的思想、类比的思想、迭代思想、数形结合的思想等。最后，通过历史上一个又一个数学家精彩的证明方式，一方面理解了知识的内涵，让我们感受到数学证明的巧妙。另一方面也能感受到其中浸润着的数学家们对知识孜孜不倦、力求创新的探索精神。

3.6 学生反馈

课后，我们发放问卷，收集了近 40 名学生的反馈信息。大部分同学表示能够听懂这节课的内容，其中 61％的同学表示完全能够听懂。在 15°余弦值的计算这一题的测试中，

95％的学生能够给出正确的解答。另外 80％的同学表示喜欢这种将数学史融入数学教学的授课方式。

当问及学生最喜欢的证明方法时，50％的学生选择了麦克肖恩法，理由大致如下：

- 简洁、易于理解；
- 有趣、神奇；
- 巧妙、充满技术性；
- 普遍性高。

也有学生表示喜欢类似勾股定理的证明方法、萨吕斯法等。

本节课所含的数学思想，学生认为主要有数形结合思想、代换思想、类比思想等。

超过半数的学生表示对本节课印象最深的部分是数学史的融入。理由如下：

- 在本节课之前，没有接触过这样的授课方式，很新奇；
- 证明方法丰富多样，大开眼界；
- 公式不需要死记硬背，是自己生成的；
- 有贯穿时代之感，感受到数学的脉动。

4 结 语

借鉴历史上两角和与差的余弦公式的历史，本节课采用了重构式、复制式和附加式的方式。重构式方面，采用从特殊到一般的研究方法，首先启发学生用类似勾股定理的证法推导出两锐角差的余弦展开公式，然后老师再利用萨吕斯以及麦克肖恩的方法推导出任意角的两角差的余弦展开公式的方法。复制式方面，采用了历史上不同的证明方法，附加式方面，对两角差的余弦公式推导的历史过程进行了回顾。

通过将数学史融入两角和与差的余弦公式的教学，本节课达成了多元的教育价值，从学生熟悉的勾股定理出发，让学生经历从锐角情形下到任意角情形下的两角和与差的余弦公式推导过程，从特殊到一般，从几何到代数，让公式的推导在学生的心中自然发生与推广，揭示了“知识之谐”。从探究活动中得到不同的公式推导方法，通过不同方法的对比，拓宽学生思维，从而展现了“方法之美”，让学生通过拼图的合作探究活动，思考出不同的推导方法，经历形式化公式背后的发现过程，体会到数学探究与发现的乐趣，从而营造了“探究之乐”。通过拼图活动以及单位圆中公式的推导，让学生体会到三角公式中数与形的结合，培养了学生直观想象和逻辑推理的数学素养，从而达成了“能力之助”。让学生体会不同时代、

不同文化的数学家对两角和与差的余弦公式推导方法的探索，给与了三角公式背后人文的一面，彰显了文化之魅。通过展现数学家们对知识孜孜不倦的探索精神，让学生体会到数学背后的理性精神，从而达成德育之效。

从课后学生的反馈来看大部分同学表示喜欢这种将数学史融入数学教学的授课方式。超过半数的学生表示对本节课印象最深的部分是数学史的融入。但是，也有个别同学认为数学史的融入作用不大，由于本节课数学史融入重在展示公式证明的多样性，相对缺乏趣味性，且实际课堂上，也存在各种证明方法的出现较为生硬，不够自然等问题。由此可见，本节课尚有进一步打磨及完善的空间。

鉴于以上情况，有如下反思：（1）通过课堂上的小组合作，让学生更多的展示得到公式证明的过程，而不仅仅是证明的结果，强调背后的数学思想方法。（2）融入更多的人文元素，基于学生给出的证明方法给出相应的数学史上的背景，形成古今对话，增强课堂的趣味性。（3）在展示不同的证明的背后，讲解数学家对公式证明的不断探索精神，增强数学德育的渗透。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京：人民教育出版社, 2017.

[2] 何忆捷，彭刚，熊斌. 高中生三角公式理解的实证研究——以上海为例[J]. 数学教育学报, 2016, 25(01): 51-56.

[3] 陈建花，林明芸，蔡芙蓉. 初高中三角函数的区别、联系及教学衔接[J]. 中学数学教学参考, 2015(Z3): 40-42.

[4] 张奠宙,王振辉. 关于数学的学术形态和教育形态——谈“火热的思考”与“冰冷的美丽”[J]. 数学教育学报, 2002(02): 1-4.

[5] Gulikers I , Blom K . ‘A historical angle’, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education[J]. Educational Studies in Mathematics, 2001, 47(2): 223-258.

[6] Wang, X., Qi, C. & Wang, K. A categorization model for educational values of the history of mathematics: An empirical study [J]. Science & Education, 2017, 26(7): 1029-1052.

[7] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京：科学出版社, 2017.

[8] 汪晓勤，邵铭宇. 三角公式的若干几何模型[J]. 数学通报, 2017, 56(06): 1-5+49.

[9] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方三角学文献中的和角公式[J]. 数学通报, 2016, 55(06): 4-8.

HPM 视角下"可化为一元一次方程的分式方程"的教学

贾彬[1]　栗小妮[2]

（1.上海市建平远翔学校，上海，200129；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

分式方程是初中阶段学生在学习了整式方程以及整式相关知识后，必学的一部分知识，而已有的分式方程的教学实践表明，学生在学习过程中存在以下问题[1]：

- 对分式方程相关概念模糊不清；
- 对找分式的最简公分母的掌握不太好；
- 去分母时，漏乘情况严重；
- 当去括号前面是减号时，去括号后，括号后的项不变号；
- 搞不清楚分式方程的增根与无解，利用分式方程解应用题时，等量关系找不全。

"可化为一元一次方程的分式方程"是沪教版七年级上册的教学内容，之前学生已学习过一元一次方程、分式以及分式的运算等内容。本节课的教学目标是理解分式方程的概念，掌握可化为一元一次方程的分式方程的解法；知道解分式方程时可能产生增根的原因，并掌握解分式方程的验根方法。其中，教学重点是掌握可以化成一元一次方程的分式方程的解法，以及掌握分式方程转化为整式方程的方法及其中的转化思想。解分式方程过程中产生增根的原因及如何验根是教学的难点。在教学实践中，对于学生经常发生的增根或失根错误，教师虽然可以予以批评指正，但可能会打击学生的自信心。同时，数学文化融入数学教学也日益受到人们的关注。这就给我们提出了以下问题，如何在本节课中培养学生的探究精神？如何在指出学生错误的同时又能培养学生的自信心？如何在本节课中更好地融入数学文化？这些都是教师需要考虑的问题。

HPM 视角下的数学教学可以为以上问题的解决提供一定的启示，英国学者福韦尔总结了数学教学中运用数学史的 15 条理由，其中第 2 条为"改变学生的数学观"，第 3 条为"因为知道并非只是他们有困难，所以得到心理安慰"，第 10 条为"提供探究的机会"[2]。从情感态度价值观而言，数学史可以更加激发学生学习数学的兴趣，让学生亲近数学；可以揭示数学作为人类文化活动的本质，让学生感受数学背后的人文精神。结合以上思考与启示，我们从 HPM 的视角设计和实施本节课的教学。

2 历史素材

2.1 分式方程的历史

在东西方数学文献中，分式方程都出现得较晚。9 世纪阿拉伯数学家花拉子米的《代数学》中已经有分式方程，比如“将 10 分成两部分，第一部分除以第二部分，第二部分除以第一部分，它们的和是二又六分之一”[3]，相应的分式方程为

$$\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6},$$

13 世纪，意大利数学家斐波那契在《计算之书》中列举了许多用分式方程求解的问题，其中部分问题源于花拉子米。例如[4]：

- 若干人平分 10 第纳尔，每人得若干。若加上 6 人，再平分 40 第纳尔，则每人所得与前面相同。（$\frac{10}{x}=\frac{40}{x+6}$）

13 世纪之后至 18 世纪中叶以前，很少有数学家关注分式方程。在沃利斯（J. Wallis, 1616～1703）、麦克劳林（C. Maclaurin, 1698～1746）、欧拉等数学家的代数学著作中，都没有分式方程的影子。美国学者曼宁（K.R.Manning）检查了 19 世纪出版的 1000 多种初等和高等代数著作，发现 1805 年左右以前的绝大多数著作均未涉及分式方程，一些作者甚至还认为分式方程并不属于初等代数内容[5]。

在 13 世纪的中国，数学家李冶（1192～1279）的《测圆海镜》中出现了分式方程的例子。如第 7 卷第 2 题得到

$$-x^2+8640+\frac{652320}{x}+\frac{4665600}{x^2}=0,$$

李冶将其化为

$$-x^4+8640x^2+652320x+4665600=0$$

2.2 增根的历史

斐波那契、桑德森等在解分式方程时都没有遇到增根的情形。法国数学家拉克洛瓦在出版于 1800 年的《代数基础》中，给出了含字母系数的分式方程的解法，并考虑了当字母系数使得根的分母为零时，方程无解，但他并未发现方程存在特殊根，也没有验根的意识，因而与增根和失根问题失之交臂。

19 世纪中叶之后，许多代数教科书中都含有有关分式方程的内容，但并没有给出分式方程的一般解法，编者往往对分式方程和分数系数方程不加区别（如温特沃斯（G. A.

Wentworth, 1835-1906）在《代数基础》中将分式方程和分数系数方程统称为“fractional equation”[6]），对不同的分式方程采用不同的技巧，对增根和失根并没有清晰的认识。

1880 年左右，分析的严密化运动引发了人们对于“零能否作除数”问题的大讨论，这在一定程度上促进了分式方程理论的发展，数学家们开始将分式方程作为一个专门的课题来研究。1882 年，美国康乃尔大学数学教授奥利弗等人在其《代数专论》中讨论了分式方程的解法，对增根问题已经有了比较清晰的认识。书中指出[7]，方程 $N(x)P(x)=N(x)Q(x)$ 与 $P(x)=Q(x)$ 不一定是同解方程，因为可能存在 x 的值，使得 $N(x)=0$，而 $P(x)-Q(x)\neq 0$，因此，这样的 x 的值是方程 $N(x)P(x)=N(x)Q(x)$ 的根，但不是方程 $P(x)=Q(x)$ 的根，因此，在方程 $P(x)=Q(x)$ 两边同乘以含 x 的某个式子 $N(x)$ 后，就可能会产生增根。如：

$$1-\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{1-x}-6 \qquad （1）$$

方程两边同乘以 $N(x)=x-1$ 后，得到一元二次方程 $x^2-7x+6=0$，于是得 $x=1$ 或 $x=6$。其中，$x=1$ 是增根。

在解释方程（1）在化为整式方程之后何以会产生增根时，奥利弗等人认为，若将原方程化为 $7-\frac{1-x^2}{1-x}=0$，再化简得 $7-(1+x)=0$，从而得 $x=6$，不会产生增根。这里，奥利弗等人已经有了使分式方程不产生增根的想法，后来，美国数学家费歇尔（G. E. Fisher, 1863-1920））和施瓦特（I. J. Schwatt, 1867-1937）将其总结为分式方程的完美解法。

奥利弗等人似乎相信，在分式方程两边同乘以分母的最小公倍式，所导出的多项式方程与原方程是同解的。而我们知道，事实并非如此。如对于方程

$$\frac{-2x^2}{x^2-1}+\frac{x}{1-x}=-\frac{x}{x+1}-3 \qquad （2）$$

两边同乘以分母的最小公倍式 (x^2-1) 得

$$x^2-2x-3=0$$

于是得 $x=3$ 或 $x=-1$，显然，$x=-1$ 是方程（2）的增根。

1899 年，宾夕法尼亚大学的费歇尔和施瓦特在《代数基础》中给出了一种不会失根也

不会产生增根的解法，解法如下[8]：通过移项将给出的分式方程的一边化为零，将另一边进行通分，并化为最简分式，于是得到原方程的同解方程

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \tag{3}$$

其中$\left(P(x),Q(x)\right)=1$，两边同乘以$Q(x)$，得多项式方程

$$P(x)=0 \tag{4}$$

满足方程（3）的 x 的值必定满足方程（4），因而（3）的解必定是（4）的解，从（3）到（4）不会失根；另一方面，由于$P(x)$和$Q(x)$是互质的多项式，因此，满足（4）的 x 值必满足（3），因此从（3）到（4）也不会产生增根，所以（3）和（4）与原方程是同解方程。

利用上述方法，费歇尔和施瓦特将方程（2）的左边通分，得

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=0$$

再将左边化为最简分式，得

$$\frac{x-3}{x-1}=0$$

两边同乘以$(x-1)$得$x-3=0$，从而得$x=3$。费歇尔和施瓦特将$(x+1)$称为多余的因式（unnecessary factor），正是这种多余的因式导致了增根的出现。新的解法消除了多余的因式，从而避免了增根，故无需对所得结果进行检验。19 世纪末，分式方程的历史终于有了完美的结局。

3 教学设计与实施

3.1 展示前置学习成果

本节课采用翻转课堂的形式进行，课前教师让学生自行观看有关分式方程的微视频，自学课本知识，并完成课前导学思考题。

课前视频内容包括三部分：

（1）斐波那契的生平简介。13 世纪的意大利数学家斐波那契，出生在意大利比萨的一个商人家庭。他早年随父亲在北非一带受过教育，后来游历于地中海沿岸各国，向当时著名的阿拉伯数学家学习，大约在 1200 年回国。1202 年，他根据阿拉伯文与希腊文材料

编译而成的拉丁文代表著作《计算之书》，是中世纪数学的最重要的著作之一。它促使印度数字系统和代数方法在欧洲广泛传播，并产生了巨大的影响；

（2）选用《计算之书》的一题："若干人平分 10 第纳尔，每人得若干；若加上 6 人，再平分 40 第纳尔，则每人所得与前面相同，求第一次分钱的人数。"

（3）介绍分式及分式方程的发展历史（历史素材中 2.1 所述）。

选用意图：通过斐波那契的生平简介加深学生对斐波那契的印象，知道《计算之书》是斐波那契编译而成，在学生心中播种一颗对此感兴趣的种子。在学生心目中，数学著作往往高大上，遥不可及。但《计算之书》中的这个问题学生能够根据题意列出分式方程，因此选用此题不仅让学生认识分式方程，而且有利于缩小数学著作在学生心目中的距离，另外很多知识的产生、发展的过程，并不是一蹴而就的，简要介绍分式方程发展的历史有助于学生体会数学家们对分式方程的认识和研究是从发现到逐步完善的过程。

根据"微视频"和"教科书内容"，设计的课前导学思考题如下：

（1）下列式子：① $\frac{x+y}{2}$；② $\frac{2}{x+y}$；③ $\frac{x+y}{2}=5$；④ $\frac{2}{x+y}=5$；⑤$\frac{1}{3}(x-2)=1$；⑥$\frac{1}{x}(x-1)=\frac{1}{3}$中，整式方程是：________________；分式方程是：________________；（填写序号）你判断的依据是：____________________。

（2）写出视频中斐波那契求 x 的方程，并解此方程。

（3）解分式方程：$\frac{x}{x-2}=3+\frac{2}{x-2}$。

（4）检查一下，解以上两个方程得到的 x 的值是否是原方程的解？请说明理由。

第 1 题正确率非常高，班级 37 人中有 36 人答对，其中 1 人将①②误认为是方程；第 2 题学生都能将此方程写出，并成功解此方程，部分同学将解代入原方程进行了检验；第 3 题大部分同学用两边乘以最简公分母去分母，将分式方程转化为整式方程求 x 的值，一部分同学将 x 的值代回原方程检验，认为是增根；少部分同学通过移项通分求 x，发现求不出来，认为方程无解。

课上，教师首先和学生一起分享课前导学思考题的结果，为进一步的探究做好铺垫。

3.2 探究增根产生原因

"增根"对学生来讲是个陌生的新知，为什么解分式方程会产生增根是本节课的难点，所以在前置思考的基础上，教师采用小组合作探究的方式，让学生思考曾耿产生的原因，体现"组内合作"的力量。以下为学生小组讨论后师生交流的教学片段。

师：什么是"增根"？"增根"从何而"增"？

生 1: 在分式方程两边同时乘以最简公分母去分母时，会使本不相等的两边因为乘以“零”而相等了；

生 2: 分式方程在去分母后未知数的取值范围被扩大了。

师： 请说明“本不相等的两边”是什么意思？

生： 比如$\frac{x}{x-2}=3+\frac{2}{x-2}$，移项，得$\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x-2}=3$，$\frac{x-2}{x-2}=3$，左边＝1，右边＝3。所以此方程的两边本不相等.

师： “根”与“增根”有什么关系？

生： “增根”不是原分式方程的根，但它是去分母转化后的整式方程的根。

3.3 了解增根发展历史

在此环节，学生根据前置学习中自主解分式方程的步骤和课上通过小组讨论对增根的理解，归纳出解分式方程的一般步骤，通过练习解分式方程：$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}$，熟悉解分数方程的一般步骤，学会验根。然后，教师通过微视频介绍增根的历史（微视频内容为历史素材中 2.2），让学生了解分式方程的增根从发现到解决经历了约一个世纪的漫长历程，让学生了解数学活动的本质——数学是人类的文化活动，数学家也会犯错，数学学习和数学研究都会遇到困难、失误和失败，在学习过程中不要因为出错而失去信心。通过学生对美国教授费歇尔和施瓦特的不会产生增根的一般解法的好奇，鼓励学生大胆尝试重走数学家的研究之路。

观看视频后，教师向学生展示了一位同学解分式方程$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}$的方法。

$$\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{(x+2)(x-2)}-\frac{x+2}{x-2}=0$$

$$\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}-\frac{16}{(x+2)(x-2)}-\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{x^2-4x+4-16-x^2-4x-4}{(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{-8x-16}{(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{-8(x+2)}{(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{-8}{x-2}=0$$

∴原方程无解

然后，教师向学生解释，这位同学的解法就是美国宾夕法尼亚大学的教授费歇尔和施瓦

特在他们编写的《代数基础》中给出了分式方程的一般解法，用这个一般解法解分式方程不会产生增根，被称为“完美解法”，并让学生小组研究一下他的解题步骤，学生得到用“完美解法”解分式方程的一般步骤为：先将方程移项通分，化为最简分式后，根据分子为零，可得到分式方程的解，若分母为常数，则原分式方程无解。

3.4 对照目标自主评价

本环节教师设置了两个问题，问题 1 目的在于引导学生对照学习目标小结本节课的知识，养成学习－总结－学习的习惯，培养学生的反思整理的能力。问题 2 的目的是呼应前置学习中关于斐波那契和他的分式方程的历史线索，让学生发挥想象，大胆与历史中的数学家对话。

问题 1：请对照学习目标自我检查，本节课你的学习达成度怎样？

问题 2：若斐波那契通过时光隧道来到我们的课堂，你想对他说什么？

生 1：我很想知道当时是怎样学习数学的？

生 2：那时交通不发达，你们是怎么交流数学问题的？

4 学生反馈

本节课结束，共有 34 位同学参与了问卷．对于问题“这节课你听懂了吗？”，100%的同学选择 A 完全听懂。对于问题“你喜欢这节课吗？无论是否喜欢，都请你说明理由，或者用具体教学情节举例说明”。33 位同学表示喜欢，其中 21 位同学的理由是这节课既有分式方程的概念，又有分式方程解法，还知道了分式方程的历史和增根的渊源，内容丰富，有兴趣；10 位同学的理由是喜欢这节课的互动形式，有小组讨论，有观看微视频；1 位同学的理由是喜欢这节课是因为和数学考试有关。1 位同学不喜欢，理由是用太多时间讲历史和由来，是在浪费时间。对于问题“你希望教科书里介绍分式方程的由来和发展概况吗？为什么？”30 位同学表示“希望”，可以了解更多的知识，拓宽视野，增加兴趣，促进理解。4 位同学表示“不希望”，其中 2 位同学认为课堂上听故事更有趣；1 位同学认为自己去寻找这方面的知识更快乐；1 位同学认为由来和发展不重要。

5 小结反思

本节课以介绍历史人物开篇，以历史上的原题或改编后的历史问题作为研究的载体，在学生自行探究如何解分式方程的基础之上，借助数学史讨论增根产生的原因，介绍分式方程

增根研究的历史，强化学生对增根的认识，实现了“知识之谐”，营造了“探究之乐”。

分式方程的出现和增根的发现都不是一蹴而就的，都经历了很长的时间，将这段历史展示在学生面前，一是将静态的数学知识转化成动态发展的故事，激励学生保持好奇之心大胆发现，主动探究；二是在冰冷的数学中融入人文的知识，让数学变得温暖，容易亲近。向学生充分展示了历史上数学家也会犯错误，说明了错误并不可怕，只要知错能改即可；与历史上数学家解同一问题，学生得以亲近数学，也促进了学生对数学本质的认识，通过课堂观察和问卷及访谈，我们看到，学生的良好表现不是仅仅停留在知识（与技能）的掌握这样一个层面，数学史的融入还使绝大多数学生在感受数学悠久的历史、古人的智慧以及数学知识的传承的同时，对古代数学问题及数学家产生了浓厚的兴趣，确实将“冰冷的美丽”转化成了“火热的思考”，培养学生学会数学的思维，实现了数学史的“文化之魅”、“德育之效”。

教师利用学生对微视频中美国宾夕法尼亚大学两位教授的一般解法好奇之心，展示一位学生解分式方程的另一种解法，这种解法和去分母的解法相比较为虽然繁琐，但这种方法竟然与两位教授的一般解法相同，增加了这位学生自信心的同时也让其他学生认识到分式方程的解法并不唯一，体现了数学史的“方法之美”，学生对方式方程不同解法的认识和理解，也不可促使学生从不同角度认识数学问题，训练学生的思维，体现了数学史的“能力之助”价值。

参考文献

[1] 张清亮. 八年级学生在学习分式方程中的困难与教学策略研究[D]. 贵州：贵州师范大学, 2016.

[2] Fauvel, J. Using history in mathematics education[J]. *For the Learning of Mathematics*, 1991, 11(2): 3-6.

[3] Al – Khwarizmi. *The Algebra of Mohammed Ben Musa*[M]. London: J. L. Cox, 1831: 44.

[4] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京：科学出版社, 2017.

[5] Manning, K. R. A. A history of extraneous solution[J]. *Mathematics Teacher*, 1970(2):166.

[6] Wentworth, G. A. *Elements of Algebra*[M]. Boston: Ginn & Company, 1891: 130-136.

[7] Oliver, J. E., Wait, L. A., Jones, G. W. *Treatise on Algebra*[M]. Ithaca: Dudley F. Finch, 1887.

[8] Fisher, G. E, Schwatt, I. J. *Elements of Algebra*[M]. Philadelphia: Fisher & Schwatt, 1899:380-390.

HPM 视角下“有理数的乘法”的教学

王进敬[1]　栗小妮[2]

（1.上海市市西初级中学，上海，200042；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引言

初中阶段，学生要经历两次数系的扩充，第一次为负数和有理数，而有理数乘法法则作为有理数的部分学习内容，是将学生已知的正整数范围内的运算法则推广到有理数范围的一个重要载体。有理数乘法法则的理解，可以让学生深化对负数和已有正数范围内运算法则和运算律的理解和运用，而如何向学生解释“负负得正”是本节课教学的难点。

在已有的教学设计中，很多教师参考教科书的编排利用一个或两个现实模型引入有理数乘法法则，如王丽（2016）[1]、韩诗贵（2017）[2]、张洋和荆小兵（2017）[3]采用蜗牛爬行模型、或者水位变化模型或者归纳模型引入法则。在教学实践中，有教师发现，用现实模型解释有理数乘法法则存在困境，学生需要弄清不同情境中正负的规定，运动中方向的确定与正负的对应，还要将静态的负数理解为一个动态的过程，认为这样做增加了思维的难度，所以，有教师改编教科书中的设计运用加法法则解释“负正得负”，再利用相反数的意义得到“负负得正”，或辅以现实模型得到或验证“负负得正”，强化学生对法则的理解，如邹施凯（2013）[4]、谢鸿飞（2015）[5]、卜以楼（2016）[6]等，还有教师通过将正整数范围内的运算律推广到有理数范围来引入有理数乘法法则，先用加法法则解释“负正得负”，再利用分配率解释“负负得正”，如吴增生（2012）[7]、彭林（2017）[8]等。

很多教师试图在教学中证明“负负得正”，而事实是，“负负得正”在数学上是无法证明的。德国数学家 F·克莱因早已在其《高观点下的初等数学》中告诫数学教师们“不要把不可能的证明讲得似乎成立”[9]。美国数学家 M·克莱因以史为鉴，断言学生在学习负数时必定会遇到困难：“毋庸置疑，历史上大数学家所遇到的困难，恰恰正是学生会遇到的学习障碍，试图利用逻辑的冗长语言来消除这些困难是不可能成功的。从一流数学诞生开始，数学家花了 1000 年才得到负数的概念，又花了另外的 1000 年才接受负数概念，因此我们可以肯定，学生学习负数时必定会遇到困难。而且，学生克服这些困难的方式与数学家大致也是相同的。”[10]

因此，在学习有理数乘法时，教师有必要弄清以下问题：“负负得正”既然是一种“规

定”，那么这种规定的根源何在？除了课本上给出的运动模型加以解释外，还可以采用哪些方式来解释其规定的合理性？在历史的发展进程中，“负负得正”经历过怎样的曲折？再具有前瞻性一些，在后续的数学学习中，怎样看待“规定”的内容，是毫无疑问地全盘接受？还是从多个角度加以质疑，并在探索中寻找问题的答案， 从而获得终身学习的能力？鉴于上述问题，我们从 HPM 视角设计本节课。

2 历史素材

有关负数和负负得正的历史精彩纷呈，本设计所采用的是关于 19 世纪法国著名作家司汤达（Stendhal, 1783～1843）在其自传中描述的他学习“负负得正”的负面经历以及 M·克莱因用“负债模型”对有理数乘法法则的解释。司汤达小时候很喜爱数学，但当格勒诺布尔中心学校的数学教师迪皮伊先生教到“负负得正”这个运算法则时，司汤达一点都不理解，他希望老师能对负负得正的缘由作出解释。面对司汤达的提问，迪皮伊先生“只是不屑一顾地莞尔一笑”，而靠死记硬背学数学的一位高材生则对于司汤达的疑问“嗤之以鼻”。补习学校的数学教师夏贝尔先生被司汤达问得十分尴尬，只得不断重复课程内容，说什么负数如同欠债，而那正是司汤达的疑问所在：“一个人该怎样把 10000 法朗的债与 500 法朗的债乘起来，才能得到 5000000 法朗的收入呢？” 最终，夏贝尔先生只得搬出大数学家欧拉和拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736～1813）来：

“这是惯用格式，大家都这么认为，连欧拉和拉格朗日都认为此说有理，我们知道你很聪明，但你也别标新立异嘛。”（司汤达, 1998, 231-232）[11]

司汤达被“负负得正”困扰了很久，最后，在万般无奈之下只好接受了它。他一直将数学视为“放之四海而皆准的真理”，认为数学可用来“求证世间万物”，可是，“负负得正”却动摇了他这对于数学与数学教师的信心：

“究竟是迪皮伊先生和夏贝尔先生在骗我呢（就想到我外公家来做弥撒的那些神甫一样），还是数学本身就是一场骗局呢？我弄不清楚。哎！那时我多么迫切希望有人能给我讲讲逻辑学或是寻找真理的方法啊！我渴望学习德•特拉西先生的《逻辑》！如果当时我能如愿以偿，也许今天我就不是现在的我了，我会比现在聪明得多。当时我得出的结论是：迪皮伊先生很可能是个迷惑人的骗子；夏贝尔先生只是个追慕虚荣的小市民，他根本提不出什么问题。”（司汤达, 1998, 231-232）[11]

19 世纪，司汤达的老师未能解决“债务乘以债务等于收入”的悖论。到了 20 世纪，美

国数学家 M·克莱因成功地解决了这个难题。他声称：“如果记住物理意义，那么负数的运算以及负数和正数的混合运算是很容易理解的。” M·克莱因的解释如下：

假定一人每天欠债 5 美元，而在给定日期他身无分无（0 美元）。那么，给定日期 3 天后他欠债 15 美元，如果将 5 美元的债记成－5，那么每天欠债 5 美元，欠债 3 天，可以数学式子表达为：$3\times\left(-5\right)=-15$；在给定日期 3 天前，他的财产比给定日期多 15 美元，如果用－3 表示 3 天前，－5 表示每天欠债数，那么 3 天前他的经济情况可表示为 $\left(-3\right)\times\left(-5\right)=-15$。

3 教学设计与实施

3.1 有理数乘法法则初探

本节课之前，学生已经学习了有理数加减法法则，知道有理数加减法法则需要考虑符号和绝对值两个方面，所以类比于前面的学习方式，教师让学生类比加减法法则，通过例 1 中几个算式的计算，让学生从符号和绝对值两个方面初步探讨有理数乘法法则。

例 1 计算下列各题。

（1）4×3；（2）$(-4)\times3$；（3）$4\times(-3)$；（4）$(-4)\times(-3)$。

（学生很快算出结果）

师：从计算结果来看，两个有理数相乘，也应该关注哪两方面？

生：符号和绝对值。

师：请分别说说上述 4 题中两个因数的的符号和计算结果的符号有何关系？

生：正乘正得正，正乘负得负，负乘正得负，负乘负得正。（同号得正，异号得负。）

师：“正乘正得正”是小学就学过的，那么你能举一个生活中的实例解释一下吗？

生：妈妈每天给我 4 元钱，3 天后，我拥有 12 元。

师：仿照这个例子，你能给出 $(-4)\times3=-12$ 的解释吗？

生：$(-4)\times3=-12$，比如：规定收入为正，支出为负，每天支出 4 元（-4），与现在相比，3 天后（$+3$）支出 12 元（-12）。

生：规定向右运动为正，向左运动为负，从原点出发，以每小时 4 公里的速度向左运动（-4），3 小时后（$+3$），在原点左侧 12 公里处（-12）（图 4-1）。

3.2 探究为何“负负得正”

依据已有对负数的认识，学生可以很快解释为何“负正得负”，如何解释“负负得正”是本节课的难点，教师从让学生解释“正负得负”入手，再引入司汤达的故事，通过讲述司汤达的困惑引发学生探究和思考，然后引导学生将已经给出的模型进行扩展，解释“负负得正”，突破本节课的难点。

师：前面这些例子都是先给出一个因式的现实意义；再给出另一个因式的现实意义，从而得出积所表示的意义。$(-4)\times(-3)=12$ 的符号说明“负乘负得正”，这是为什么呢？

（随后，教师生动地向学生讲述了司汤达的故事，并提出问题“你能为司汤达解释他的困惑吗？”）

生：反面的反面是正面，敌人的敌人是朋友。

师：这些情感上的例子虽然有些道理，但远比不上，同学举出的“负乘正的例子”具有说服力. 根据前面的例子，正数与负数是相对意义下的两个量，要说明负数，就得先规定正数的意义，并与参照标准作比较而得。在这之前，你能仿照老师和同学给出的例子，先来说明 $4\times(-3)=-12$ 的结果吗？比如规定向右运动为正，向左运动为负，$+4$ 表示向右运动，-3 只能表示时间，那么怎样规定时间的正负呢？参照标准是什么呢？

生：规定向右运动为正，向左运动为负，当下在原点，以每小时 4 公里的速度向右运动（$+4$），3 小时前（-3），在原点左侧 12 公里处（-12）。故 $4\times(-3)=-12$（图 1）。

师：在两个有理数的乘法中，两个因数分别有各自的正负规定，最终根据参照标准，得出积所表示的意义。你能根据上述知识，用文字或者数轴说明 $(-4)\times(-3)$ 的结果吗？

（学生小组讨论交流并展示讨论结果）

生：规定向右运动为正，向左运动为负，当下在原点，向右运动为正，若以每小时 4 公里的速度向左行驶（-4），则 3 小时前（-3），在原点右侧 12 公里处（12）。故 $(-4)\times(-3)=12$。

师：从上述模型中，我们解释了为什么“负负得正”，那么你能回答了司汤达的困惑吗？

生：根据我们的模型解释，“负负”其实包含两个层次，司汤达错误在于混淆了“负负得正”中两个“负”的层次，也就是说，法郎×法郎≠法郎。

师：司汤达的老师夏贝尔先生所说“负数如同欠债”，可以解释“负负得正”吗？

生：其实夏贝尔先生找到了打开“负负得正”大门的钥匙，用欠债模型也可以解释：每天欠债 4 美元表示（-4），与现在相比，（-3）表示 3 天前，那么，他的财产比现在多 12

美元。

师：你觉得司汤达的故事给我们什么启示？

生：我很佩服他的“不畏权威的质疑精神”，在今后的学习中，我也要多问一个“为什么”，并努力通过各种形式去解决它。

3.3 归纳有理数乘法法则

本环节，根据前面的探讨，教师学生一起总结有理数乘法法则。

师：你能从符号和绝对值两方面叙述有理数乘法法则吗？

生：有理数乘法法则：两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘.

师：从有理数的符号分类来看，这个法则中还缺哪个数？

生：任何数与零相乘，都得零.

师：根据这个法则，在有理数计算中，通常我们会先考虑什么再计算？

生：先确定符号，再把绝对值相乘.

师：如果司汤达坐在我们的教室中，与同学共同讨论“负负得正”，而不是孤独的走在校园中，受同学们的启发，他一定会深刻的对这一知识加以理解，那么我理由相信，数学历史上或许会多一位数学家了。

3.4 数学与逻辑相结合

本环节，教师从数系扩充的角度向学生解释了为什么“负负得正”，也为学生在后续乘法学习中验证已有的运算律打下基础。教师的解释如下：

数系的扩充原则之一就是运算律的无矛盾性，根据这一原则，我们也可以从逻辑形式上来解释“负负得正”原有数系的运算律有：

①$0+a=a$，$0\cdot a=0$

②交换律：$a+b=b+a$，$a\cdot b=b\cdot a$

③结合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$；$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

④分配律：$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

这些运算律在正数计算中起着非常重要的作用，当数集扩充到整个有理数数集时，要保证它们依然成立，即运算律的无矛盾性。依据上述运算律，可以得到下面的算式：

$$
\begin{aligned}
&(-1)\times(-1)=(-1)\times(-1)+0\times1\\
&=(-1)\times(-1)+[(-1)+1]\times1\\
&=(-1)\times(-1)+(-1)\times1+1\times1\\
&=(-1)\times[(-1)+1]+1\times1\\
&=(-1)\times0+1\times1\\
&=0+1\\
&=1
\end{aligned}
$$

从上述过程看，要使运算律在整个有理数集中成立，“负负得正”是必须的。总之，“负负得正”从现实模型中产生，最终又回到数学的抽象。

然后教师和学生一起进行了本节课的小结，理数乘法法则无法证明，是一种规定，给出这种规定的原则是：“使原有的运算律保持不变，只有这样才能使数学的发展建立在原有的基础上。”

4 学生课后问卷反馈

课后对 31 名听课学生进行了问卷调查。

对于问题“你以前了解为什么负负得正吗？”，有 18 位同学（占 58%）知道“负负得正”，但不知原因，只是接受了这个结论，没有深入想过，也没有质疑过对错，还有学生认为老师教的都是对的，认为“负负得正”是公理，是严谨而准确的，没必要质疑。有 12 位同学（占 38.7%）了解过，途径有：从数形结合、生活方面、网查、父母讲解、数学书等。还有一位同学提到从“医学中的疫苗技术”了解的，即“体内原有病毒为负，当注射病毒疫苗时也为负，但产生抗体后结果是好的，变为正。”有 1 位同学了解过，也质疑过，但最终认为“负负得正”是一个定义，记住即可。

学生觉得从现实模型与数学逻辑两个角度明确“负负得正”，比单纯地用“规定”来说明“负负得正”有如下好处：自现实模型更形象，逻辑语言更严谨；会让大家理解负负得正的根本原因；会让人心服口服，而非把知识强加给人；让理解更深刻，记忆更清晰，还能给人以启示，让我们更加热爱数学；拓宽视野。

在问到“作家司汤达的故事给你什么启示”时，有 22 位同学（占 71%）提到了司汤达的质疑精神很值得我们学习，但认为质疑后更应该有探究问题的精神和能力，直到弄懂为止，不应该轻言放弃。也有学生说思考问题时一个人是不够的，需要团队合作讨论才能解决；理解问题时要有层次感；方向很重要，错误的方向得不到正确的答案。

对于印象最深环节，有 14 位同学（占 45.1%）对大家一起讨论用各种现实生活的例子

来解释“负负得正”印象最深。因为这时大家思维踊跃，话题开放，多了很多理解问题的角度，深刻理解了“负负得正”，是以前从未考虑过的，很有趣，让人更好地理解并记住了这个规则，懂得了数学的奥妙。8 位同学（占 25.8%）对司汤达的故事印象深刻，认为故事很有趣，听得很入神，并告诉我们不懂就问，做题时要注意细节，如果司汤达注意到单位问题，说不定就可以解决困惑了，细节决定成败。也有同学认为，“司汤达的困惑很让人震惊，乍一看还好像是对的，引人深思，吸引了我来解决他的困惑。” 5 位同学（占 16.1%）对用逻辑运算解释“负负得正”印象深刻，只有在这个环节才真正的从数学的角度理解了该法则，感受到数学的美妙，这是以前从没有了解过的，显示了数学的理性表达。还有学生对“教师对负负得正思路的引导”和画数轴解释印象深刻。

5 教学反思

从表面上看，本节课所用史料甚少，只有两处。一处是通过“附加式”与“顺应式”运用了司汤达的故事，“附加式”讲述了司汤达学习“负负得正”的困惑，“顺应式”体现在学生探究用现实模型解释“负负得正”后，找出司汤达困惑的问题所在，并跨越时空为司汤达释惑；二是在小结阶段，教师“顺应式”利用数学史，用数学逻辑解释为什么“负负得正”，并告诉学生“负负得正”无法证明，只是为保证原有运算律成立的数学规定，可以用现实模型解释。

事实上，本节课整体设计均基于数学史而来。从课后反馈问卷可知，很多学生已知“负负得正”，但从未质疑过，而是将这一规定视为数学上的公理，认为只要会用即可。没有数学史，我们不会知道这一看似真理的符号法则，也曾经历缓慢曲折的发展过程，受到过很多人的质疑。在常规教学中，很多教师局限于教科书，将有理数乘法法则看做基本事实存在，仅会用教科书中的模型解释法则，未曾深入思考质疑，为什么“负负得正”，“负负得正”是否可以证明？从运算律出发得到“负负得正”是不是证明了“负负得正”？这些从负数以及“负负得正”的发展历史中，我们可以寻得答案，在了解相关数学史后，我们的视角不仅停留在用教科书中的模型解释“负负得正”，而是借助司汤达的故事，让学生从质疑出发，再经过自主探究、合理解释后获得真知，学会研究数学的思想方法。

另外，“负负得正”是学生在初中学习阶段第一次碰到的“规定”性的知识，本设计借助司汤达的困惑，让学生明白，在学习这类知识时，即使它是数学中的“规定”也要敢于质疑、求真，要明白“规定”背后蕴含的合理所在。在初中数学中还有很类似的知识，比如：

a^n 叫幂、$a^0=1$ 等等，教科书所呈现的“冰冷”的知识，并不能告诉我们为什么这样规定，但当学生在学习这些知识时，学会了多问个为什么，那么学生的质疑精神和解惑能力自然而然就会增强，在深刻理解了这一类知识的同时，学生也学会了研究数学的思想和方法。

参考文献

[1] 王丽. 预设“问题串”，渐次推进新知生成——以“有理数乘法”第 1 课时教学为例[J]. 中学数学(初中版), 2016, (11): 15-17.

[2] 韩诗贵. 梯度合理设置, 法则自然生成——以“有理数乘法法则”的教学为例[J]. 中小学数学(初中), 2017(5): 42-44.

[3] 张洋, 荆小兵. “有理数的乘法”教学设计[J]. 中学数学教学参考(下旬), 2017(1-2): 59-60.

[4] 邹施凯. 授人以鱼不如授人以渔——“有理数乘法”的教学设计[J]. 中学数学(初中版), 2013, (7): 76-79.

[5] 谢鸿飞. “有理数乘法法则”的导学案[J]. 中小学数学(初中版), 2015(1-2): 26-27.

[6] 卜以楼. 也谈“有理数乘法”的教学设计[J]. 中小学数学(初中版), 2016, (10): 81-83.

[7] 吴增生. 有理数乘法法则形成过程教学的再思考——基于“3B”教育理念下的数学课堂教学实践研究[J]. 中国数学教育, 2013, (1-2): 26-28.

[8] 彭林. 基于数系扩充思想的“负负得正”的教学设计[J]. 中小学数学(初中版), 2016(10): 53-57.

[9] F·克莱因. 高观点下的初等数学(舒湘芹等译)[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2008, 15-21.

[10] Kline, M. Logic versus pedagogy[J]. American Mathematical Monthly, 1970, 77(3): 264-282.

[11] 斯丹达尔. 斯丹达尔自传(周光怡译)[M]. 南京: 江苏文艺出版社, 1998: 231-232.

活动信息

跟随历史脚步，探索函数概念演变历程

——上海青浦第一中学 HPM 教学观摩与研讨活动

周天婷

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

2018 年 10 月 12 日，华东师范大学教师教育学院副院长汪晓勤教授带领 HPM 工作室成员以及华东师范大学 2018 级教育硕士在上海青浦第一中学与郭敏丽特级教师工作室一起参加 HPM 教学与研讨活动。此次活动是在汪教授及其 HPM 研究团队的指导下，以 HPM 的视角展现高一年级“函数的概念”的课堂教学。授课老师为上海青浦第一中学的黄深洵老师。

黄老师首先让学生们谈谈“什么是函数”，引出学生们所熟悉源自于欧拉的用解析式定义函数；再用 PPT 展示出某一时刻吉他琴弦振动形状的图像（课前播放了吉它曲，为此做出铺垫），而学生无法用解析式写出此函数，由此引出初中所学的欧拉在 1755 年给出的变量依赖的定义。接着让学生用变量依赖的定义对 110 米栏的世界纪录统计表、常值函数以及狄利克雷函数进行解释，提出“依赖关系”的局限性，启发学生用“对应关系”来表述变量之间的关系，由此得到狄利克雷的变量对应的定义，并用更简单的语言即教材中给出的定义表述出来。然后黄老师播放了关于狄利克雷的小视频让学生更直观地感受函数概念的演变过程，并在黑板上利用文氏图表示狄利克雷函数自变量与函数值的对应关系，引导学生从集合的角度修正函数的定义，引出来源于布尔巴基学派的集合对应的定义。随后黄老师强调了函数的三要素并让学生们练习求解函数的定义域以及利用所学知识判断两个函数是否为同一函数。最后黄老师带领学生回顾本节课主要内容，并让学生分享他们的学习感悟。

图 1 观摩教学

图 2 交流与研讨活动

课后，黄老师与其他听课教师进行了深入的交流与研讨。黄老师详细阐述了本节课的设计意图，大家一致肯定黄老师利用重构式在课堂中带领学生经历函数概念一步步演变过程，认为在讲解函数概念上利用“文氏图”来表示两集合间关系十分新颖贴切，老师们也提出了一些自己的想法及建议。

最后，汪晓勤教授给在场的师生带来了一场“HPM 视角下的高中函数概念教学”的精彩讲座，在讲座中清晰地展现了 HPM 的研究背景、课题以及 HPM 课例研究的流程，详细地讲述了函数的历史，大家收获颇丰。汪教授在讲座中还对黄老师将数学史以重构式融入数学课堂的教学表示肯定，让学生们经历函数概念从不完善到完善的动态演变过程，给学生们树立了动态的数学观。

图 3 教师合照

图 4 全体合照

在历史的长河之中有着无数珍珠等待着我们的采撷，跟随历史的脚步，探索数学概念的演变历程，让我们的 HPM 教学课堂更加精彩纷呈！