上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2017 年第 6 卷第 3 期

克莱罗

（Alexis Claude Clairaut, 1713~1765）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

本期封面人物是 18 世纪法国数学家克莱罗（A. C. Clairaut, 1713～1765）。

克莱罗于 1713 年 5 月 7 日出生于法国巴黎，父亲让·巴普蒂斯特·克莱罗（Jean-Babtiste Clairaut）在巴黎教授数学，并成为柏林科学院院士；母亲凯瑟琳·珀蒂一生育有 20 个孩子，但不幸的是，只有克莱罗活到了成年。

克莱罗是数学史上著名的神童。从小接受父亲的启蒙教育，熟读《几何原本》，九岁掌握了法国数学家吉斯内（N. Guisnée, ？～1718）的《代数在几何中的应用》(1705)，十岁学习了洛必达（M. de l'Hôpital, 1661～1704）的微积分课本《无穷小分析》，十二岁撰写了有关四种曲线的论文，十三岁在巴黎科学院宣读了他的论文"关于新曲线的四个问题"。

1729 年，年仅十六岁的克莱罗撰写了《双曲率曲线研究》一书，两年后，此书在巴黎出版。克莱罗因此当选为巴黎科学院院士，成为巴黎科学院有史以来最年轻的院士。值得注意的是，克莱罗在书中运用了两点之间的距离公式，这是我们迄今所见到的关于此公式的最早文献。

成为院士之后，他加入了莫佩尔蒂（P. L. Maupertuis, 1698～1759）的研究小组，并成为莫佩尔蒂、伏尔泰（Voltaire, 1694～1778）和夏特莱（É. du Châtelet, 1706～1749）的好友。1745-1756 年间，克莱罗协助夏特莱将牛顿的《自然哲学之数学原理》译成法文，克莱罗还将自己的一些定理加入其中。1734 年，克莱罗和莫佩尔蒂一起去巴塞尔，师从约翰·伯努利（John Bernoulli, 1667～1748）数月。

莫佩尔蒂

伏尔泰

夏特莱

1733 年，克莱罗发表了变分法论文"关于最大值和最小值的若干问题"和关于测地线的一篇论文。之后，克莱罗对一类微分方程（今称"克莱罗方程"）的解法进行了研究，并

证明了一阶线性微分方程积分因子的存在性。1742 年，他又发表了动力学方面的一项重要工作。此后，克莱罗转向地理学与天文学研究，并取得了出色的成就。

1736 年，克莱罗参加了巴黎科学院组织、由莫佩尔蒂领导、并有众多青年科学家参加的拉普兰探险活动，该活动的目的是确定地球的真实形状。1743 年，克莱罗出版《地球形状理论》一书，证实了牛顿在《自然哲学的数学原理》中的论断（地球是扁的椭球），为流体静力学奠定了重要基础，也为麦克劳林（C. Maclaurin, 1698～1746）研究潮汐提供了参照。

1745 年，克莱罗转而开始研究三体问题，特别是月球的轨道问题，证明牛顿的平方反比定律是不成立的，与欧拉的结果一致。1747 年 11 月 15 日，克莱罗在巴黎科学院宣布他的结果。当时，学术界仍有不少人相信笛卡儿（ R. Descartes, 1596～1650）的以太旋涡理论而反对牛顿的万有引力说。因此，克莱罗的结论让笛卡儿的支持者感到很兴奋。但也有一些学者，如布丰（G. L. L. de Buffon, 1707～1788），基于平方反比定律的简洁性而攻击克莱罗的论断。

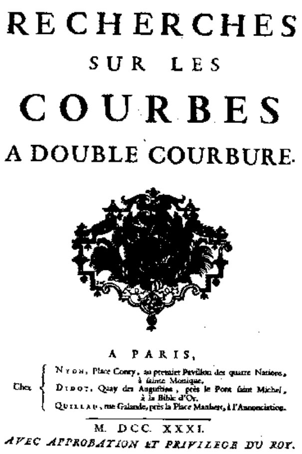
1748 年春，克莱罗认识到对月球远地点的观测与理论预测之间的误差是近似计算造成的，并非平方反比定律不成立。翌年 5 月 17 日，克莱罗转而支持平方反比定律，并在科学院宣布了他的新论断。后来，欧拉致信克莱罗，认为克莱罗的结果是数学上最重要、且意义深远的发现。1752 年，克莱罗出版《月球理论》，对该问题进行了系统的研究。

克莱罗将有关三体问题的知识用于计算哈雷彗星的轨道并预测其回归的日期。1758 年 11 月 14 日，他在巴黎科学院宣布了自己的计算结果：哈雷彗星将于 1759 年 4 月 15 日回归到近日点，这一结果仅仅与实际发生的 3 月 13 日相差一个月，克莱罗因此闻名遐迩，被誉为“当代的泰勒斯”。

18 世纪，几何学对于普通人来说是深奥难懂、枯燥乏味的学科，克莱罗完全了解这一点。我们完全可以想象，尽管他在少年时代即熟读《几何原本》，但他对此书一定是很不满意的，因为书中的定理都是欧几里得设定好的，学习者根本就不知道它们是怎么发现的，它们和现实世界有何联系。克莱罗强烈希望改变几何学的教学方法。1741 年，他出版《几何基础》一书。前言中，克莱罗交待了自己的设想：

“我想要回到几何最开始的地方，并且我企图用足够自然的方法发展出它的原理，就像几何的最初发现者一样，只是尽可能避免他们曾经犯过的任何错误。”

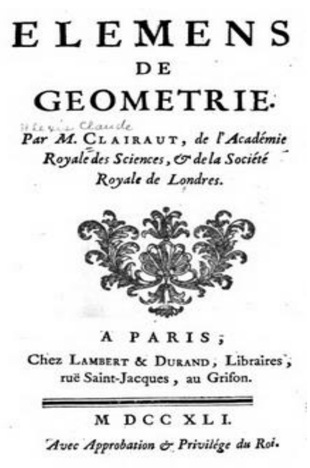
他希望学习者能够经历几何定理的自然发现过程，而不是一味被动地学习。在《几何基础》中，三角形内角和定理的呈现就体现了克莱罗的设想，今天的人们熟悉的“橡皮筋”设计就是克莱罗思想的再现。



RECHERCHES
SUR LES
COURBES
A DOUBLE COURBURE.

A PARIS,
Chez { NYON, Place Conty, au premier Pavillon des quatre Nations, à sainte Monique. DIDOT, Quay des Augustins, près le Pont saint Michel, à la Bible d'Or. QUILLAU, rue Galande, près la Place Maubert, à l'Annonciation. }

M. DCC. XXXI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



ELEMENS
DE
GEOMETRIE.
Par M. CLAIRAUT, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.

A PARIS;
Chez LAMBERT & DURAND, Libraires, ruë Saint-Jacques, au Grifon.

M DCC XLI.
Avec Approbation & Privilége du Roi.

ELEMENS
D'ALGEBRE.
Par M. CLAIRAUT,
De l'Académie Royale des Sciences, des Societés Royales de Londres, de Berlin, d'Upsal & d'Edimbourg, de l'Académie de l'Institut de Bologne.

A PARIS,
Ruë Saint Jacques,
Chez { Les Freres GUERIN, à S. Thomas d'Aquin. DAVID l'aîné, à la Plume d'or. DURAND, au Griffon. }

M. DCC. XLVI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

《双曲率曲线研究》扉页　　《几何基础》扉页　　《代数基础》扉页

在《几何基础》中，克莱罗始终将几何概念与物理学、天文学和其他学科联系起来，试图揭示数学的应用价值、数学与其他学科之间的密切联系。

克莱罗的《代数基础》是一部学术性更强的著作，但他也尽可能让代数记号的引入变得必不可少。他采用重构历史的方法（或者自然的方法），首先处理最基本的问题，然后逐渐增加难度，并凸显代数符号和技术的必要性。

在我们今天看来，克莱罗的数学教育思想与 HPM 的理念是完全一致的，即数学教学需要体现知识之谐、探究之乐和文化之魅。

《代数基础》在法国的学校中使用了很多年，对法国的数学教育产生了重要影响。拉克洛瓦（S. F. Lacroix, 1765～1842）称克莱罗是“第一个在哲学道路上为代数的原理点亮明灯”的人。欧拉的《代数基础》（1769）继承了克莱罗的教育思想。

1765 年，处于创造力巅峰的克莱罗被一场短暂的疾病夺去了生命。克莱罗是伦敦皇家学会会员、柏林科学院院士、圣彼得堡科学院院士、波伦亚科学院院士以及乌普萨拉科学院院士，由此可见他在当时学术界的崇高地位和广泛影响。

克莱罗终生未娶。作为公众人物，他在社交应酬上花费了太多的时间，甚至牺牲了健康，令人扼腕。

目　录

CONTENT

教学实践

HPM 视角下的“反比例函数”教学

栗小妮[1]　王进敬[2]

（1.华东师范大学教师教育学院，上海，200062; 2.上海市市西初级中学，上海，200042）

1 引言

“反比例函数”是初中学生在学习完正比例函数（或者一次函数）后接触的第二类函数，学生常常会困惑于：为什么称为反比例函数，这里的‘反’与正比例函数中的‘正’有什么区别和联系？追溯数学发展的历史，我们发现反比例函数的起源可追述到“反比”。鉴于此，我们从 HPM 视角以重构的方式来设计“反比例函数”的教学，希望能够借助古人的智慧，帮助学生克服对正比例函数和反比例函数中“正”与“反”的认知障碍。为此，我们拟定的教学目标为：

（1）通过对现实模型的探究，抽象出反比例函数的概念，在概念的形成过程中进一步突出变化与对应的数学思想，体会反比例函数是刻画现实世界中数量关系的一种有效的模型。

（2）能根据实际条件，确定反比例函数的表达式。

（3）在概念形成的过程中感悟数学文化，体会数学的应用价值。

2 历史材料

“反比例”定义可追溯到 《几何原本》第五卷，其中“反比例”出现在“比例”中，将“反比例”定义为“后项作前项，前项作后项，也称为‘逆比例’”。

1793 年贝多斯（Thomas Beddoe ,1760~1808）的著作中写道，“天平臂一边 10 英尺，另一边 1 英尺，则每边所挂的物体的重量与其长度成反比例。”

“反比例变化”最早出现在 1856 年约瑟夫 • 雷（Joseph Ray,1807~1855）的《高等算数》一书中，书中写道“不管是正比例还是反比例变化都是表达比例经常使用的一般方法。两个量同增或者同减，则他们之间存在正比例变化，因此船以一定速度行驶时，它的路程与行驶

的时间成正比例，这意味着在一定的速度下，行驶的路程之比与行驶的时间之比相同；若一个量增大而另一个减小，则它们之间存在反比例变化，因此完成一项任务所需要的时间与参与的人数成反比，这意味着两个时间之比与两个人数之比是反比。”

由此可见，早期“正比例”中“正”指同增同减，“反比例”中“反”指一增而一减，含有“倒”之意。随着负数和函数的出现，以及反比例函数出现，“反”并不代表原来的一增一减。“反”有了两层含义“倒”和“负”，从而导致了学生认知上的障碍。

本课设计有两大主线，第一个主线是知识的发生、发展与应用，依托杆秤，利用重构式再现反比例函数出现的过程：成比例→成正反比例→正反比例函数。第二条主线是利用《太上感应篇》中“入重出轻”的故事贯穿始终，从“正”与“反”引申到“得”与“失”，渗透数学学科德育价值，将“立德树人”教育目标落实到细微之处。

3 教学设计与实施

3.1 新课引入

《太上感应篇》中记载了这样一个故事：明朝万历年间，扬州有一家大南货店，店主在临死的时候吩咐儿子说：“我平生起家，全靠这杆秤，这个秤乃是乌木合成，中间空的地方藏有水银，秤出的时候，就将水银倒在秤头，秤入的时候就将水银倒在秤尾；这样的入重出轻，就是我致富的原因。但目前竞争激烈，也只能惨淡经营，希望你更加努力，争取扭转局面。”店主究竟怎样“入重出轻”？他这样做利弊是什么呢？这就需要我们先要了解一下“杆秤”的使用原理。（拿出实物，如图 1 所示）

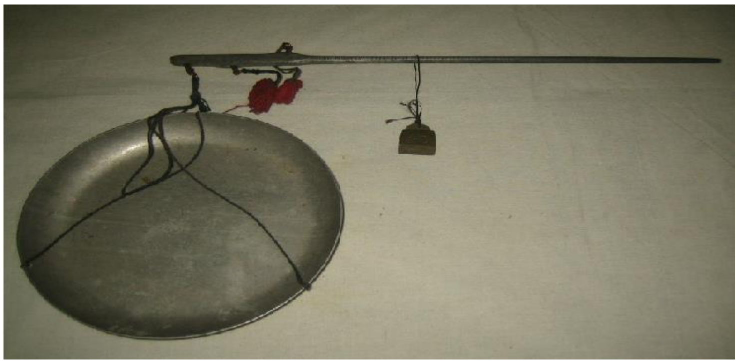


图 1 杆秤

在正常秤东西时，提纽（支点）的位置和秤砣的重量固定不变，通过调节秤砣到支点的距离找到平衡点来称重。可见，物体的重量与这段长度之间是有内在联系的。我们用与“杆秤”同样原理的实验工具来研究它们之间的联系，如图 2 所示。点 O 相当于提纽所在位置，

点A相当于秤盘所在位置，B处所挂重物相当于秤砣。将杆秤上的四个量分别设为：$AO=a$，$BO=b$。A处挂的物体重m克，B处挂的物体重n克。

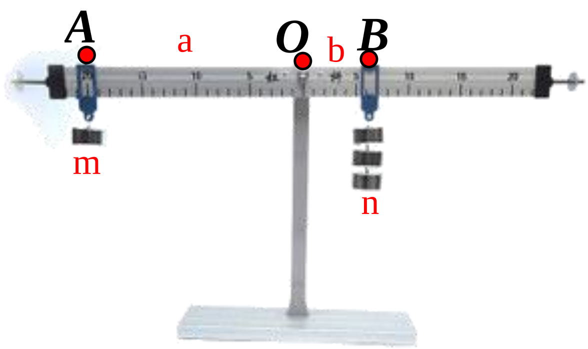


图 2 本节课所用杆秤模型

问题 1：在正常秤东西时，四个量中的 a、n不变，b、m有怎样的关系呢？

表 1 a、n不变，研究b、m的关系

数据	a	n	b	m
第 1 次	8 cm	100 g	4	50
第 2 次	8 cm	100 g	12	150
第 3 次	8 cm	100 g	16	200

师：当a、n不变时，怎样研究b、m有怎样的关系？

生 1：赋予b、m特定的值，用数值去研究。

生 2：求它们的乘积或者比值看与已知的a、n的乘积或比值有何联系？

师：好，结合同学的思路，我们先赋予m三个数值：50、150、200，在达到平衡时，b所对应的值分别是什么？

师生共同操作发现，当$m=50$时，在平衡的条件下，$b=4$。

生 3：感觉$a\cdot m=b\cdot n$。

生 4：如果当$b=12$时，两边依然平衡，那么上面的关系就是正确的。

师生共同操作验证上述猜想的正确性。在误差允许的范围内确实是正确的。当$m=200$时，在平衡的条件下，b应该等于 16。请同学上来操作、验证其正确性。

师：观察表格中的数据，从横向来看，每一次的数据都符合$a\cdot m=b\cdot n$；从未知量b、m的纵向观察，发现，当m逐渐增加时，b也逐渐增加。

总结归纳，在这个问题中发现：b随 m 的增加而增加，它们同增或同减，且$\frac{b}{m}=\frac{a}{n}=$非零

常数，b 与 m 成正比例，若将 b 和 m 看成变量，则 b 是 m 的正比例函数。

问题 2：在故事中，秤的东西不变，即 a 、m 是不变的，秤入时，水银倒在秤尾，相当于改变了秤砣 n 的重量，b 是否也会变化？b 、n 有怎样的关系？

表 2 a 、m 不变，研究 b 、n 的关系

数据	a	m	b (y)	n (x)
第 1 次	8 cm	100 g	16	50
第 2 次	8 cm	100 g	8	100
第 3 次	8 cm	100 g	4	200

当 a 、m 不变，用同样地方法探究 b 、n 之间的关系，通过类似问题 1 的实验操作得到表 2 中的数据，并让学生观察几个数据之间蕴含的等量关系。

生：通过上面的过程，知道当满足条件 $a\cdot m = b\cdot n$ 时，才会平衡，所以很容易就能得到相应的 b 的值。

生：从表格的纵向来看，当 n 逐渐增大时，b 是逐渐减小的。

总结发现：当 n 增加时，b 却减少，b 随 n 的增加而减小。且满足 $b\cdot n = a\cdot m =$ 非零常数，b 与 n 成反比例。

师：根据前面的复习，当两个变量满足：$y = k\cdot x$（k 是常数，$k \neq 0$）时，y 是 x 的正比例函数。我们给出如下定义：回归到函数的常用的字母：设 $b = y$，$n = x$，

$y = \dfrac{k}{x}$（k 是常数，$k \neq 0$），y 是 x 的反比例函数。

师：通过刚才的过程，你觉得这个店主的做法正确吗？

生：店主卖出东西时，水银倒向秤尾，“n”增加了，“b”就减少，物品的实际重量就少，对买家来说不公平，但他“得利”却“失义”。

师：一个小小的砣，一根细细的杆子，在智慧之舟的组合下，将正比例函数与反比例函数融为一体、将数学与文化融为一体。

（设计意图说明：沪教版教书的编写与历史发展相同，学生前面已经学过成比例和正比例函数，本节课利用杆秤重构反比例函数的历史，让学生体会四个量成比例 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ 中，当 a 、b 为定值时，c 与 d 成正比例，c 是 d 的正比例函数；当 a 、d 为定值时，c 与 b 成反比例，c 是 b 的反比例函数。成比例→成正、反比例→正、反比例函数，让学生整体理解几个数学知识之间的联系和区别。）

3.2 概念辨析

（一）辨析

反比例函数：一般地，形如 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq0$）的函数叫做反比例函数。(inverse proportional function）其中 x 是自变量，y 是 x 的函数，k 是比例系数。

（1）对“形如”怎样理解？

（2）怎样理解“$k\neq0$ 且是常数”？

（3）反比例函数与前面所学的什么知识有联系？

生 1：我认为“形如”是从形式上看，右边是分式的形式，分母是 x，分子是不为零的常数。

生 2：“$k\neq0$ 且是常数”就是除零以外的所有数都可以取。比如：$k=3$，$k=-1$ 等。

生 3：反比例函数与正比例函数和分式都有联系。

师生一起归纳总结：①反比例函数解析式是商的形式，自变量 x 是分母；② y 与 x 成反比例，y 与 $\frac{1}{x}$ 成正比例，正与反是相对的。

师：正比例早期是用来刻画两个量同增或者同减。反比例是用来刻画两个量一增而另一减的，“反”最初含有“倒数”之意，随着负数的出现，“反”并不只代表原来的一增一减了，“反”有了两层含义“倒”和“负”。但依然沿用最初的术语定义。在数学中这种现象很常见，我们把它叫做“旧瓶装新酒”。相信同学们也会在与时俱进的同时，将传统文化发扬光大，让这些陈年佳酿历久弥香。

（二）反馈

下列关系式中 y 是 x 的反比例函数吗？如果是，比例系数 k 是多少？

（1）$y=\frac{4}{x}$　　（2）$y=-\frac{2}{3x}$　　（3）$xy=1$

（4）$y=3x^{-1}$　　（5）$y=\frac{x}{2}$　　（6）$y=\frac{4+m}{x}$（m 是常数）

（7）$y=\frac{2}{x-1}$　　（8）$y=\frac{2}{x^2}$

生 1：（1）、（2）、（3）、（4）、（6）是反比例函数。

生 2：（6）不是反比例函数。不符合 $k\neq0$ 的条件。

生 3：当 $m\neq-4$ 时，是反比例函数，当 $m=-4$ 时，不是反比例函数。

师生一起总结，从反比例函数的概念出发，除了 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq0$）这种形式，

反比例函数的表现形式① $y=\dfrac{k}{x}$ （k 是常数，$k\neq 0$）；② $xy=k$ （k 是常数，$k\neq 0$）③ $y=kx^{-1}$（k 是常数，$k\neq 0$）

（设计意图说明：首先，反比例函数的概念属于规定型的概念，规定型概念需要学生把握规定的内涵，也就是对规定的文字要深刻理解，引导学生多角度举例子是很好的方法；其二，引导学生将反比例函数与前面所学知识相联系，体会数学的对立统一；另外，从数学发展的角度阐述反比例函数术语的起源与发展，让学生理解“反”的内涵，循着历史的足迹体会知识的发展，展现数学文化的魅力。）

3.3 概念应用

本环节设计三个不同类型的练习题，进一步巩固学生对反比例函数概念的理解和掌握。第一个练习题让学生从现实模型中抽象出反比例函数模型，写出函数关系式，并判断是否是反比例函数；第二个练习题请学生举例说明生活中接触的反比例还是的例子，体会数学源于生活，为现实生活服务；第三个练习题四个表格分别给出了变量 y 与 x 之间的对应数据，请学生判断哪一个表格中的 y 是 x 反比例函数，进一步让学生体会反比例函数中的 y 与 x 的乘积为一常数。

（设计意图说明：让学生明白反比例函数就在身边，能够从函数的角度理解以前所学的 $a\cdot b=c$ 的式子中含有反比例函数的关系。通过不同形式的例题展现反比例函数的不同形式能简化判断的过程，体现知识的灵活性。）

3.4 小结提升

师：根据刚才的学习，你能解释店主的“入重出轻”，以及这样做的利弊吗？当店主卖东西给别人的时候，水银倒向秤头，相当于增加了物体的重量，想要达到平衡，秤砣就要移得更远才行，所以读出来的数重了，店主占了顾客的便宜。这样做合适吗？

生：不合适。

师：通过这节课的学习，你有什么收获？

生 1：成反比例和成比例、成正比例有关系。

生 2：学会了怎样来判断一个函数是不是反比例函数。

生 3：学会了反比例函数的多种形式。

师：讲公平、讲诚信是中国文化中最最基本的为人准则。 《论语 为政》中子曰：“人而无

信，不知其可也。大车无輗，小车无軏，其何以行之哉？”《大学》中曾子曰：“十目所视，十手所指，其严乎！”中国政法大学就用天平（秤最原始的形式）作为大学的标志，也寓意着法律的公平性，体现了社会主义价值观。小小的一杆秤，竟集数学与文化于一体。

故事结尾，儿子听了之后，心中就怪父亲不公平，但是不敢说出来。父亲死了之后，儿子就把乌木秤烧毁了。后来儿子的生意越做越好！

（设计意图说明 ：将知识与为人融为一体。用结局委婉地阐述“天道无亲，常与人善”的道理，体现德育之效）

4 学生反馈

课后从知识、信念和思维三个维度对 43 位上课学生进行测试。测试结果显示，98%的学生认为听懂了本节课的内容，在判断是否是反比例函数的测试题中，仅一位学生对 k 理解有误。看到“反比例函数”，有 51.2%的学生想到的是 $y=\dfrac{k}{x}$ (k为常数，$k\neq 0$)，有 34.9%的学生想到的比例、正比例、反比例、分式，有 23.3%的学生想到的是人需要诚信，公平（公正）、法治、平等，做生意不能见利而忘义，还有个别学生想到得与失、负与倒等。有 83.7%的学生非常愿意了解这节课上讲到的历史人文知识。

有 41.9%的学生认为对开篇“入重出轻”的故事印象最深刻，理由是这个故事不仅生动形象地概括了反比例函数，而且教会了我为人处事要诚信的道理，还知道了反比例函数的来源。20.9%的学生对杆秤的实验印象最深刻，理由是通过操作演示称重的比例变化，对知识的理解更加清晰。

从“本节课印象最深刻内容”的所占的比例来看，学生更感兴趣的是课堂中与知识相关联的德育故事、实验操作，这些内容本身也彰显了数学的本来面目——数学是源于生活并为生活服务的，更容易激发学生的学习兴趣。

5 结语

本节课利用杆秤和天平，重构式利用数学史，利用杆秤实验让学生经历了从正反比例到正反比例函数的过程，解释反比例函数中“反”的来源和现在的涵义，体现了知识之谐；在探究反比例函数解析式的过程中，运用“控制变量”的方法，将大胆猜想与动手实验相结合，将横向比较与纵向观察相结合，将具体数字的探究上升为字母表示数的思想表述，实现

了探究之乐；“秤”这一家喻户晓的工具，代表着公平、公正，由一个“称”的故事贯穿始终，用它开篇和探究，将儒家思想中的“仁”与“信”融入课堂，学知识的同时学习作人之道，作人的准则要高于利益的最大化，体会“入重出轻”本身是贪小便宜吃大亏的做法，是非常不可取的，再由“称”结尾，揭示只有心底真正的“善”才是接近“仁”的为人准则。

当然，世事无完美，教学也留有缺憾。首先，本节课之前学生还未学习杠杆原理，一些物理中的术语如“杠杆”、“动力（臂）”、“阻力（臂）”、“杠杆原理”之类的词语并不能在本节课中出现，故在杆秤实验操作时需要避开，表述上较为复杂，增加了探究的时间，也失去了让学生体会学科与学科之间联系的机会；其次，课上《太上感应篇》中的故事是以古文的方式呈现在 PPT 上，部分学生还未来得及理解故事内容，教师就提出了问题 1，增加了学生的学习障碍。应提前制作相应的学习单，让学生课前阅读相关材料，并回答问题：①通过阅读相关材料或对“杆秤”的实际操作，你了解了“杆秤”的制作原理及使用原理了吗？②这两个原理与我们所学的哪些数学知识有关？让学生带着问题和悬念和已有的思考进入课堂，更能从容展示自己的想法和见解，相信教学效果更佳。

参考文献

[1] 兰纪正,朱恩宽译.几何原本[M].西安:陕西科学技术出版社 2003.119-120.

[2] Joseph.R.*Higher Arithmetic*[M].Cincinnati: Wilson, Hinkle,1856.192.

[3] 佚名著. 太上感应篇[M]. 北京: 经济日报出版社, 2011.

[4] 汪晓勤.HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012(2):1-5.

HPM 视角下的“平行线的判定 1”教学

牟金保[1] 孙洲[2]

（1 华东师范大学教师教育学院 ,200062；2 上海市延河中学，200065）

1 引言

“平行线的判定”是沪教版初中数学教材七年级第二学期第十三章“相交线、平行线”的第二节内容，本节课是平行线判定的第一课时。教材中是以生活中的一些实例为切入点，让学生从周围世界中说出一些身边平行的形象而引入，强调“同一平面内不相交”以及平线的画法，接着从实验几何角度出发，通过平推三角尺实践操作得到公认为正确的基本事实“两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行”作为平行线的判定方法一。然后仍然通过实践操作得到平行线的基本性质“过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行”。最后通过例题讲解得到平行线的传递性。[1]教师通常认为平行线的判定方法很基本，学生一起背三遍即可，但是在实践教学当中却存在以下问题：平行线中两条直线是无限延伸的，它是几何中抽象的概念之一，学生如何在有限不延伸范围内画出无限延伸的两条直线平行?学生如何自然判定它的平行关系?怎样的探究过程更容易让学生理解和接受“两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两直线平行”这个公认为正确的基本事实?为什么平行线的基本性质不能被证明?

通过前测表明，学生在理解平行线的判定上存在问题，他们对平行线的判定存在历史相似性。因此，我们可以从 HPM（History and Pedagogy of Mathematics）的视角来设计和实施平行线的判定教学，从学生对平行线的认知起点出发，与数学史上数学家们对平行线的认知相呼应，让学生更深刻地理解平行线的判定方法一。为此，我们拟定本节课的教学目标如下：（1）理解平行线的概念，渗透平面上两直线位置关系的分类思想。（2）了解平行符号的演变历史，感悟数学文化。（3）通过历史相似性探究得到平行线的判定方法一。（4）理解平行线的判定方法一，并会用判定方法进行简单说理。（5）会过直线外一点画已知直线的平行线，体验并理解平行线的基本性质。

2 历史材料及其运用

（一）历史上的平行线及其判定

平行线的判定作为实验几何向论证几何的过渡，是初中几何中重要的内容之一，我们有必要从几何学名称的由来说起。在英文中“几何学”这个词为“geometry”，就含有“测地术”的意思。因“几何”两字的中文发音与“geo”相近，而且“几何”两字的中文含义“多少”与“测地术”也紧密相关。因此，我国明末科学家徐光启（1562～1633）采用这种音义兼顾的方法译成“几何学”。讲到这里，我们一定不要误认为“几何学”就是地道的“外来货”。其实，我国作为有上下五千年历史的文明古国。勤劳的中国人民在征服大自然的过程当中，同样逐步认识了各种数学抽象概念和几何形体，比如平行线。公元前五世纪，我国古代著名的墨家创立者墨翟（又称墨子）(约公元前 478～公元前 392)及其弟子又把这些直观的几何知识进一步抽象，并在《墨经》一书中对“平行线”概念作了理论上的抽象，称之为“平，同高也”，也就是距离处处相等的两条直线关系是平行，即用距离处处相等来刻画平行。[2]

清朝康熙皇帝时期的一本关于数学的书籍《御制数理精蕴》，简称《数理精蕴》，是一部介绍包括西方数学知识在内的数学百科全书。全书分上下两编及附录。上编五卷专讲数理，立纲明体，是全书的基本理论部分。卷二至卷四为《几何原本》，是根据张诚、白晋的法文译本修订的，共 12 章，分别讲述了三角形、四边形、圆及内接外切多边形、立体几何、比例、相似形、 勾股定理、圆锥体及球与椭圆体的表面积和体积、几何作图法等内容。[3]《数理精蕴》中有这样的描述：“凡二线之间宽狭相离之分俱等，则此二线谓之并行线也”翻译成现代文字的意思就是：如果两条直线之间的距离处处相等，那么这两条直线平行。[4]与《墨经》中一样，同样用距离处处相等来刻画平行。

不过，无论是中国、埃及，还是其他同时代的文明古国，尽管都在几何的一些不同领域取得了突出的成就，但所获得的几何知识仍然还是碎片化的，没有形成理论系统。后来与埃及隔海相望的另一个文明古国希腊兴起了。他们和埃及通商，许多学者也先后来到埃及留学，于是埃及的几何知识传入希腊。随着希腊的手工业、商业和造船业的发展，希腊人逐渐感到那些碎片化的经验性知识已经不够用了。他们需要比较全面而系统的几何理论知识，且能用来解决实践中所碰到的各种实际问题。就在这种情况下，古希腊数学家欧几里得(Euclid，约公元前 330～公元前 275)把当时西方所知道的几何知识加以整理，写成了《几何原本》。[5]书中欧几里得创造了平面几何的理论。《几何原本》非常完整且清楚，从欧几里得的时代开始，《几何原本》就被世人奉为学习平面几何的经典。 [6]《几何原本》全书共 13 卷，卷 1 从 5 个公理和 5 个公设开始,其中“第五公设”也称作“平行公理”,就是“一条直线与另

外两条直线相交，若某一侧的两个内角和小于两直角，则这两条直线不断延长后在这一侧相交”。[7]这说明了由角的关系可以得到平行的位置关系，即用角关系来刻画平行。我们从《几何原本》中可以看出欧几里得本人对于直接承认这样一个“基本事实”似乎也是不满意，总是竭力避免或推迟应用它，但最后还是不可避免地用到了，不然平行线的理论就建立不起来，几何学中的一系列论断也就缺乏理论基础。在欧几里得以后，许多数学家对“平行公理”仍然抱着怀疑的态度，总是企图从其他更“明显”的论断出发来把它推导出来。甚至可以认为，两千余年来所有称得起数学家的人都尝试过这一工作，但最后都以失败告终。直到 19 世纪德国数学家高斯（C.F.Guass，1777～1855）、俄国数学家罗巴切夫斯基（Lobatchevsky，1793～1856）以及匈牙利数学家亚诺什·鲍耶（J.Bolyai,1802～1860）才发现了“平行公理”是不可证明的，并不约而同的地利用其它公理来代替“平行公理”而创造出了非欧几何学。[8]当然，对于这场数学革命，初中生还不可能理解。限于目前的知识水平，初中生只能把“平行公理”作为公认为正确的基本事实加以接受，并由此出发学好欧几里得几何。

（二）平行线符号的演变过程

古希腊数学家海伦（Heron，约公元 1 世纪）最早创用“$\underline{\underline{OV}}$”或“$\underline{\underline{P}}$”作为表示两直线平行的符号。活跃在公元 300～350 年前后的古希腊数学家帕普斯（Pappus，约公元 300～公元 350）看到他的祖先海伦所创用的平行线符号以后，感觉不是特别满意，就将“$\underline{\underline{OV}}$”或“$\underline{\underline{P}}$”中的字母去掉，改用“=”来表示平行的符号，有时也用“OL”来表示，很明显平行符号“=”是仿照两条直线平行的形象来创造的。可惜的是，直到后来希腊人也没有创造出被世人认可的平行线符号。17 世纪，在一些法国数学家的著作中，仍用“=”表示平行线，但当时等号“=”已被世人普遍接受，若再用它表示平行线，会使欧洲数学符号出现混乱现象，因此“=”表示平行线的做法没有被世人接受。后来，在 1657 年英国数学家奥特雷德（W.Oughred，1574～1660）在《三角形》一书中，首次将横躺着的“=”直立了起来加以改造，即用“//”作为表示两直线平行的符号。1685 年开始，英国人卡斯韦尔（J.Kaswell，1655～1712 年）在著作中使用了这个平行符号，并一直沿用至今。事实也证明，先进符号的采用是不可抗拒的历史选择结果，符号化必定是数学发展的重要基础，很大程度上决定着数学的发展。[9-11]

3 教学设计与实施

（一）情景引入

小学阶段学生们已经接触过平行线，本节课的情景引入，将在此基础上从生活中的实例出发抽象出平行线，并给出文字语言描述性定义。同时，引导学生对同一平面内两条不重合的直线位置关系进行分类,为接下来的探究新知做准备。

师：在周围世界中到处可见平行线的形象，你能否说出一些身边的平行线形象吗?

生：双杠。

生：黑板边框。

生：窗框。

师：很好!谁能根据所观察到平行线的形象，尝试用文字语言给出平行线的定义?

生：不相交的两条直线叫做平行线。

师：还有谁能补充下吗?

生：永远不相交的两条直线叫做平行线。

师：还需要补充吗?

生：同一平面内永远不相交的两条直线叫做平行线。

师：很好!这就是平行线的文字语言描述性定义。同学们所强调的“永远不相交”也体现了两条直线的无限延伸，在这种无限延伸的情况下，我们再想想，同一平面内两条不重合的直线有怎样的位置关系呢?

生：垂直。

师：这是什么位置关系的特殊情况?

生：相交。

师：还有别的位置关系吗?

生：平…行…吧（不确定)。

师：非常好!同一平面内两条不重合的直线位置关系就是相交和平行，其中相交又包括斜交和垂直。其实“平行”有专门的符号表示，同学们想了解它的演变历史吗?

生：想。

师：(播放“平行线符号的历史”的微视频）通过这段微视频，同学们能用符号语言表示两条直线的互相平行关系吗?

生：$a \parallel b$。

（二）探究新知

在情景引入阶段，虽然已给出平行线的文字语言描述性定义，但是这种无限延伸范围内“永不相交”如何体现在我们实际画平行线操作和判定当中，仍然是有待探究的。基于历史的相似性，以《墨经》、《数理精蕴》和《几何原本》中对平行线的判定方式为切入点，引导学生从“距离刻画平行”到“角刻画平行”的探究。

师：既然大家都已经对平行线的形象有了初步了解，并且也知道了平行的文字语言定义，那么老师给你一条已知直线 ，你能否画出它的平行线呢?（各小组讨论）

生 1：在已知直线上取两点，再过两点作垂线，然后分别在距离为 1cm 处取点连线。如图 1 所示：

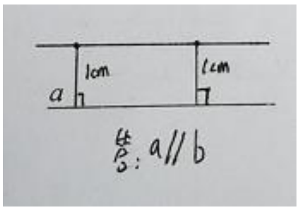


图 1 学生 1 的作图结果

生 2：在已知直线上取三点，再过三点作垂线，然后在距离为 1 个单位处再作垂线的垂线。如图 2 所示：

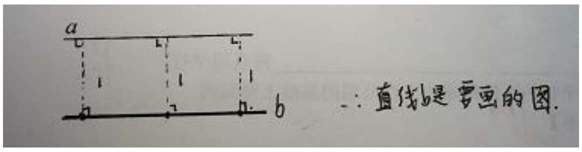


图 2 学生 2 的作图结果

师：这两位同学是用两直线间距离相等来刻画平行，与古代《墨经》中的“平，同高也”和《数理精蕴》中的“凡二线之间宽狭相离之分俱等，则此二线谓之并行线也”是完全一致的，如果穿越到那个时代，这两位同学都是小小数学家。同学们再想想我们在前一节刚刚学习了“三线八角”，我们能不能考虑用角度关系来刻画平行关系呢?（各小组讨论）

生：我这样画可以吗?如图 3 所示：

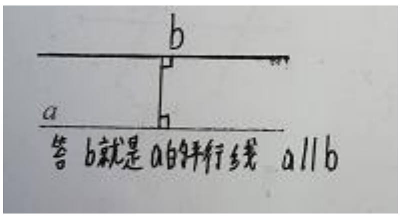


图 3 学生的作图结果

师：你是怎么画的?

生：先画已知直线 a 的垂线，再画垂线的垂直线 b，b 就是 a 的平行线

师：非常好，其实这种画法与古希腊数学家欧几里得的“一条直线与另外两条直线相交，若某一侧的两个内角和小于两直角，则这两条直线不断延长后在这一侧相交”思想有着相似之处，如果不是两直角就会相交。这位同学穿越到那个时代，也一定是一位小小的数学家。除此之外，还有其别的画法吗？（各小组讨论）

生：按照前面距离的想法，我可以这样画吗？（如图 4 所示）

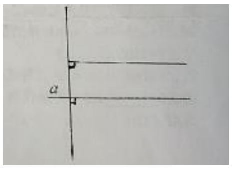


图 4 学生的作图结果

师：你是怎么画的?

生：用三角尺的直角沿直尺上推 1cm，然后沿着边画一条直线。

师：很好!那说明两直线平行的依据是什么?

生：因为在推的过程中，三角尺的直角始终没有发生变化，所以可以说同位角都是直角且是相等的。

师：对的，很聪明。不过这只是一种特殊情况，试想当我们用三角尺其余任意某个角和直尺能推出来吗?

生：应该会。

师：同学们试一试。

生：我这样画可以吗?（如图 5 所示）

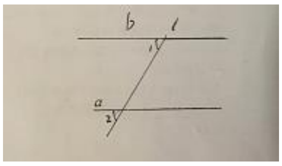


图 5 学生的作图结果

师：太棒了!接下来老师在黑板上给同学们做个演示,如图 6 所示:

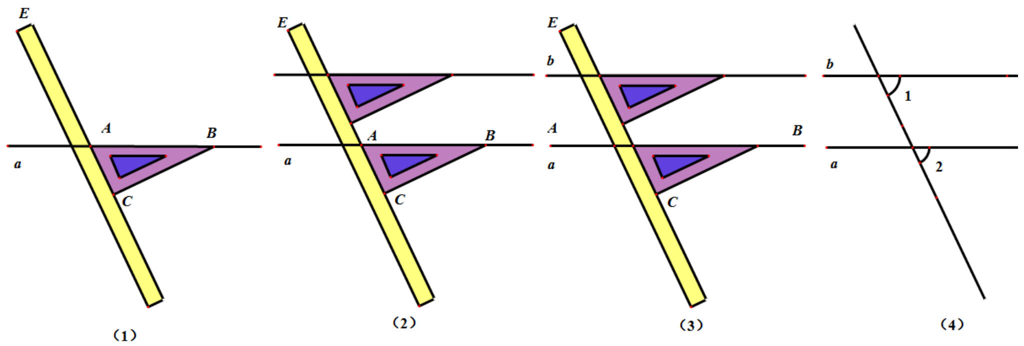


图 6 教师的示范图

师：通过大家的实践操作就可探究出两条直线平行的判断方法一：两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两直线平行。（简单地说成：同位角相等，两直线平行）有了这个判定方法，同学们再思考一下，过直线 a 外一点 p 画直线 a 的平行线，可以画几条呢?

生：　一条

师：对的，这就是平行线的基本性质：过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行。这个最常用的替代公设归功于苏格兰数学家、物理学家普莱菲尔（J.Playfair　1748～1819），有时也叫普莱菲尔公设。[12] 这与古希腊数学家欧几里得的“一条直线与另外两条直线相交，若某一侧的两个内角和小于两直角，则这两条直线不断延长后在这一侧相交”是等价的。很明显，普莱菲尔公设要通俗易懂一些。

（三）例题讲解

教师引导学生思考:“平行于同一直线的两直线是否平行?”在前面探究的基础只上让学生思考平行的传递性，并尝试简单的说理，为以后学习几何证明打下基础。教师通过 PPT 展示：“如图 7，直线 L 与直线 a, b, c 分别相交，且∠1=∠2=∠3 。（1）从∠1=∠2 可以得出哪两条直线平行?为什么?（2）从∠1=∠3 可以得出哪两条直线平行?为什么?” [1]

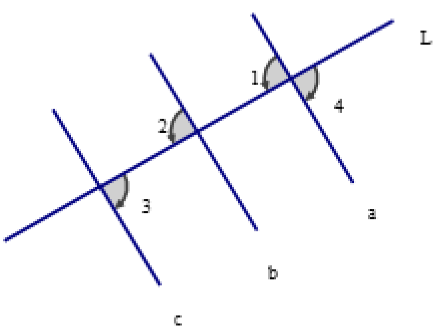


图 7 四线十二角图

（1）答：$a \parallel b$

解：∵ ∠1=∠2（已知），

∴ $a \parallel b$（同位角相等，两直线平行）。

（2）答：$a \parallel c$

解：将∠1 的对顶角记作∠4，

则∠1=∠4（对顶角相等），

∵ ∠1=∠3（已知），

得∠3=∠4（等量代换），

∴ $a \parallel c$（同位角相等，两直线平行）。

（四）牛刀小试

教师引导学生完成如下两道题[1]：

1。如图 8，为了加固房屋，要在人字形屋架上加一根横梁 DE，使 $DE \parallel BC$。如果 $\angle ABC = 29^{\circ}, \angle ADE$ 应为多少度?

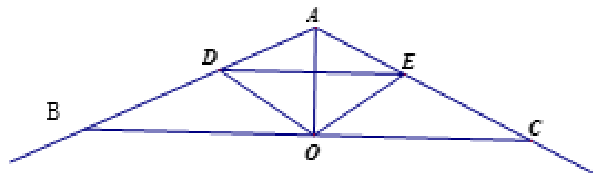


图 8 人字形屋架

2．如图 9，如果同一平面内的两条直线垂直于同一条直线，那么这两条直线平行吗?

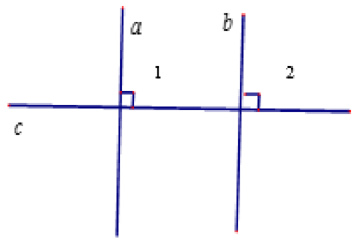


图 9 三线八角图

（1）写出结论；

（2）根据图示，说明直线a与直线b平行的理由。

（2）∵$a\perp c$（已知）

∴ ∠1=___________（垂直的意义）

同理，∠2=___________（垂直的意义）

得∠1=∠2（等量代换）

∴a____b（   ）.

（五）课堂小结

首先，教师引导学生总结本节课的知识要点：平行线的文字语言、图形语言、符号语言表示，平行线判定方法一、平行线的基本性质、平行线的传递性。同时教师指出：平行线的文字语言到符号语言经历了漫长的演变过程，了解其历史有助于我们理解平行线；平行线的判定方法一也是依据数学史，从“距离刻画平行”到“角刻画平行”一步步探究而来；平行线的基本性质也是通过数学家的努力，才以现在通俗易懂的形式出现在课本上。有了前面这些知识，我们自然会通过简单说理得到平行线的传递性。

其次，教师指出：熟记这节课的知识点并能够灵活运用于做题固然重要，但知识的探究过程以及来龙去脉也不能忽视。本节课以数学史为引导的探究过程，也是同学们以数学家的认知过程对知识再创造的过程，可以加深对知识本身的理解。

最后，教师指出：数学史上，所有知识的成熟都经历了漫长的发展历程，很多数学家为此做出了大量的工作。同学们学习知识的过程大致与知识发展的过程是类似的，由简单到复杂、由特殊到一般、由静态到动态。

4 学生反馈

课后，我们对收回的 41 份问卷进行统计分析，92.7%的学生对本节课整体感觉好，其中 18 位学生对本节课感觉非常好,20 位学生对本节课感觉良好；95.1%的学生喜欢数学史融入课堂的教学方式，其中 20 位学生认为是非常喜欢的,19 位学生认为是喜欢的；92.7%的学生认为数学史融入课堂的教学后，对自己学习有帮助，其中 16 位学生认为很有帮助,22 位学生认为有些帮助。关于本节课中印象最深的内容，按照学生回答频次依次可归为三类：①平行符号历史的微视频；②平行线判定方法一的探究过程；③历史上数学家对平行线的不断研究。关于本节课中相关数学史知识对学习的帮助以及启示，按照的学生回答频次依次可

归为四类：①懂得了数学符号是一步步演变过来的；②数学史更好地让我理解并认识数学；③对数学有点兴趣了；④更加理解平行。课后的访谈中学生提到：①学生第一次认识到平行线符号是慢慢演变而来的，而不是一下子表示出来的；②数学史中的平行线定义通俗易懂，像“平，同高也”、“凡二线之间宽狭相离之分俱等，则此二线谓之并行线也”都可帮助加深对平行线的认识；③数学家很厉害，竟然把“平行公理”替代成“过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行”这么简单的话；④老师引导我们动手探究，使我们对“三线八角”印象更深。总之，作为“平行线”的第一课，本节课激发了学生的学习兴趣，探究过程也为后面的学习打下了良好的基础。

5 结语

本节课中，从学生探究的过程和课后反馈的情况来看，教学设计符合学生的认知过程，并且能够激发学生在课堂上从无到有，从有到优的再创造兴趣，从而达到拟定教学目标。比如：有些同学在回答后测问卷中“上完这节课后，你认为还有其它判定同一平面内两条直线平行的方法吗?为什么?”问题时，就已经可以自主探究推出后续“两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么这两直线平行”和“两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么这两直线平行”的判定定理。

本节课的数学史价值主要体现在如下方面：

（1）数学史的运用方式主要是附加式和重构式。附加式主要是通过微视频，展现历史上平行线符号的演变过程，感悟数学文化，体现“文化之魅”。重构式主要是基于学生对平行线的判定认知，从“两直线间距离处处相等”到“同位角相等”的过程，正好与《墨经》、《数理精蕴》和《几何原本》中对平行线的判定类似，从学生的认知起点出发，很自然地探究出平行线的判定方法一，让学生亲身实践经历这一探究过程，体现了“探究之乐”；同时，学生明白平线的判定定理并非冷冰冰的存在，而是数学家们经过努力，逐渐发展而来的，体现了“知识之谐”。

（2）通过自己对平行线的认识从文字语言、图形语言再到符号语言的过程与数学史上数学家对平行线的认识对比，让学生身临其境，体会到穿越时空与数学家对话的感觉，培养他们的自信心，体现了“德育之效”。

（3）在课例设计中，教师引导学生先用静态的距离判定平行再上升到动态的推角，这种从易到难的方法体现了“方法之美”；同时，在动手操作探究平行线判定方法一过程中，

先推三角尺的直角再推三角尺的其余一般角，这种从特殊到一般的方法也体现了“方法之美”。

参考文献

[1]邱万作.九年义务教育课本:数学[M].上海：上海教育出版社，2007.

[2]王讚源.墨经正读[M].上海:上海科学技术文献出版社,2011.

[3]郭书春.中国科学技术典籍通汇:数学卷[M]郑州:河南教育出版社,1993.

[4](清）清圣祖敕. 数理精蕴(上册)[M].北京:商务印书馆,1936.

[5]吴文俊.世界著名数学家传记[M].北京:科学出版社,1995.

[6]洪万生,英家铭等.温柔数学史：从古埃及到超级计算机[M].台北：博雅书屋,2008.

[7]欧几里得.几何原本[M].西安:陕西科学技术出版社,2003.

[8]牟金保.非欧几何诞生的两种思想[J].西北大学学报(自然科学版),2011(3):543-547.

[9]牟金保.中国数学兴衰新探——从符号角度审视中国数学发展[J].咸阳师范学院学报,2009(6):59-62.

[10]徐品方,张红.数学符号史[M].北京:科学出版社,2006.

[11] Cajori, F. *A history of Mathematical Notations* [M]. New York: Dover Publications, 1993.

[12]李文林.数学史概论[M].北京:高等教育出版社,2005.

课堂中一名额外的学生

——数学史融入“两位数被一位数除”的教学

岳增成[1] 刘轩如[2]

（1. 上海，华东师范大学数学系，200241 ；2. 上海理工大学附属小学，上海，200093）

1 引言

数学史在数学教学中扮演着什么样的角色？Kool 指出“可以将数学史作为课堂中的一名额外学生使用”，即在现实数学教育（Realistic Mathematics Education）的背景下，使学生面对着问题的多种解法是十分重要的，这些解法可以是其他学生的，也可以是历史上的。在互动的课堂讨论中，师生共同讨论包括历史方法在内的各种方法。[1]而实际上，由于历史相似性的存在，即学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程具有一定的相似性，历史上数学家所遭遇的困难正是学生所经历的障碍，[2]学生的很多想法与历史上存在的方法类似，当学生发现自己的想法与古代数学家的想法一致时，当学生充分讨论已有的方法、看到历史上已有的“新”方法时，他们会有什么样的感受？能否对知识的理解与掌握有所帮助？

除法是小学数学的重要内容，如何进行除法运算，在历史上有多种方法。“两位数被一位数除”是沪教版四年级第一学期的内容，是除法的一部分，在学习这部分内容时，学生已经学习了一些简单的除法运算，因此，能够迁移出一些解决两位数被一位数除的方法，而且这些方法可能与古代数学家的方法类似，同时，历史上也存在着一些学生未曾接触过的方法。这为数学史扮演“课堂中一名额外的学生”提供了现实基础，因此，以融入历史上除法运算方法的“两位数被一位数”教学为例，试图找到上述问题的答案。

2 历史素材及选取

历史上除法运算的方法多种多样，最早可以追溯到古埃及时期，其运算运用加倍与调整（Duplation and Mediation），以 19÷8 为例，其计算过程如图 1，先对除数 8 进行加倍或

减半，在对结果进行加倍或减半，直至右栏中找到的数字和为 19，即 16+2+1，则商为所找出右栏中的数字对应的左栏数字之和，即商为$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$。最简单的除法为短除法，它能将除法问题分解成一系列的简单步骤，它依赖于口算和心算，并且需要使用记忆的乘法表。10 世纪末的 Gerbert（946-1003）使用图 2 的方法计算 900÷8，在计算过程中他将 8 变成 10-2 的形式进行计算，后来 Gerbert 的方法演变成了图 3 的形式。帆船法（The Gallery Method）是 16 世纪之前最受算术家钟爱的方法，利用帆船法进行除法运算时，先将被除数和除数写

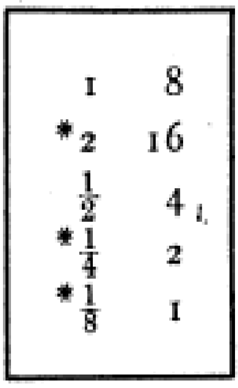


图 1 古埃及除法运算

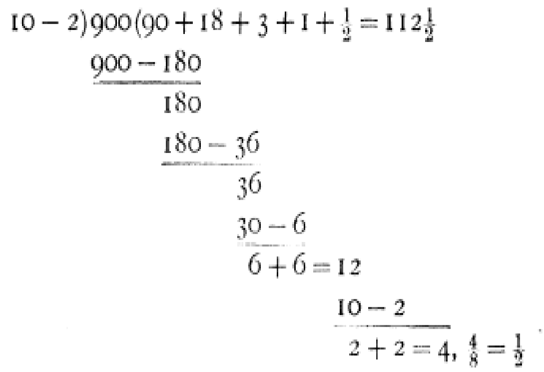


图 2 Gerbert 的除法运算

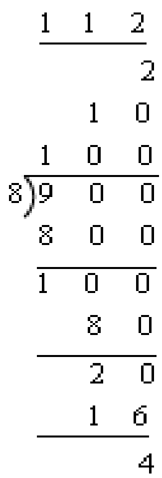


图 3 演变后 Gerbert 的除法运算

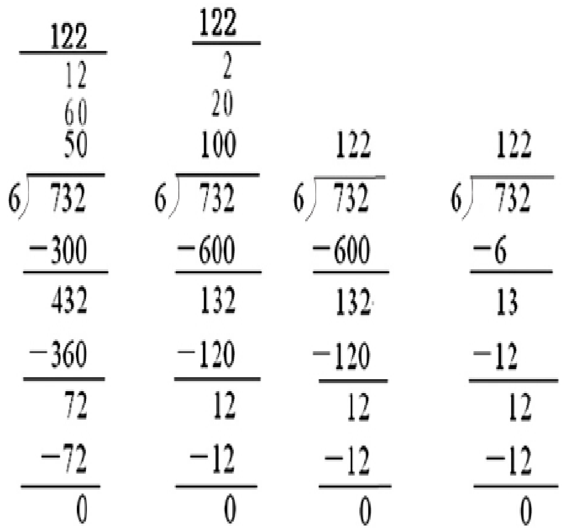


图 4[3] 现代竖式除法的演变

下来，然后进行演算，在这个过程中随时将已处理的数划掉，演算完毕，在沙盘上或纸上留下一行行已划掉的数字，形似帆船，这种方法直到 18 世纪末仍很有市场。虽然现代方法的起源无从考察，但其发展大致经历了如图 4 所展示的 4 个阶段。此外，历史上还出现过因数除法，比如计算 216÷24 时，先用 216 去除以 24 的因数 3，所得结果再去除以 24 的另外一个因数 8；拆分除法，比如在计算 84789÷20 时，用 8478÷2 的商加上 9÷20 的商，所得之和

即为 84789÷20 的结果。[4][5]

中国很早就使用直除法来进行除法运算，所谓直除法就是用被除数连续减去除数，直到结果小于除数为止，减去的除数个数即为商，小于除数的部分为余数。初学除法最大的困难是，除法竖式与已经熟悉的乘法竖式书写方式不一致，这也是本节课的教学难点，康熙皇帝（1654-1722）在《御制数理精蕴》中提供了从乘法竖式自然过渡到除法标准竖式的思路，[6]大致思路见图 7 中 64÷8 的计算。

根据预设，选取上述史料中的直除法、演变后的 Gerbert 的方法、《御制数理精蕴》中的方法作为“课堂中一名额外的学生”，并试图实现如下的教学目标：（1）理解一位数除两除法的算理，并掌握其计算方法；（2）通过情景及讨论，让学生自主探究，掌握试商的方法；（3）通过数学史的引入，让学生知道除法竖式形成的过程，加深学生对于除法竖式的理解。

3 教学过程

3.1 课前设疑

T：这是意大利数学家帕乔利 1494 年说的一句话“如果一个人能把除法做好，那么其它的运算对他轻而易举，因为加减乘都包含在除法运算当中”，你能理解吗？

学生们积极发表自己的想法。

T：我希望通过这节课的学习，小朋友们能回答这个问题。

3.2 新知引入

T：上节课（指“一位数与两位数相乘”）我们认识了兔子朱迪，告诉大家一个好消息，她终于成了一名警察啦，但是啊，疯狂动物城最近发生了一件非常严重的抢劫事件，动物城的珠宝店里，竟然被一次性抢走了 67 枚钻石！这可把我们的警长气坏了，他命令朱迪去调查此事，但是根据兔子朱迪的调查呢，这批钻石被一群人抢去了，而且这批人每人平均分得了 5 颗钻石，剩下不能再分的拿去换钱，不知道有多少人平均分了这些钻石，需要我们小朋友们去查一查究竟有多少人平均分了这批钻石。你们想不想帮助她？

激发学生解决问题的欲望，并引导学生复习旧知，为后续新旧知识的联系做好铺垫。

T：请把你的学习单翻到反面试一下 6 道口算题 。

12÷5=　　180÷3=　　120÷6=　　50÷5=　　26÷5=　　54÷9=

T：看来小朋友们的确很有本领，那请你们利用已经掌握的本领，帮助朱迪侦破此案！注意啦，请你们以小组为单位讨论到底以什么方式解决这一问题？第二，我们来比较一下哪

个小组的方法最多。

3.3 合作探究

教师走到部分小组中间，聆听学生的讨论与观察他们想到的方法，并利用投影仪展示学生的方法。

方法 1： 67-5-5-5-5-5-5-5-5-5-5-5-5-5=2

T: 我们来看一下大家的方法，你们知道他用到的是什么方法吗?

S：一个一个的减 5，最后减得比 5 小的就是余数。

T：就是减得减不了了就是余数。这样做能不能解决刚才兔子朱迪的问题吗?

有的学生说能，有的不能。

S：里面有几个 5 就表示有几个人。

T：小朋友们听懂了吗？哎！非常棒，减掉了几个 5 就表示。

S：几个人分了这些钻石。

方法 2： 67÷5=60÷5+7÷5

T：请你来说一下你是怎么想的?

S：我的算式是 67÷5，先把 67 分拆成 60 和 7，再分别除以 5。

T：我想问一下，60 除以 5 我们学过吗?

S：没有。

通过一系列的提问引导学生理解在 67÷5 时，为什么要将 67 拆成 50 与 17。

方法 3：67÷5=50÷5+17÷5=13……2

S：因为 50/5 是我们以前学过的。

S：因为拆成 50 方便。

T：为什么方便？哪里方便?

S：因为它可以直接 50/5 得到一个整数。

T：非常好，这里 50/5 直接得到了一个整十数，是不是 10 啊。这个 10 加上 3 就非常的方便，没有进位，加起来是不是就很方便。所以我们在分拆的时候就把 67 分成 50 的整十数和另一个两位数。然后再分别去除以除数，再把它们的结果相加，是不是啊?

S：嗯。

T：除了这个方法还有什么呢？我们再来看一下啊。

方法 4：

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times \quad 5 \\ \hline 55 \end{array} \qquad 67-55=12 \qquad 12\div5=2\ldots\ldots2$$

通过反问，引导学生总结方法 4 分拆方法存在的问题，起到巩固分拆的目的。

T：那你也是用了分拆的方法啊，对不对?

S：对。

T：只是你把 67 分成了 55 和 12，而且用什么样的方式来表达的呢?

S：竖式。

T：但是他用什么样的竖式来表达的。

S：乘法竖式。

T：虽然表达的稍微有点问题，但是我们隐约地看到了他的想法。我们再来看一个，这个是什么样的方法呢?

方法 5：图 5 中中间的竖式。

方法 6：图 5 中右边的竖式。

S：竖式

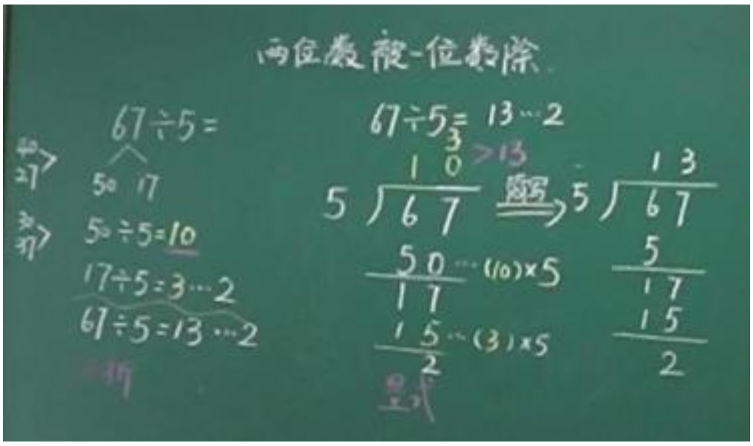


图 5 课堂板书

通过师生互动，引导学生学习竖式除法，并建立多种算法之间的联系（如图 5），掌握无论运用哪种方法进行除法运算，其算理是一样的，都是拆分，拆分成能用以前学习的内容予以解决的形式。

T：好的，小朋友们太棒啦，你们都能帮助朱迪完成任务，这就是我们这节课要学习的新内容，两位数被一位数除。

3.4 感悟历史

T：同学们想了那么多种方法，那让我们来看一下古代的时候，那个时候没有竖式，他们是怎样进行这么大的两位数除以一位数的计算的呢？（如图 6）你们看一下，大约两千多年前，中国有一种方法叫做直除法，你看熟悉吗？

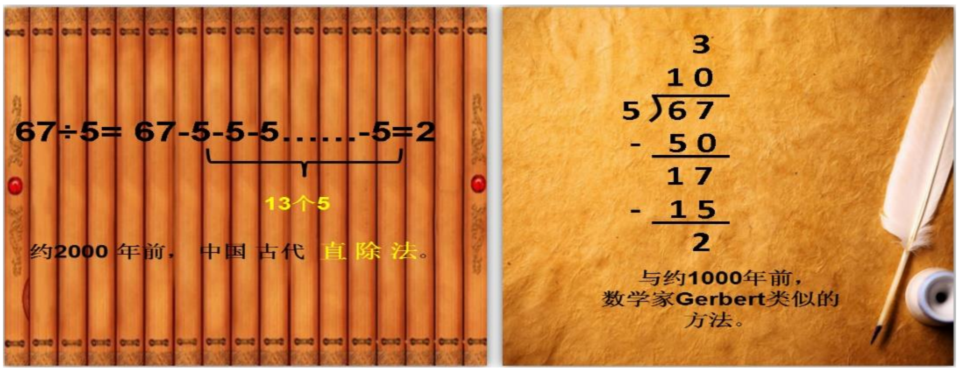


图 6

S：熟悉，就是 L 同学的方法。（指“方法 1”）

T：就是刚才 L 的方法，是不是直接减，但是计算起来。

S：比较麻烦，要写好几个 5555555……。

T：嗯，好啦，大约 1000 多年前啊，有人想出了一个类似上面这样的除法竖式，你能看得懂吗？

S：和简化之前的竖式（指“方法 5”）很像。

T：那我国清朝的时候呢？那个时候康熙皇帝啊，他带着一批人编制了一本书（《御制数理精蕴》），书里也有这样一种除法竖式（如图 7），你看得懂这种竖式吗？

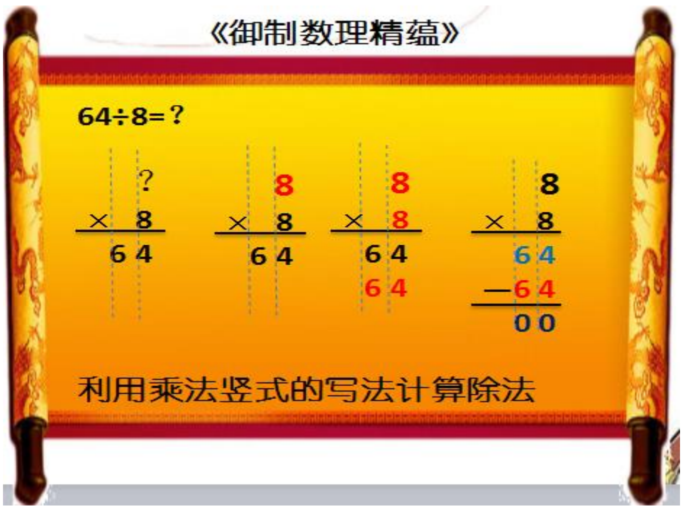


图 7[7] 御制数理精蕴

引导学生领略《御制数理精蕴》中的算法，并进行评论。

S：老师这个做得很烦啊。

T：康熙他们也觉得烦啦，看他们怎么变得啊？（如图 8）仔细看它是怎么变的呢？13 是商，5 是除数，67 是被除数，（演示演变过程），现在你看到它是怎么变得了吗？它是由刚才的那个乘法竖式变成了现在的除法竖式。实在是太奇妙啦，由原来那么复杂的计算方法直除法，到现在简洁的竖式，你觉得哪个好啊？

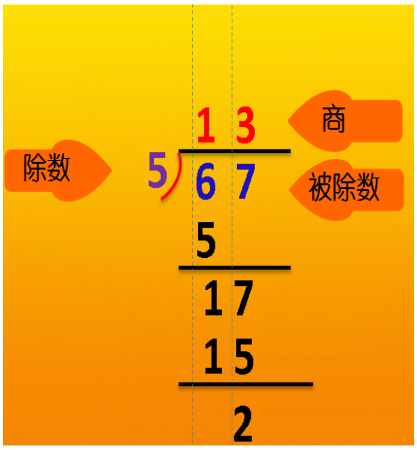


图 8

S：现在。

T：是不是越变越好啊？现在你知道我们的除法竖式是怎么来的吧！

3.5 练习巩固

（1）42÷3=　　　　　　　　（2）34÷9=

投影仪展示学生的做法，探究题留作课后作业

3.6 课堂小结

T：在下课之前老师问你们个小问题，你们觉得这节课有意思吗？

S：有。

T：有意思在哪里呢？你又学会了什么呢？

S：我学会了除法竖式很简便的除法竖式。

S：我学会了古人是怎么计算的，是怎样一点点的演变到现在的。

1. 教学反馈

课后对班级 32 名学生进行问卷调查发现：

（1）大多数学生能利用竖式除法准确的进行计算，但还有一部分学生对竖式除法的算理，即拆分的理解不到位。在利用竖式除法计算 77÷4 的过程中仅有 2 名学生出错，但在回答“在

计算 77÷4 的过程中，要先把 77 分成（ ）和（ ）后再除以 4”时，仅有 20 名学生给出了 40、37 的答案，其余 12 人的答案是 70、7。

（2）扮演“课堂中一名额外学生”的数学史让学生印象深刻。在“这些课你印象最深的是什么？为什么”的回答中，除 1 人未作答，2 人分别给出除法、题目（笔者认为这里指的是珠宝店丢失钻石这一题目）的答案外，19 人给出了与数学史直接有关的答案，他们对古人怎样做除法、用乘法做除法、竖式的演变、帕乔利的话印象深刻，以下是部分学生的答案：

生 1：我印象最深刻的是除法从很麻烦的做法变成简单的做法，它让我知道了它的演变。

生 2：我印象最深的是竖式的演变，因为让我们知道了古人怎样做除法算式。

生 3：我印象最深的是了解了古代除法，因为很有趣。

生 4：是古代的竖式，因为我认识了更多做题方法。

10 人给出了除法算式，理由包括简单、好玩、神奇、方便等，可见这部分学生与给出竖式演变答案的学生一样，对古今的除法进行了对照，认识到了现代除法竖式简便的特点。

4 小结

将多种除法的运算方法以附加式、复制式、顺应式、重构式的方式融入到“两位数被一位数除”的教学当中，体现了数学史如下的教育价值：

（1）知识之谐

现代竖式除法的确立经历了较为漫长的历史发展。如果直接让学生面对现代除法竖式，或者不对包括除法竖式在内的各种方法建立联系、作比对，于他们而言，除法竖式无疑是降落伞式的。因此，本节课将数学史作为“课堂中的一名额外学生”，特别是《御制数理精蕴》中方法与现代除法竖式的转化，让学生深刻感受到了现代除法竖式大致的形成过程，也感受到了便利性在除法竖式形成过程中的推动作用。

（2）方法之美

在帮助朱迪解决问题的过程中，学生想出来了多种方法，教师也呈现了一些历史方法，通过对这些方法的分析，学生不仅感受到了解决除法问题方法的多样性，还感受到了各种方法的独特性，特别是康熙皇帝的方法，与加减乘的竖式计算方法相似，更在各种方法的比对中，感受到了现代竖式除法的优越性。

（3）探究之乐

鉴于历史相似性的存在，在教学设计的过程中，我们设置了探究活动，要求学生想出尽

可能多的方法解决问题，这极大地促进了学生探究的积极性。通过小组合作，学生思考出了多种问题解决的方法，有了成功的体验，积累了基本活动经验。

（4）文化之魅

数学对象并不是凭空出现的，它们从产生到成熟都必然经历一个过程，在这个过程中，不同时代、不同民族的数学家都为数学对象的最终确立贡献者自己的智慧。在“两位数被一位数除”的教学过程中，学生发现了意大利数学家对除法计算不易及原因的认识，感受到了意大利、中国等对除法问题的解决作出的贡献。

（5）德育之效

“课前设疑”中帕乔利对除法运算的评价激发了学生解决问题的热情，“感悟历史”中当学生发现自己的解法与古代数学家的想法类似，他们的自信心得以增强，当康熙皇帝研究数学的史实呈现在他们面前时，他们为之震撼，当他们发现除法并没有帕乔利描述的那样难时，他们的自信心进一步增强，这些都是课堂中进行德育教育的体现。

通过以上的分析发现，扮演“课堂中一名额外学生”的数学史能够起到帮助学生理解与掌握数学知识，引发学生良好的情感体验的作用。在今后的教学中，我们期望有更多的小学数学教师将数学史融入到课堂教学中来。

参考文献

[1]Kool, M.An Extra Student in Your Classroom: How the History of Mathematics Can Enrich Interactive Mathematical Discussions at Primary School[J].Mathematics in School，2008,32(1)：19-22.

[2]汪晓勤.HPM 的若干展望与启示[J].中学数学月刊，2012（2）：1-5.

[3]Eugene D. Nichols, Merlyn J. Behr. Elementary School Mathematics and How to Teach It [M]. New York：CBS College Publishing，1982. 转引自曾小平，韩龙淑.除法竖式的发展与教学[J].中小学数学（小学版），2011（11）：46-48.

[4]Smith, D. E. history of mathematics(vol.2)[M].Boston: Ginn&Company,128-144.

[5][6]郜书竹.笔算方法多样性的历史考察[J].课程·教材·教法，2016,36（1）：88-94..

[7]［清］康熙.御制数理精蕴（一）［M］.长春：吉林出版集团有限责任公司，（267）202.

HPM 视角下的复数概念教学——同课异构案例分析

陈莎莎

（华东师范大学教师教育学院，200062）

1 引 言

数系的扩充过程体现了数学的发现和创造过程，同时体现了数学产生、发展的客观需求[1]。人教版高中数学教科书中以方程 $x^2+1=0$ 的求解问题来引入虚数概念。在初中，学生已经接受了“一个方程可以无解”的事实。方程无解就是无解，为什么非要使它有解不可呢？虚数是虚无缥缈的数吗？虚数究竟有没有用？学生心中难免存在这样的疑惑。要解决这些疑惑，我们就有必要诉诸历史，寻找虚数概念产生的动因，为教学提供借鉴。HPM 视角下的虚数概念教学就是借鉴虚数概念的历史、运用有关历史素材，采用发生的方法所实施的教学。

2016 年 12 月 27 日，在苏州举行的第四届 HPM 教学研讨会上，分别来自江苏和浙江的教师 A 和 B（以下简称 A 和 B）各开了一节展示课，课题均为“数系的扩充与复数的引入”。A 和 B 不约而同地采用了 HPM 的视角。我们关心的是：两位教师各自是如何借鉴和运用数学史料的？数学史在两节课中各发挥了什么作用？两节课各有何特色？我们试图通过对两节课的比较和分析来回答上述问题，以期为 HPM 视角下的复数概念教学提供借鉴。

2 复数的历史分析

复数的历史可以上溯到 16 世纪。意大利数学家卡丹（G. Cardan, 1501～1576）在其《大术》中提出如下著名问题：将 10 分成两部分，使它们的乘积等于 40，并求得两数为 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$。由此，卡丹成了数学史上第一个使用负数平方根的人。不过，他称这样的数为“诡辩式的数”，可见他并未完全理解和接受它们。[2]

16 世纪的另一位意大利数学家邦贝利（R. Bombelli, 1526～1572）则对复数作了进一步的深入探讨。在《代数》（1572）一书中，邦贝利讨论了三次方程 $x^3=15x+4$ 的解：一方

面，该方程有一个实根 4，但运用三次方程求根公式时，却得到了形如

$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ 的根。在当时，这个结果实在太令人吃惊了，它完全超乎人们的理解之外，是一个大矛盾！

17 世纪德国数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646～1716）在解方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=2 \end{cases}$ 时得到，$x+y=\sqrt{6}$（当时的人们尚未接受负数），$x=\sqrt{1+\sqrt{-3}}$，$y=\sqrt{1-\sqrt{-3}}$，从而得到等式 $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$。莱布尼茨惊叹道：“在一切分析中，我从来没有见过比这更奇异、更矛盾的事实了。我觉得自己是第一个不通过开方而将虚数形式的根化为实数值的人。”[3]

因此，历史上数学家并不是因为解一元二次方程而去研究虚数，而是在解三次方程或二元二次方程组时才不得不面对虚数。当一元二次方程的 $\Delta<0$ 时，方程没有实根，人们采取了“弃之不理”的态度。但对于一元三次方程，情况完全不是这样。在邦贝利所遇到的情形中，三次方程明明是有实根的（实际上，任意一个三次方程均至少有一个实根），但利用求根公式，却会出现负数开平方的形式。而在莱布尼茨所遇到的情形中，两个未知数之和明明是实数，但这两个数却都不是实数。正是这种实数与非实数之间的矛盾促使数学家们去研究并接受虚数。

教学中，教师需要设计类似的情境，让学生直面类似的矛盾，方能引发他们的认知冲突，激发他们的学习动机。

3 两节 HPM 课的宏观比较

以下先从教学目标、重难点、教学环节这三方面对两节课进行宏观比较。

3.1 教学目标与重难点

“数系的扩充与复数的引人”是高中数学选修 2-2 第三章“数系的扩充与复数的引入”的内容。A 和 B 的教学对象为高二年级同等层次的两个班级学生。教学目标设定如下：

（1）了解引入复数的必要性；理解复数的基本概念、代数形式以及复数相等的充要条件；

（2）经历复数的产生过程，回顾数系的扩充过程；

（3）感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系。

教学重点：（1）引入复数的必要性；（2）数系的扩充过程和复数的概念。

教学难点：虚数单位 i 的引进。

2.2 教学环节的比较

本节课的教学过程设定为四个环节，A 和 B 具体的教学流程分别如下表 1 所示。

表 1　两位教师的教学环节对比

教学环节	A 教　师	B 教师
创设情境	1.温习已学过的数集； 2.回溯满足社会发展需要的数系扩充史； 3.由拆数游戏引入卡丹问题，以问题串形式再现满足数学内部需要的数系扩充史。	1.引入莱布尼茨二元二次方程求解问题，借助几何画板，通过数与数、数与形两对矛盾引发学生认知冲突； 2.由社会发展和数学内部的双重需要揭示引入数系扩充的必要性。
概念探究	1.探究环节：通过类比，对实数集扩充使负数可开方； 2.引入欧拉对虚数的定义； 3.通过虚数 i 与任意实数进行四则运算探究复数的代数形式。	1.类比化归，引入虚数解决负数开方问题； 2.造数环节:通过 2、3、i 三个数进行四则运算而构造新数，归纳复数的代数形式。
新知运用	1.通过复数是否可以表示实数探究复数的分类； 2.例题讲解； 3.阐述复数相等的条件。	1.例题巩固，阐述复数的分类； 2.阐述复数相等的条件； 3.首尾呼应，解决莱布尼茨问题。
课堂小结	1.课堂小结； 2.自主阅读复数的发展史材料。	1.归纳小结； 2.播放“虚数不虚”微视频，阐述复数的应用。

由表 1 可见，A 和 B 均采用了 HPM 的视角，但设计却不同。对复数的引入，A 通过拆数游戏（将 10 拆成不同乘积的数）再现数系发展的历史，自然过渡到扩充实数域的探究环节，趣味盎然。而 B 从数与形构造莱布尼茨问题的矛盾，营造恐慌的氛围，直观地激发学生认知冲突。对于复数代数形式的探究环节，A 通过类比归纳，而 B 采取了造数活动。在虚数的应用这一方面，A 并未给出实际的应用。而 B 以微视频形式阐述复数在量子力学等领域的应用，比较到位。

同时 A 和 B 有一定的相似之处。为解决卡丹问题和莱布尼茨问题，A 和 B 都采用了抓住主要矛盾、“擒贼先擒王”的方法：造成方程无解的原因是负数不能开平方根，而要解决这一问题，只需令-1 能开平方根即可，由此自然过渡到虚数 i 的定义。而对于复数的运用，A 和 B 均采取例题讲解巩固的方式。

3 两节 HPM 课的微观比较

以下我们根据 HPM 课例评析的 4 个指标[4]——史料的适切性、方式的多元性、融入的自然性和价值的深刻性，对两节课进行微观比较。

3.1 史料的适切性

要将数学史融入数学教学，史料的选择、裁剪、加工与运用必须遵循趣味性、科学性、有效性、可学性、新颖性五项原则[5]。

对于虚数的引入，两位教师考虑到三次方程求根公式的复杂性，都没有选择邦贝利的三次方程问题，而是选择了学生易于接受的二元二次方程组的求解问题：A 选择了卡丹的分 10 问题，即二元二次方程组 $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=40 \end{cases}$；B 选择了莱布尼茨的二元二次方程 $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=2 \end{cases}$，两则史料的可学性都比较强。由于两个问题都是历史上著名数学家求解过的，易于激发学生的兴趣，体现了趣味性。

与教科书中的引入相比，A 和 B 切中虚数诞生的动因，可谓再现历史，都能引发学生的认知冲突，打消他们的疑虑，激发他们的学习动机，因而史料的选择都体现了有效性。但从历史上看，莱布尼茨面对的是一个“矛盾”的等式，荷兰数学家惠更斯对此也表示：“含有虚数的不可开根相加结果竟就是一个实数，这一结果令人惊讶，前所未有。人们决不相信 $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ 会等于 $\sqrt{6}$，如果这里面隐藏着我们无法理解的东西。”而卡丹则认为他的结果本来就是“不可能”的情形，即使“抛开精神上的痛苦”对它进行运算，依然是“矫揉造作”的。因此，B 的问题更能揭示虚数引入的必要性，激发学生的学习动机，给予学生更强烈的情感体验。B 所播放的关于“虚数不虚”的微视频，展示虚数的广泛用途，进一步揭示虚数的必要性，促进学生对虚数概念的理解，体现了趣味性、有效性和新颖性。另一方面，A 将卡丹问题改编成拆数游戏，体现了新颖性和趣味性。

A 和 B 所用的史料都符合历史事实，体现了可学性，但他们在介绍数系从正整数到整数、到有理数、再到实数、最后到复数的扩充过程时，将逻辑顺序视为历史顺序，是错误的，缺乏一定的科学性。

3.2 方式的多元性

数学史融入数学教学的方式，有附加式、复制式、顺应式和重构式四种[6]。

A 附加式讲述数系扩充的历史；然后通过顺应式运用数学史，呈现卡丹问题的改编形式；最后，通过拆数游戏的探究，重构数系扩充的历史。此外，复制式介绍欧拉的虚数定义。

B 复制式运用莱布尼茨的问题，然后通过附加式运用数学史，从社会发展需要和数学内部发展需要两条主线介绍数系扩充的历史；接着，通过造数活动，引导学生自己得出复数的代数表达式。整个过程属于重构式。在课堂总结环节的 HPM 微视频属于附加式。

由此可见，A 和 B 运用数学史的方式都比较多元，A 采用了附加式、复制式、顺应式和重构式，B 采用了附加式、复制式和重构式，未使用顺应式。

3.3 融入的自然性

数学史融入数学教学，需同时考虑所授主题的逻辑顺序、历史顺序和学生心理发生顺序，自然地将数学史融入课堂教学中。以下是 A 和 B 的教学片段。

（1）A 的教学片段

教师介绍为满足社会发展需要的数系扩充史。然后用 PPT 展示拆数问题：把 10 拆成两部分，使其乘积依次为 16、-24、75/4、23，则两部分各为多少？ 让学生快速回答。

师：通过这四组拆数游戏，我们分别得到自然数、整数、有理数、实数集上的四组解。实际上，早在 16 世纪，数学家卡丹也研究过同样的问题：把 10 拆成两部分，使两者乘积为 40，则两数为多少？他和你们一样也列出了类似的方程，结果，他的答案引起了很大的恐慌。你们想想为什么引起很大的恐慌？

学生自由讨论，然后回答问题。

生：$x^2-10x+40=0$，$\Delta<0$。方程无实数解。

师：可是卡丹认为，若把答案写成“$5+\sqrt{-15}$”和“$5-\sqrt{-15}$”就可以满足要求：$\left(5+\sqrt{-15}\right)+\left(5-\sqrt{-15}\right)=10$，$\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right)=40$， 但由于$\sqrt{-15}$在实数集里没有意义，因此制造了很大的恐慌。

教师介绍为满足数学内部发展需要的数系扩充史。

评析：A 顺应式地改编卡丹问题，将数学史上的问题与学生生活建立联系，数学史的融入较为自然。同时巧妙地利用拆数游戏自然地将卡丹问题和数系扩充史两则史料融合在一起，为下一步数系的扩充作铺垫。拆数游戏的设置为虚数的引入创设了问题情境，增添课堂的趣味性，符合学生的心理发生顺序并激发其学习动机。但是 A 仍只将问题矛盾停留在方程 $x^2-10x+40=0$ 无解这一层面，对于卡当问题“两数之和为实数，但它们各自都不是实数”这一矛盾并未过多地渲染。

（2）B 的教学片段

教师用 PPT 展示以下问题：已知二元二次方程组$\begin{cases}x^2+y^2=2\\xy=2\end{cases}$，（1）求$x+y$的值；（2）分别求出 x，y 的值。让学生自由讨论，并在黑板上展示答案。

学生 1（配方法）：由$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=2+4=6$，开根号解得$x+y=\pm\sqrt{6}$。

学生 2（消元法）：令$x=\dfrac{2}{y}$，得：$y^4-2y^2+4=0$。通过换元，令$t=y^2$，得$t^2-2t+4=0$。因为$\Delta=-12<0$，所以 t 没有实数根，即 x，y 无实数根，故方程无解。

师（几何画板展示）：到底是无解还是无实数解？让我们通过几何画板演示图象，$x^2+y^2=2$是以原点为圆心、$\sqrt{2}$为半径的圆，而$xy=2$是反比例函数。由图象可知两者没有交点，这意味着二元二次方程组$\begin{cases}x^2+y^2=2\\xy=2\end{cases}$没有实数解。但是，以$x+y=\sqrt{6}$为例，这条直线是存在的。根据图象可知，$(x, y)$这个点不存在，但其横、纵坐标之和却等于一个实数，二者是存在“矛盾”的。那么问题的关键在哪里？难道方程的背后还有幕后黑手？或者还有一个幽灵在里面？17 世纪德国伟大的数学家莱布尼茨也遇到了相同的问题。

评析：B 开门见山，直接以莱布尼茨的问题引入，通过学生自主探究，发现数与数的矛盾。并进一步通过几何画板演示，直观地从数与形引发学生的认知冲突，将莱布尼茨发现这一结果时“奇异和匪夷所思”的情感渲染入现实生活中的课堂，融入地较为自然。但莱布尼茨问题的引入缺少一定的问题情境，稍显突兀，若能顺应式地改编并增加生活情境，更能增添课堂趣味性。

数学教育研究表明，按照虚数历史顺序比通过方程$x^2+1=0$引入虚数概念更容易让学生接受虚数概念[7]。两节课重构虚数的历史，符合学生的认知基础，实现了历史顺序与心理发生顺序的统一。

3.4 价值的深刻性

A 采用卡丹的问题，让学生面对“两数之和为实数，但它们各自都不是实数”的困境，并通过拆数游戏再现数系发展的历史，揭示复数概念自然发生发展的过程，符合学生的认知规律，促进学生对虚数概念的理解。B 采用莱布尼茨的问题，让学生求得 $x+y$ 的实数值，但发现 x 和 y 都不是实数；进一步通过几何画板演示点（x，y）不存在，但其横、纵坐标之和

却等于一个实数，从数与形两方面矛盾引发学生的认知冲突，从而揭示了引入虚数概念的必要性，虚数的产生变得自然而然。因此，历史的重构揭示了知识之谐。

A 和 B 所采用的历史问题都让学生面对一种无法弃之不理的“矛盾”。A 通过问题 2（按照数系扩充的原则，对实数集进行扩充，至少应该在新的数集中添加怎样的一个数，使得负数可以开平方？），B 通过造数活动（给出三个数：2、3、i，用加减乘除四则运算，构造新数），为学生提供了探究机会，让他们在探究过程中经历知识的发生发展过程，解决数学家们所面对的“矛盾”，归纳造数，营造了探究之乐。

两节课都让学生获得历史感，感悟复数概念诞生的动因，并再现卡丹、莱布尼茨等数学家的工作，使课堂变得人性化；而 B 通过微视频向学生介绍虚数的应用，揭示“虚数不虚”的事实，让学生得以了解数学的价值、数学与其他学科之间的密切联系，凸显了文化之魅。

A 和 B 都能激发学生的学习兴趣，让他们更亲近、欣赏和热爱数学；同时培养学生坚持真理、不懈探究、提出问题、追求创新的品质，彰显了德育之效。

4 结语

以上我们看到，HPM 视角下的两节复数概念课所用的史料基本符合趣味性、科学性、可学性、有效性和新颖性五项原则，但 A 和 B 都将数系扩充的逻辑顺序和历史顺序混为一谈。A 和 B 运用数学史的方式都比较丰富。数学史在两节课上都揭示了知识之谐，B 使用莱布尼茨的问题，更能揭示虚数引入的必要性。在两节课中，学生都获得了探究机会，都经历了虚数概念的产生过程。由于 HPM 微课的使用，B 的课堂更显文化之魅，让学生对虚数有更深刻的理解。在德育方面，两节课都让学生感受到数学背后的理性精神，都让他们更亲近数学。

通过对两节课的比较和分析，我们获得如下启示。

首先，要恰当与灵活地选用数学史，并可在不同环节采取不同的方式将其自然地融入课堂当中。对于复数的概念教学，卡丹问题和莱布尼茨问题都凸显了“两数之和为实数，但它们各自都不是实数”的矛盾，从而揭示了引入虚数概念的必要性。但教师可通过不同的运用方式强烈地激发学生的认知冲突，如可顺应式地改编数学家的问题，增加一定的问题情境，使历史史料更贴近生活，凸显趣味性；同时教师可从代数表征与几何表征两方面强化学生的认知冲突，彰显引入虚数的必要性。

其次，要科学地对待史实。对于数系的扩充，A 和 B 均通过为满足社会发展需要和数学内部发展两条主线介绍数系扩充的历史，但两位教师均以逻辑顺序代替历史顺序，实际上，历史上自然数扩充到分数之后，先诞生了无理数；而负数的引入经历了漫长的过程，并不简简单单地由自然数集到整数集再到有理数集。在将数学史融入课堂教学时，应注重所采用和讲述的史料的科学性。

最后，要充分彰显数学史的教育价值。虚数概念的产生和发展历程充满曲折和艰辛，数学家对于虚数有一个缓慢的接受过程。这种曲折和艰辛，对于在数学学习过程中遇到困难的学生是一种宽慰和鼓励。教师在课堂上以微视频形式简介虚数 2000 年来的历史发展进程，像幽灵般浮现出来的数学难题，以及试图解决这些难题的精彩人物，体现德育之效。同时教师可适当地介绍虚数应用：从流体动力学到电学理论，宇宙飞船的飞行软件用虚数来导航，蛋白质化学家把虚数用在蛋白质结构的空间操作模型中。电机工程师施泰因梅茨（C. P. Steinmetz, 1865～1923）在国际电学大会（International Electrical Congress）提出的一篇著名的论文里曾说过：“我们正在越来越多地使用这些复数来代替使用正弦和余弦，而且我们发现它们在用于计算所有的交流电问题，以及广泛应用于物理学整个范围时具有巨大的优越性。沿着这条路线所做的任何事情都对科学有着极大的用处。”后来他被人们誉为“用-1 的平方根产生电的魔法师”。[8]让学生体会到数学与其他学科之间的密切联系，虚数是有用的，并不是“虚无缥缈的数”。也可引入《复数之歌》和欧拉公式： $e^{i\pi}+1=0$，展示“虚数之美”。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准. 北京: 人民教育出版社, 2003

[2] 汪晓勤, 韩祥临. 中学数学中的数学史. 北京: 科学出版社, 2002

[3]赵瑶瑶. 复数的历史与教学. 华东师范大学硕士学位论文, 2007

[4] 沈中宇. HPM 课例评价框架的建构尝——一三角形中位线定理为例. 教育研究与评论, 2017, (1)

[5] 汪晓勤. HPM 视角下的角平分线教学. 教育研究与评论, 2014, (5): 29-32

[6] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望. 中学数学月刊. 2012, (2)

HPM 视角下的“用字母表示数”教学

——基于同课异构的案例分析

刘帅宏

（华东师范大学教师教育学院，200062）

1 引 言

著名数学家和数学教育家波利亚（G. Pólya, 1887～1985）提出：“只有理解人类是如何获得某些事实或概念的知识，我们才能对人类的儿童应该如何获得这样的知识作出更好的判断。”[1]研究表明，数学史融入数学教学可以帮助学生更好地理解数学和认识数学。[2]

“用字母表示数”是苏教版小学数学教材五年级下册的内容，是由算术过渡到代数的入门课。此节课是学生学习简易方程的基础课。以往教学按照教材顺序，从三角形中小棒个数问题到正方形面积问题，让学生通过数一数、想一想、说一说等数学活动，经历用字母表示数到用字母表示数量关系的过程。[3]虽然国内以后研究在该课题上成果赫然，但 HPM 视角下的教学设计相对较少，与此同时学生对于用字母表示数大多停留带“替代”的层次，鲜有“概括层次”，因此，HPM 视角下的“用字母表示数”课堂意图缓解这一问题。

在第四届 HPM 教学研讨会上，来自苏州和上海的两位小学教师 A 和 B 各上了一节“用字母表示数”的展示课，并且进行了同课异构展示。教学对象为小学同等层次五年级的学生，两位教师均对授课班级情况不明。虽然两位教师均采用 HPM 的视角，借鉴、重构用字母表示数的历史来设计和实施教学，但其数学史融入方式以及特点等都有很大不同。

同样选择 HPM 的视角，教师 A 和 B 的教学设计和实施过程究竟有何异同？我们希望借鉴 HPM 课例评价框架，对上述问题作出回答，以便为 HPM 案例开发、教学实践、教学评价提供借鉴。

2 历史分析

初等代数学的发展经历了从修辞代数到缩略代数再到符号代数的过程。古代埃及和两河流域的代数都属于修辞代数。古埃及纸草书和古巴比伦泥版上有许多求未知数的问题，但在问题的解法中，未知数均用文字来表达[4]。

公元 3 世纪以前，古希腊人并不会用字母表示数。毕达哥拉斯学派的数学家能轻易说出

一个具体的形数，却无法表达“任一三角形数”、“任一正方形数”、“任一五边形数”等的大小，更不能表达出“任意几边形数”。欧几里得（Euclid）在《几何原本》中也同样不会表达“任意多个”。直到公元 3 世纪，丢番图（Diophantus）首次用词尾字母“ς”来表示未知数，标志着缩略代数的诞生。

虽然古代印度数学家采用梵文颜色名的首音节来表示未知数，但他们并没有用缩略音节和其他梵文字母来表示任意数。实际上，12 世纪数学家婆什迦罗（Bhaskara, 1114～1185）和古希腊数学家一样，未能用字母来表达“任意多项”以及数列的一般项。[5]

中世纪阿拉伯的代数依然属于修辞代数。他们不会表达数列的通项以及“任意多项”。花拉子米（Al-Khwarizmi, 780?～850?）只能用“1 平方与 10 根等于 39 迪拉姆”这样的语言来表达一元二次方程 $x^2+10x=39$。

16 世纪法国数学家韦达（F. Viète, 1540～1603）在《分析引论》（1591）中首次使用字母来表示未知数和已知数，并建立其运算系统。他写道：

在这里，我们用一种技巧来帮助我们区别已给的量和所求的或未知的量，这就是用一种有永久性质的、易于理解的符号体系——例如，用 A 或其他字母表示未知量，用 B、C、G 或其他子音字母表示已知量。[6]

韦达将他的符号代数称为“类的算术”，以别于旧的“数的算术”。在韦达之后，费马采用字母来表示曲线方程，大写元音字母表示变量，大写辅音字母表示常量；笛卡儿则是采用小写字母，将字母表中靠前的小写字母表示已知数或常量，靠后的小写字母表示未知数或变量，这种表示方法一直沿用至今。

从古巴比伦的修辞代数到丢番图的缩略代数，历史跨越了两千多年，而从丢番图的缩略代数到韦达的符号代数，历史又跨越了一千三百年！

HPM 的视角下的“用字母表示数”教学，就是要引导学生跨越数千年历史，经历“用字母表示数”思想的产生过程。

3 宏观比较

3.1 教学目标与重难点

结合“用字母表示数”的新课标要求、学生发展要求等，A、B 教师设计教学目标、教学重难点如表 1 所示。

表 1 两位教师的教学目标和重难点对照

	A 教师	B 教师
教学目标	• 初步认识用字母表示数的意义和作用。 • 能结合具体情境用含有字母的式子表示数量或数量关系,渗透符号化思想和函数思想。 • 经历从具体情境中抽象出数学符号、用字母表示数和建立代数式的抽象过程,初步体会用字母表示数的简洁性和概括性。	• 初步认识用字母表示数的意义和作用。 • 能够用含有字母的式子理解并表示学过的运算定律与计算公式。 • 初步体会在具体的情境中用含有字母的式子表示数量或数量关系。
教学重点、难点	• 教学重点:初步认识用字母表示数的意义和作用。 • 教学难点:结合具体情境,理解含有字母的式子不仅能表示数量,还能表示数量关系。	• 教学重点:初步认识用字母表示数的意义和作用。 • 教学难点:学生能够结合具体的情境表达出不同的代数式。

在教学目标层面，首先，两位教师都注重以学生为主体，关注用字母表示数的意义和作用，并且注重对学生经历用字母表示数量到数量关系的过渡；其次，在具体知识教学的时候能关注结合具体情境，学习用字母表示数的意义。但 A 教师尤其独特之处，即目标中关注到培养学生的符号化思想和函数思想以及学生的抽象学习过程。与此同时，我们看到 A 教师表述出“初步体会到字母表示数的简洁性和概括性”，此内容对应学生学习用字母表示数的需求。美中不足的是两位教师均未在教学目标中体现出 HPM 的德育价值和文化价值。虽然教师在数学史融入数学教学应凸显德育之效和文化之魅方面达到一致认可，但教师在设计教学目标中还未将理念恰当融入教学目标设计。

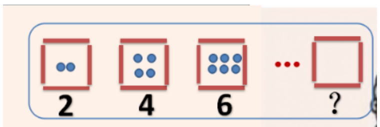
在教学重难点部分，两位教师的表述一致。

我们认为数学史融入“用字母表示数”教学中应注意加强学生产生用字母表示未知数的需求，同样，在教学目标设计的时候也应注意对学生德育之效和文化之魅的渗透。

3.2 教学流程

本文主要结合“用字母表示数”的同课异构教学内容进行对比，故首先将两次课的教学过程进行对比。如表 2 是 A 教师和 B 教师的教学流程。

表 2　教学过程对照

教学环节	A 教师	B 教师
情境引入	• **播放视频** 视频播放《数数的故事》 • **情境导入** ①这则失物招领中说“钱包里面有若干元”，这句话是什么意思？ ②在数学上，怎么表示“若干”？	• **视频导入** 现实当中小胖正在课堂里听课，忽然一阵风吹来，小胖穿越到古希腊时期，视频介绍毕达哥拉斯的背景，激发学生的兴趣。
概念探究	• **用字母可以表示不确定的数** (1)师出示一个钱包。里面有多少钱?怎么表示? (2)PPT 出示一个粉色钱包。里面有多少钱?怎么表示? (3)PPT 再出示一个棕色钱包。里面多少钱吗?怎么表示? • **字母可以表示简单的数量关系** (1)棕色钱包比粉色钱包多 5 元。 小组探究根据这样的数量关系，学生举例猜测钱包中钱数，引导学生产生不能确定钱包中钱数的疑惑。 (2)棕色钱包的钱数是红色钱包的 5 倍。 小组探究根据这样的数量关系，学生举例猜测钱包中钱数，引导学生产生不能确定钱包中钱数的疑惑。 • **视频播放数学史历史** 了解用字母表示数的历史，掌握用字母表示数的规则： ①在含有字母的式子里，字母中间的乘号可以记作“·”，也可以省略不写。比如，$a\times b=a\cdot b=ab$。 ②省略乘号时，一般把数写在字母前面。比如，$a\times 5=a\cdot 5=5a$。 ③a 与 1 相乘，一般写作 a。 ④两个相同的字母相乘，比如 $a\times a=a\cdot a=a^2$。a^2读作 a 的平方。	• **用字母表示任意正整数** 问题一： 小胖同学穿越到古希腊时期，来到毕达哥拉斯的课堂当中。当时，他正在给贵族子弟上课，毕老师问学生：第一堆有 1 个石子，第二堆有 2 个石子，第三堆有 3 个石子……第 n 堆有多少个石子呢？ 小组探究： 任意一个是第几堆呢？里面有几个石子呢？你能想办法表示出来吗？ 结论： 任意一个是用字母来表示的。这样我们在表示任意一个数字的时候就不需要语言，直接说可以了。 • **用字母表示任意正偶数** 问题二： 其中毕达哥拉斯的学生提出新的问题，再次引发学生思考。  小组探究： 任意一个是第几堆呢？里面有几个石子呢？你能想办法表示出来吗？ 结论： 既然 n 表示任意一个的话，在这里可以看出第一个图有 2 个，第二个图有 4 个，第三个图有 6 个，所以根据这个规

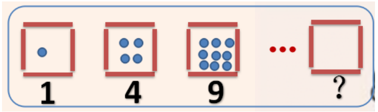
		律，第 n 个图应该是 $2n$ 个石子。这里 $2n$ 是由 2 省略过来的。 ● **用字母表示任意平方数** 视频三： 毕达哥拉斯的学生的书童也发出思考，在地面上摆出另外一个图形，第一个图有 1 个，第二个图有 4 个，第三个图有 9 个……  小组探究： 任意一个是第几堆呢？里面有几个石子呢？你能想办法表示出来吗？ 结论： 既然 n 表示任意一个的话，在这里可以看出第一个图有 1 个，第二个图有 4 个，第三个图有 9 个，所以根据这个规律，第 n 个图应该是 $n\times n$ 个石子。这里 $n\times n$ 可以写成缩略形式 $n\cdot n$ 或者 n^2。
练习巩固	（1）行程问题 （2）长度问题 （3）面积问题	
课堂小结	1. 交流：有什么收获？ 2. 推荐两本书。	你通过今天的课堂收获了什么？

表 2 清晰可见 A 教师从播放小视频开始，通过失物招领问题，引发用字母表示不确定数的符号的概念；然后引导学生探究用字母表示数和数量关系的联系；接着设计小学重点三类数学问题作为巩固练习；最后课堂小结结束。B 教师首先从微视频创设情境，引发对课堂主题的思考，然后直接选择三个微视频设计三个探究活动，引发学生对用字母表示数到数量关系的思考；最后课堂小结。

在概念探究环节，A 教师使学生产生“概括性”的需求，知道当数字不足以表达物体的时候，就要采用新的符号或概念来表示，因而能充分调动学生的学习动机。B 教师则设计学生设计符号表示“任意一个”，将任意的情况无法表达通过视频直接展示给学生。

在练习巩固环节，A 教师选择小学常见三类问题，将新概念与所熟悉的数量关系建立联结，学生对新知进行内化吸收；B 教师由于在探究环节花费大量时间进行探究，所以没时间

进行练习巩固。

4 微观比较

对两节课堂的整体课堂结构对比分析之后，我们可以看到两种教学设计的异同，但由于两设计均采取 HPM 视角，故对数学史的选择、教育价值、融入方式等讨论是极为重要的。根据 HPM 课例分析框架中的四个维度——史料的适切性、融入的自然性、方式的多元性、价值的深刻性，本文对两节课进行微观分析。

4.1 史料的适切性

数学史材料选取与教学设计的五项原则是趣味性、科学性、有效性、可学性、新颖性。[7] 趣味性是指数学史料能够阐述数学背后的故事，而且让学生觉得有趣。科学性是指数学史料符合史实，而非胡编乱造，不能有数学上的错误。有效性是指数学史料的选取要满足教学目标的要求，而不是为了数学史而数学史。可学性是指数学史料的难易程度要符合学生的认知基础，易于让学生接受。新颖性是指选取的数学史料要有新意，有特色，而非老调重弹，人云亦云。因此，史料选取的适切性应当兼顾五项原则。

A 教师几乎没有使用显性的数学史料，只是通过微视频将“用字母表示数”的历史呈现给学生，内容主要是代数发展的三个阶段，这一点基本符合科学性原则。对于小视频帮助学生认识历史，符合学生的认知基础，也能调动学生的兴趣，在可学性、趣味性上较为突出。综合看来，A 教师在数学史料选择有效性和新颖性上有所欠缺。

B 教师则选取了毕达哥拉斯探索大数“任意一堆”的情景，符合历史史实，满足科学性原则。也因其对毕达哥拉斯人物的再塑造，更加吸引学生兴趣，同时采用“穿越剧”的形式，充分体现新颖性、趣味性。在运用历史解决教学难题的时候，B 教师能根据学生的认知基础，逐渐从 n 过渡到 $2n$，最后到 n^2，层层递进，循序渐进，体现了可学性。B 教师安排学生设计符号表示“任意一个”的环节，学生使用文字说明、一般符号表示、用字母表示等，正好对应于历史上修辞代数、缩略代数和符号代数三阶段。数学史料均为教学目标服务，体现了有效性原则。

因此，B 教师在史料适切性方面比 A 教师做得更加全面而深刻。

4.2 融入的自然性

HPM 视角下的数学教学旨在历史与现实、数学与人文之间各架起一座桥梁。其中，历史与现实之间的桥梁，代表历史顺序、逻辑顺序和心理顺序统一；数学与人文之间的桥梁，代表数学学习的情怀。数学史融入的自然性，体现为数学史知识在课堂中自然地出现，讲求

顺应学生的需求和发展，而不是生搬硬套，使学生学习负担加重的附加品。融入自然地数学史，帮助学生与历史对话，感受人文情怀。

下面是两位教师数学史融入课堂的片段分析：

【A 教师的教学片段】

师：同学们，刚才学习了可以用字母 a 表示粉色钱包的钱数，那现在棕色钱包比粉色钱包多 5 元，用字母该怎么表示呢？

生：粉色钱包有 a 元，棕色钱包有 b 元。（学生激动满堂）

师：这样可以，但是，a，b 之间的数量关系就看不出来了。假如粉色钱包有 1 元，则棕色钱包有 1+5=6 元。假设粉色钱包有 2 元呢？

生：假如粉色钱包有 2 元，则棕色钱包有 2+5=7 元。

……

师：假如粉色钱包有 a 元，则棕色钱包有多少元？

生：$a+5$

师：我们看一下这个（$a+5$）元，用来表示棕色钱包的钱数，假如 $a=1$，则（$a+5$）表示 6 元。

生：假如 $a=2$，则（$a+5$）表示 7 元。

师：其实数学史上符号的发展也经历了一个漫长的过程，让我们一起来看看吧。（播放视频）

师：数学离不开必要的规定和约束。含有字母的式子在乘法中哪些特殊的规定呢？请同学们拿出学习单，自学这些特殊的规定，可以在关键处、重要处圈圈划划。

评析：A 教师在概念探究部分，重点帮助学生建立数字与符号之间的关联，通过反复强调，强化了知识之间的联结。在学会可以用字母表示不确定的数之后，教师引入用字母表示数量关系的问题。学生理所当然分别用字母表示两钱包钱数，但教师自然地帮助学生在算数领域入手，考虑钱包钱数的数量关系，因而学生掌握用字母表示数量关系的内涵。在探究新知后附加式地使用微视频介绍符号的发展历史，帮助学生了解数学史的发展，掌握数学符号的书写规则，此方式是建立了数学与现实之间的桥梁。但其内容，学生也只能作为阅读材料理解。学生经历新知探究环节结束后，规范用字母表示数的书写规则也是符合逻辑顺序的，但是，A 教师较少建立数学与人文之间的桥梁，融入较为生硬。

【B 教师的教学片段】

师：（播放视频 2 之后）任意一堆里有几个石子？你有办法表示吗？

生：（关系展示）$2 \times n$。

师：为什么？这到底是什么意思？谁看懂了？

生：$2 \times n$就是n的两倍，

师：对，可以简写为$2n$（可以引到这个点上）或者是$2 \cdot n$。

师：如果n表示7，$2n$表示什么呐？那么7表示第7堆，14就是指第7堆里有14个石子。8.9.10呐？看来对于这个问题你们已经理解了，那我们来看看小胖怎么说！

播放视频3（图3）。

小胖：既然n表示任意一个的话，在这里可以看出第一个图有2个，第二个图有4个，第三个图有6个，所以根据这个规律，第n个图应该是$2n$个石子。这里$2n$是由2省略过来的。

毕老师学生：哼，神气什么，我就不相信你这一种表示还能解决所有问题。看我的！（在地面上摆出另外一个图形，第一个图有1个，第二个图有4个，第三个图有9个）那你知道任意一个图里面有几个石子吗？

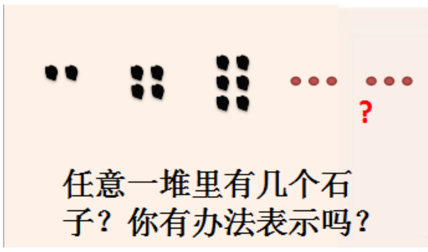


图2　视频2

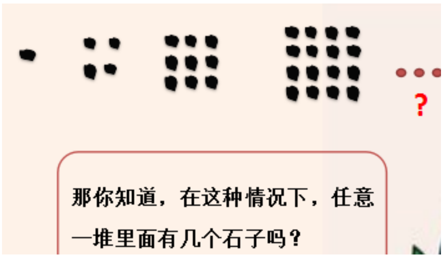


图3　视频3

评析：B教师主要采用探究式教学法，所以学生的课上主要环节为探究部分。课上采用“穿越剧”的形式搭建起历史与现实的桥梁，使学生与古人对话，学习古人的探索精神。学生通过自己在现实世界的见闻回答古希腊时期的难题，使其认识到数学发展的重要性。3个小穿越“微视频”调动学生积极性，参与课堂，认真思考。学生喜欢与古人对话，与伟大数学家近距离的接触减少了学生对数学的陌生感。学生了解到自己课堂已经掌握的内容竟是古人经过一千三百多年的时间才挖掘到的，给了学生一种坚强、无畏、迎难而上的价值观，以及增强学生学习数学的信心，真正做到了历史顺序、逻辑顺序与心理顺序的统一。

综合看来，B教师将数学史渗透到课堂教学环节中，并且能够注意学生的认知基础，其设计更加精美。

4.3 方式多元性

数学史融入数学教学的方式有附加式、复制式、顺应式、重构式。[8]其中附加式是展示

有关的数学家图片、讲述逸闻趣事等；复制式是直接采用数学史上的数学问题、解法等；顺应式是根据历史材料，编制数学问题；重构式是借鉴或重构知识的发生、发展历史。此部分重点比较两节课的数学史融入数学课堂的方式种类和数量。

A 教师主要使用视频方式展示古巴比伦人、丢番图和韦达的照片以及其主要贡献内容属于附加式。在课堂实施环节中，教师从学生现实生活熟知的钱包问题入手，带领学生用字母可以来替代自己不能确定的数到表示学过的数量关系，学生的认知过程是历史的认知过程，这是在借鉴历史的发生和发展的基础上，提炼为符号发展三阶段，教师对学生认识算数到代数的认知过程的重新建构，属于重构式。因此，A 教师运用数学史的主要方式为附加式和重构式。

B 教师制作的微视频中介绍毕达哥拉斯的背景轶事，展示毕达哥拉斯的图片，属于附加式。其教学设计中将数学史上人类从算术到代数的历史发展顺序进行梳理后，采用“任意形数”的问题，改变为不同的探究活动，使学生共同探究字母表示数与数量关系之间的关联，属于重构式。同时在概念探究中将历史上毕达哥拉斯遇到的“形数问题”搬到课堂当中，逐渐激发学生思考，层层设问，属于复制式。因此，B 教师的课堂教学中，将数学史融入课堂的方式主要有附加式、复制式和重构式。

虽然两位教师重构历史的思路不同，但其目标都是更好激发学生思考探究，逐步认识用字母表示数到数量关系。B 教师的使用方式较为独特性的是复制式，采用历史上的数学问题设计穿越剧，丰富课堂，调动认知。

4.4 价值的深刻性

研究表明，数学史融入数学课堂的价值有：知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效。数学史在两节课中体现的教育价值有同有异。

两位教师在教学设计以及实际教学当中都能考虑学生的认知起点，设计课堂问题符合学生的认知发展需求，用字母表示数的知识自然而然的进入学生的视野，体现了知识之谐。在数的古今表示方法的比较中，学生对字母表示数的意义有更深刻的认识，数学史揭示了方法之美。

“让学生多发言”是两节课的共同特征。数学史的引入助人思考，数学史的困惑助人交流，数学史的问题助人表达。两节课中，教师都有意识地去培养学生的思考、交流和表达能力。

两节课中，学生都能感受到历史的发生原则，也了解到伟人也会遇到瓶颈。历史的发生是优胜劣汰的。当一个人解决不了此问题，相应会有更多优秀的人和更聪明的人去进行新的

探索，解决问题。数学就是一个不断解决问题和发现问题的发展过程。数学表达、数学思考、问题解决的能力均可获得不同程度的进步，课堂中的每个人也意识到自己也可以解决伟人解决不了的问题，增强数学学习的自信心与成就感。在历史或现实情境中，学生均能感受到用字母表示数的发生和发展过程，知道历史经过漫长岁月的洗礼，才产生如今使用很方便的字母符号，增强一种幸福感。因此，两节课都渗透了德育。

在探究方面，B 教师做得更为成功。通过找规律问题引发如何表示“任意一个”的问题，进而引出主题。在用字母表示数之前，学生纷纷用自己喜欢的方式设计“任意一个”的表示方法：〈, 〉, O, Δ, X，等等，积累了数学活动经验，获得了成功的体验。

5 结 语

首先，HPM 视角下的课例的教学目标应注重德育价值和文化价值的渗透。对于数学史教学的德育价值和人文价值也反映了当下对于“立德树人”的要求。HPM 教学目标应考虑到数学史对数学学习的效果，也应考虑到数学学习的人文价值。

其次，HPM 教学设计应把学生需求作为启发点，例如本文用“概括性”发展为教学引入字母的需求，而不是直接将教学内容展示给学生，做一些替代转换。

最后，HPM 视角下“探究式教学”应注意课堂环节的妥当安排。虽然数学史融入课堂的效果显而易见，但一节课堂只有 45 分钟，对探究环节投入太多时间必然导致练习不足。故教师应精心选取数学史料，妥当设计探究环节。

参考文献

[1] 蔡宏圣.捕捉数学史中的教育基因——以“用字母表示数”的教学为例[J].人民教育，2008，（6）：38-40.

[2] 彭刚, 汪晓勤, 程靖. 数学史融入数学教学: 意义与方式[J]. 2016, 32(1): 115-120.

[3] 缪步华，郑圣发.用好教材是前提，用活教材是关键——以《用字母表示数》教材为例[J]. 课程与教学，2014（7）：93-94.

[4] [5] 汪晓勤, 樊校. 用字母表示数的历史[J]. 数学教学, 2011, (9): 24-27.

[6] 丹齐克. 数: 科学的语言[M]. 苏仲湘, 译. 上海: 上海教育出版社, 2000: 73.

[7] 汪晓勤. HPM 视角下“角平分线”教学[J]. 教育研究与评论, 2014, (5): 29-32.

[8] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012, (2): 1-5.

HPM 活动简讯

春暖花开的季节，华东师范大学 HPM 研究团队在上海、浙江等地参加了如下学术活动：

◆2017 年 2 月 28 日，在浙江省义乌市上溪中学进行高一年级“正弦定理”和“余弦定理”的 HPM 课例展示，授课老师分别是义乌市上溪中学的吴丽华老师和义乌五中的纪亚荣老师。

“正弦定理”这节课，吴丽华老师以测量流星问题为引入，并通过微视频《正弦定理的证明》向学生介绍正弦定理在历史发展中的各种证明方法，以此拓宽学生的视野，最后深化概念以及定理应用。“余弦定理”这节课，纪亚荣老师以复习正弦定理和测量隧道距离的问题引入，并从几何法、坐标法、面积法三种方法推导余弦定理。其中面积法以欧几里得的勾股定理的证法入手，让学生探究证明余弦定理。最后拓展了历史上余弦定理的其他证明。

（陈莎莎 供稿）

◆2017年3月21日，在江苏省海安县举办的“第二届华应龙与化错教育研讨会”。与会的有各级教育部门领导、北京两所高校的教授、多位特级教师以及上千为小学一线教师。主要活动有大会报告、微报告和研讨课，从中可以发现HPM结合错误研究的价值。

国家督学、教育部教师工作司司长王定华做了关于“切实加强基础教育教师队伍建设”的报告。华应龙老师的研讨课以“找次品”为主题，从易到难，自然地关注并利用学生的错误。培养学生的数学归纳思想，帮助学生树立正确良好的错误观。在“猜想—验证”这节课上，张洪叶老师以学生解方程时出现的错误引出师生共同探究的过程，发现了解方程的新方法，化腐朽为神奇。在“认识负数”这节课上，教师让学生从已了解到的负数来展开学习。这其中也融入了负数的历史，师生于一堂课上走过了数学史上的一千多年。另外还有“月历中的数学奥秘”、“游戏公平吗”等为主题的化错研讨课。

（李霞 供稿）

◆2017年5月11日，在上海市闵行区第三中学进行数学史融入课堂教学研讨活动并举行上海市“立德树人”数学教育教学研究基地实验学校揭牌仪式。本次研讨活动的主题为“德育价值在数学教学中的体现”，并在两个年级进行了HPM课例展示活动，分别是六年级的“画角的和、差、倍（1）”和八年级的“古典概型”，授课教师分别是闵行三中的王娜老师和张婧老师。

“画角的和、差、倍”这节课旨在让学生掌握角的和、差、倍和角平分线的画法，体会

到尺规作图的严谨性；通过数学史和微视频的引入，激发学生数学学习的兴趣，体会几何学的重要价值，感受数学人文的色彩，同时也希望学生明白要虚心听取他人的意见，不能够刚愎自用的道理。“古典概型”这节课旨在让学生了解随机现象与概率的意义，加强与实际生活的联系，使得学生感受与他人合作的重要性以及初步形成实事求是地科学态度和锲而不舍的求知精神。

（刘欣雨 供稿）

◆2017年5月12日，在上海市江宁学校石泉校区举行了HPM课例观摩活动。本次观摩课为初二年级的“三角形、梯形的中位线（1）”，授课教师为有着11年教龄、经验丰富的张莉萍老师。

课前，张老师给学生布置了一个古巴比伦泥版上记载的问题：四兄弟要均分一块三角形土地，该如何分割？学生经过充分的思考，探究出不同的方案。张老师展示典型的三种方法，其中第三种方法就是取三边中点分割，由此自然地引出三角形中位线的概念。接着张老师引导学生观察和猜测4个小三角形的关系，由此归纳出三角形中位线的性质定理，接着思考如何证明该定理。在张老师的启发下，找到了多种证明方法。通过微视频，学生了解了中位线的历史，知道了历史上中位线定理的证明方法，感受古人对于数学追求的热情和严谨。最后，老师提问：“你喜欢哪种分割方法？理由是什么？”学生的回答不拘一格，整节课的气氛达到高潮。

（王鑫 供稿）

◆2017年5月9日—10日，“遇见历史——南通市‘数学史与小学数学教育’专题研讨暨第十七届‘东疆之春’系列教研活动”在江苏省启动实验小学顺利举行。

活动期间，来自上海、杭州、常州、南通四地的10位优秀教师进行了HPM课例展示，汪晓勤教授对课例进行了精彩的点评，特级教师蔡宏圣、博士生岳增成分别作了《遇见历史》《小学数学符号发展史——以“角”“小数”符号为例》专题报告。

◆2017年5月20日-22日，第七届数学史与数学教育学术研讨会暨全国中小学“数学文化进课堂”优质课观摩会，在辽宁省大连经济技术开发区红星海学校召开。本次会议由中国数学会数学史分会（中国科学技术史学会数学史专业委员会）主办。会议主题为“追溯数学发展历史，彰显数学文化价值，促进数学教育发展”。来自中学和高校的130余位代表出席了本次会议。

本次会议总共安排了9场大会报告、48场分组报告、小初高融入数学文化的观摩课各一节。分组报告的主题有数学史、数学文化和数学史与数学教育。华东师大HPM团队的王鑫、刘帅宏、沈中宇、陈莎莎、刘欣雨、栗小妮、岳增成、李婷、齐春燕作了精彩的分组汇报。

（岳增成 沈中宇 供稿）