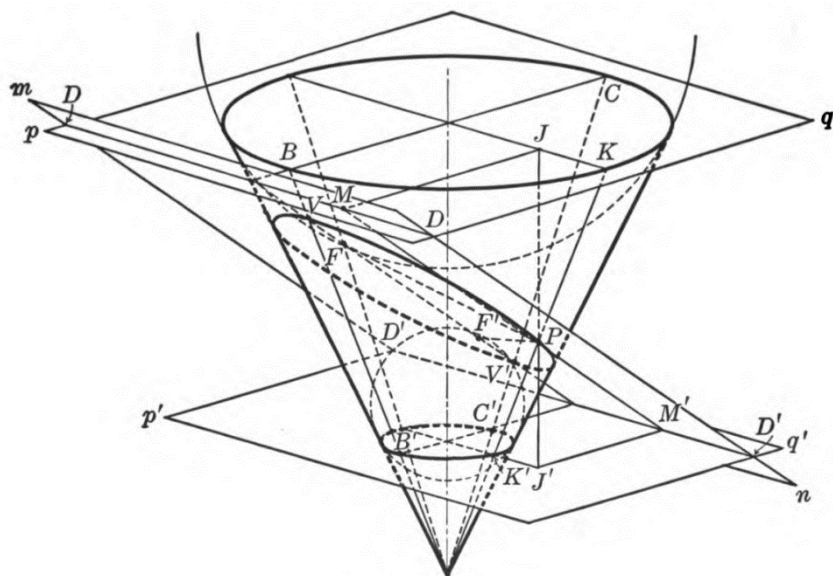




上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2022 年第 11 卷第 01 期



旦德林双球模型

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：刘梦哲

编委（按姓氏字母序）：

韩粟 纪妍琳 姜浩哲 雷沛瑶 栗小妮 李卓忱 刘思璐 邵爱娣 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 余庆纯

岳增成 张佳淳 邹佳晨

刊首新语

我 LOVE 数学

汪晓勤

作为数学教师，我们在职业生涯开启之前，已经就“如何教好数学”这一问题进行深入思考，并修读有关数学教育的课程，而在职业生涯开启之后，还会面对学生“如何学好数学”的问题。如果说对于“如何教好数学”问题的回答需要假以时日，那么对于“如何学好数学”问题的回答则是刻不容缓，因为没有一位学生能够用一年、两年或三年的时间来等候你的回答。

在《科学学习》一书中，施瓦茨（D. L. Schwartz）等提出 26 条“黄金学习法则”，分别用 26 个不同的英文字母来简写。如法则 A，指的是类比（Analogy），法则 B 指的是归属（Belonging），法则 C 指的是对照（Contrasting Cases），法则 D 指的是精练（Deliberate Practice），等等。这些法则都是针对一般的学习过程而提出的，书中的论述并未完全体现具体学科特有的学习规律。

从斯坦福的黄金学习法则中，我们可以提炼出数学学习的四个关键法则，简称 LOVE 法则。

1 Listening & Sharing: 倾听与分享

英国著名哲学家密尔（J. S. Mill, 1806-1873）说过：“一个人能够对某个问题有所知的唯一办法是听不同人对这个问题所提出的不同意见，了解具有不同思维特点的人是如何使用不同的方法来探究这个问题的。所有有智慧的人都是以这种途径获得其智慧的，人的智力的本质决定了只有这种方法才能使人变得聪明起来。”这段话很好地说明了倾听的重要性。

一个人在学习数学时，尤其需要倾听。翻开数学历史的画卷会发现，数学学科有一个十分普遍的现象：命题的证明、公式的推导、法则的解释、问题的求解、概念的定义，都不是“自古华山一条路”，而是“条条大路通罗马”。勾股定理的证法多达近四百种，“负负得正”法则的解释至少有七类，绝对值的定义至少有八种，“鸡兔同笼”问题的解法有一堆……为什么会有这样的现象？不同的人所具有的不同思维方式导致数学思维的灵活多变。课堂上也是如此，一个班级数十人，岂能只有一种想法？

我们在已有的 HPM 视角下的探究式教学中发现，学生的创造力远远超乎人们的想象。在

“三角形内角和”一课，学生至少给出三角形内角和定理的四种不同证法；在“点到直线距离”一课，学生给出了点线距离公式的七、八种推导方法。在这样的课上，学习的过程就是倾听和分享的过程。

笔者曾经在给六、七年级学生授课时，让他们解一道采自中国古代数学典籍《九章算术》中的问题——“勾股容方”问题。为体现一般性，笔者将原题中的条件一般化：已知直角三角形的直角边分别为 a 和 b ，求与该直角三角形有一个公共直角的内接正方形的边长，如图 1 所示。

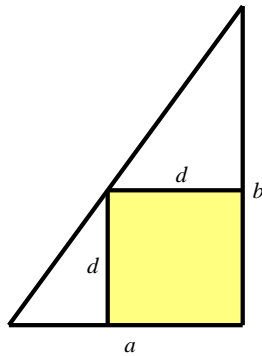


图 1 “勾股容方”问题

出人意料的是，学生在课上先后给出了七种方法。第一种解法是作正方形的对角线，将直角三角形分割成两个三角形（图 2），分别计算这两个三角形的面积得

$$\frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bd = \frac{1}{2}ab$$

故得

$$d = \frac{ab}{a+b} \tag{1}$$

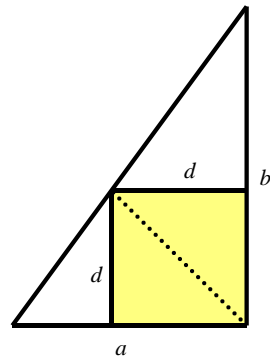
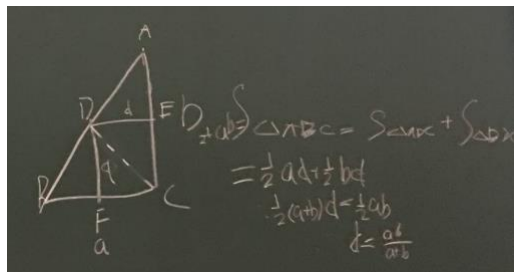


图 2 第一种解法

第二种解法是将直角三角形补成矩形（图 3），得到内接正方形的面积与图中的长方形面积相等。分别计算长方形和正方形的面积，得

$$(a-d)(b-d) = d^2$$

整理得到 (1)。

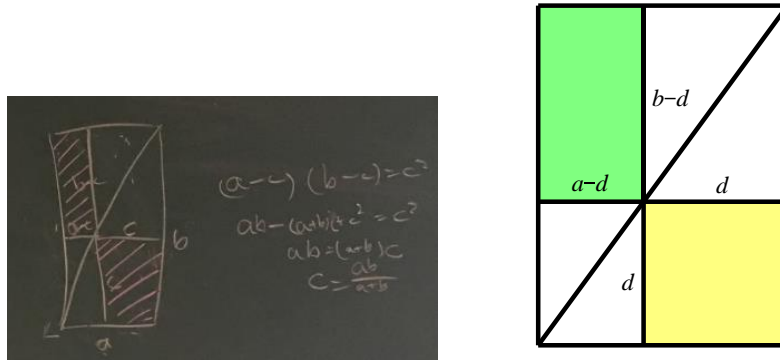


图 3 第二种解法

第三种解法是将直角三角形补成矩形（图 4），将每个直角三角形分割为三块，整个矩形由一对正方形、两对小直角三角形组成，分别计算其面积得

$$2d^2 + (a-d)d + (b-d)d = ab$$

整理得 (1)。

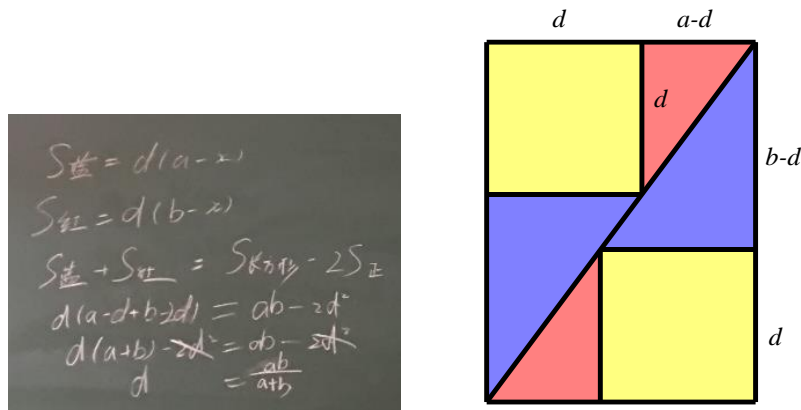


图 4 第三种解法

第四种解法利用了三角形的相似性。如图 5，易知 $\frac{a}{b} = \frac{x}{b-x}$ ，整理得 (1)。

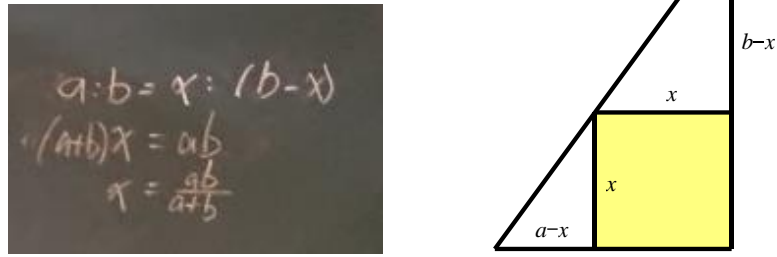


图 5 第四种解法

第五种解法是将直角三角形补成矩形（图 6），将一对正方形、两对直角三角形进行重组，得到长为原直角三角形的两条直角边之和、宽为内接正方形边长的新长方形。分别计算面积，得

$$(a+b)d = ab$$

故得 (1)。

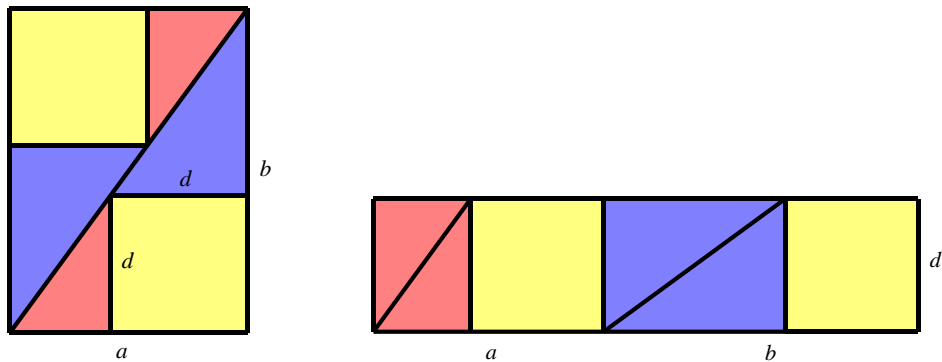
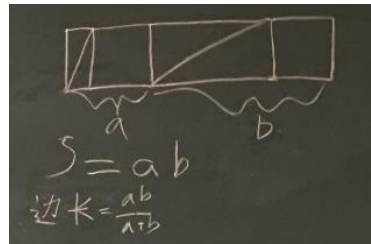


图 6 第五种解法

第六种解法先利用相似三角形的性质，再将两个比例式相加。如图 7，设斜边上的两段长度分别为 n 和 m ，则有

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = 1,$$

故得 (1)。

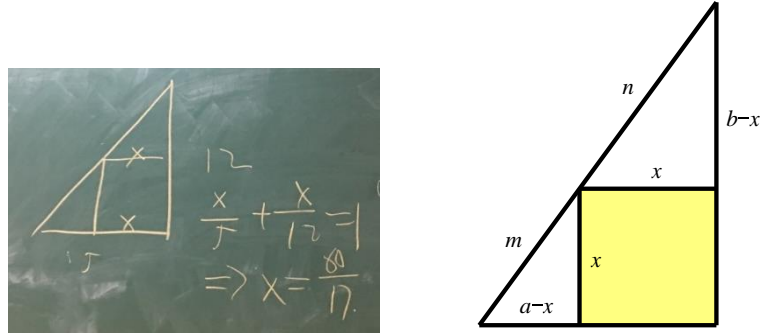


图 7 第六种解法

第七种解法利用了直线方程。如图 8，以直角顶点为原点，以两条直角边所在直线为 x 轴和 y 轴，建立直角坐标系，则斜边所在直线方程为 $y = \frac{b}{a}x + b$ 。因位于斜边上的正方形顶点的坐标为 $(-x, x)$ ，故得

$$x = -\frac{b}{a}x + b$$

故得 (1)。不过，学生似乎混淆了正、负坐标。

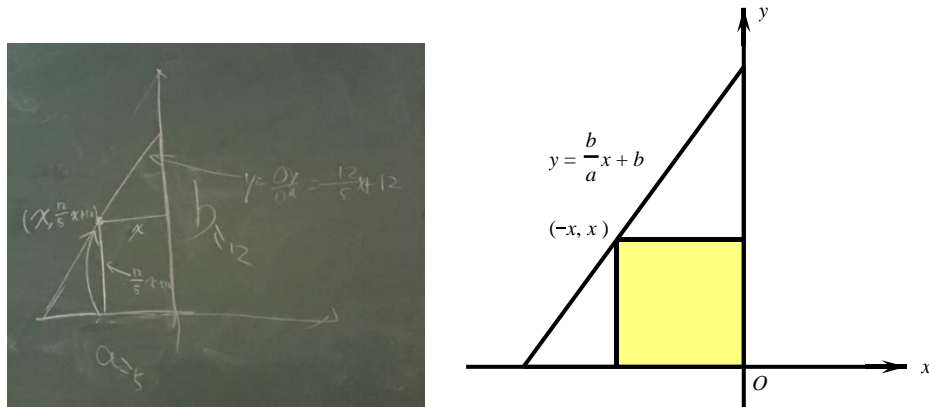


图 8 第七种解法

值得一提的是，解法二实际上利用了欧几里得（公元前 3 世纪）《几何原本》第一卷命题 43：“在一平行四边形中，对角线两端的两个平行四边形的补形彼此相等。”中国南宋时期数学家杨辉（13 世纪）在推导古代“重差术”时也提出“勾中容横、股中容直”的命题，为英国科学史家李约瑟（J. Needham, 1900-1995）所称道。第五种解法则与刘徽在《九章算术》注中所给出的方法如出一辙。

一个学生独自思考，可能只能找到一两种方法，但倾听却能让他知道七种方法！倾听对于数学学习的重要性，由此可见一斑。

2 Observation: 观察与归纳

观察、归纳、类比乃是科学发现不可或缺的途径。历史上重要的科学发现，如孟德尔 (G. J. Mendel, 1822-1884) 的遗传定律，门捷列夫 (Д. И. Менделеев, 1834-1907) 的元素周期律，魏格纳 (A. L. Wegener, 1880-1930) 的大陆漂移说等等，无不是通过观察、归纳得到的。虽然数学是一门演绎科学，但数学发现靠的却并非演绎推理。17 世纪意大利数学家和天文学家伽利略 (G. Galilei, 1564-1642) 曾经说过：“逻辑教会我们如何验证一个已经发现和完成的结论或一个证明的确定性；但我并不认为它能够教我们去发现正确的结论或证明。”

在演绎几何诞生以前，人们主要通过观察和归纳来得出数学结果。在法国卢浮宫所藏的一块两河流域泥版 AO 6484 上，记载着如下结果：

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \left[1\left(\frac{1}{3}\right) + 10\left(\frac{2}{3}\right) \right] 55 = 385$$

我们不禁要问：古代祭司是如何得到这个结果的呢？从第一个等式中可以看出，祭司通过对二次幂和与一次幂和进行比较，建立了二次幂和与一次幂和之间的关系。对于同类量进行比较，自然的方法是求差或求商，可以推测，通过作差来找规律，无果而终，而通过求商来找规律，豁然开朗：

$$\begin{aligned} \frac{1^2}{1} &= 1 = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 1, \\ \frac{1^2 + 2^2}{1 + 2} &= \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 2, \\ \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{1 + 2 + 3} &= \frac{7}{3} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 3, \\ \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2}{1 + 2 + 3 + 4} &= \frac{9}{3} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 4, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

类似地，如果我们通过观察和归纳，可以得出三次幂和公式：

$$\begin{aligned} \frac{1^3}{1} &= 1, \\ \frac{1^3 + 2^3}{1 + 2} &= 3 = 1 + 2, \\ \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{1 + 2 + 3} &= 6 = 1 + 2 + 3, \end{aligned}$$

$$\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{1 + 2 + 3 + 4} = 10 = 1 + 2 + 3 + 4,$$

.....

$$\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{1 + 2 + \dots + n} = 1 + 2 + \dots + n$$

在近代数学史上，通过观察和归纳发现命题、解决难题或提出猜想的例子数不胜数：牛顿发现有理数指数情形的二项式定理，欧拉求得自然数平方倒数和，欧拉发现多面体公式，黎曼提出著名的 ζ 函数零点猜想，……。数学家都是善于观察的规律发现者，前苏联著名数学家柯尔莫哥洛夫（A. H. Колмогоров, 1903-1987）少年时代就通过观察和归纳发现前 n 个奇数之和为

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

数学学习过程中，学生需要学会观察图形、观察模式、观察图像、观察公式。

• 观察图形

几何命题一开始往往是通过观察发现的，且看古希腊几何学鼻祖泰勒斯（Thales, 公元前 6 世纪）发现的几个命题：

- (1) 对顶角相等；
- (2) 圆被直径所平分；
- (3) 等腰三角形底角相等。
- (4) 直径上的圆周角为直角。

而《几何原本》中的许多命题，如“大边对大角”、“大角对大边”、“两边之和大于第三边”等等，无不源于观察。因此，观察图形是学习几何命题的第一步。

• 观察模式

古代两河流域的二次幂和解法就是观察模式的结果。欧拉在《无穷分析引论》中的大量一般性结论都源于模式的观察。例如：依次计算二倍角、三倍角、四倍角、……的余弦，得

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1, \\ \cos 3\alpha &= 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha, \\ \cos 4\alpha &= 8\cos^4 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 1, \\ \cos 5\alpha &= 16\cos^5 \alpha - 20\cos^3 \alpha + 5\cos \alpha, \\ &..... \end{aligned}$$

如果在各等式两边同乘以 2，我们就能很清楚地看出倍角公式的一般规律了：

$$\begin{aligned}
 2\cos\alpha &= (2\cos\alpha)^1 \\
 2\cos 2\alpha &= (2\cos\alpha)^2 - 2, \\
 2\cos 3\alpha &= (2\cos\alpha)^3 - 3(2\cos\alpha), \\
 2\cos 4\alpha &= (2\cos\alpha)^4 - 4(2\cos\alpha)^2 + 2, \\
 2\cos 5\alpha &= (2\cos\alpha)^5 - 5(2\cos\alpha)^3 + 5(2\cos\alpha), \\
 2\cos 6\alpha &= (2\cos\alpha)^6 - 6(2\cos\alpha)^4 + 9(2\cos\alpha)^2 - 2 \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

将等式右边看作 $2\cos\alpha$ 的多项式，观察系数规律，首项系数均为 1，第二项系数构成等差数列 $-2, -3, -4, -5, \dots$ ，第三项系数构成二阶等差数列 $2, 5, 9, \dots$ ，等等，通过归纳可得

$$2\cos n\alpha = (2\cos\alpha)^n - n(2\cos\alpha)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}(2\cos\alpha)^{n-4} - \dots$$

通过模式观察得到一般结论或法则，在现行中学数学教科书中屡见不鲜，如：“负负得正”法则的引入、数列通项公式的产生、二项式定理的发现，等等。

• 观察图像

在学习函数知识时，需要通过观察图像得出函数的单调性、对称性、周期性和有界性，如从“耐克函数” $y = x + \frac{1}{x} (x \neq 0)$ 的图像中可以看到它的单调区间、极值点和渐近线，还可判断该曲线所属的类别。学生已深谙此道，无需赘述。

• 观察公式

观察公式的形式和意义对于公式的理解和记忆是极有帮助的。如对于平面上一点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

可以这样观察：

- (1) 分子上的 $Ax_0 + By_0 + C$ 是点 P 的坐标代入直线方程左边的结果，所以立即可以联想

到，如果点 P 位于直线上，则它到直线的距离为零；

(2) 如果点 P 不在直线上，那么 $|Ax_0 + By_0 + C|$ 的几何意义是什么？

如图 9，通过计算，可得图中线段 PQ 的长度为

$$|PQ| = \left| y_0 + \frac{Ax_0 + C}{B} \right| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|B|}$$

于是发现：点到直线距离公式 $d = \frac{|PQ|}{\sqrt{1 + \left(\frac{A}{B}\right)^2}}$ 表达的不过是直角三角形直角边与斜边的关系而已。

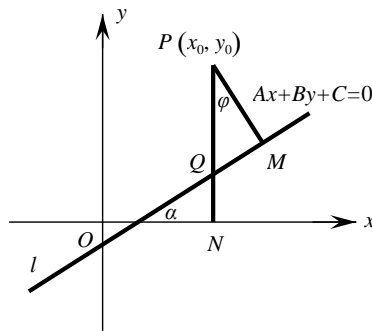


图 9 点到直线距离公式的观察之一

(3) $|Ax_0 + By_0 + C|$ 还有什么几何意义？

如图 10，过点 P 作直线 l 的平行线 l' ，其方程为 $Ax + By + C' = 0$ ，满足 $Ax_0 + By_0 + C' = 0$ ，或即 $Ax_0 + By_0 + C = C - C'$ ，于是得 $|Ax_0 + By_0 + C|$ 为 l 和 l' 在 y 轴上的截距之差的绝对值，它等于线段 PQ 的长度。

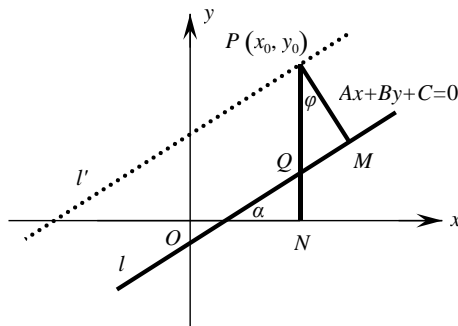


图 10 点到直线距离公式的观察之二

观察公式，追问意义，探赜索隐，这样就能深刻理解和记忆公式了。

3 Visualization: 直观与可视

美国数学家 M·克莱因 (M. Kline, 1908-1992) 曾经提出数学课程的四个原理, 其中之一是直观性原理: “由于杰出的数学家也是直观地思考问题, 我们都必须确保: 将每一种数学思想或方法的直观意义以直观的方式清晰地为学生加以讲解。数学这一直觉面向事实上正式该学科的本质所在。数学主要是一系列重要的直觉。”在论述直觉与逻辑之间的关系时, M·克莱因又指出: “理解是通过直觉获得的, 而逻辑的陈述充其量是学习的次要的、从属的辅助工具。”他感叹: “把连续说成是一条可以用铅笔不间断移动所画出的曲线, 比起 ε - δ 定义来, 要容易掌握多少啊!”这就说明直观性在数学学习中的重要性。

体现直观性原理的重要途径就是将信息可视化。什么是可视化呢? 我们来看伽莫夫 (G. Gamow, 1904-1968) 在《从一到无穷大》中提出的“荒岛寻宝”问题:

从前, 有一个富于冒险的年轻人, 在他祖父的遗嘱中发现了一张羊皮纸, 上面指出了一座宝藏的位置: 乘船至北纬某度, 西经某度, 可找到一座荒岛, 岛的北岸有一片草地, 草地上有一颗橡树和一棵松树, 还有一座绞刑架。从绞刑架走到橡树, 记下所走的步数, 到达橡树后向右拐个直角再走同样多步, 在终点处打个桩。然后回到绞刑架, 再从那里出发走到松树, 记下所走的步数, 到达松树后向左拐个直角再走同样多步, 在终点处也打个桩。于是, 在两个桩的连线的中点即可挖到宝藏。

这个问题中所含的信息很多, 荒岛、草地、橡树、松树、绞刑架、木桩 1、木桩 2, 用点 C、A、B、D 和 E 表示绞刑架、橡树、松树和两个木桩的位置, 绘制图 11 所示的草图, 即可用来确定宝藏位置, 而荒岛和草地的位置和大小、绞刑架的位置和形状、树木的粗细高低、具体的步数等冗余信息均舍弃不用。

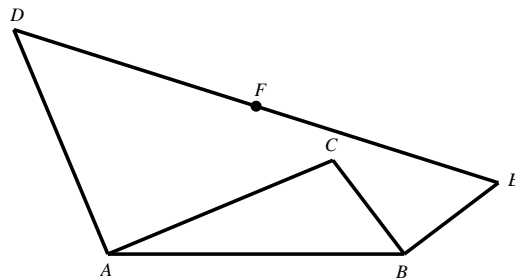


图 11 简化的荒岛寻宝图

以上这种用视觉的方式将信息表达出来的过程, 就是可视化, 其原理是利用图形、图表、

地图等媒介作为大脑之外储存记忆的“容器”，以减少大脑所需处理的信息量，从而减轻思考的负担。将信息可视化，可以让人仅通过眼睛搜索，即可获得特定情境中不同对象之间的空间和数量关系，并发现更多潜在的规律。因此，可视化乃是数学学习的重要方法之一。

可视化的方法古已有之，古巴比伦人、中世纪阿拉伯数学家解一元二次方程的图形方法（图 11）就是可视化的典型例子。古希腊毕达哥拉斯学派的形数理论是研究整数性质的可视化方法。

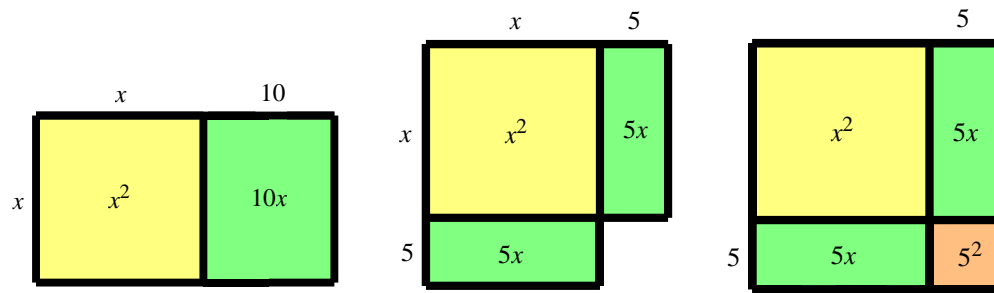


图 11 一元二次方程求解的可视化

例如，从正方形数的两种构造（图 12）中，分别可以得出

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2,$$

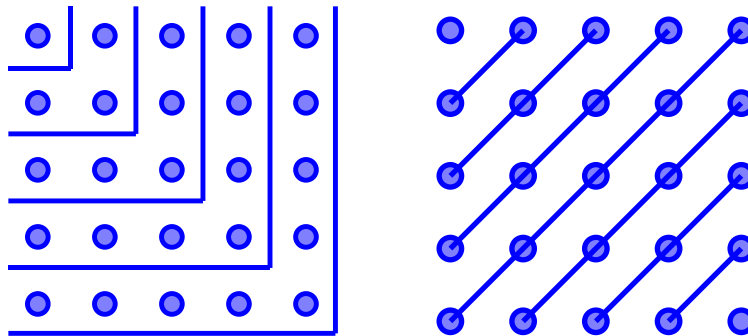


图 12 正方形数的可视化表达

$$1+2+3+\cdots+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=n^2。$$

中国古代数学家在处理几何问题时所惯用的出入相补法即是一种可视化方法，而欧几里得证明勾股定理的面积方法也可以改进为可视化方法（图 13）。

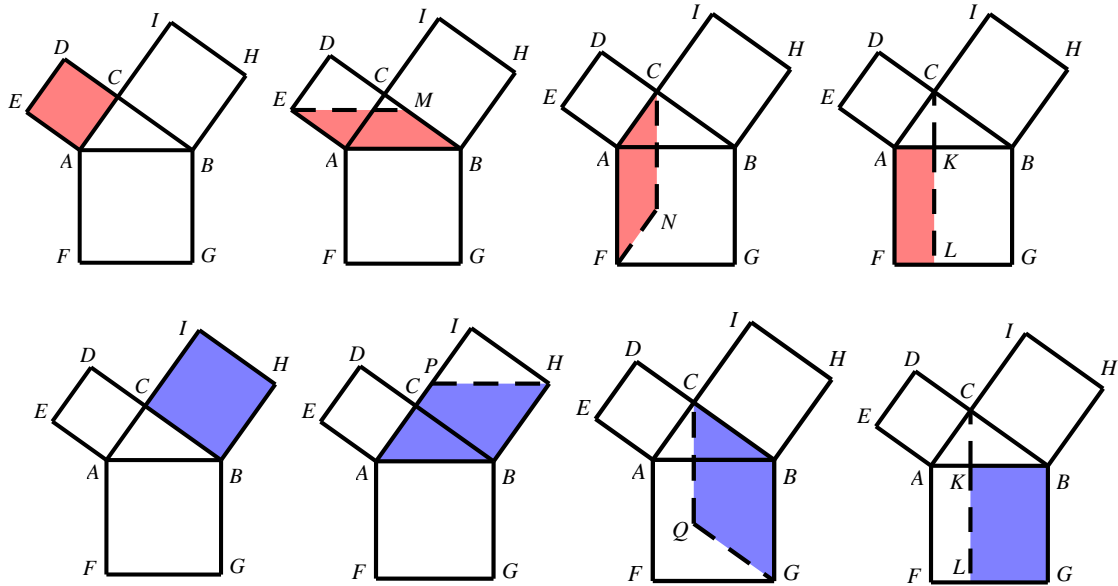


图 13 勾股定理的可视化证明

数学学习过程中，可视化方法可以用于（但不局限于）以下几个方面。

- 将数学问题的信息可视化。
- 将数学证明的过程可视化。
- 将解决问题的方法可视化。

下面的例子是中学生十分熟悉的：已知 $3x^2 + 4y^2 = 12$ ，求 $\frac{y}{x-3}$ 的取值范围。通过作图（图

14）立即发现，该问题不过是求图中点 $A(3, 0)$ 与椭圆 $3x^2 + 4y^2 = 12$ 上一点连线的斜率范围问题

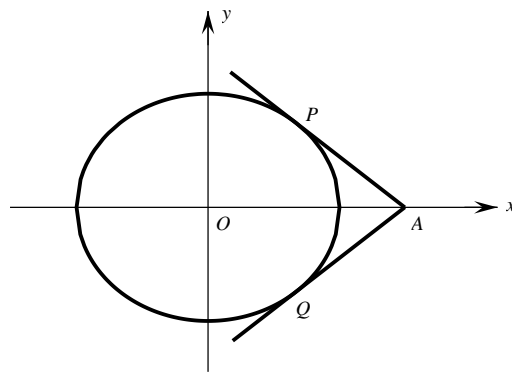


图 14 取值范围问题

而已，故可通过求切线方程加以解决。

善于运用可视化方法的学习者，一定是优秀的学习者。

4 Elaboration: 阐释与关联

数学学习和任何其他学习活动一样，涉及两种不同类型的记忆系统——工作记忆和长时记忆，前者的信息储存能力是零时性的，而后者则可以长久保持。在数学学习过程中，学习者需要从长时记忆系统中调取有关信息到工作记忆中以解决当前问题，如果长时记忆系统缺失，那么学习者将无信息可调用，最终必然导致失败。将知识碎片化，就是这种导致长时记忆系统缺失的低效学习方式。

所谓详细阐释 (Elaboration)，就是“利用已有的知识基础和生活经验，将所要学习的新材料进行人为的、有意义的主动添加的学习策略”，这种策略可以让学习者建立较为稳固的长时记忆系统，因而是十分有效的学习策略。

历史告诉我们，数学这座大厦就是不同时空数学家不断添砖加瓦而建成的，大厦中的每一个单元、每一个房间之间都是相通的。以圆锥曲线为例。古希腊数学家对于三大几何难题的求解导致圆锥曲线的发现，利用射影定理、相交弦定理和相似三角形性质，他们得到了圆锥曲线的基本性质；利用面积贴合理论，建立了椭圆、双曲线和抛物线的内在联系和统一性。解析几何诞生后，数学家更新了圆锥曲线的定义，并用代数语言刻画圆锥曲线的性质。微积分诞生后，数学家又更新了圆锥曲线的切线定义。圆锥曲线这一主题将圆、直角三角形和相似三角形的性质、线面位置关系、二次曲面、面积贴合理论、一元二次方程、二元二次方程（组）、切线和导数概念等众多知识点联系在一起，形成了一个庞大的知识网络。

例如，平方根概念与勾股定理、完全平方公式、绝对值、一元二次方程等知识都有着密切的联系（图 15）；三角形中位线定理与三角形面积公式、三角形全等、三角形一边平行线定理的

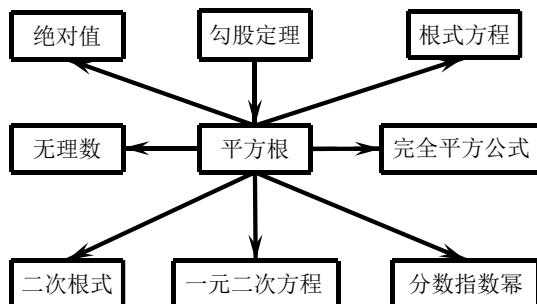


图 15 平方根的相关知识

逆定理等之间也有密切的关联（图 16）。

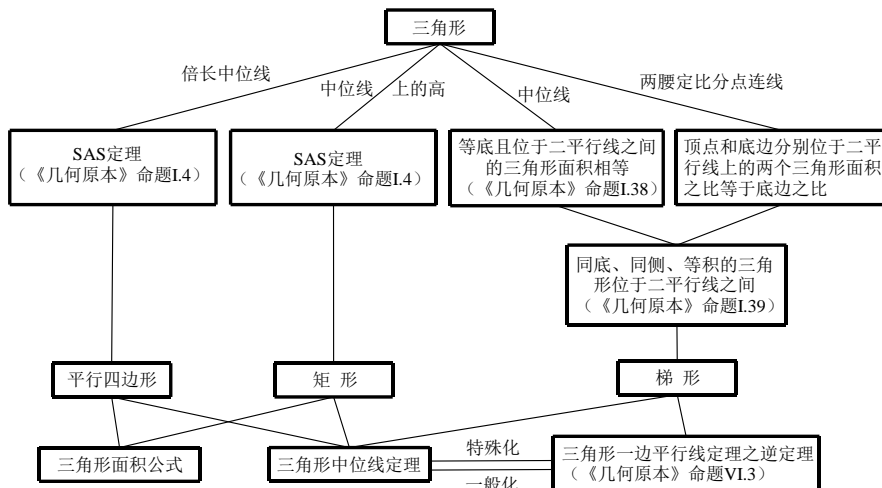


图 16 三角形中位线定理的相关命题

一位高中数学教师曾经告诉笔者，在高一入学的第一次摸底考试中，所教班级中相当多学生直接将一元二次方程 $bx^2 + ax + c = 0$ ($b \neq 0$) 的根写成

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

显然，学生的长时记忆系统是完全缺失的，以致无关联信息可以调用。事实上，通过阐释与关联策略建立图 17 所示的长时记忆系统，就不会发生遗忘或出现“刻舟求剑”般的错误了。

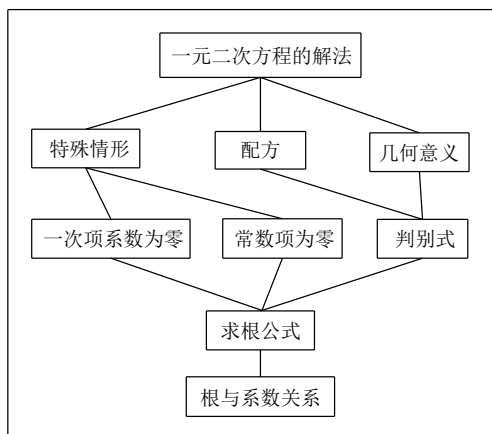


图 17 一元二次方程的长时记忆系统

以上我们分析了数学学习的 LOVE 策略：倾听与分享、观察与归纳、直观与可视、阐释与关联，数学的历史为这些策略的有效性提供了强有力的依据。我们有理由相信，HPM 视角下的数学学习方法论研究必将成为 HPM 研究的重要课题。

目 录

刊首新语

我 LOVE 数学汪晓勤 I

历史研究

美英早期解析几何教科书中的直线倾斜角和斜率 刘梦哲 1

美英早期解析几何教科书中的圆的几何性质 王智洋 13

美英早期解析几何教科书中抛物线的几何性质 杨舒捷 29

教学实践

HPM 视角下的圆锥曲线高三单元复习课教学 赵志丽, 刘梦哲 43

他山之石

职前中学教师在数学建模教学方面的教学内容知识 孔雯晴 54

非常规表示形式中隐含的“有益性模糊”: 分数到底是什么 刘叶青 62

活动讯息

追本溯源, 对话古今 刘梦哲, 雷沛瑶 66

周而复始寻教法 历史探源共研学 王智洋, 雷沛瑶 69

CONTENT

FOREWORD

I LOVE Mathematics..... Wang Xiaoqin I

HISTORICAL STUDY

The Inclination and Slope of a Line in Early American & British Textbooks on Analytic Geometry Liu Mengzhe 1

The Geometric Properties of Circles in Early American & British Textbooks on Analytic Geometry Wang Zhiyang 13

The Geometric Properties of Parabola in Early American & British Textbooks on Analytic Geometry Yang Shujie 29

TEACHING PRACTICE

Teaching of the Unit Review Course of Conic Section in the Third Grade of Senior High School from the Perspective of HPM Zhao Zhili, Liu Mengzhe 43

LITERATURE REVIEW

Pre-service Secondary Teachers' Pedagogical Content Knowledge for the Teaching of Mathematical Modelling Kong Wenqing 54

Productive Ambiguity in Unconventional Representations: "What the Fraction is Going on?" Liu Yeqing 62

ACADEMIC INFORMATION

Summary of Conic Sections in the Second HPM Online Training Class for High School Mathematics Teachers Liu Mengzhe, Lei Peiyao 66

The Training Activities of Periodic Function in the Second HPM Online Training Class for High School Mathematics Teachers Wang Zhiyang, Lei Peiyao 69

历史研究

美英早期解析几何教科书中的直线倾斜角和斜率

刘梦哲

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

我国数学教育家傅种孙先生曾提出他的教育思想, 即理解数学知识的三重境界: 知其然, 知其所以然, 何由以知其所以然^[1]。直线倾斜角和斜率作为初中学习一次函数、高中学习直线方程的重要概念, 首先应该让学生“知其然”, 即掌握直线的倾斜角和斜率的概念, 其次要让学生“知其所以然”, 即了解课本上对这两个概念如此定义的理由, 最后还要让学生清楚“何由以知其所以然”, 即寻找这两个概念的慢慢发展长路。

《义务教育数学课程标准》(2011 年版) 要求学生能画出一一次函数的图像, 根据一次函数的图像和表达式 $y=kx+b(k \neq 0)$ 探索并理解 $k>0$ 和 $k<0$ 时, 图像的变化情况^[2]。现行八年级下沪教版教科书在学习一次函数的图像时, 斜率这一名词已经给出, 但并没有给出斜率的确切定义和几何意义, 而将这一部分内容放在高中数学中讨论。《普通高中数学课程标准》(2017 年版) 要求学生能理解直线的倾斜角和斜率的概念, 经历用代数方法刻画直线斜率的过程, 掌握过两点的直线斜率的计算公式, 能根据斜率判定两条直线平行或垂直^[3]。现行高二下沪教版教科书将直线倾斜角 α 定义为 x 轴绕直线 l 与 x 轴的交点逆时针旋转至与直线 l 重合时所成的最小正角, 其范围界定为 $[0, \pi)$ 。当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 倾斜角的正切值被定义为直线的斜率; 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 直线的斜率不存在 (趋于无穷大)。

HPM 视角下的数学教学将数学史引进到教学当中, 让学生以历史的角度看待一个数学问题的提出、数学问题的演变、数学问题的应用等^[4]。在新一轮课程改革的背景下, 素质教育势在必行, 渗透数学文化则是在数学课堂教学中进行素质教育的良好途径。因而, 教师不仅要充分挖掘数学史中的数学文化, 还应以数学史为载体, 充分发挥数学文化的情感教育功能, 让学生从中感悟数学文化。

数学史告诉我们，任何数学概念、公式、定理、思想都不是从天上掉下来的，都有其自然发生发展的过程，而我们对此知之甚少^[5]。鉴于此，本文对 19-20 世纪美英解析几何教科书中的直线倾斜角和斜率的相关内容进行考察，以试图回答以下问题：直线倾斜角和斜率的概念有何不同的定义？这两个概念出现的先后顺序是什么？直线斜率的概念是如何产生的？

2 早期教科书的选取

本文选取 1826-1965 年间出版的 73 种美英早期数学教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

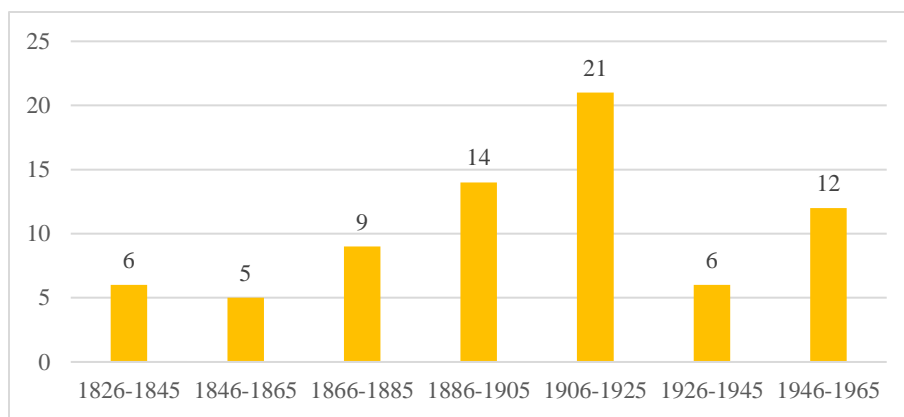


图 1 73 种美英早期数学教科书的出版时间分布

在 73 种解析几何教科书中，直线倾斜角及斜率的相关内容主要位于“直线”“笛卡尔坐标”“平面上的点和直线”“直角坐标系”“一次方程”等章。20 世纪以前，直线倾斜角和斜率的概念与直线方程的推导多在同一章节中，其大多归于“直线”一章。此后，两者被安排在不同的章节中，即直线倾斜角和斜率的概念被向前移入“坐标系”一章。

3 倾斜角的定义

从 19 世纪到 20 世纪，从斜坐标系到直角坐标系，为了求出不同坐标系下的直线方程，教科书编者首先引入了直线的倾斜角这一概念。随着时间的不断推移，对于直线倾斜角定义的表达方式也有所不同。表 1 给出了直线倾斜角的定义。

表 1 直线倾斜角的定义

定义方式	具体描述	教科书
夹角定义	直线与 x 轴的夹角。 ^[6]	Hamilton (1826)
	x 轴上方的直线与 x 轴正半轴的夹角。 ^[7]	Todhunter (1881)
旋转定义	x 轴正半轴通过逆时针旋转与直线重合所经过的角。 ^[8]	Ashton (1901)
	x 轴的正半轴绕原点 (或直线与 x 轴交点) 逆时针旋转, 使其与直线平行的最小角度。 ^[9]	Ziwet & Hopkins (1913)
	从 x 轴的正方向 (或 x 轴的平行线) 逆时针旋转到直线正方向所经过的角。 ^[10]	Dowling & Turneure (1914)
位置定义	一条直线与 x 轴相交会形成四个角, 从 x 轴正方向及 x 轴上方出发, 将这些角命名为 1,2,3,4, 于是直线的倾斜角是直线与 x 相交形成的第一个角。 ^[11]	Hardy (1897)
	一条直线与 x 轴相交形成几个角, 将直线右侧及 x 轴上方的角叫做直线的倾斜角。 ^[12]	Siceloff, Wentworth & Smith (1922)

不同教科书对于直线倾斜角的不同定义方式, 将会影响教科书编者对于倾斜角范围的界定。最为常见的界定是将倾斜角的范围定义在 0 到 π 之间, 但此时没有明确端点处的取值情况。例如 Smith & Gale (1912) 指出, 当直线平行于 x 轴时, 此时直线的倾斜角为 0 或 π , 显然其将倾斜角的范围界定为 $[0, \pi]$ ^[13]。Cell (1951) 和现行教科书保持一致, 将倾斜角的范围界定为 $[0, \pi)$, 并提出这样的界定方式与物理和工程中的标准用法一致^[14]。

Nelson, Folley & Borgman (1949) 将倾斜角界定为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 因为直线的斜率 m 等于直线倾斜角 θ 的正切值, 因此, 在已知直线斜率的情况下, 由反函数即可得到 $\theta = \arctan m$, 此时算出的 θ 的范围可以保证与倾斜角的范围一致^[15]。当然, 也有教科书将倾斜角直接界定在 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 之间, 而不明确端点处的取值。

若将直线倾斜角定义为一条有向线段逆时针旋转到另一条有向线段所经过的角, 此时教科书编者往往会将倾斜角的范围界定在 0 到 2π 之间, 例如, Young, Fort & Morgan (1936) 将倾斜

角界定为 $[0, 2\pi)$ ^[6]。当 P_1P_2 与 x 轴相交且方向向上时，正半轴 Ox 逆时针转过的角度，即直线的倾斜角 $\theta < \pi$ （图 2(a)）；当 P_1P_2 与 x 轴相交且方向向下时，直线的倾斜角为 $\theta + \pi$ （图 2(b)）；当 P_1P_2 与 x 轴平行时，倾斜角为 0 或 π 。

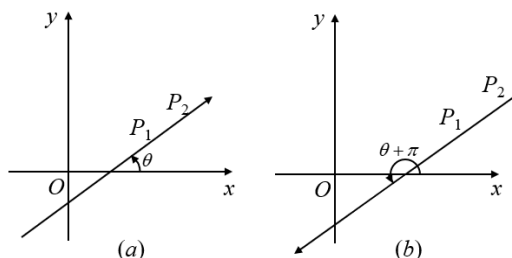


图 2 Young, Fort & Morgan (1936) 对倾斜角的界定

图 3 给出了直线倾斜角的定义及其范围界定的时间分布情况。从折线图中可以看出，19 世纪，夹角定义是教科书中的主流定义方法，但这样一种定义方式对于任意角的产生及位置的表述并不明确。因而，旋转定义在 20 世纪越来越受到教科书编者的青睐，此时对倾斜角的定义方式也契合三角学中所提出“任意角是旋转出来的”。

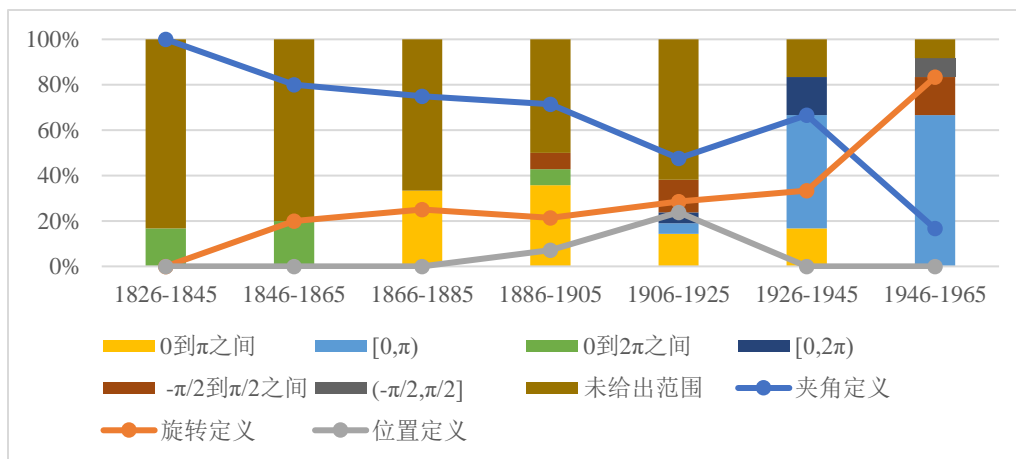


图 3 直线倾斜角的定义及其范围界定的时间分布

从柱状图中可以看出，20 世纪以前，超过半数的教科书只给出倾斜角的定义而没有界定其范围，但此后给出范围的教科书逐渐增多。从总体上看，将直线倾斜角界定在 0 到 π 之间的教科书依然占据绝大多数。随着倾斜角的定义不断转向旋转定义，对倾斜角的范围也会给出明确的区间界定，于是越来越多的教科书将倾斜角的范围界定在 $[0, \pi)$ 。

4 斜率的历史发展

斜率概念的历史发展总共经历了三个历史阶段，即从几何比到直线方程、从三角比到直线方程、最后出现斜率的概念^[17]。

4.1 从几何比到直线方程

19 世纪上半叶，早期教科书中还没有出现斜率的概念，同时，教科书编者大多是在斜坐标系下给出直线方程。

Hamilton (1826) 运用几何方法，证明坐标满足 $Ay+Bx+C=0$ 的点的轨迹是一条直线^[6]。令 $a=-\frac{B}{A}, b=-\frac{C}{A}$ ，此时方程可以转变为 $y=ax+b$ 的形式。在斜坐标系 YAX 中，在 AY 上取 $AB=b$ ， XA 的延长线上取 $AC=\frac{b}{a}$ ，连结 CB ，此时直线 CBZ 即为所求轨迹（图 4）。

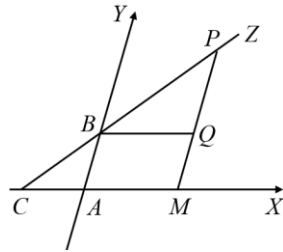


图 4 Hamilton (1826) 推导直线方程

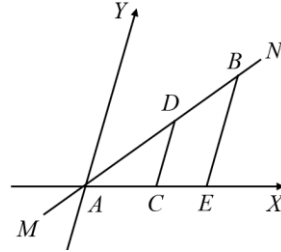


图 5 Young (1830) 推导直线方程

在 BZ 上任取一点 P ，作 $PM \parallel AY$ ，过点 B 作 $BQ \parallel AX$ ，交 PM 于点 Q 。令 $AM=x$ 及 $MP=y$ ，此时 x 和 y 分别是点 P 的横纵坐标，于是 $y=MP=PQ+QM=PQ+b$ 。因为 $\triangle PBQ \sim \triangle BCA$ ，所以 $\frac{PQ}{BQ} = \frac{BA}{CA}$ ，于是 $PQ=ax$ ，将 PQ 的值代入上式可得 $y=ax+b$ 。由点 P 的任意性，所以在直线上任何其它假定点的坐标之间也满足同样的关系，故 CZ 为所求直线。

作者对于直线方程中的 a 作了进一步的讨论。令直线与 x 轴的夹角为 α ， x 轴与 y 轴的夹角为 β ，由正弦定理可知， $a = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \angle BCA}{\sin \angle ABC} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$ ，此时直线方程为 $y = \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}x + b$ 。在平面直角坐标系下，即 $\beta = \frac{\pi}{2}$ ，于是 $a = \tan \alpha$ 。作者还假设倾斜角 α 的范围从 0 到 π ，讨论了 x 的系数的变化情况。不仅如此，作者基于 a 、 b 的符号，给出了斜截式的四种情况以及点斜式和两点式。

Young (1830) 在斜坐标系的基础上, 推导一条过原点的直线的解析表达式^[18]。在直线 MN 上任取两点 D 、 B , 作 $DC \parallel AY$ 及 $BE \parallel AY$ (图 5), 易知 $\frac{CD}{AC} = \frac{BE}{AE}$ 。显然, 直线上任何一点的纵坐标与横坐标之比为一个定值 a 。作者还说明了不同坐标系下的情况, 在直角坐标系中, a 表示直线与 x 轴夹角的正切值, 当夹角是锐角或钝角时, 对应的正切值为正或负。在斜坐标系中, a 表示直线与 x 轴和 y 轴夹角的正弦之比, 并讨论 a 的正负情况。随后, 作者推导出不过原点的直线方程 $y=ax+b$, 并根据 a 、 b 的不同符号, 对四种不同情形的直线方程的性质及其图像进行了详细的讨论。作者还在教科书中考虑与坐标轴平行的直线方程。

循着这一思路, Lardner (1831) 依然利用几何比, 证明满足方程 $Ax+By+C=0$ 的点的轨迹是一条直线^[19]。当 $A=0$ 或 $B=0$ 时, 所得到的直线分别平行于 x 轴和 y 轴。与此同时, 对于具有相同 $-\frac{A}{B}$ 的直线, 它们之间的位置关系则是平行的。

Davies (1836) 依然在斜坐标系中, 利用正弦定理得到了一般直线的方程^[20]。而在直角坐标系中, 作者讨论了当直线与 x 轴的夹角 α 从 0 到 2π 时, $a=\tan\alpha$ 的符号变化情况。可以说, 这一时间段的教科书编者在推导直线方程时有两个最为显著地特点, 一是基于斜坐标系, 二是利用几何比得到等量关系, 随后得到直角坐标系下的一次项系数 a 等于直线倾斜角的正切值, 但此时斜率的概念并没有出现。

4.2 从三角比到直线方程

19 世纪中叶以来, 不断有教科书编者只推导直角坐标系下的直线方程, 并以三角比为出发点进行讨论。O'Brien (1844) 首先说明方程 $Ax+By=C$ 表示一条直线^[21]。任取直线上两点

$P_1(x', y'), P_2(x'', y'')$, 代入可得 $\begin{cases} Ax' + By' = C \\ Ax'' + By'' = C \end{cases}$, 两式相减得到 $\frac{A}{B} + \frac{y'' - y'}{x'' - x'} = 0$, 设过这两点直线 l

与 x 轴的夹角为 θ , 则 $\tan\theta = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$, 即 $\tan\theta = -\frac{A}{B}$, 由此可知, 直线与 x 轴夹角的正切值为

$-\frac{A}{B}$ 。过直线上任意一点 $P(x, y)$, 作 $PM \perp x$ 轴, 垂足为点 M (图 6)。因为 $\tan\theta = -\frac{A}{B}$ 及 $OA=a$,

故 $\frac{MP}{MA} = -\frac{A}{B} = \frac{y}{x-a}$, 得到直线的一般方程 $Ax+By=Aa=C$ 。作者还从这个一般方程出发讨论其

与坐标轴的交点并给出直线的截距式和斜截式。

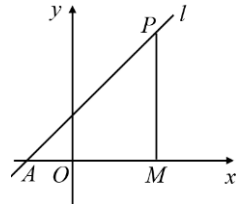


图 6 O'Brien (1844) 推导直线方程

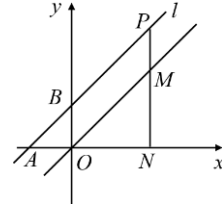


图 7 Loomis (1851) 推导直线方程

Loomis (1851) 过原点作直线 l 的平行线 OM , 取直线上任意一点 P 作 x 轴的垂线交 OM 和 x 轴于点 M 、 N (图 7) [22]。设 $ON=x$ 、 $PN=y$ 、 $BO=b$ 及 $a=\tan \angle PAN=\tan \angle MON$, 所以 $y=PN=PM+MN=b+ON \cdot \tan \angle MON=ax+b$ 。Bowser (1880) 则是过直线与 y 轴的交点作 x 轴的平行线, 并利用三角比推导出直线的斜截式[23]。

综上所述, 以上展示了历史上利用三角比推导直线方程的三种主流方法, 在 1844-1881 的近四十年间, 绝大多数的教科书还没有涉及斜率的概念, 但是这一概念已呼之欲出。

4.3 斜率概念的出现

在我们所考察的美英早期解析几何教科书中, Peck (1873) 最早给出了斜率 (slope) 的概念[24]。Peck 先定义直线的倾斜角 θ 是直线与 x 轴的夹角, 角的大小是从 x 轴正方向到直线转过的角度, 角的范围可以是 0 到 π 之间的任意值。任取直线上任意两点 $P_1(x', y'), P_2(x'', y'')$, 则 $\tan \theta = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ 。于是, 作者将直线倾斜角的正切值定义为直线的斜率 k , 并指出, 这里使用的“斜率”一词几乎等同于工程学中的“等级”(grade)一词。此时, 直线倾斜角和斜率之间建立起了联系, 即 $k = \tan \alpha$, 当 $k > 0$ 时, 有 $\alpha < \frac{\pi}{2}$, 当 $k < 0$ 时, 有 $\alpha > \frac{\pi}{2}$, 但没有讨论直线斜率不存在的情况。

Hardy (1889) 依然将直线斜率定义为直线倾斜角的正切值, 并对直线斜率进行了完整的讨论[25]。从直线的一般方程 $Ax + By + C = 0$ 出发, 即可推导出直线的斜截式为 $y = mx + b$, 其中 $m = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$ 。随后, 作者讨论了 m 的取值情况, 当 $m > 0$ 时, 直线与 x 轴成锐角; 当 $m < 0$ 时, 直线与 x 轴成钝角; 当 $m = 0$ 时, 直线平行于 x 轴, 且直线方程为 $y = b$; 当 $m = \infty$ 时, 直线平行于 y 轴, 此时直线的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}$, 且直线方程为 $x = a$ 。

Phillips (1915) 首次改用比值, 而不用三角比来定义直线的斜率[26]。在给定直线 MN 上任

取四个点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3), P_4(x_4, y_4)$ (图 8), 因为 $\triangle P_1P_2R \sim \triangle P_3P_4S$, 所以 $\frac{RP_2}{P_1R} = \frac{SP_4}{P_3S}$,

即 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$ 。由此可知, 若在直线上任取两点, 则这两点的纵坐标之差与横坐标之差的

比值是一个定值, 于是比值 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 被叫做直线的斜率。又因为 $\tan \theta = \frac{RP_2}{P_1R}$, 于是直线倾斜角

和斜率之间的关系为 $m = \tan \alpha$ 。

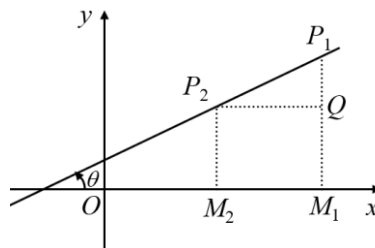
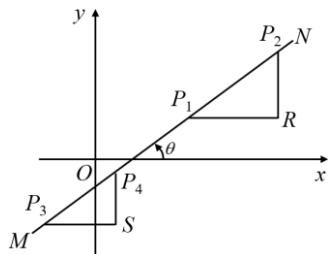


图 8 Phillips (1915) 中的斜率定义 图 9 Harding & Mullins (1926) 中的斜率定义

Harding & Mullins (1926) 从动态的角度给出了直线斜率的概念^[27]。任取直线上两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 当直线上一点从点 P_2 运动到 P_1 时, 上升的距离 QP_1 与水平移动的距离 P_2Q 的比值被称为直线的斜率 m (图 9)。记 $\Delta y = y_1 - y_2, \Delta x = x_1 - x_2$, 则直线斜率可以简记为 $m = \frac{QP_1}{P_2Q} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 。与此同时, 作者进一步指出直线斜率测量了直线的陡度, 即直线上升或下降的速率。斜率概念引入教科书后, 渐渐成为解析几何的重要概念之一, 为后世解析几何教科书所普遍采用, 直线方程也因此建立在斜率概念的基础之上^[17]。

5 斜率的概念

在 51 种给出直线斜率的概念的教科书中, 对于斜率的定义方式可以分为三角定义、比值定义和动态定义三类。表 2 给出了直线斜率的定义。

表 2 直线斜率的定义

定义方式	具体描述	教科书	数量
三角定义	直线倾斜角的正切值称为直线的斜率。 ^[24]	Peck (1873)	41
比值定义	在直线上任取两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 则这两点的	Phillips (1915)	3

纵坐标之差与横坐标之差的比值，即 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 称为直

线的斜率。^[26]

动态定义	在直线上任取两点 P_1 、 P_2 ，当直线上一点从点 P_2 运动到点 P_1 时，纵坐标的变化量与相应横坐标的变化量的比值称为直线的斜率。 ^[27]	Harding & Mullins (1926)	7
------	--------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------	---

图 10 给出了直线斜率的定义的时间分布情况。由图可见，直线斜率的出现经历了漫长的岁月，19 世纪下半叶以前，多数教科书没有给出直线斜率的定义，此后，直线斜率逐渐成为推导直线方程的重要工具，因而斜率的概念也在越来越多的教科书中给出。斜率作为初中学习一次函数的重要概念，其重要性及意义主要体现在几个方面。

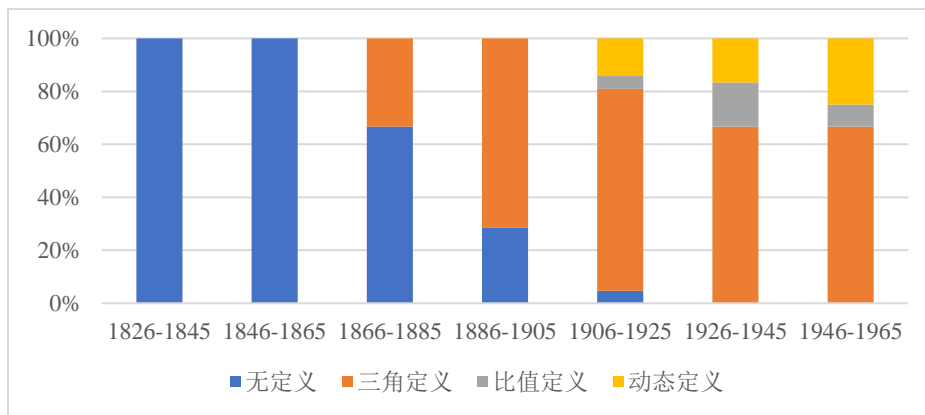


图 10 直线斜率的定义的时间分布

首先，初中阶段学生需要学习一次函数，而一次函数在平面直角坐标系上的图形是一条直线，于是，直线斜率概念的出现将一次项系数与直线倾斜角建立起联系，但当直线与 x 轴垂直时，斜率则没有定义。其次，可以将直线的斜率理解为道路的坡度，用坡度则可以清楚地刻画道路的倾斜程度，而用直线的斜率则可以清楚地刻画直线的陡度。最后，在导数中，直线斜率的概念实际上就是直线的瞬时变化率。

从斜率的概念出现在教科书以来，用倾斜角的正切值来定义直线斜率的这一方式始终占据教科书的主流，这来源于教科书编者对于直线方程的不同推导方法。多数教科书依然是以三角比为基础，进而推导出直线的斜截式。同时，三角定义可以建立起倾斜角与斜率之间的关系，容易让学生发现不同直线倾斜角下斜率的情况，因此在教科书中使用三角定义是顺理成章的。这一定义方式也符合现行教科书中对直线斜率的定义方式。

6 结论与启示

综上所述，历史上对于直线倾斜角及斜率的不同定义方式、斜率概念的历史发展阶段，为今日直线的倾斜角和斜率的教学提供了诸多启示。

第一，追溯知识本源，关注课堂生长。直线斜率的产生经历了一个漫长的岁月，因而，教师在教学过程中，可以以斜率的历史发展阶段为突破口，通过微视频的方式让学生了解斜率概念产生的漫漫长路、了解斜率概念的演化历程，这对于学生理解斜率这一概念起到了至关重要的作用。与此同时，建构主义强调应该把学生已有的知识经验作为新知识的生长点，引导学生从原有的知识经验中“生长”出新的知识。直线倾斜角和斜率概念的学习也因如此，学生在初中阶段就已经学习过一次函数，知道一次函数的图像是一条直线及直线方程 $y=kx+b(k \neq 0)$ 中的 k 代表斜率，到高中再次学习直线时，教师应该以学生原有知识为基础，带领学生回忆 k 的不同取值对直线的影响，并给出直线斜率的确切概念和几何意义。

第二，架起知识桥梁，通向成功彼岸。解析几何将代数与几何之间建立起了联系，在学习直线方程时，我们不仅要从数的角度理解系数，还应从形的角度理解不同系数给直线带来的影响。首先，架起倾斜角和斜率概念的桥梁，在直角坐标系被教科书编者广泛使用后，倾斜角的正切值则被称为直线的斜率；其次，架起倾斜角的概念与其范围的桥梁，夹角定义会让直线和 x 轴产生四个夹角，此时对夹角范围的界定并不明晰，但当我们使用旋转定义后，教科书普遍选择 $[0, \pi)$ ；最后，架起斜率、倾斜角及图像之间的桥梁，当倾斜角 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ 时，直线斜率 $k \rightarrow +\infty$ ，而从图像上看，直线将越来越陡峭并趋于一条垂直于 x 轴的直线。加强知识内部及新旧知识的联系，让学生螺旋上升式地学习知识，将加深知识的理解与记忆。

第三，领会数学思想，发展核心素养。以学生熟悉的一次函数作为出发点，让学生在描点作图的过程中找到刻画直线方向的角，于是引出倾斜角的概念及其取值范围。然后，让学生尝试定量刻画直线倾斜角与斜率之间的关系，学生在小组讨论中各抒己见，在初步给出三角定义后，可以带领学生对不同情况的直线的斜率进行讨论，并将其坐标化。在师生的一问一答中，斜率的概念逐步明晰，培养了学生动态的数学观。当然，教师还应继续讨论“直线斜率的计算与直线上取点的关系”“在画直线的过程中，如何实现几何直观与代数量化的顺利转换”等问题，这一过程有助于渗透数形结合思想、化归思想等，也将对学生的数学抽象、逻辑推理、直观想

象等数学素养的提高起到举足轻重的作用。

参考文献

- [1] 施永红. 课堂教学要在“何由以知其所以然”上下功夫——对“直线的倾斜角与斜率”一节课的思考[J]. 中学数学教学参考, 2021(16): 36-38.
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011: 30.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 43.
- [4] 傅文奇. HPM 视角下的数学教学设计——以勾股定理为例[J]. 数学教学通讯, 2015(07): 10-11+14.
- [5] 汪晓勤,沈中宇. 数学史与高中数学教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 20.
- [6] Hamilton, H. P. *The Principles of Analytical Geometry*[M]. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1826: 55-58.
- [7] Todhunter, I. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry as Applied to the Straight Line and the Conic Sections*[M]. London: Macmillan, 1881: 11-13.
- [8] Ashton, C. H. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1901: 37-38.
- [9] Ziwet, A., Hopkins, L. A. *Analytic Geometry and Principles of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company, 1913: 24-27.
- [10] Dowling, L. W., Turneure, F. E. *Analytic Geometry*[M]. New York: Henry Holt and Company, 1914: 18-19+57-59.
- [11] Hardy, J. J. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. Massachusetts: Chemical Publishing Company, 1897: 26-28.
- [12] Siceloff, L. P., Wentworth, G., Smith, D. E. *Analytic Geometry: Brief Course*[M]. Boston: Ginn & Company, 1922: 18+59+69.

- [13] Smith, P. F., Gale, A. S. *New Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1912: 16-17+58-60.
- [14] Cell, J. W. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1951: 12-13.
- [15] Nelson, A. L., Folley, K. W., Borgman, W. M. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Ronald Press Company, 1949: 16-26.
- [16] Young, J. W., Fort, T., Morgan, F. M. *Analytic Geometry*[M]. Boston: Houghton Mifflin Company, 1936: 25-27+56-57.
- [17] 杨懿荔,汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方解析几何教科书中的斜率概念[J]. 数学通报, 2016(09): 10-13+18.
- [18] Young, J. R. *The Elements of Analytical Geometry*[M]. London: John Souter, 1830: 17-24.
- [19] Lardner, D. A. *Treatise on Algebraic Geometry*[M]. London: Whittaker, Treacher & Arnot, 1831: 11-14.
- [20] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Co., 1836: 48-55.
- [21] O'Brien, M. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry*[M]. Cambridge: Deightons, 1844: 19-23.
- [22] Loomis, E. *Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculus*[M]. New York: Harper & Brothers, 1851: 23-29.
- [23] Bowser, E. A. *An Elementary Treatise on Analytic Geometry*[M]. New York: D. van Nostrand, 1880: 28-36.
- [24] Peck, W. G. *A Treatise on Analytical Geometry*[M]. New York: A. S. Barnes & Company, 1873: 17-28.
- [25] Hardy, A. S. *Elements of Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1889: 35-42.
- [26] Phillips, H. B. *Analytic Geometry*[M]. London: Chapman & Hall, 1915: 39-58.
- [27] Harding, A. M., Mullins, G. W. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1926: 28-81.

美英早期解析几何教科书中的圆的几何性质

王智洋

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

数学的产生和发展离不开人类对美好事物的欣赏与执着。圆是极具美感的几何图形, 早在古希腊时期便吸引了欧几里得等数学家们探索的目光。圆作为高中数学平面解析几何中的内容, 不仅是沟通“几何”与“代数”之间的桥梁, 也是连接学生在初中与高中两个阶段学习平面几何知识的纽带。事实上, 学生早在初中阶段便已经学习过圆的许多重要几何性质, 但主要是从定性的角度出发, 通过严密的逻辑推理来研究。而在高中学习平面解析几何后, 不仅可以从定量的角度进一步探究圆的性质, 还能以另一种方法证明先前学习的性质, 形成前后知识的统一, 也让学生对于“数”与“形”的认识更加深刻。

《普通高中数学课程标准》(2017 版) 要求学生“通过建立坐标系, 借助直线、圆的几何特征, 导出相应方程”, “用代数方法研究几何性质, 体现形与数的结合”^[1]。现行高中数学教科书中主要给出圆的几何性质有: 点和圆、直线和圆、圆和圆的位置关系, 对于其它性质只是出现在习题中, 并没有详细地介绍。这样一来, 不仅给学生造成了“课易题难”的困惑, 也使初中阶段圆的相关知识与高中割裂, 缺少了连贯性和统一性。

鉴于此, 本文聚焦圆的几何性质, 对早期美英解析几何教科书进行了详细考察, 试图回答以下问题: 圆的几何性质主要有哪些? 如何通过代数的方法探究或证明这些几何性质? 希望通过对以上问题的研究为一线教师在教学中提供帮助。

2 研究对象

本文选取了 1821-1960 年间出版的 78 种美英解析几何教科书作为研究对象, 其中 62 种出版于美国, 16 种出版于英国。其中, 对于同一作者再版的教科书, 若内容无明显变化则视为同一种, 并从中选取出版最早的版本, 若内容有显著变化, 则视为不同种教科书。以 20 年为一个

时间段，这些教科书的出版时间分布情况见图 1。

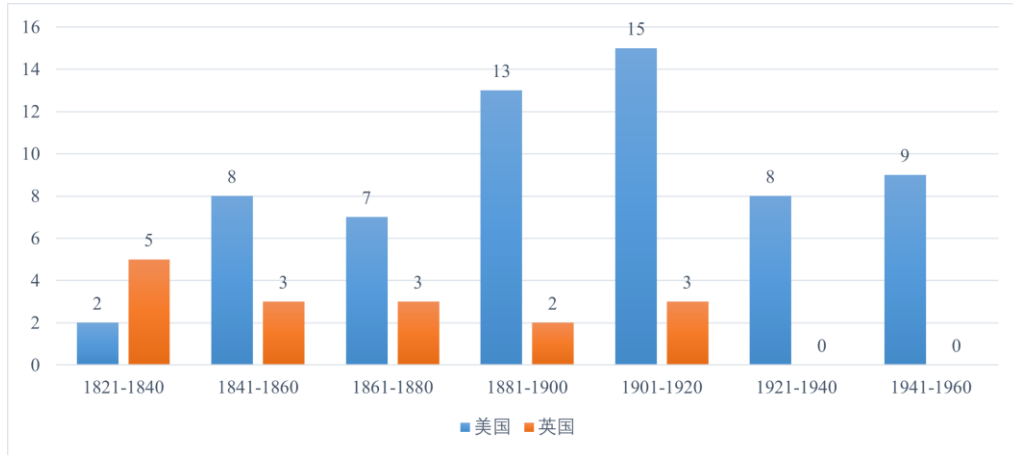


图 1 78 种美英解析几何教科书的出版时间分布

本文将圆的几何性质简单分为：圆的切线与法线、圆的轨迹、弦相关的性质共三类，主要考察解析几何教科书描述的性质内容，以及推导过程。

3 圆的轨迹

阿波罗尼奥斯圆揭示了，圆的轨迹除了定义以外还有其它的形成方式。考察发现，早期教科书中给出了多种圆的轨迹，本文将其按照条件主要分成三种，分别是“已知底边和顶角的三角形”、“给定底边的三角形”和“给定点或直线”。

3.1 已知底边和顶角的三角形

78 种教科书中，6 种以“已知底边和顶角的三角形”为背景得到圆的轨迹，分别是：顶点的轨迹；垂心的轨迹；内心的轨迹；重心的轨迹。

3.1.1 在三角形 ABC 中，已知底边 AB 与顶角 C ，求顶点 C 的轨迹

Young (1830) 给出过程：如图 2，建立平面直角坐标系，设 $AB = a$ ， $\tan C = m$ ， C 点坐标 (x, y) ，根据对称性不妨考虑 C 在 x 轴上方的情景，即 $y > 0$ 。则 $\tan A = \frac{y}{x}$ ， $\tan B = \frac{y}{a-x}$ 。于

$$C = \pi - (A + B), \text{ 那么 } \tan C = -\tan(A + B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}, \text{ 即 } m = -\frac{\frac{y}{x} + \frac{y}{a-x}}{1 - \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{a-x}}, \text{ 化简得}$$

$x^2 + y^2 - ax - \frac{a}{m}y = 0 (y > 0)$ 。易知，这是以线段 AB 为弦，以 $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2m})$ 为圆心， $\frac{a}{2m}\sqrt{m^2+1}$ 为半径的圆弧^[2]。

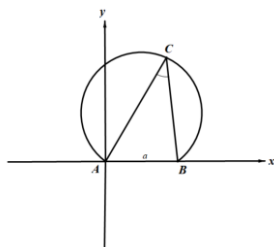


图 2 三角形顶点轨迹

因此，根据对称性，顶点 C 的轨迹是对称的两个圆弧，其形状与顶角的角度相关，主要有三种，见表 1。

表 1 顶点轨迹三种情况

顶角 C 的取值	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
C 点的轨迹图像			
C 点的轨迹描述	两段对称的优弧，除去交点	圆周，除去直径的两端点	两段对称的劣弧，除去交点

值得注意的是，这一性质不仅给出了另一种圆的轨迹，也从代数的角度解决了我们熟知的圆的重要几何性质“同弧所对的圆周角相等”的逆命题。相同的内容，不同的方法，让学生感受解析几何的魅力，体会“形”与“数”的美妙结合，形成知识的统一。

3.1.2 在三角形 ABC 中，已知底边 AB 与顶角 C ，求三角形 ABC 垂心 H 轨迹

Lardner (1831) 结合 3.1.1 中的结论，通过代数方法解得 H 的轨迹方程，具体如下：如图 3，建立平面直角坐标系，设 $AB = a$ ， $\tan C = m$ ， C 点坐标 (x_0, y_0) ，则 C 点轨迹方程为圆弧，

在 3.1.1 中已经完成。那么， AC 和 BC 边上的高 BH 、 AH 所在的直线方程分别为： $y = -\frac{x_0}{y_0}(x - a)$ ，

$$y = -\frac{x_0 - a}{y_0}x。$$

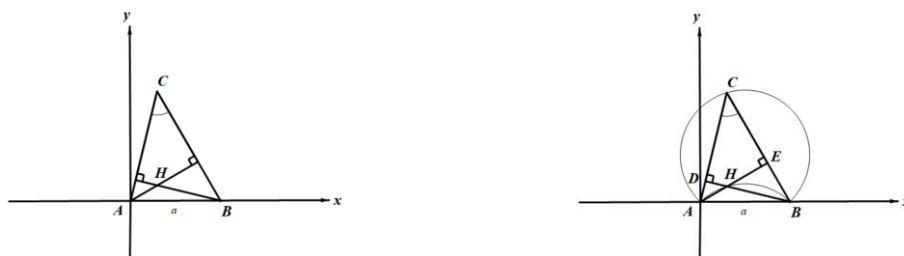


图 3 三角形垂心轨迹

设垂心 H 点坐标为 (x, y) 。那么通过联立方程可解得
$$\begin{cases} x_0 = x \\ y_0 = \frac{x(a-x)}{y} \end{cases}$$
，将其代入 (x_0, y_0) 满足

的方程即可。以 3.1.1 中的方程为例，若 $x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - \frac{a}{m}y_0 = 0 (y_0 > 0)$ ，则代入可得

$x^2 + y^2 - ax + \frac{a}{m}y = 0 (y > 0)$ ，因此点 H 的轨迹仍然是圆弧^[3]。

Young (1830) 则是通过平面几何的知识进行推导：如图 3，过 A 、 B 分别作 BC 、 AC 边上的两条高，且垂足为 E 、 D 。易证 $\triangle ADH \sim \triangle AEC$ ，则 $\angle AHD = \angle C$ ，从而 $\angle AHB = \pi - C$ 为定角。换言之，问题转化成了 3.1.1 的问题，因此 H 的轨迹仍然是以 AB 为弦的圆弧^[2]。

3.1.3 在三角形 ABC 中，已知底边 AB 与顶角 C ，求三角形 ABC 内心 I 轨迹

O'Brien (1844) 同样将该问题转化成了三角形顶点的轨迹，过程如下：如图 4，由于 AI 是 $\angle CAB$ 的角平分线， BI 是 $\angle CBA$ 的角平分线，则 $\angle CAB = 2\angle IAB$ ， $\angle CBA = 2\angle IBA$ 。从而
$$C = \pi - (\angle CAB + \angle CBA) = \pi - 2(\angle IAB + \angle IBA) = \pi - 2(\pi - \angle AIB)$$
。因此， $\angle AIB = \frac{\pi + C}{2}$ 为定角^[4]。

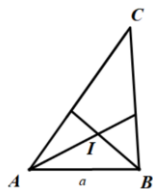


图 4 三角形内心轨迹

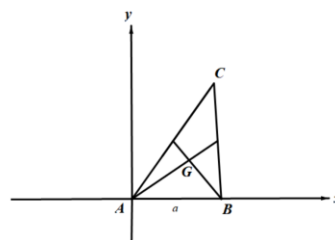


图 5 三角形重心轨迹

3.1.4 在三角形 ABC 中，已知底边 AB 与顶角 C ，求三角形 ABC 重心 G 轨迹

Lardner (1831) 解决过程：如图 5，建立平面直角坐标系，设 $AB = a$ ， C 点坐标 (x_0, y_0) ， G 点坐标 (x, y) 。则由 3.1.1 可知 C 点轨迹方程为圆弧。那么，根据重心的性质可知

$$\begin{cases} x = \frac{a+x_0}{3} \\ y = \frac{y_0}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 3x - a \\ y_0 = 3y \end{cases},$$

将其代入 (x_0, y_0) 满足的方程易得 G 点坐标满足的方程也是圆弧^[3]。

3.2 给定底边的三角形

有 6 种教科书以“已知底边”的三角形为背景，增加边的条件得到圆的轨迹，分别是：另外两边的平方和为定值、另外两边的比值为定值、另外两边的线性平方和为定值。

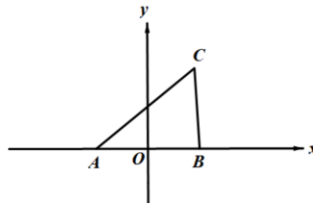


图 6 给定底边的三角形

3.2.1 在三角形 ABC 中，已知底边 AB 和另外两边 AC 、 BC 的平方和，求顶点 C 的轨迹

Loomis(1851)给出了已知另外两边平方和的情况：如图 6，建立平面直角坐标系，设 $AB = a$ ， $AC^2 + BC^2 = m(m > \frac{a^2}{2})$ ， C 点坐标 (x, y) 。则 $A(-\frac{a}{2}, 0), B(\frac{a}{2}, 0)$ ，由于 $AC^2 + BC^2 = m$ ，则有 $(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = m$ ，化简得 $x^2 + y^2 = \frac{m}{2} - \frac{a^2}{4}$ 。因此 C 点的轨迹是以 AB 中点为圆心， $\sqrt{\frac{m}{2} - \frac{a^2}{4}}$ 为半径的圆^[5]。

3.2.2 在三角形 ABC 中，已知底边 AB 和另外两边 AC 、 BC 的比值，求顶点 C 的轨迹

Lardner (1831) 的推导过程：如图 6，建立平面直角坐标系，设 $AB = a$ ， $\frac{AC}{BC} = n$ ， C 点坐标 (x, y) 。则 $A(-\frac{a}{2}, 0)$ ， $B(\frac{a}{2}, 0)$ ，由于 $\frac{AC}{BC} = n$ (其中 $n \neq 1$)，即 $AC^2 = n^2 BC^2$ ，则有

$$(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 = n^2(x - \frac{a}{2})^2 + n^2 y^2,$$

化简得 $x^2 + a \frac{1+n^2}{1-n^2} x + y^2 = -\frac{a^2}{4}$ 。因此 C 点的轨迹是以 $(-\frac{a}{2} \cdot \frac{1+n^2}{1-n^2}, 0)$ 为圆心， $\frac{na}{|1-n^2|}$ 为半径的

圆^[3]。

事实上，这种圆的轨迹就是我们熟知的阿波罗尼奥斯圆。

3.2.3 在三角形 ABC 中，已知底边 AB 和另外两边 AC 、 BC 的（线性）平方和，求顶点 C 的轨迹

Coffin (1855) 将 3.2.1 与 3.2.2 中的条件整合推广到了线性平方和，过程如下：如图 6，建立平面直角坐标系，设 $AB = a$ ， $k_1AC^2 + k_2BC^2 = m$ (其中 $k_1 + k_2 \neq 0$)， C 点坐标 (x, y) 。则 $A(-\frac{a}{2}, 0)$ ， $B(\frac{a}{2}, 0)$ ，由于 $k_1AC^2 + k_2BC^2 = m$ ，则有

$$k_1(x + \frac{a}{2})^2 + k_1y^2 + k_2(x - \frac{a}{2})^2 + k_2y^2 = m,$$

化简得 $x^2 + a\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}x + y^2 = \frac{m}{k_1 + k_2} - \frac{a^2}{4}$ 。因此，若参数满足 $m(k_1 + k_2) > a^2k_1k_2$ ，则 C 点的轨迹

是圆。当 $k_1 = k_2 = 1$ 时便是 3.2.1 中的情况，而当 $m = 0$ ，且 $k_1k_2 < 0$ 时便是 3.2.2 中的情况^[6]。

3.3 给定点或直线

有 7 种教科书通过给定“点和直线”相关条件得到圆的轨迹，主要有：到定点距离平方与到定直线距离之比为定值，到任意 n 个点的距离线性平方和为定值两类。

3.3.1 平面上的点 M 到定点 O 的距离平方与到定直线的距离之比为定值，求 M 的轨迹

Hardy (1891) 这样推导：如图 7，以定点 O 为原点，建立平面直角坐标系。设点 M 到 l 的距离为 d 且满足 $\frac{OM^2}{d} = k$ ， $l: x = a$ ， M 点坐标 (x, y) 。则 $OM^2 = kd$ ，即 $x^2 + y^2 = k|x - a|$ 。分类讨论去绝对值后，容易得到 M 点的轨迹是圆弧^[7]。

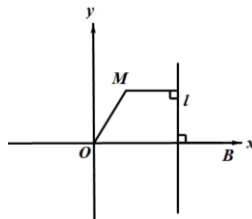


图 7 到定点距离的平方和到定直线距离之比为定值

3.3.2 平面上的点 M 到 n 个给定点距离的平方和为定值，求 M 的轨迹

事实上，3.2.1 已经揭示了当 $n=2$ 时 M 的轨迹是圆。Smyth (1855) 将其推广到了任意 n 个定点：建立平面直角坐标系，设 n 个定点坐标为 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ ，且满足 $k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + \dots + k_nMA_n^2 = m$ (其中 $\sum_{i=1}^n k_i \neq 0$)。设 M 点坐标 (x, y) ，则

$$\sum_{i=1}^n k_i(x-x_i)^2 + k_i(y-y_i)^2 = m, \text{ 化简得}$$

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{\sum_{i=1}^n k_i x_i}{\sum_{i=1}^n k_i} x - 2 \frac{\sum_{i=1}^n k_i y_i}{\sum_{i=1}^n k_i} y = \frac{m - \sum_{i=1}^n k_i x_i^2 - \sum_{i=1}^n k_i y_i^2}{\sum_{i=1}^n k_i}.$$

因此，当参数满足一定条件时， M 点的轨迹是圆^[8]。

4 切线与法线

早期教科书中关于圆的切线和法线主要给出了在圆上一点处的切线、法线方程包括它们推导过程，过圆外一点作切线的方法。

4.1 切线方程及推导

78 种教科书中，75 种给出了在圆上一点处的切线方程和推导过程，从数据上足以看出其重要性。主要内容：设圆 O 的标准方程为 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ ，那么在圆 O 上一点 $M(x', y')$ 的切线方程为 $(x'-x_0)(x-x_0) + (y'-y_0)(y-y_0) = r^2$ 。推导切线方程的方法主要有几何性质法、联立方程法、割线逼近法三种。

4.1.1 几何性质法

Hamilton (1826) 给出推导过程：设切线方程 $l: y-y' = k(x-x')$ 。由于 M 是 l 与圆 O 的切点，根据平面几何知识我们知道 $l \perp OM$ ，则 $k \cdot k_{OM} = -1$ (假设斜率都存在)。又 $k_{OM} = \frac{y'-y_0}{x'-x_0}$ ，于是 $k = -\frac{x'-x_0}{y'-y_0}$ ，代入方程得 $l: y-y' = -\frac{x'-x_0}{y'-y_0}(x-x')$ ，即

$$(x-x')(x'-x_0) + (y-y')(y'-y_0) = 0 \Leftrightarrow (x-x_0+x_0+x')(x'-x_0) + (y-y_0+y_0-y')(y'-y_0) = 0,$$

从而 $(x'-x_0)(x-x_0)+(y'-y_0)(y-y_0)=(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2$ 。由于 M 在圆 O 上, 因此

$$(x'-x_0)(x-x_0)+(y'-y_0)(y-y_0)=r^2 \quad [9]。$$

4.1.2 联立方程法

Newcomb (1884) 则采用联立方程的方法解决: 设切线方程 $l: y-y'=k(x-x')$, 由于 l 与

圆 O 相切, 则 l 与圆 O 只有一个交点 M 。联立方程 $\begin{cases} y-y'=k(x-x') \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \end{cases}$ 。消去 y 有

$$(x-x_0)^2+[k(x-x')+y'-y_0]^2=r^2,$$

整理得

$$(k^2+1)x^2-2[x_0+k^2x'-k(y'-y_0)]x+k^2x'^2-2k(y'-y_0)x'-x'^2+2x_0x'=0。$$

由于方程只有一个根, 则 $\Delta=0$, 从而得 $[(y'-y_0)k+(x'-x_0)]^2=0$, 即 $k=-\frac{x'-x_0}{y'-y_0}$ 。同 4.1.1

化简可得切线方程 $(x'-x_0)(x-x_0)+(y'-y_0)(y-y_0)=r^2$ [10]。

4.1.3 割线逼近法

Wright (1836) 利用极限的思想, 通过割线来逼近切线方程, 过程如下: 如图 8, 设圆 O 上

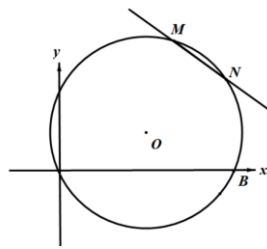


图 8 割线逼近法

离 M 非常近的任意一点 $N(x'', y'')$, 则割线 MN 方程 $y-y'=\frac{y''-y'}{x''-x'}(x-x')$ 。因为 M 、 N 两点都

在圆上, 那么满足 $\begin{cases} (x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2=r^2 \\ (x''-x_0)^2+(y''-y_0)^2=r^2 \end{cases}$ 。作差并化简, 得 $\frac{y''-y'}{x''-x'}=-\frac{x'+x''-2x_0}{y'+y''-2y_0}$ 。代入 MN

的方程, 得 $y-y'=-\frac{x'+x''-2x_0}{y'+y''-2y_0}(x-x')$ 。当 N 点非常接近 M 直至重合时, 割线 MN 便成了 M

点处的切线, 因此令 $x''=x', y''=y'$, 切线方程即为 $y-y'=-\frac{x'-x_0}{y'-y_0}(x-x')$ 。同 4.1.1, 可化简整

理得 $(x'-x_0)(x-x_0)+(y'-y_0)(y-y_0)=r^2$ [11]。

Harding (1926) 则直接给出了求导的方法：设切线方程 $l: y-y'=k(x-x')$ 。在圆 O 方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ 两边对 x 求导，则有 $2(x-x_0)+2(y-y_0)\frac{dy}{dx}=0$ ，那么 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-x_0}{y-y_0}$ 。因

此，切线斜率 $k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x',y=y'}=-\frac{x'-x_0}{y'-y_0}$ ，代入切线方程，得 $l: y-y'=-\frac{x'-x_0}{y'-y_0}(x-x')$ [12]。

虽然 Harding 给出的是隐函数求导的方法，但只需将圆分成两个半圆弧便能求出显函数方程，再进行求导即可。因为导数几何意义事实上也是割线逼近切线，故将其归类为割线逼近法。

4.2 法线方程及推导

有 45 种教科书得到了圆上一点的法线方程，且均根据法线的定义，采用与切线的垂直关系推导。

Gay (1944) 的过程如下：设圆 O 标准方程 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ ，点 $M(x',y')$ 为圆 O 上一点。设法线方程 $l: y-y'=k(x-x')$ 。我们知道在 M 处切线的斜率为 $k'=-\frac{x'-x_0}{y'-y_0}$ ，由于法线垂直于切线，则有 $k \cdot k'=-1$ ，那么 $k=\frac{y'-y_0}{x'-x_0}$ ，代入法线方程，得 $l: y-y'=\frac{y'-y_0}{x'-x_0}(x-x')$ ，化简整理得 $(y'-y_0)(x-x_0)-(x'-x_0)(y-y_0)=0$ [13]。

4.3 过圆外一点作切线

36 种教科书给出了过圆外一点作切线的方法，主要有联立方程、作圆法与作切点弦三种。

4.3.1 联立方程

Askwith (1908) 采用联立方程的方法求切线方程：如图 9，以圆心 O 为原点，建立平面直

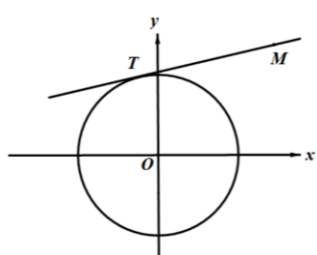


图 9 联立方程作切线

角坐标系, 设圆 O 方程 $x^2 + y^2 = r^2$, $M(x_0, y_0)$ 。若过点 M 的切线斜率存在, 设切线方程为 $l: y - y_0 = k(x - x_0)$, 联立 l 与圆 O 方程消去 y , 得到关于 x 的二次方程 $x^2 + [k(x - x_0) + y_0]^2 = r^2$ 。展开整理, 得 $(k^2 + 1)x^2 + 2k(y_0 - kx_0)x + kx_0^2 + y_0^2 - 2kx_0y_0 - r^2 = 0$ 。由于 l 是圆 O 的切线, 则上述方程只有一根, 那么只需令 $\Delta = 0$ 即可求得 k , 从而确定切线方程^[14]。

4.3.2 作圆法

Davies (1836) 则通过作圆法, 得到切线的切点, 从而确定切线: 如图 10, 以圆心 O 为原点, 建立平面直角坐标系, 设圆 O 方程 $x^2 + y^2 = r^2$, $M(x_0, y_0)$, 切点为 T 。以 OM 中点 D 为圆心, $\frac{1}{2}OM$ 为半径作圆 D , 由于 MT 是圆 O 的切线, 则 T 也在圆 D 上。因此联立圆 O 与圆 D 的方程即可求出切点 T 的坐标, 从而作出过 M 点的切线 MT ^[15]。

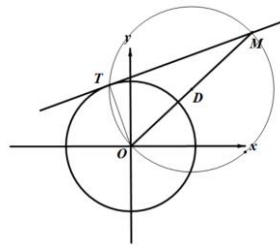


图 10 作圆法作切线

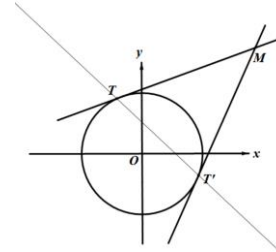


图 11 切点弦作切线

4.3.3 切点弦

Ashton (1901) 给出了切点弦的定义: 我们知道, 过已知圆外的一点可以作出圆的两条切线, 那么两切点所在的直线称为该点关于圆的切点弦。

Ashton 通过切点弦方程确定切点坐标, 从而求出切线: 如图 11, 以圆心 O 为原点, 建立平面直角坐标系, 设圆 O 方程 $x^2 + y^2 = r^2$, 圆外点 $M(x_0, y_0)$, 切点为 $T(x', y')$ 。那么, 圆 O 在点 T 处的切线方程为 $x'x + y'y = r^2$ 。由于点 M 在切线上, 代入 M 的坐标, 则有 $x'_0x + y'_0y = r^2$, 因此 $T(x', y')$ 在直线 $x_0x + y_0y = r^2$ 上。但我们知道, 一旦 M 确定, 两切点 T 与 T' 也随即确定, 从而切点弦 TT' 唯一确定。因为 T 在直线 $x_0x + y_0y = r^2$ 上, 那么 $x_0x + y_0y = r^2$ 就是切点弦 TT' 的

方程。又切点 T 在圆 O 上，因此联立方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x_0x + y_0y = r^2 \end{cases}$ ，即可解出切点 T 与 T' 的坐标，从而求得切线方程^[6]。

这一推导过程中也给出了圆外一点的切点弦方程，且形式与过圆上一点的切线方程相同。

5 弦的性质

欧几里得在其著作《几何原本》中已经给出了圆的大量有关弦的性质，考察早期解析几何教科书时，同样会找到一些弦的丰富性质，主要有三类：常用性质、定点和定直线、高观点下的极点和极线。

5.1 常用性质

26 种教科书用解析几何的方法推导了欧氏几何中圆的常用性质，主要有“补弦垂直”，以及两条垂直弦的性质。

5.1.1 圆中两条补弦垂直

Biot (1840) 首先定义了补弦“设 P 为圆 O 上的任意一点， AB 为圆 O 的直径，则称 PA 与 PB 为圆 O 的一对补弦”，并给出证明：如图 12，以圆心 O 为原点，建立平面直角坐标系，设圆 O 半径为 r ，直线 PA 斜率为 k ， PB 斜率为 k' 。设 $P(x_0, y_0)$ ，因为 P 在直线 PA 、 PB 上，则有

$\begin{cases} y_0 = k(x_0 + r) \\ y_0 = k'(x_0 - r) \end{cases}$ 。两式相乘得 $y_0^2 = kk'(x_0^2 - r^2)$ 。又 P 在圆 O 上，那么 (x_0, y_0) 又满足方程

$x_0^2 + y_0^2 = r^2$ ，即 $y_0^2 = r^2 - x_0^2$ 。因此 $kk' = -1$ ，即 $PA \perp PB$ ^[17]。

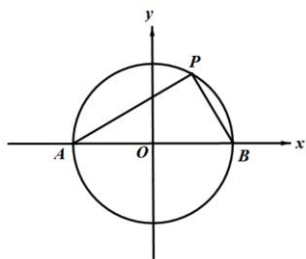


图 12 补弦垂直

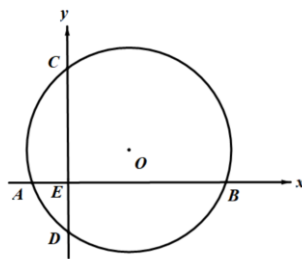


图 13 垂直弦四个交点到圆心的距离平方和为定值

5.1.2 圆 O 中任意两条垂直弦 AB 、 CD 交于点 E ，则 $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2$ 为定值

Hamilton (1826) 给出推导过程：如图 13，以交点 E 为原点，弦 AB 与 CD 为坐标轴，建立平面直角坐标系，设圆 O 方程 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ 。令 $y=0$ ，则 $x = x_0 \pm \sqrt{r^2 - y_0^2}$ 分别为线段 EA 、 EB 的长度。再令 $x=0$ ，则 $y = y_0 \pm \sqrt{r^2 - x_0^2}$ 分别为 EC 、 ED 的长度。因此

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 2x_0^2 + 2r^2 - y_0^2 + 2y_0^2 + 2r^2 - x_0^2 = 4r^2 = d^2$$

为定值^[9]。

5.2 定点和定直线

36 种教科书给出并推导了关于切点弦的定点和定直线的命题，主要有以下两个命题。

5.2.1 已知定圆 O 和定直线 l (不过圆心 O)，则直线上任意点的切点弦过定点

Young (1830) 给出了如下证明：如图 14，以圆心 O 为原点， l 垂直 x 轴，建立平面直角坐标系。设 l 上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 。那么根据 4.3.3 中切点弦的定义，我们知道 $AB: x_0x + y_0y = r^2$ 。

令 $y=0$ ，则 $x = \frac{r^2}{x_0}$ 。因此 AB 与 x 轴的交点 $D(\frac{r^2}{x_0}, 0)$ 与 y_0 无关，根据 P 点的任意性，切点弦过

定点 D ^[2]。

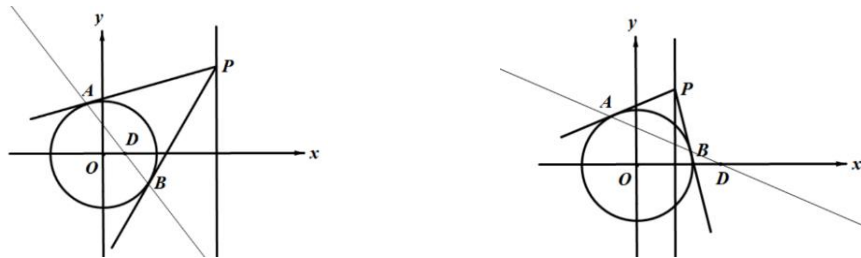


图 14 直线上任意点的切点弦过定点

5.2.2 已知定圆 O 和定点 D (非圆心 O)，过 D 作任意割线交圆于两点 A 、 B ，则两点处的切线交点在同一条定直线上

Coffin (1855) 是这样推导的：如图 15，以圆心 O 为原点， OD 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系。设点 $D(x_0, 0)$ ，过点 D 作任意割线 AB ，设 A 、 B 点处的切线交于点 $P(x', y')$ 。那么

P 关于圆 O 的切点弦 AB 的方程为 $x'x + y'y = r^2$ 。由于 AB 过点 D ，则有 $x'x_0 + y'y_0 = r^2$ 。因此

$P(x', y')$ 在定直线 $x_0x + y_0y = r^2$ 上^[6]。

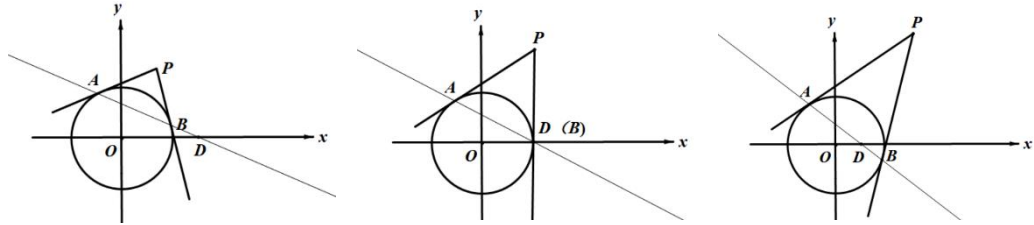


图 15 定点 D 与圆的三种关系

5.3 高观点下的极点和极线

我们容易看出，上一节中的两个命题互为逆命题。有 10 种教科书观察到了这一性质，并给出了极点和极线的定义、作法和极性互逆定理。

5.3.1 极点和极线的定义

Puckle (1870) 给极点和极线的定义如下：设圆方程 $x^2 + y^2 = r^2$ ，则直线 $x'x + y'y = r^2$ 称为点 (x', y') 的极线；且点 (x', y') 称为是直线 $x'x + y'y = r^2$ 的极点^[18]。

我们知道：若点 (x', y') 在圆内，则它的极线与圆相离；若点在圆上，则它的极线是圆该点处的切线；若点在圆外，则它的极线是关于圆的切点弦。若直线 $x'x + y'y = r^2$ 与圆相离，则它的极点在圆内；若直线与圆相切，则它的极点为切点；若直线与圆相交，则它的极点在圆外。

5.3.2 极点和极线的作法

Puckle (1870) 还给出了极点与极线的作法，如下：

如图 16，已知圆 O 与点 P ，设圆 O 半径为 r 。连接 OP 并沿长，在直线上取点 Q 使得线段 $OQ = \frac{r^2}{OP}$ ，过 Q 作直线 $l \perp OQ$ ， l 即为点 P 的极线。

已知圆 O 与直线 l ，设圆 O 半径为 r 。过圆心 O 作 l 的垂线 OQ ，垂足为 Q 。沿长 OQ ，在直线 OQ 上取点 P 使得线段 $OP = \frac{r^2}{OQ}$ ， P 即为直线 l 的极点^[18]。

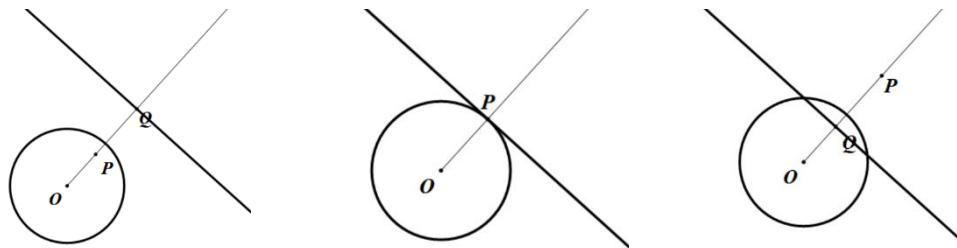


图 16 极点/极线与圆的三种关系

5.3.3 极性互逆定理

Howison (1869) 结合极线的定义, 将上一节的两个性质归纳成“极性互逆定理”: 给定圆, 如果有一点 A 在一条直线 l 上, 那么 l 的极点在 A 的极线上; 如果有一直线 l 过点 B , 那么 B 的极线过 l 的极点^[19]。

6 结语

经以上考察, 美英早期解析几何教科书给出了多种圆的几何性质, 包括圆的轨迹, 切线、法线方程, 以及弦的相关性质。关于圆的轨迹, 早期教科书用代数的方法推导了包含阿波罗尼奥斯圆在内的多个圆的轨迹方程。绝大多数教科书采用几何和代数两种方法得到了圆上一点的切线和法线方程, 并有多数展示了过一点作圆切线的方法。还有部分教科书给出了弦相关的性质, 并用高观点进行了说明和归纳。

国内现行教科书以“精简”为基调, 利用圆的最基本性质引入方程, 并不会展开介绍其它轨迹形成方式, 包括圆锥曲线也是如此。众所周知, 圆锥曲线的第二定义是非常重要的内容, 能体现三类曲线的共性和本质, 而学生在学习时容易产生疑惑“圆锥曲线为什么还有第二定义”。因此, 教师在学习圆的方程和性质时, 可以借鉴早期教科书中的例子, 通过其它一些圆的轨迹让学生充分认识到轨迹形成方式并不唯一, 数学概念的定义也并不唯一, 帮助其对圆的几何性质以及数学中的概念有更深刻的理解。

此外, 根据解析几何创建的历史背景, 笛卡尔推崇代数的力量, 把精力集中在把代数方法用于解决几何问题的研究^[20]。国内现行教材为体现出解析几何的宝贵价值, 将所有几何问题都转化成代数问题, 例如“过一点求圆的切线”, 教材中多采用联立方程的思想, 转化成方程的根

的情况来解决。这样虽然充分体现了解析几何的优势和核心思想，但另一方面也让解析几何与学生在初中阶段学习的欧氏几何产生割裂，产生“初中的几何性质能否在坐标系中使用”类似的问题。那么通过对美英早期解析几何教科书的考察，给教师提供了另一种思路。圆的许多几何性质其实不仅可以通过几何内部探索，也能转化成代数问题研究，甚至能够将二者结合。学生在几何与代数两种方法中不仅能更真切地体会到解析几何的宝贵价值，也在初中学习的几何知识与解析几何之间架起了沟通的桥梁，对“数”与“形”有更深刻的理解，形成知识之谐。虽然解析几何给几何问题的研究插上了腾飞的翅膀，但学生倘若能将代数与几何取长补短，融会贯通，那么一定能在数学的广阔蓝天上飞的更高、更远。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2018.
- [2] Young, J. R. *The Elements of Analytical Geometry*[M]. London: John Souter, 1830: 77-85.
- [3] Lardner, D. *A Treatise on Algebraic Geometry*[M]. London: Whittaker, Treacher & Arnot, 1831: 108-115.
- [4] O'Brien, M. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry*[M]. Cambridge: Deightons, 1844:135-139.
- [5] Loomis, E. *Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculus*[M]. New York: Harper & Brothers, 1851: 139-141.
- [6] Coffin, J. H. *Elements of conic sections and analytical geometry*[M]. New York: Collins & Brother, 1855: 80-81.
- [7] Hardy, A. S. *Elements of Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1891: 75-77.
- [8] Smyth, W. *Elements of Analytical Geometry*[M]. Boston: Sanborn, Carter and Bazin, 1855: 61-65.
- [9] Hamilton, H. P. *The Principles of Analytical Geometry*[M]. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1826: 75-77.
- [10] Newcomb, S. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. New York: Henry Holt and Company, 1884: 78-105.
- [11] Wright, J. M. F. *An algebraic system of conic sections, and other curves*[M]. London: Black and

Armstrong, 1836: 60-67.

[12] Harding, A. M., Mullins, G. W. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1926: 108-115.

[13] Gay, H. J. *College course in mathematics*[M]. Michigan: Edwards brothers, 1944: 84-89.

[14] Askwith, E. H. *The Analytical Geometry of the Conic Sections*[M]. London: A. and C. Black, 1908: 66-73.

[15] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Co., 1836: 83-90.

[16] Ashton, C. H. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1901: 79-86.

[17] Biot, J. B. *An elementary treatise on analytical geometry*[M]. Philadelphia: C. Desilver, 1840: 79-82.

[18] Puckle, G. H. *An Elementary Treatise on Conic Sections and Algebraic Geometry*[M]. London: Macmillan, 1870: 111-124.

[19] Howison, G. H. *A Treatise on Analytic Geometry*[M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Co., 1869: 138-140.

[20] 章建跃. 利用几何图形建立直观通过代数运算刻画规律——解析几何内容分析与教学思考(之二)[J]. 数学通报, 2021, 60(8): 1-10+26.

美英早期解析几何教科书中抛物线的几何性质

杨舒捷

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

圆锥曲线与科研、生产以及人类生活关系密切, 抛物线作为圆锥曲线中非常重要的一种曲线, 有着广泛的应用。例如, 探照灯反射镜面、卫星接收天线都是抛物线绕其对称轴旋转所成的抛物面, 为什么抛物线有如此广泛的应用呢? 我们可以从它丰富的几何特征及其性质中找到答案。

数学史是一座宝藏, 积淀了无数先哲的思想和方法^[1]。追溯历史, 我们发现抛物线中的几何性质及其应用是非常丰富的, 古今中外的数学家们提出了多种多样的性质、推导及应用。而对抛物线几何性质的探究与证明, 对于培养学生主观想象与逻辑推理的数学核心素养有着重要意义, 一直受到高中一线教师的关注。在提倡将数学文化融入数学教学的今天, 对这些史料进行归纳提炼, 可以为解析几何的教学以及习题试题的编制提供素材。

鉴于此, 本文聚焦抛物线的几何性质, 对 19 世纪初到 20 世纪下半叶期间出版的美英早期解析几何教科书进行考察和分析, 试图探究出西方早期教科书给出了抛物线的哪些几何性质, 这些几何性质是如何推导证明的, 以及它们是如何演变的, 以为为今日的教学提供参考。

2 教科书的选取

本研究从有关数据库中选取了 1825-1964 年间出版的 80 种西方早期解析几何教科书作为研究对象, 其中, 64 种出版于美国, 16 种出版于英国。以 20 年为一个时间段, 这些教科书的时间分布情况如图 1 所示。其中, 对于同一作者再版的教科书, 若内容无明显变化, 则选择最早的版本, 若内容有显著变化, 则将其视为不同的教科书。

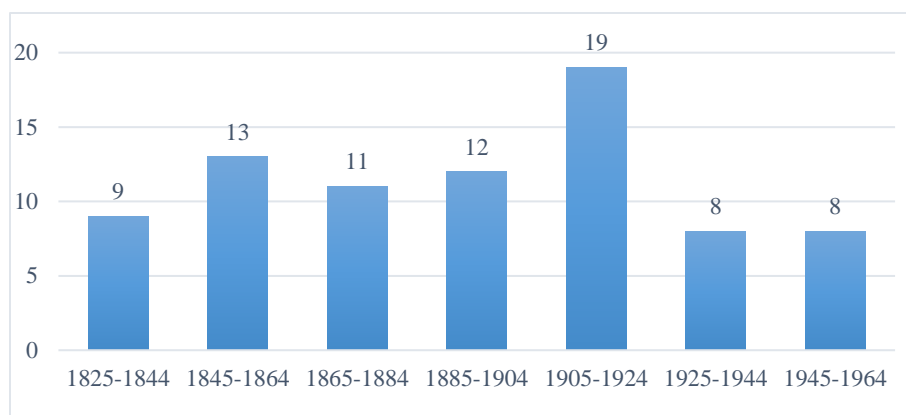


图 1 80 种教科书的时间分布

抛物线的几何性质主要位于“抛物线”和“切线与法线”两章，其中，有 57 种教科书在“抛物线”章中先介绍抛物线的定义与方程，再给出其几何性质；有 23 种教科书在“切线与法线”章先给出一般曲线的几何性质，再由此得出抛物线的几何性质。

图 2 为抛物线的几何性质所在章的时间分布情况。由图可见，19 世纪下半叶以前，抛物线的几何性质位于“抛物线”章，而 19 世纪末 20 世纪初期，抛物线的几何性质开始出现在教科书的“切线与法线”章，且所占比例呈现出不断增长的趋势。

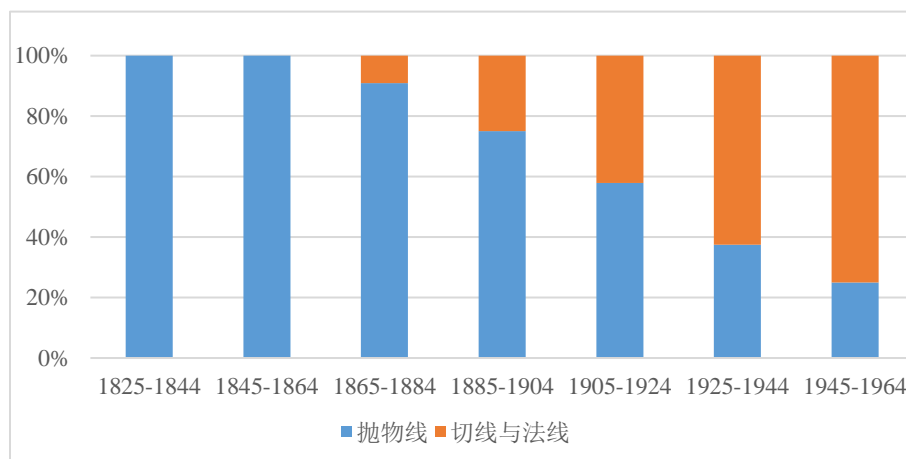


图 2 抛物线的几何性质所在章的时间分布

本文采用的统计方法如下：首先，按照年份查找并摘录出研究对象中有关抛物线的几何性质部分；然后，参考相关知识确定初步分类框架，并结合早期教科书中的具体情况进行适当调整，形成最终的分类框架；最后，依据此框架对研究对象进行分类与统计。

3 切线方程

对于抛物线任意点 (x', y') 处的切线方程，西方早期教科书给出了 $y - y' = \frac{p}{y'}(x - x')$ ， $yy' = p(x + x')$ 和 $y = mx + \frac{p}{2m}$ 三种形式，主要通过“割线法”“求导法”“斜率法”和“距离法”四种方法推导而来。

3.1 割线法

本方法是依据“切线是交点重合的割线”来进行推导的，有 4 种教科书采用此方法。

Davies (1836) 给出：如图 3 所示，通过抛物线 $y^2 = 2px$ 上 $P_1(x', y')$ 和 $P_2(x'', y'')$ 两点的割线方程是 $y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$ ，而由 $y'^2 = 2px'$ 与 $y''^2 = 2px''$ 两式相减得到 $y'^2 - y''^2 = 2p(x' - x'')$ ，因此，割线方程为 $y - y' = \frac{2p}{y' + y''}(x - x')$ ，将直线绕点 P_1 旋转直到 P_2 与 P_1 重合，此时 $y' = y''$ ，割线变成切线，有 $y - y' = \frac{p}{y'}(x - x')$ 或 $yy' - y'^2 = p(x - x')$ ，此外， $yy' = y'^2 + p(x - x') = 2px' + p(x - x')$ ，故 $yy' = p(x + x')$ [2]。

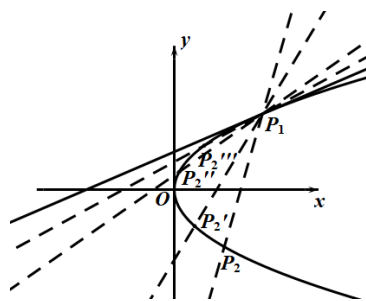


图 3 Davies 割线法

Biot (1840) 则给出：如图 3 所示，设抛物线

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

上任意点 P_1 的坐标为 (x', y') ， P_2 的坐标为 (x, y) ，则有

$$y'^2 = 2px' \tag{2}$$

设点 P_1 处的割线方程为

$$y - y' = m(x - x') \quad (3)$$

我们把切线看成是交点重合的割线，为了确定交点，我们需联立 (1) (2) (3) 式。

(1) - (2) 可得

$$(y + y')(y - y') = 2p(x - x') \quad (4)$$

联立 (3) (4) 可得

$$[2my' + m^2(x - x') - 2p](x - x') = 0 \quad (5)$$

此方程可以通过使 $x - x' = 0$ 或 $2my' + m^2(x - x') - 2p = 0$ 来满足，二者的解分别对应点 P_1 与 P_2 的坐标，而切线是交点重合的割线，当点 P_1 与 P_2 重合时， $x = x'$ ，这就使得 $2my' + m^2(x - x') - 2p = 0$ 可以化为 $2my' = 2p$ ，因此 $m = \frac{p}{y'}$ ，将这个值代入方程 (3) 可得 $y - y' = \frac{p}{y'}(x - x')$ ，进一步化简得 $yy' = p(x + x')$ [3]。

3.2 求导法

此方法相较于割线法更加严谨详细，蕴含极限求导的思想，部分教科书还给出了

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \theta \text{ 这一符号。}$$

有 8 种教科书并未直接推导抛物线的切线方程，而是先通过极限求导的思想给出一般曲线切线方程的推导方法，然后直接给出抛物线的切线方程。例如，Smith & Gale (1904) 给出：如图 4 所示，设 P_1 是曲线 C 上的不动点， P_2 是曲线 C 上位于 P_1 附近的点，令 P_2 沿着曲线 C 向 P_1 移动，则割线 P_1P_2 的极限位置 P_1T 即为曲线 C 在点 P_1 处的切线，显然切线 P_1T 的斜率是割线 P_1P_2 斜率的极限。设 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_1 + h, y_1 + k)$ ，其中 h 和 k 的正负取决于 P_1 和 P_2 的相对位置，将它们的坐标分别代入曲线 C 的方程中并相减，求出割线 P_1P_2 的斜率 $\frac{k}{h}$ 的值，然后求出当 P_2 趋近于 P_1 时，即 h 和 k 趋近于零时 $\frac{k}{h}$ 的值，即为切线的斜率，最后代入直线的点斜式方程即可得到切线方程。因此，抛物线 $y^2 = 2px$ 在点 $P_1(x_1, y_1)$ 处的切线方程为 $yy_1 = p(x + x_1)$ [4]。

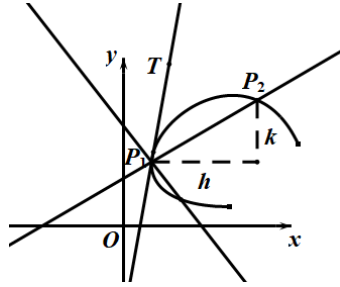


图 4 一般曲线的推导方法

有 11 种教科书根据上述思想针对抛物线给出了详细的推导,例如, Fine & Thompson(1914) 给出: 如图 5 所示, 任取抛物线 $y^2 = 2px$ 上的点 $P_1(x', y')$ 和 $P_2(x'+h, y'+k)$, 当 P_2 趋近于 P_1 时, 割线成为切线, 因此切线 P_1T 的斜率 m 为当 P_2 趋近于 P_1 时割线 P_1P_2 斜率 $\frac{k}{h}$ 的极限, 即 $m = \lim_{P_2 \rightarrow P_1} \frac{k}{h}$, 又因为点 $P_1(x', y')$ 和 $P_2(x'+h, y'+k)$ 在抛物线上, 故由 $y^2 = 2px$, $y'^2 = 2px'$ 和 $(y'+k)^2 = 2p(x'+h)$ 可得 $2y'k + k^2 = 2ph$, 于是 $\frac{k}{h} = \frac{2p}{2y'+k}$, 则 $m = \lim_{P_2 \rightarrow P_1} \frac{k}{h} = \frac{p}{y'}$, 因此切线方程为 $y - y' = \frac{p}{y'}(x - x')$, 即 $yy' = p(x + x')$ [5]。

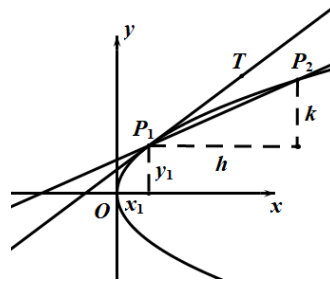


图 5 Fine & Thompson 的推导方法

3.3 斜率法

抛物线的切线方程还可以用它与轴夹角的正切来简洁地表示, 部分教科书称其为“神奇的方程”(magic equation) [6]。

O'Brien (1844) 给出: 设 $y = mx + h$ 是抛物线 $y^2 = 2px$ 的切线方程, 则有 $(mx + h)^2 = 2px$, 即 $m^2x^2 + 2(mh - 2p)x + h^2 = 0$, 因为直线与抛物线相切, 所以方程有两个相等的根, 故

$4m^2h^2 = (2mh - 2p)^2$ ，即 $h = \frac{p}{2m}$ ，因此抛物线的切线方程可以表示为 $y = mx + \frac{p}{2m}$ [7]。这里的 m 即为切线与轴夹角的正切， $m = \frac{p}{y'}$ 。

3.4 距离法

O'Brien (1844) 依据“如果过任一点 $P(x', y')$ 且与轴夹角为 θ 的直线与抛物线交于两点 Q 和 Q' ，那么这两点到点 P 的距离和为 $PQ + PQ' = 2 \frac{p \cos \theta - y' \sin \theta}{\sin 2\theta}$ ”，令该直线平行移动，直到 Q 和 Q' 重合，则 $PQ + PQ' = 2 \frac{p \cos \theta - y' \sin \theta}{\sin 2\theta}$ 变成 $0 = p \cos \theta - y' \sin \theta$ ，解得 $\tan \theta = \frac{p}{y'}$ ，即抛物线在点 $P(x', y')$ 处的切线与轴所成角的正切值，又因为这条直线过 $P(x', y')$ ，故它的方程是 $y'(y - y') - p(x - x') = 0$ ，而 $y'^2 = 2px'$ ，所以 $y'y - p(x + x') = 0$ 即为所求的切线方程[7]。

3.5 推导方法的演变

图 6 为以上四种切线方程推导方法的时间分布情况。由图可见，20 世纪以前，教科书主要采用的是“割线法”，此外还有“斜率法”和“距离法”，进入 20 世纪，出现了“求导法”且所占比例呈现增长趋势，逐渐取代“割线法”成为主流的推导方法。

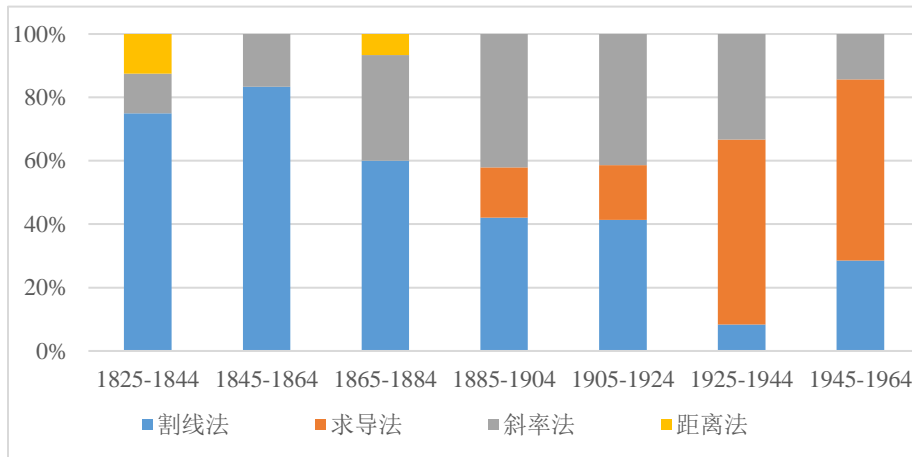


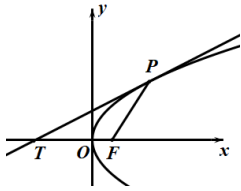
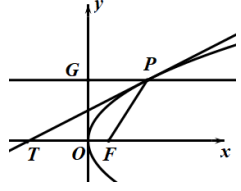
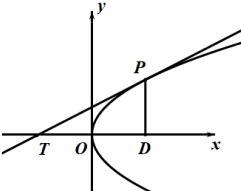
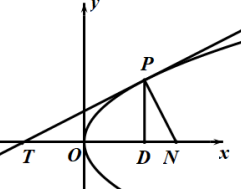
图 6 四种推导方法的时间分布

3.6 切线的画法

部分西方早期教科书还给出了一些简单的从抛物线上任意点作抛物线切线的方法，表 1 给

出了典型例子。

表 1 切线做法的典型例子

依据	方法描述	图像	教科书
等角定理	连接切点 P 和焦点 F ，在横轴上取点 T 使得 $FT = FP$ ，则直线 PT 即为所需切线 ^[2] 。		Davies (1836)
	连接切点 P 和焦点 F ，过点 P 作平行于轴的直线 PG ，则两直线 PF 与 PG 所成角 $\angle FPG$ 的平分线 PT 即为所需切线 ^[4] 。		Smith & Gale (1904)
次切线	过切点 P 作 PD 与轴垂直于点 D ，然后在横轴上取点 T 使 $OT = OD$ ，连接 T 和 P 两点的直线 PT 即为所需切线 ^[2] 。		Davies (1836)
次法线	过切点 P 作 PD 与轴垂直于点 D ，然后在横轴上取点 N 使 $DN = p$ ，连接 PN ，作直线 TP 垂直于 PN 于点 P ，直线 PT 即为所求切线 ^[2] 。		Davies (1836)

4 抛物线其他性质

4.1 法线方程

经考察，早期教科书大都是从抛物线 $y^2 = 2px$ 上任意点 $P(x', y')$ 处的切线出发得出相应的法线方程，给出了点斜式、斜率式和一般式三种形式。

其中，有 37 种教科书从抛物线切线的点斜式方程得出法线的点斜式方程。设抛物线 $y^2 = 2px$ 在点 $P(x', y')$ 处的法线为 $y - y' = \alpha(x - x')$ ，因为它与点 P 处的切线 $y - y' = \alpha'(x - x')$ 垂

直, 所以 $\alpha\alpha'+1=0$, 而 $\alpha'=\frac{p}{y'}$, 故 $\alpha\frac{p}{y'}+1=0$, 所有 $\alpha=-\frac{y'}{p}$, 因此法线方程为 $y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x')$ 或 $yy'=-\frac{1}{p}(x+x')$ [3]。此外, 还有一些教科书分别利用斜率 [6] 和直线的一般式方程 [8] 来进行推导, 给出 $y=mx-2am-am^3$ (m 为法线与轴夹角的正切, $m=-\frac{y'}{2a}$) 和 $p(y-y')+y'(x-x')=0$ 两种法线方程。

4.2 次切线长度

对于平面直角坐标系中的一条曲线 r 和给定 r 上的一点 P , 点 P 在 x 轴上的投影为点 D , 过点 P 作切线 (要求不与 x 轴平行), 则这条切线与 x 轴有交点 T , 那么, 线段 PT 在 x 轴上的射影 TD 就是次切线 (subtangent)。西方早期教科书分别从代数角度和几何角度对次切线的长度进行推导求解, 表 2 给出了若干典型例子。

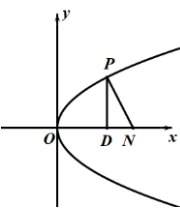
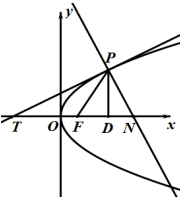
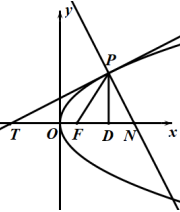
表 2 求解次切线长度的典型方法

方法	描述	图像	教科书
代数方法	在切线方程 $y-y'=\frac{p}{y'}(x-x')$ 中, 令 $y=0$, 得 $x+x'=0$, 即 $x=-x'$, 即 $OT=OD$ 或 $TD=2OD$, 也就是说, 次切线的长度等于横坐标的两倍, 换言之, 次切线在抛物线的顶点处被平分 [2]。		Davies (1836)
几何方法	因为 $TD \times \tan \angle PTD = PD$, 所以 $TD \times \frac{p}{y'} = y'$, 因此 $TD = \frac{y'^2}{p} = 2x' = 2OD$ [9]。		Hymers (1845)
	CM 为抛物线的准线, 因为 $CD = PM = PF = FT$, 且 $CO = OF$, 因此 $OD = CD - CO = FT - OF = OT$, 进而 $2OD = TD$ [10]。		Coffin (1881)

4.3 次法线长度

对于平面直角坐标系中的一条曲线 r 和给定 r 上的一点 P , P 在 x 轴上的投影为点 D , 过点 P 作法线 (要求不与 y 轴平行), 则这条法线与 x 轴有交点 N , 那么, 线段 ND 就是次法线 (subnormal)。西方早期教科书分别从代数角度与几何角度对次法线的长度进行推导求解, 表 3 给出了若干典型例子。

表 3 求解次法线长度的典型方法

方法	描述	图像	教科书
代数方法	<p>在法线方程 $y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x')$ 中, 令 $y = 0$,</p> <p>得 $x - x' = p$, 而 $x = ON$, $x' = OD$,</p> <p>故 $DN = ON - OD = x - x' = p$, 因此次法线的长度是一个常数, 等于焦点到原点距离的两倍^[2]。</p>		Davies (1836)
几何方法	<p>因为 $\angle DPN = \angle NTP = \theta$, 故在 $Rt\triangle NDP$ 中,</p> $DN = DP \tan \theta = y' \left(\frac{p}{y'} \right) = p^{[11]}$		Crenshaw & Killbrew (1925)
几何方法	<p>因为 $Rt\triangle TPD$ 与 $Rt\triangle PND$ 相似, 所以</p> $TD : PD = PD : DN, \text{ 即 } 2x : y = y : DN, \text{ 故}$ $DN = \frac{y^2}{2x}, \text{ 而 } y^2 = 2px, \text{ 因此 } DN = \frac{2px}{2x} = p^{[9]}$		Hymers (1845)

4.4 抛物线中的等角定理

抛物线任意一点处的切线与轴线和连接切点到焦点的直线成相等的角; 进一步而言, 从抛物线的切点作两条直线, 一条与焦点相连, 另一条平行于轴, 它们与切线成相等的角; 换言之, 抛物线任意一点处的切线平分两直线所形成的角, 其中一条连接焦点和切点, 另一条平行于轴线。

不同的教科书所采用的证明方法不同, 根据证明角度主要可以分为“等角法”和“等长法”

两种。

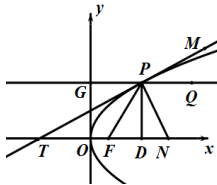
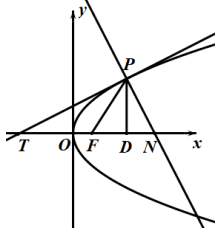
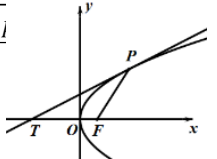
有 14 种教科书通过直接证明角度相等的“等角法”证明该定理，表 4 给出了典型例子。

表 4 等角法的典型例子

方法	描述	图像	教科书
切线法	<p>切线 PT 的方程为 $y = \frac{p}{y'}(x+x')$，过焦点 $F(0, \frac{p}{2})$</p> <p>和切点 $P(x', y')$ 的直线方程为 $y = \frac{y'}{x' - \frac{p}{2}}(x - \frac{p}{2})$，</p> <p>故 $\tan \angle FPT = \tan(\angle PFN - \angle PTF)$</p> $\frac{\frac{y'}{x' - \frac{p}{2}} - \frac{p}{y'}}{1 + \frac{y'}{x' - \frac{p}{2}} \cdot \frac{p}{y'}} = \frac{p}{y'} = \tan \angle FTP$ ，所以 <p>$\angle FPT = \angle FTP = \angle MPQ = \angle TPG$ [12]。</p>		Davies (1836)
全等法	<p>过点 P 作 PD 垂直于轴，因为 $TO = OD$，所以</p> <p>$TH = HP$，故 $\text{Rt}\triangle TFH$ 和 $\text{Rt}\triangle PFH$ 全等，因此</p> <p>$\angle FTP = \angle TPF$ [12]。</p>		Davies & Charles (1860)
对角线法	<p>因为 $FP = GP = CD$，$TO = OD$，$CO = OF$，所以</p> <p>$TC = FD$，故 $TF = CD = GP = FP$，因此四边形</p> <p>$TFPG$ 是菱形，而菱形的对角线平分相应的内角，</p> <p>故 $\angle GPT = \angle FPT$ [13]。</p>		Young, Fort & Morgan (1936)

有 45 种教科书采用“等长法”，先证明边长相等，然后得出角度相等，表 5 给出了典型例子。

表 5 等长法的典型例子

方法	描述	图像	教科书
次切线法	<p>因为 $OT = OD$，所以</p> $TF = OF + OT = OF + OD = \frac{p}{2} + x, \text{ 而}$ $PF = x + \frac{p}{2}, \text{ 故 } TF = FP, \text{ 所以 } \triangle PTF \text{ 是等腰三}$ <p>角形，因此 $\angle FPT = \angle FTP$ [12]。</p>		Davies (1836)
直角三角形法	<p>由于 $OT = OD$，$DN = p$ 且 $OF = \frac{p}{2}$，所以</p> $TF = FN, \text{ 因此点 } F \text{ 为 } TN \text{ 的中点, 即点 } F \text{ 是}$ <p>$Rt\triangle TPN$ 斜边的中点，故 $FP = FT$，因此</p> $\angle FPT = \angle FTP$ [14]。		Ziwet & Hopkins (1913)
距离法	$FP = \sqrt{\left(x' - \frac{p}{2}\right)^2 + (y' - 0)^2} = \sqrt{x'^2 - px' + \frac{p^2}{4} + y'^2} = \sqrt{x'^2 + px' + \frac{p^2}{4}}$ <p>，而 $TF = TO + OF = x' + \frac{p}{2}$，故 $FP = TF$，因此</p> $\angle FPT = \angle FTP$ [15]。		Ashton (1901)

5 双曲线光学应用

有 31 种教科书以“等角定律”和“反射定律”为理论基础介绍了抛物线的光学性质：所有沿平行于轴的方向照射到曲线上的光线均会通过反射聚集到焦点，反过来，从焦点射出的所有光线将被曲线反射成平行于轴的光线。将抛物线绕其对称轴旋转将形成一个中空的抛物面，所有平行于轴的光线经过抛物面的反射将集中到焦点，而从焦点射出的光线经过抛物面的反射将与轴平行^[16]。

前照灯、探照灯和抛物面反射器正是依据“从焦点射出的光线经过抛物面的反射将与轴平行”这一原理制造的^[17]；而许多灯塔采用抛物面镜的目的就是将所有的光线投向大海^[18]。

“所有平行于轴的光线经过抛物面的反射将集中到焦点”这一原理在抛物面反射镜的使用中得到了应用，比如反射式望远镜^[19]；如果将抛物面反射镜的轴朝向太阳，则太阳的光线会沿平行于轴的方向照射过来，经反射后集中于焦点处，这样，热量将会聚焦在这里，焦点处的温

度就会很高，如果有一些火药放置在焦点处，那么它们将很容易被点燃^[20]；而如果在抛物面反射器的焦点处放置一个锅炉，这样就构造出了一个高效的太阳能发动机^[21]。

此外，由于声音与光线遵循同样的反射定律，抛物面麦克风被用来集中来自足球场远处的声音，从而起到很好的聚音效果，雷达和电波望远镜也是基于同样的原理^[22]。

6 结论与启示

早期教科书大多从抛物线任意点处的法线入手探究抛物线的几何性质，首先采用多种方法推导出切线方程与法线方程，进而求解出次切线与次法线的长度，在此基础上得出等角定理并进行证明，然后以此为依据总结出作抛物线切线的简单方法以及抛物线的光学性质，并将光学性质应用到军事、科研以及实际生活中。

西方早期教科书中丰富多彩的抛物线的几何性质、证明、应用及其演变过程对今日解析几何的教学有着重要价值。

在实际教学中，教师可以通过布置前置的实践任务让学生寻找社会生活中的抛物线与抛物面，并通过查阅资料探究这些应用的理论依据，让学生初步感受抛物线的光学性质及其应用价值，进而在课堂上自然地利用抛物线的光学性质将焦点、准线和抛物线融为一体。然后引导学生对抛物线的切线、法线、次切线和次法线进行研究，并在此基础上完成对等角定理的推导和证明，培养学生数学抽象、直观想象和逻辑推理的数学核心素养。最后，运用等角定理及学生已经知道的光的反射定律来总结出抛物线的光学性质，并布置课后实践作业，小组合作进行数学活动，应用抛物线的几何性质设计出一些模型、工具或产品，在做中学，进一步加深学生对抛物线几何性质的理解。

参考文献

- [1] 汪晓勤. 数学史与数学教育[J]. 教育研究与评论(中学教育), 2014(01): 8-14.
- [2] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Co, 1836: 144.
- [3] Biot, J. B. *An elementary treatise on analytical geometry*[M]. Philadelphia: C. Desilver, 1840:

119.

[4] Smith, P. F., Gale, A. S. *Introduction to Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1904:

180.

[5] Fine, H. B., Thompson, H. D. *Coordinate Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company,

1914: 61.

[6] Eddy, H. T. *A treatise on the principles and applications of analytic geometry*[M]. Philadelphia:

Cowperthwait & company, 1874: 99.

[7] O'Brien, M. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry*[M]. Cambridge: Deightons, 1844: 89.

[8] Lardner, D. *A Treatise on Algebraic Geometry*[M]. London: Whittaker, Treacher & Arnot, 1831:

99.

[9] Hymers, J. *A treatise on conic sections*[M]. Cambridge: Printed at the University press, for J. &

J.J. Deighton, 1845: 45.

[10] Coffin, J. H. *Elements of Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Collins, 1881:

34.

[11] Crenshaw, B. H., Killbrew, C. D. *Analytic Geometry and Calculus*[M]. New York: P. Blakiston's

Son & Co, 1925: 100.

[12] Davies, C. *Elements of analytical geometry and of the differential and integral calculus*[M]. New

York: A. S. Barnes & Burr, 1860: 122.

[13] Young, J. W., Fort, T., Morgan, F. M. *Analytic Geometry*[M]. Boston: Houghton Mifflin

Company, 1936: 177.

[14] Ziwet, A., Hopkins, L. A. *Analytic Geometry and Principles of Algebra*[M]. New York: The

Macmillan Company, 1913: 1884.

[15] Ashton, C. H. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: Charles Scribner's Sons,

1901: 127.

[16] Waud, S. W. *A treatise on algebraical geometry*[M]. London: Baldwin and Cradock, 1835: 120.

[17] Siceloff, L. P., Wentworth, G., Smith, D. E. *Analytic Geometry: Brief Course*[M]. Boston: Ginn

& Company, 1922: 88.

- [18] Robinson, H. N. *Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Ivison, Blakeman, 1860: 175.
- [19] Newcomb, S. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. New York: Henry Holt and Company, 1884: 120.
- [20] Osgood W. F., Graustein, W. C. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1921: 96.
- [21] Poor, V. C. *Analytical Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1934: 98.
- [22] Purcell, E. J. *Analytic Geometry*[M]. New York: Appleton-Century-Crofts, 1958: 137.

教学实践

HPM 视角下的圆锥曲线高三单元复习课教学

赵志丽¹ 刘梦哲²

(1.上海市鲁迅中学, 200083; 2.华东师范大学教师教育学院, 200062)

1 引言

《普通高中数学课程标准》(2017 年版)指出,通过圆锥曲线与方程的学习,帮助学生了解圆锥曲线的实际背景,感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用;掌握椭圆的定义、标准方程,了解抛物线与双曲线的定义、几何图形和标准方程;体会数形结合的思想^[1]。圆锥曲线作为沪教版(二期课改)高二第二学期第十二章的内容,其集中、完整地阐述了解析几何的主要问题和思想方法,是我国高中数学教与学的重难点之一,也是历年高考必考的知识点之一。

鉴于圆锥曲线教学的重要性以及学生在学习中所遇到的困难,许多教师对圆锥曲线复习课的教学进行了探索。不难发现,大部分教师在复习课中均是以试题为导向,通过归纳用圆锥曲线定义解决的几类问题,引导学生用圆锥曲线定义解题^[2]。已有研究表明,学生在圆锥曲线的定义、标准方程、几何性质及应用的理解上存在困难^[3]。具体来说,在实际教学中,学生常常会遇到一些困惑:为什么将椭圆、双曲线和抛物线称为“圆锥曲线”?为什么圆锥曲线的截线定义和轨迹定义等价?为拨开学生心中的疑云,教师有必要了解圆锥曲线的形成和发展的历史,并以重构式将数学史融入数学教学中,最终培养学生的理性精神、发展学生的数学素养、落实学科德育。

HPM 视角下的教学实践表明,数学史有着多方面的教育价值,可以构建“知识之谱”、彰显“方法之美”、营造“探究之乐”、实现“能力之助”、展示“文化之魅”、达成“德育之效”^[4]。鉴于此,作为一节高三单元复习课,教师设置层层递进的问题串,并借助数学史和平面截圆锥模型,帮助高三学生重新认识椭圆、双曲线、抛物线的定义,了解圆锥曲线的起源,建立三者的内在联系,提高学生的类比迁移能力。拟订的教学目标如下。

- (1) 了解圆锥曲线的历史背景，建立圆锥曲线的内在联系。
- (2) 经历从几何模型中抽象出圆锥曲线轨迹定义的过程，知道圆锥曲线的定义。
- (3) 发展学生的直观想象、数学抽象和数学运算的数学核心素养。

2 历史材料及其运用

(一) 圆锥曲线的起源

圆锥曲线的起源甚是模糊，但它一定与倍立方问题相关^[5]。公元前 5 世纪，希波克拉底（Hippocrates，约前 470-约前 410）研究了如下问题：一个棱长为 a 的立方体，在 a 和 $2a$ 之间确定 x 和 y ，使之满足 $a:x=y:2a$ ，希波克拉底把倍立方问题转化为二次比问题。以现在的视角来看，这相当于同时解

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \\ xy = a^2 \end{cases}$$

方程组中的两个方程，其中有两个是抛物线方程，有一个是

双曲线方程。

梅内克缪斯（Menaechmus，约前 380-约前 320）被认为是研究上述代数性质所代表的曲线的第一人，并得到两种纯几何方法的解法。如图 1，梅内克缪斯用垂直于母线的平面去截三种不同的圆锥，得到三种不同的圆锥曲线，被后人称之为“梅内克缪斯三线”。但梅内克缪斯只研究了双曲线的一支^[6-7]。



图 1 梅内克缪斯三线

随后，数学家阿基米德（Archimedes，前 287 -前 212）也研究了二次曲线，但他主要集中在微积分的问题上。与之同时期的另一伟大的数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius，约前 262-约前 190）编著了《圆锥曲线论》，对前人的研究进行综合和创新。阿波罗尼奥斯是第一个使用同一正圆锥或斜圆锥来得到三种不同圆锥曲线的人（图 2），同时也是第一个发现双曲线有两支的人^[7]。

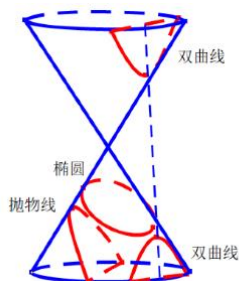


图 2 阿波罗尼奥斯截圆锥

在阿波罗尼奥斯之后，许多古希腊数学家试图解决更多的轨迹问题，但均无太大进展。直至 17 世纪，笛卡儿 (Descartes, 1596-1650) 和费马 (Fermat, 1601-1665) 分别独立的用解析几何方法解决了这一问题。但《圆锥曲线论》的影响却是深远的，后世许多知名数学家都直接或间接地受过它的影响。

(二) 圆锥截线定义与轨迹定义的统一

17 世纪初期，在研究古希腊“三线轨迹”和“四线轨迹”的基础上，费马和笛卡尔创立了解析几何，圆锥曲线的研究从此进入了一个崭新的阶段。这个阶段的数学家们从代数的视角，运用解析的方法，研究圆锥曲线的定义、方程和各种性质。1679 年，法国数学家拉希尔 (P. de Lahire, 1640-1718) 在《圆锥曲线新基础》一书中彻底抛弃了古希腊人的原始定义，采用了我们今天耳熟能详的轨迹定义^[6]。

虽然数学家们先后给出了椭圆的圆锥截线定义、轨迹定义，并推导出了椭圆方程，研究了椭圆的性质，但圆锥截线定义与轨迹定义很长时间都彼此缺乏统一。直到 1822 年，比利时数学家旦德林 (Dandelin, 1794-1847) 在一篇论文中利用圆锥的两个内切球，直接在圆锥上作出椭圆截面的焦点，导出椭圆的焦半径性质，从而证明了截线定义与轨迹定义的统一性，填平了古希腊圆锥曲线定义 (截线定义) 和 17 世纪新定义 (今称椭圆第一定义) 之间的鸿沟。

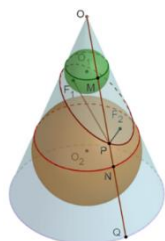


图 3 椭圆的旦德林双球模型

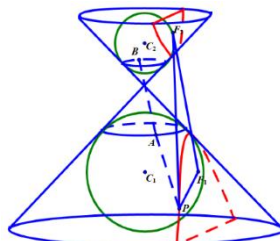


图 4 双曲线的旦德林双球模型

如图 3，圆锥内含两球且与圆锥内表面相切，现用一不平行于母线且不过圆锥顶点的平

面去截圆锥，并与两球分别相切于 F_1 、 F_2 两点，其交线为椭圆^[8]。母线 OQ 与两个球面相切于 M 、 N 两点。由球外一点 P 向球引切线，其切线长相等，即 $|PM|=|PF_1|$ 及 $|PN|=|PF_2|$ ，则 $|PF_1|+|PF_2|=|PM|+|PN|=|MN|>|F_1F_2|$ 为定值。因此我们可以知道，椭圆上的任意一点到两个定点（即椭圆的焦点）之和为一个常值。

若在对顶圆锥中，我们也可以按照类似的方式作出圆锥的截线（图 4），并证明此截线为双曲线^[8]。且德林双球模型的建立，不仅将古希腊的几何传统与截线定义有效结合，还帮助教师在今天的数学课堂中更好地采用发生教学法。

3 教学设计与实施

课前准备：智慧课堂平板电脑教师版与学生版。

（一）热身练习，走进课堂

师：我们已经学习过椭圆，双曲线和抛物线，现在我们通过一个小练习来回顾一下。

Q1：已知 $F_1(3,3), F_2(-3,3)$ ，动点 F 满足条件 $|PF_1|-|PF_2|=4$ ，则 F 点的轨迹是_____；

Q2：设定点 $F_1(0,-3), F_2(0,3)$ ，动点 F 满足条件 $|PF_1|+|PF_2|=6$ ，则 F 点的轨迹是_____；

Q3：在平面内，到直线 $x=-2$ 与到定点 $P(2,0)$ 的距离相等的点的轨迹是_____。

备选词：抛物线；不存在；双曲线的一支；一条射线；椭圆；线段；圆；双曲线。

师：第 1 题为什么是双曲线的一支？

生：因为双曲线的定义是到两定点的距离之差的绝对值为定值的点的轨迹，这里没有绝对值，所以只表示一支。

师：这是我们从轨迹的角度来定义的椭圆、双曲线和抛物线，事实上这三种曲线又被统称为圆锥曲线，那么它们与圆锥有什么关系呢？带着这些问题，让我们走进今天的课堂。

【设计意图】学生在各自的平板上作答，后台统计学生在一分钟内答题的准确率分别为 30%、100%、70%。说明学生对椭圆、双曲线、抛物线定义的掌握仍有待提高，足见在高三复习中聚焦圆锥曲线定义的必要性和重要性。

（二）回归本源：截线定义引出圆锥曲线的内在联系

问题 1: 我们回忆一下在立体几何单元学习过的圆锥的性质，其中有哪些与圆相关？

生：圆锥的底面是圆，平行于底面的平面截圆锥所得的截面是圆。

师：即用一个平面去截圆锥，当平面与圆锥的底面平行时，平面与圆锥侧面的交线（也就是截线）是圆。如果改变平面与圆锥底面的夹角，得到的截线会有什么不同呢？我们通过一个动图来观察一下。

生：截线的形状发生了变化，出现了椭圆和抛物线。

师：请同学们自己动手在平板上试试看，探究平面与圆锥底面的夹角与截线形状的关系。

（学生自主操作并讨论 3 分钟）

生 1：当平面与底面平行时，截线为圆；当平面与底面的夹角变大，得到椭圆；夹角继续增大，得到双曲线。

师：记圆锥母线与底面的夹角为 α ，截面与底面所成二面角为 θ 。能不能用 θ 和 α 的大小关系来表示？

生 2： $\theta < \alpha$ ，截线为椭圆； $\theta > \alpha$ ，截线为双曲线。

师：截线在由椭圆变化为双曲线的过程中，有没有漏掉一个临界状态？

生 3：（补充） $\theta = \alpha$ ，截线为抛物线；

师：当平面倾斜到与圆锥母线和底面的夹角相同，即平面与一条圆锥母线平行时，得到抛物线。

教师板书： $\theta = 0$ ，截线为圆； $0 < \theta < \alpha$ ，截线为椭圆； $\theta = \alpha$ ，截线为抛物线； $\theta > \alpha$ ，截线为双曲线。

师：从这个过程中，同学们发现，用一个平面去截对顶圆锥，可以得到椭圆、双曲线和抛物线，他们就像是一母同胞的三兄弟，所以在定义、方程、性质等方面都有相似的地方，我们可以通过类比的方法去研究他们。

师：大家发现的这个结论与古希腊伟大的数学家阿波罗尼奥斯的发现是一致的。在 2000 多年前，古希腊的数学家阿波罗尼斯在他的著作《圆锥曲线论》中就记述了这样的结论，这就是圆锥曲线的截线定义。

【设计意图】利用智慧课堂平板电脑，通过学生的自动探究操作和讨论完善结论，使学生成为课堂主体，构建生本课堂。

(三) 且德林模型联结圆锥曲线的截线定义和轨迹定义

问题 2: 前面是我们通过观察和操作探究后推测的结论, 是否成立还需要经过验证。如何验证呢?

生: 可以通过定义去证明。

师: 以椭圆为例, 我们只需要证明截线上的点满足椭圆的定义。

例 1: 如图 3, 在圆锥内有两球与圆锥内表面相切, 球心分别为 O_1 、 O_2 , 现用一个不平行于圆锥底面的平面 β 去截圆锥, 并且平面 β 与两球分别相切于 F_1 和 F_2 , P 为平面 β 与圆锥母线 OQ 的交点, OQ 分别与球 O_1 、 O_2 分别相切于 M 、 N 点。

(1) 判断点 P 、 F_1 和 F_2 与平面 β 的位置关系。

(2) 直线 PF_1 与直线 OQ 分别与球 O_1 相切于点 F_1 和 M , 则线段 PF_1 与 PM 的大小关系如何?

(3) P 点的轨迹是什么?

生 1: 点 P 、 F_1 和 F_2 都在平面 β 上。

师: 这样我们就可以从这个立体的模型中找到一个平面模型, 转化为平面问题去解决了。

师: 我们平面中有些性质也可以拓展到立体模型中, 我们知道平面中圆外一点向圆作切线, 可以作几条? 切线段的长有什么关系?

生 2: 可以作两条切线, 切线段的长相等。

师: 拓展到空间中, 我们可以得到类似的结论么?

生 3: 从球外一点向球可以作无数条切线, 切线段的长也相等。

师: 为什么相等呢?

生 3: 所有的切点都在球的一个圆截面上, 以这个圆截面为底面, 以球外这一点为顶点, 可以构成一个圆锥, 切线段就是这个圆锥的母线。

师: 利用这个性质, 我们可以得到线段 PF_1 与 PM 的大小关系如何?

生 4: 相等的。

师: 在这个模型中还有类似的线段么?

生: $PF_2 = PN$ 。

师: 现在我们能证明 P 点的轨迹了么?

生： $PF_1+PF_2=PM+PN=MN$ ， MN 是两个平行平面构成的圆台的母线，处处相等，为定值，所以 P 点符合椭圆的轨迹定义。

师：这个模型中我们放入了两个球，这两个球起到了什么作用？

生 5：截面与两个球的切点就是椭圆的两个焦点。

教师板书证明过程，引导学生用类比的方法去证明变式题中的双曲线结论，学生在学习单上作答后拍照上传。

变式：如图 4，在一对对顶圆锥中各有一球与圆锥内表面相切，现用一个与圆锥底面所在平面 α 垂直的平面 β 去截圆锥，且平面 β 与两球分别相切于点 F_1 和 F_2 ，点 P 在平面 β 与圆锥的交线上，过 P 的直线与球 C_1 、 C_2 分别相切于点 A 、 B 。求证：点 P 的轨迹是双曲线。

【设计意图】学生自行讨论完成双曲线的证明，从中复习双曲线的轨迹定义，体会类比思想的应用。通过圆锥模型与截面的变化探究和证明，巩固圆锥曲线的定义，培养学生直观想象的核心素养。

师：我们已经证明了圆锥截线为椭圆和双曲线的情况，抛物线的证明就留给大家课后去探究。我们在证明中所借助的这个模型就是由比利时数学家旦德林提出的旦德林双球模型。我们一起来了解一下圆锥曲线的这段历史（图 5）。

【设计意图】通过微视频生动形象的将数学文化融入课堂，帮助学生认识数学的科学价值和文化价值。

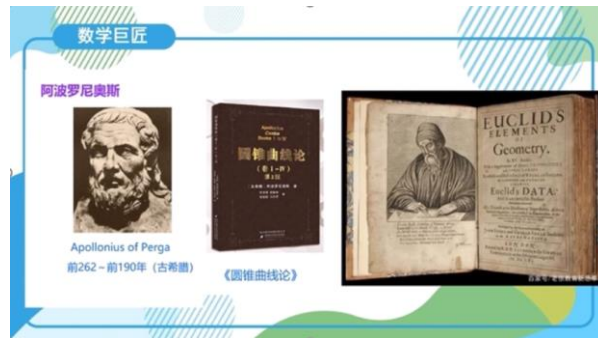


图 5 微视频：圆锥曲线的起源和发展史剪影

（四）实践应用

问题 3：我们已经了解了圆锥曲线的内在联系，了解了圆锥曲线不等同于解析几何，我们还可以从几何观点去研究，那么了解这些对于我们解决问题有什么帮助呢？

例 2：历史上，许多人研究过圆锥的截面曲线。如图 6，在圆锥中，母线与旋转轴夹角为 30° ，

现有一截面与圆锥的一条母线垂直，与旋转轴的交点 O 到圆锥顶点 M 的距离为 1，求截口曲线上任意两点间的最长距离。

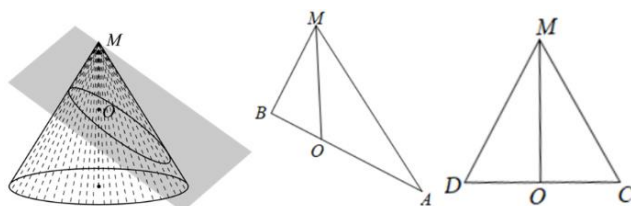


图 6 例 2 图

例 3 (2018 年上海春考数学 19 题): 利用“平行与圆锥母线的平面截圆锥面，所得截线是抛物线”的几何原理。某公司用两个射灯（射出的光锥视为圆锥）在广告牌上投影出其标识，如图 7 所示，图 7(b)投影出的抛物线的平面图，图 7(c)是一个射灯投影的直观图。在图 7(b)与图 7(c)中，点 O 、 A 、 B 在抛物线上， OC 是抛物线的对称轴， $OC \perp AB$ 于 C ， $AB = 3$ 米， $OC = 4.5$ 米。

(1) 求抛物线的焦点到准线的距离；

(2) 在图 7(c)中，已知 OC 平行于圆锥的母线 SD ， AB 、 DE 是圆锥底面的直径，求圆锥的母线与轴的夹角的大小（精确到 0.01° ）。

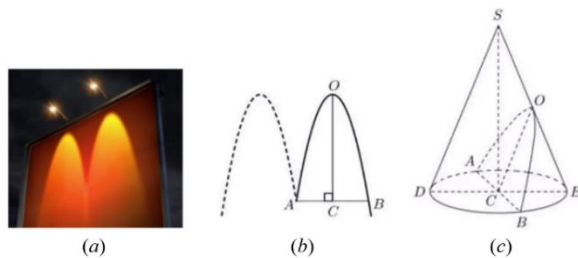


图 7 例 3 图

【设计意图】 通过截线定义让学生了解圆锥曲线的起源以及圆、椭圆、双曲线、抛物线这四种曲线的内在关联，同时综合了平面几何、立体几何、解三角形等内容，帮助学生更好建立完整的知识体系。通过把抛物线、椭圆进行比对，让学生体会类比的数学思想。

(五) 小结：主题升华

师：从圆锥曲线的起源、发展历史中我们看到，数学的学习和研究是站在巨人的肩膀上，是一个不断总结和发展前人研究成果的过程，以史为鉴，我们要善于运用数学史中的方法解决新的问题。

知识拓展：圆锥曲线的起源和内在联系；

方法总结：定义法、解析法；

思想能力：转化与化归的思想、类比迁移能力、综合分析问题及解决问题能力；

素养提升：直观想象、数学建模等数学核心素养。

4 学生反馈

基于本节课，笔者对班级学生进行了前测和后测，主要从课堂整体情况、认知发展、情感态度三个方面对学生进行了检测。

从课堂整体情况看，课前有 64% 的学生认为数学史对圆锥曲线的学习有一定帮助，而到课后认同这一观点的学生达到了 88%；对于在圆锥曲线复习课中，做例题比讲清圆锥曲线的历史更重要这一观点，课前有 36% 的学生表示赞同，课后有 35% 的学生表示赞同。可见，通过一节融入数学史的高三复习课，虽然大部分学生认为数学史融入数学教学是有价值的，但是在高考的大背景下，学生依然希望复习课是以做题的方式进行。

在认知发展方面，教师从旦德林球中获得灵感，分别设置前测问题：“ AB 是平面 α 的斜线段， A 为斜足，若点 P 在平面 α 内运动，使得 $\triangle ABP$ 的面积为定值，则动点 P 的轨迹是什么？”及后测问题：“在正四面体 $A-BCD$ 中，点 P 为 $\triangle BCD$ 所在平面上的动点，若 AP 与 AB 所成角为定值 θ ， $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ ，则动点 P 的轨迹是什么？”在前测问题中，50% 的学生能够给出正确答案“椭圆”，且已有部分学生将其想象成平面截圆柱来思考，由于不熟悉圆锥曲线的截线定义，其余学生均给出答案“圆”。在后测问题中，71% 的学生能够给出正确答案“椭圆”，而其余学生对此问题均没有作答。虽然后测问题较前测问题在难度上有所提升，但大部分学生依然给出了正确答案，由此可见，绝大多数学生通过本节课的学习能够理解圆锥曲线的截线定义。

此外，教师还让学生针对圆锥曲线这一板块，画一张概念图或思维导图，旨在了解学生的圆锥曲线意象。41% 的学生想到圆锥曲线包括椭圆、双曲线和抛物线；35% 的学生想到椭圆、双曲线和抛物线的定义、标准方程及图像；只有 1 位学生想到用不同的平面截圆锥可以得到的三条圆锥曲线。通过本节课的学习，大部分学生在知识或思想方法层面上有所收获。

在情感态度上，学生在这节课中印象最深的内容有：

- 圆锥曲线的历史让我感到引人入胜，并让我更深一层地了解圆锥曲线；
- 在 iPad 上对 3D 模型的圆锥进行截面切割，这一方式很新奇且有助于我了解圆锥曲线的由来；
- 利用含双球的圆锥证明椭圆、双曲线，它将两种曲线在古时候的定义与如今的定义串联了起来；
- 用平板上课，可以自己进行操作，对所学习的内容有更好的体会。

以上可见，学生对圆锥曲线的发展史、且德林双球模型的探索以及信息技术的运用印象深刻。图 8 给出了学生对本节课印象深刻的内容的统计情况。

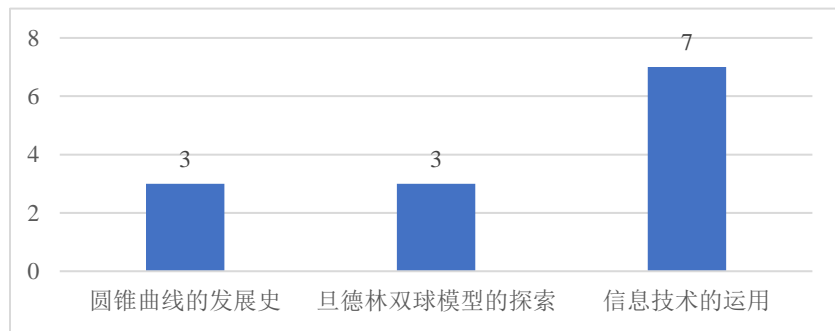


图 8 学生对本节课印象深刻的内容

41%的学生表示信息技术的运用，特别是自己动手在 iPad 上改变截面与圆锥母线的夹角，可以更好的帮助理解截面截圆锥所得到的三条圆锥曲线。同时，运用畅言智慧课堂等数字化软件，可以让学生从不同角度观察且德林双球模型，有助于学生对立体图形的直观想象。当然，圆锥曲线发展史视频的融入，也让学生体会到数学知识背后的多元文化。

5 结语

在沪教版（二期课改）的教材编排中，椭圆、双曲线、抛物线都是从标准方程和性质两方面来学习，在大部分学生的概念里，这一部分就叫“解析几何”，三者的联系就是定义的叙述类似，解题的方法相同，提起“圆锥曲线”反而茫然不知。然而近年来高考中也越来越重视以数学文化为背景来考察学生的“四基”和“四能”，本节课的设计就是为了搭建“解析几何”与“圆锥曲线”之间的桥梁，通过数学文化来认识三者的内在联系。

为了适应本校中等学生水平的学情，也为了使教学重难点更突出，因此以低难度的定义复

习为引入，让学生在生动可操作的 3D 动画中探究活动中总结圆锥曲线的定义，并且跳过了对学生能力要求较高的构建旦德林模型的步骤，改为以例题的形式直接给出旦德林模型，给学生搭建充分的台阶，引导学生经历学习过程，自主探究轨迹定义和截线定义的一致性。

高三复习课的落脚点还是在问题解决，要让学生感受到学以致用。在旦德林模型的探究中，椭圆的证明是由教师引导学生完成，双曲线的证明由学生自己类比完成，抛物线的证明则留作课后练习。最后用两道以圆锥曲线的数学文化为背景的高考题，从问题解决中提升学生的类比迁移能力、综合分析问题及解决问题能力。

总之，教师尝试在 HPM 视角下，以数学文化为抓手，借助多媒体信息技术，通过类比推理训练，发展学生直观想象、数学建模等数学核心素养，落实立德树人的根本任务。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 43-44.
- [2] 刘文清. 高三数学复习中概念教学的思考——以“圆锥曲线定义”为例[J]. 福建中学数学, 2017(01): 18-20.
- [3] 柏宗玲. 高中生圆锥曲线的理解困难及对策研究[D]. 山东: 山东师范大学, 2016.
- [4] 汪晓勤,沈中宇. 数学史与高中数学教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020.
- [5] 卡茨. 数学史通论(第 2 版)(李文林等译)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [6] 汪晓勤. 椭圆第一定义是如何诞生的?[J]. 中学数学月刊, 2017(06): 28-31.
- [7] 秦语真. HPM 视角下高三双曲线复习课教学案例研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2021.
- [8] Smith, E. S., Salkover, M., Justice, H. K. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1954.

他山之石

职前中学教师在数学建模教学方面的教学内容知识

孔雯晴

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

数学建模在数学教育领域的重要性是国际公认的, 有研究表明学生 30% 的建模表现与教师的知识、行为和信念有关。教学内容知识是教师教育的重要目标, Borromeo Ferri 和 Blum 提出与教学内容知识相关的数学建模教学能力有四个维度: 理论维度、任务相关维度、教学维度和诊断维度。在此基础上, Wess 等学者制定了和数学建模相关的教学内容知识框架, 包括干预知识、建模过程知识、建模任务知识和目标观点知识四个部分。基于已有的理论基础, 《职前中学教师在数学建模教学方面的教学内容知识》一文关注职前教师在数学建模教学方面的教学内容知识的提升和发展, 重点研究两个问题: 一是参加建模讨论班的职前教师是否比参加另一个主题的讨论班的职前教师更能提高他们在数学建模教学方面的教学内容知识? 二是参加以任务或适应性干预为重点的讨论班的职前教师是否能够提升各方面与数学建模教学相关的教学内容知识?

该项研究的作者是来自德国的明斯特大学 Gilbert Greefrath、Raphael Wess 和维尔茨堡大学的 Hans-Stefan Siller、Heiner Klock 四位学者, 原文于 2021 年 5 月发表在《数学教育研究》(Educational Studies in Mathematics) 期刊。这是一项准实验研究, 研究对象是 198 名有资格在德国语法学校任教的职前教师, 任务组 (共 76 名, 分 4 批) 和基线组 (共 67 名, 分 5 批) 来自科布伦茨-兰道大学, 干预组 (共 55 名, 分 3 批) 来自明斯特大学。这些职前教师是首次参加数学教学的讨论班 (12 课时), 其中, 任务组参加侧重于诊断能力和任务能力的讨论班, 干预组参加侧重于诊断能力和干预能力的讨论班, 基线组参加主题与数学建模无关的讨论班。所有研究对象均参加前测和后测, 作者评估了研究对象的可比性, 并在解释结果时考虑到这些差异。

2 实验设计

整个实验过程分为理论、实践和反思三个阶段，最后提交期末报告（表 1）。与任务组和干预组相比，基线组参加的讨论班只在教学内容上有区别（其主题与数学建模无关），在其他方面（如范围、目标群体和教学方法等）都相同。

表 1 实验设计

理论阶段	实践阶段	反思阶段	
<ul style="list-style-type: none"> • 数学建模 • 建模过程 • 数学建模的目的和观点 • 任务组：分析和开发建模任务 • 干预组：基于视频片段讨论适应性干预措施 	<ul style="list-style-type: none"> • 在大学和学生一起建模 • 任务组：观察和分析学生的建模过程 • 干预组：观察学生的建模过程，进行适应性干预 	<ul style="list-style-type: none"> • 任务组：反思建模任务和自行开发的建模任务的标准 • 干预组：通过录像反思自己的干预行为，并制定可替代的行为 	期末 报告

在理论阶段，任务组的职前教师先使用建模周期分析并解决一个数学建模任务，再自行开发一个建模任务，并制定合适的建模任务标准（真实性、相关性、开放性），确定建模子过程（简化、数学化、验证等）的标准。实践阶段是 90 分钟的项目课程，由三名职前教师组成一队，监督一小群学生，各小组记录学生在建模过程中展现出来的建模子能力。在反思阶段，任务组评估自主开发的建模任务和调整先前确定的建模任务标准。这一组职前教师不需要在期末报告中讨论适应性干预措施的影响。

在理论阶段，干预组的职前教师以两人一组的方式完成预先确定的建模任务：讨论建模任务的结果、寻找不同的解决方法和可能出现的困难，并制定适应性干预的标准（基于诊断、微创、适应困难、保持独立性）和相应的过程模型。在实施阶段，职前教师依然两人一组监督一小群学生，学生需要完成的建模任务与职前教师先前完成的任务相同。在这个过程中，职前教师记录其采取的干预措施。整个建模的过程由第三方录制，在反思阶段，职前教师分析和评估视频中的适应性干预措施，思考是否有可以替换的行为模式。

3 测试工具

作者使用由 Klock 和 Wess (2018) 制定的测试卷对研究对象进行前测和后测。以图 1 所示的数学建模问题为例, 测试卷中设置了 71 道单选题, 用于测量研究对象在干预、建模过

例: 交通堵塞 (九年级)

在暑期的开始时, 路上经常发生交通堵塞。Chris正在德国度假, 她在一段20公里的路上被堵了6个小时。天气很热, 她很想喝点东西。虽然有传言说红十字会会开着一辆小卡车来分发水, 但她到目前为止还没有收到任何东西。请问红十字会需要多长时间才能给每个人提供水?

学生1: 我们应该确切地知道在交通堵塞中有多少辆汽车。

学生2: 嗯?没错!

学生1: 我们该如何计算需要多长时间?任务中缺少许多东西!

学生3: 是的, 而且我们不知道每辆车需要多长时间。

学生2: 真是愚蠢的任务。

学生1: 我们可以用20公里除以6小时, 这样我们就知道小卡车的速度了。

学生3: 完全正确!反正我们也没有得到任何进一步的信息。




图 1 数学建模问题 (示例)

程、建模任务、概念/维度/目标四个方面的知识 (表 2)。

表 2 测试题 (示例)

测量	数量	例题
关于干预的知识	24	<p>请说明在这种情况下, 下列哪种干预措施适合提升独立导向的建模能力。</p> <p>A. “从估计一辆汽车的长度开始。” <input type="checkbox"/></p> <p>B. “从关注问题的一部分开始, 比如堵车的汽车数量。” <input type="checkbox"/></p> <p>C. “没错, 在计算这值。” <input type="checkbox"/></p> <p>D. “思考如何找出丢失的数据。” <input type="checkbox"/></p>
关于建模过程的知	6	<p>建模阶段:</p> <p>学生现在在问题解决过程的哪个阶段?</p> <p>A.概念化/理解 <input type="checkbox"/></p> <p>B.简化/结构化 <input type="checkbox"/></p> <p>C.数学化 <input type="checkbox"/></p> <p>D.解释 <input type="checkbox"/></p>
识	6	<p>诊断:</p> <p>在这种情况下, 诊断学生在完成任务时遇到的问题。</p>

		A.在作出假设时遇到问题。	<input type="checkbox"/>
		B.从他们的数学结果中推断出一个错误的结论。	<input type="checkbox"/>
		C.在理解上下文时遇到问题。	<input type="checkbox"/>
		D.正在使用不合适的数学模型。	<input type="checkbox"/>
	6	支持:	
		请说明在这种情况下, 您将制定哪些支持目标, 以便小组继续工作?	
		A.独立获取和评估信息	<input type="checkbox"/>
		B.在建模过程中批判性地看待结果	<input type="checkbox"/>
		C.独立为特殊的问题情境构建心理模型	<input type="checkbox"/>
		D.自信地将简化的真实情况转化为数学模型	<input type="checkbox"/>
关于建模	17	A.建模任务可能不确定	<input type="checkbox"/>
任务的知		B.建模任务可能被过度确定	<input type="checkbox"/> 对 <input type="checkbox"/> 错
识		C.建模任务应尽快结束	<input type="checkbox"/> 对 <input type="checkbox"/> 错
关于概念/	12	A.认知模型区分了情境模型和真实模型。	<input type="checkbox"/>
维度/目标		B.在建模周期中, 从现实情境直接过渡到数学模型是不可	<input type="checkbox"/>
的知识		能的	<input type="checkbox"/>
		C.情境模型是独立形成的	<input type="checkbox"/>
		D.在建模周期中, 区分情况模型和真实模型是可能的	<input type="checkbox"/>

3 研究结果

在删掉 5 道没有显著差异的题目后, 作者使用简单的 Rasch 模型缩放二分法数据, 并使用多维随机系数多项 Lofit 模型计算项目难度参数和个人能力参数。经过离差、AIC(赤池信息准则)、BIC(贝叶斯信息准则)以及全局拟合与局部拟合之间的相关性评估, 发现四维模型的拟合度比一维模型更好(图 2)。信度检验的结果基本都大于 0.7, 并且后测具有良好的信度, 总体而言该测量是可靠的。

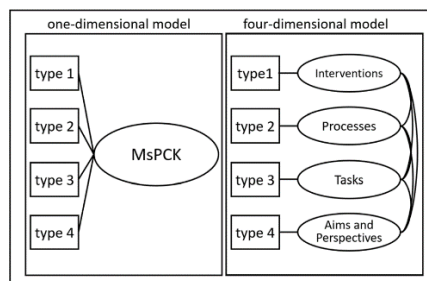


图 2 一维模型和四维模型

作者先对数据进行描述性统计，排除均值超过三个标准差的异常值和缺失值，事后检验的结果显示，任务组和干预组仅在“建模任务知识”量表上有轻微的显著差异，说明其具有可比性（图 3）。

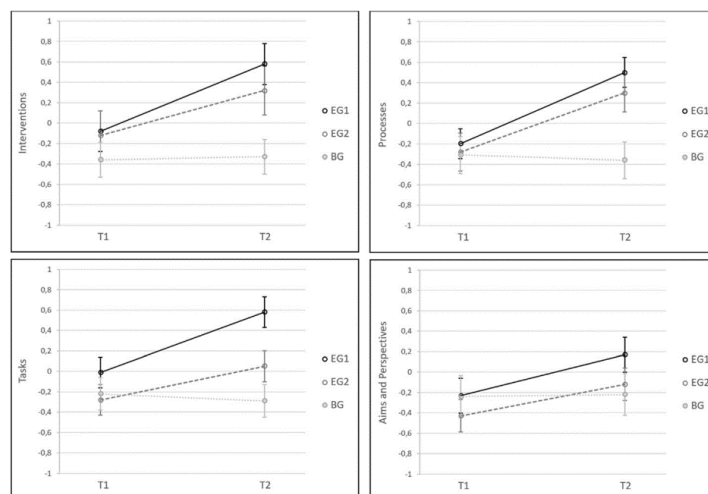


图 3 事后检验

表 3 是单因素双向重复测量方差分析的结果，说明测试时间与不同方面的教学内容知识（建模相关）存在显著的交互效应。关于概念/维度/目标的知识，效应量大小为小到中等（ $\eta^2 = 0.042$ ），但统计效力很低，另外三个方面的效应量大小为中到大（ $\eta^2 = 0.079$ 、 $\eta^2 = 0.283$ 、 $\eta^2 = 0.204$ ），且具有较高的统计效力。说明在参加讨论班后，实验组在四个方面的教学内容知识都有显著增加，且任务组的效果是大于干预组的，基线组没有显著差异。

表 3 单因素双向重复测量方差分析（交互效应）

	<i>N</i>	<i>F</i>	df1	df2	Sig.	Part. η^2	Stat. power
关于干预的知识	196	8251	2	193	<0.001	0.079	0.96

关于建模过程的知识	186	23446	2	183	<0.001	0.283	1.00
关于建模任务的知识	191	24032	2	188	<0.001	0.204	1.00
关于概念/维度/目标的 知识	191	4126	2	188	<0.05	0.042	0.72

由表 4 可以看出,在干预知识方面,干预组($\eta^2 = 0.112$)的增加幅度低于任务组($\eta^2 = 0.311$);在建模过程知识方面,任务组($\eta^2 = 0.509$)和干预组($\eta^2 = 0.345$)都有显著增加。在建模任务知识方面,任务组($\eta^2 = 0.479$)比干预组($\eta^2 = 0.147$)的增加幅度更显著。在概念/维度/目标的知识方面,任务组($\eta^2 = 0.144$)和干预组($\eta^2 = 0.142$)的增加幅度较显著,但低于另外三个方面。整体来说,任务组具有很高的统计效力。干预组在干预知识方面的统计效力很低,说明不显著。由于基线组没有显著差异,相应的统计效力也非常小。

表 4 单因素单向重复测量方差分析(时间因素影响)

	<i>N</i>	<i>F</i>	df1	df2	Sig.	Part. η^2	Stat. power
关于干预的知识							
任务组	76	33838	1	75	<0.001	0.311	1.00
干预组	54	6674	1	53	<0.05	0.112	0.72
基线组	66	0.334	1	65	0.334	0.005	0.09
关于建模过程的知识							
任务组	76	67255	1	65	<0.001	0.509	1.00
干预组	54	27924	1	53	<0.001	0.345	1.00
基线组	66	0.390	1	65	0.534	-0.006	0.09
关于建模任务的知识							
任务组	76	67952	1	74	<0.001	0.479	1.00
干预组	51	8601	1	50	<0.01	0.147	0.82
基线组	65	2642	1	64	0.109	0.040	0.36
关于概念/维度/目标的知识							

任务组	76	11900	1	71	<0.001	0.144	0.93
干预组	54	8769	1	53	<0.01	0.142	0.83
基线组	66	0.097	1	64	0.756	0.002	0.06

由表 5 可以看出，在干预知识和建模过程知识方面，任务组和干预组均与基线组有显著差异，但任务组和干预组之间没有显著差异。关于建模任务的知识方面，所有测试组之间都存在显著差异。在概念/维度/目标的知识方面，只有任务组和基线组之间存在显著差异。

表 5 多因素单向方差分析

后测中不同方面的差异	N	α -correction	Mean difference	Sig.
关于干预的知识				
任务组-干预组	76	Bonferroni	0.26	0.235
任务组-基线组	54		0.92	<0.001
干预组-基线组	66		0.66	<0.001
关于建模过程的知识				
任务组-干预组	76	Games-Howell	0.22	0.208
任务组-基线组	54		0.87	<0.001
干预组-基线组	66		0.65	<0.001
关于建模任务的知识				
任务组-干预组	76	Bonferroni	0.58	<0.001
任务组-基线组	51		0.87	<0.001
干预组-基线组	65		0.29	<0.05
关于概念/维度/目标的知识				
任务组-干预组	76	Games-Howell	0.29	0.074
任务组-基线组	54		0.39	<0.001
干预组-基线组	66		0.10	0.749

4 讨论与研究结论

针对第一个研究问题，职前教师在数学建模相关的各个方面的教学内容知识都有显著增加，其中概念/维度/目标方面知识的增长程度较小，这可能是由于讨论班更重视实践，而弱化了理论知识。基线组的各个方面都没有显著差异，因此不存在前测效应。

针对第二个研究问题。后测结果显示任务组和干预组与基线组相比都有显著差异，只有干预组在概念/维度/目标方面的知识知识与基线组没有显著差异。可能有两种原因导致这种情况：一是对这方面的重视程度较低，二是任务组和干预组来自不同的大学，不同大学建模讨论班的侧重点可能不同。实验组和对照组在理论阶段学习的建模任务知识的侧重点不同，相应地，在后测结果中任务组和干预组之间以及每个实验组和基线组之间都有显著差异，这似乎表明通过自行开发建模任务可以获得关于建模任务的知识。整体来看，任务组的提升更明显，这可能归因于职前教师的群体差异，并且建模任务知识和干预知识在实际情况中是不能完全分开教授的。总的来说，实验组与基线组的显著差异和两个实验组之间差异，尤其是在建模任务知识方面的差异，都表明了实验是有效的，因此两个实验组的职前教师都获得了关于数学建模教学的教学内容知识，并且两个实验组之间的差异为建模讨论班的设计提供了重要的启示。

总而言之，本研究基于理论和实践相结合的研究框架，从特定的数学教育领域切入，深入研究了职前教师专业知识的发展，可以促进数学建模方面的教学内容知识的推广。作者表示向职前教师传授特定主题的教学内容知识是非常重要的，并且实践活动在大学教师教育中可能具有相当大的潜力，应该鼓励开展在这个领域的进一步研究。研究中所用的测试卷有良好的模型拟合度和可靠性，建议进一步研究针对特定方面的教学内容知识的测试工具。

参考文献

- [1] Greefrath, G., Siller, HS., Klock, H. et al. Pre-service secondary teachers' pedagogical content knowledge for the teaching of mathematical modelling[J]. *Educational studies in mathematics*, 2022, 109(02): 383–407.

非常规表示形式中隐含的“有益性模糊”：分数到底是什么

刘叶青

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

摘要：介绍 Ofer Marmur 和 Rina Zazkis 于 2021 年发表在《数学教师教育杂志》(Journal of Mathematics Teacher Education) 上的《非常规表示形式中隐含的“有益性模糊”：分数到底是什么》(Productive ambiguity in unconventional representations: “what the fraction is going on?”) 的文章。

关键词：分数 (Fraction), 模糊性 (Ambiguity), 教师教育 (Teacher Education), 符号表示 (Semiotic representation), 定义 (Definitions)

由于学生和教师在“分数”这一数学概念的认知与学习都可能遇到困难, 因此“分数”主题一直受到数学教育研究领域的广泛关注。以往学者通过研究发现学习者学习分数概念常会遇到困难的重要原因之一便是分数概念本身具有多种解释方法与表示形式。

本文研究者在以往的研究过程中发现职前教师在解决寻找介于 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{1}{7}$ 之间的分数的问题时, 部分教师会给出答案 $\frac{1}{6.5}$, 但是随后又会迅速划掉它, 他们认为这个答案的分母并不是一个整数, 因此其不是一个合适的答案。后来, 研究者调查不同的数学文本资料 (教科书、百科全书等), 发现书中对于分数的概念也给出了不同的定义方式。根据这些定义, $\frac{1}{6.5}$ 是不是分数并无定论。这样的发现意味着分数概念存在模糊性, 而对这种模糊性的深入探究将有助于职前教师对分数概念的理解与掌握, 提升他们教学的专业知识, 进而使得他们在未来的教学过程中实施更好的教学。

本研究以 Byers 和 Foster 的数学模糊性 (Mathematical ambiguity) 的框架为理论基础, 探索职前教师在应对由分母中含有小数这种非常规的分数表示形式所引发的分数概念的模糊时所采取的解释方式和这些解释背后所体现出的数学模糊性, 研究这些模糊性又是如何影响职前教师们解读与表征分数的。

本研究的研究对象是 26 名小学职前教师。这些教师在实验开展之前已经具备了一定的教育

实习经验。在实验数据收集的过程中，他们正在参与旨在提高自身教学相关专业知识的教学方法课程的学习。

本研究采用“剧本编写”(script-writing)的任务来收集数据。该任务共分为两个部分：第一部分要求所有职前教师根据以下教育情景，续写师生的对话(图 1)；第二部分则要求教师根据一系列的引导性问题，对自己所编写的对话进行评论与解释，提供他们对于分数概念的理解并解释他们选择教学方法的原因，同时反省自身对此任务的认知。该任务要求职前教师们在 3 周之内完成，在完成任务的过程中，允许教师们与同伴进行交流与讨论或者查询相关资料，但是最终提交的成果必须独立完成。

教师：下面请大家与同桌，两人一组，尽可能多的找到介于 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{1}{7}$ 之间的分数。

学生们根据要求，两人一组展开讨论，老师听到了 A、B 学生这样的对话：

学生 A：我认为 $\frac{1}{6.5}$ 正好位于 $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{7}$ 之间。

学生 B：你是怎么得到的？这个答案听起来特别奇怪。

学生 A：不奇怪。6.5 不是正好位于 6 和 7 之间么，所以 $\frac{1}{6.5}$ 就在 $\frac{1}{6}$ 和 $\frac{1}{7}$ 之间啊。

学生 B：但是 $\frac{1}{6.5}$ 不是分数啊！

图 1 “它是分数吗？”剧本编写任务的第一部分

本研究采用定性内容分析方法(Qualitative content analysis)对教师们反馈的文本进行分析，其主要包括三个阶段。阶段一：文本筛选，主要从文本中识别出对话的续写或者评论中关注 $\frac{1}{6.5}$ 是否是分数以及它是否位于 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{1}{7}$ 之间的部分，然后考察职前教师是如何建构分数概念以及选择分数的表示形式的；阶段二：编码，分析教师们在文本中所给的答案是否明确，利用开放式编码(open coding)对文本中所体现的数学模糊性进行分类与归纳，考察教师所体现的模糊性与分数概念之间是如何建立联系的；阶段三：分析解读，考察教师两部分任务之间的联系以验证研究者解读的效度等。

研究者编码阶段对 Byers 和 Foster 的数学模糊性(Mathematical ambiguity)的框架进行了调整与完善，其将数学模糊性重新归纳为五种(表 1)。

表 1 数学模糊性的框架

类别	描述性定义
常规模糊 (Conventional ambiguity)	包括定义模糊(definitional ambiguity)和范式模糊(paradigmatic ambiguity)两种,当研究对象在所提交的文本中提及传统分数的定义与表示形式时,将其认定为常规模糊。
词汇模糊 (Linguistic ambiguity)	当研究对象利用修饰、限定词(比如形容词、副词等)去描述分数的表示形式时,将其认定为词汇模糊,比如写到这是一种“特殊”的分数等。
表征方式模糊 (Representation ambiguity)	包括符号表示的模糊(symbolic ambiguity)和多样性模糊(ambiguity of multiplicity),当研究对象在文本中提到多种等价于 $\frac{1}{6.5}$ 的表示形式,并以此去判断其是否是分数时,将其认定为表征方式的模糊。
教学模糊 (Pedagogical ambiguity)	当研究对象采用多种教学行为对 $\frac{1}{6.5}$ 进行解释,但最终并未给出明确答案时,将其认定为教学模糊。
前后不一致 (Inconsistencies)	当研究对象在第一部分和第二部分中所给出的结果并不相同时,将其认定为前后不一致。

研究者在调整完善后的理论框架下,分析发现 7 名职前教师对 $\frac{1}{6.5}$ 是否是分数给出了明确的答案,其中 5 人认为其不是分数,2 人认为其是分数;剩余的 19 人对此问题并未给出明确答案。具体而言,4 人体现出了常规模糊,6 人体现出词汇模糊,4 人体现出表征方式的模糊,5 人体现出教学模糊,还有 5 人前后并不一致,并且有部分职前教师在文本中体现出了多种模糊性。

在给出明确答案的 7 名职前教师中,认为 $\frac{1}{6.5}$ 不是分数的老师,其判断是基于分数整体-部分(面积)的概念框架,他们认为圆形是没有办法分成 6.5 份的,因此这个形式并不是分数,从而也就没有深入研究它是否位于 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{1}{7}$ 之间;认为 $\frac{1}{6.5}$ 是分数的教师则利用分数的表示形式去判断,尤其是他们认为 $\frac{1}{6.5}$ 可以转化为等值且分子分母只含有整数的形式时,因此他们认定 $\frac{1}{6.5}$ 是分数。值得注意的是,研究者发现给出肯定答案的教师们在探究的过程中同样提出了自己对

于概念的模糊，他们反映这样的探究加深了他们对于数学概念的理解，同时也在解决此问题的过程中，给出了先写出 $\frac{1}{6.1}$ ，再将其转化为 $\frac{10}{61}$ 的新方法。

体现出常规模糊的职前教师往往指出 $\frac{1}{6.5}$ 可以转化为常规的表示形式，然后引导学生们进行进一步的探究；体现出词汇模糊的职前教师则会采用自编的词汇来描述与解释这种非标准形式，比如合规的、奇怪的、看着有趣的，同时也会引导学生深入研究去寻找解释这种非标准形式的方法；体现出表征方式模糊的职前教师则纠结于两个相等的量是否可以看作是同一个对象的不同表示形式还是两个不同的对象；体现出教学模糊的职前教师则更关注探究的过程，并不强调最终结果的确定性，鼓励学生说出自己的观点并给出理由。

综上，研究者发现分数概念的模糊性引发了职前教师们对于此概念的探究，并可能使得他们在教学的过程中，引导学生深入分析与学习，从而大大加深对分数概念的理解。故研究者认为数学模糊性应该被当作数学研究与探索时富有价值的资源而不是学习的障碍，它们可以成为数学讨论的好素材，内嵌有模糊性的任务不仅仅可以反映出老师当下的知识水平，还能够为教师提供探索、研究数学的机会。同时，正是因为模糊性的存在，才不断引发数学中探究某个数学概念应该如何被更好定义的活动。

参考文献

- [1] Marmur O, Zazkis R. Productive ambiguity in unconventional representations: “what the fraction is going on?”[J]. *Journal of mathematics teacher education*, 2021.

学术动态

追本溯源，对话古今

——第二期高中 HPM 网络研修班圆锥曲线专题学习总结

刘梦哲¹，雷沛瑶²

(1.华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2.华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

2021 年 10 月 23 日上午 9 点, 第二期数学史与数学教育 (HPM) 高中教师网络研修班开班仪式在线上举行顺利举行。紧随其后, 从 10 月底开始, 各位老师在一个月的时间内对“圆锥曲线”专题展开了如火如荼的学习、研讨、交流, 并在 11 月底完成了学习。期间, 在华东师范大学教授、博士生导师、HPM 工作室创始人汪晓勤老师及其团队的带领下, 来自全国各地的百余名教师研修了相关内容, 并在云端交流、砥砺前行。

在研修班第一次线上研讨活动之前, 博士研究生雷沛瑶在线上陆续发送了椭圆、双曲线和抛物线的相关史料, 供教师学习。老师们以小组为单位, 通过一段时间的自主学习以及线上交流, 进行反思, 完成相关作业。

10 月 30 日晚上 7 点半, 本期研修班的第一次线上集体研讨活动如期举行。首先, 华东师范大学教师教育学院硕士研究生秦语真同学就椭圆的历史素材进行了介绍 (图 1), 硕士研究生孔雯晴同学对椭圆内容的教材和课标进行了分析 (图 2)。随后, 各小组代表汇报了本组关于椭

椭圆的定义与方程 (二)

——椭圆第一定义的诞生

在古希腊人通过圆锥曲线得到椭圆, 并研究出椭圆的焦点准线性质之后, 数学家们对圆锥曲线的研究很长一段时间都停留在古希腊人的原始定义阶段。那么, 椭圆定义是如何从古希腊人的原始定义发展到我们今天熟悉的第一定义的呢? 让我们从历史的长河里寻找答案。

帕普斯之后, 圆锥曲线的研究不像古希腊时期那么辉煌, 主要应用于物理学和天文学中。德国天文学家开普勒于 1609 年发现天体运行轨道是椭圆, 发现了椭圆的焦点和离心率, 随后提出关于行星运动的开普勒三大定律: 椭圆定律、面积定律和调和定律。法国数学家帕斯卡也曾研究过与圆锥曲线相关的线纹共点轨迹问题, 并出版了《二次曲线论》(Essay p our les Coniques)。



图 1 椭圆的历史素材



图 2 椭圆的课标、教材分析

圆的历史与教学思考题的交流与研讨情况。最后, 华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授从追本溯源、想方设法、登高望远、归根结底四个维度阐述了数学史融入圆锥曲线教学的意义, 同

时，在融入数学史的过程中也可以运用技术与教具、进行单元教学设计。老师们纷纷表示受益颇多。

11 月 5 日-6 日，圆锥曲线课例 01-04 小组分别进行了圆锥曲线第一次教学设计研讨。本次研讨为教师内部研讨，由圆锥曲线教学设计小组的老师、博士生雷沛瑶以及部分硕士研究生参与。小组内的老师结合高校研究者提供的相关素材，针对圆锥曲线专题中的某一内容进行 HPM 视角下的教学设计，并在组内进行分享。分享过后，大家相互之间进行了探讨。许多老师表示，这次内部研讨让他们收获许多，为他们改进教学设计带来了启示。

圆锥曲线单元教学设计研讨活动于 11 月 13 日晚上 7 点半在线上举行。此次研讨由雷沛瑶主持。首先，华东师范大学教师教育学院硕士研究生刘梦哲同学（图 3）和钱秦同学（图 4）分别介绍了双曲线和抛物线的历史素材及课标、教材。随后，共有 11 位老师分享自己的教学设计，多位老师在线观摩。分享结束后，研修班的专家、老师们对这 11 份教学设计做了仔细研讨，上海市长宁区教育学院教研员栗小妮老师、华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授作为专家进行点评。

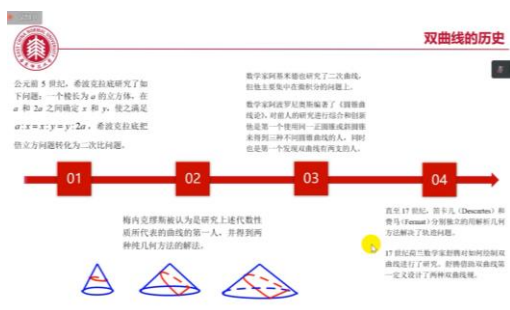


图 3 双曲线的历史素材&课标、教材

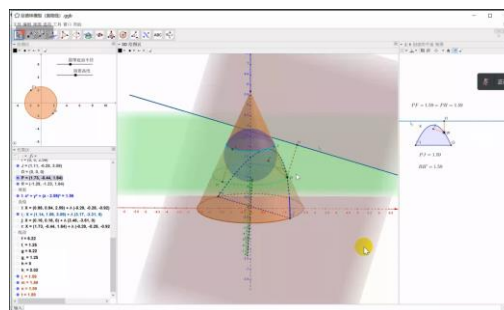


图 4 抛物线的历史素材&课标、教材

11 月 21 日上午 9 点半，教学设计第二次内部研讨活动再次在线上举行，本次活动由部分网络研修班教师、博士生雷沛瑶以及部分硕士研究生参与。9 位教师依次分享了自己的教学设计。在这一过程中，雷沛瑶、秦语真、孔雯晴、钱秦同学和各位老师展开了深入的交流，老师和同学之间各抒己见，对部分内容进行了充分的探讨（图 5）。本次活动持续约两个小时，时间虽短，但各位老师表示收获无穷，同时，老师们也会参考多次研讨的建议继续完善教学设计。



图 5 第二次内部研讨活动部分参与人员

11 月 27 日晚上 7 点半，圆锥曲线单元课例分析与研讨活动举行。此次活动以上海市市北中学舒适老师的教学设计展示为主（图 6）。其中，舒适老师采用沪教版教材，课题为双曲线的复习课。接着，各小组代表就各位开课老师的教学设计提出本小组的改进建议。汇报结束后，上海市长宁区教育学院教研员栗小妮老师从史料选取与教学目标的对应关系、史料的运用方式等方面谈及自己对上述教学设计的感受。



图 6 舒适老师的教学设计展示

圆锥曲线专题的研修活动虽告一段落，但创新教学设计、更新教育理念、提升教学技能永无止境，相信各位老师在这段时间内一定收获颇丰，各位老师也必将在 HPM 融入数学课堂的道路上继续前进。从下一周开始，老师们即将进入古典概型专题的学习与研讨，未来高中 HPM 网络研修班还将会组织更多专题的学习，期待各位老师研修班中能有所收获、有所进步！

周而复始寻教法 历史探源共研学

第二期 HPM 高中教师网络研修活动——函数的周期性顺利举行

王智洋¹, 雷沛瑶²

(1.华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2.华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

第一期 HPM 高中教师网络研修活动的开展为一线教师们打开了数学史与数学教育的大门, 教师们对于 HPM 的价值和应用方法有了更清晰的认识, 学习热情也更为高涨。为帮助全国各地的中学教师进一步了解与学习 HPM, 第二期 HPM 高中教师网络研修班于 2021 年 10 月 11 日正式开班, 研修主题分别为: 圆锥曲线单元教学、函数的周期性和古典概型, 由教师自愿选题分组, 进行教学设计。研修班由华东师范大学教师教育学院数学组主办, 由华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师, 上海市长宁区教育学院教研员栗小妮老师以及上海 HPM 工作室的教师们参与指导。

选择函数周期性主题的教师共 17 名, 分成了 7、8 小组, 研修活动主要有材料阅读与研讨、教学设计研讨两个部分。

(一) 材料阅读与研讨

第一部分是全体学员阅读材料并学习研讨, 主要分为: 独立思考——小组交流——集体研讨共三个阶段。2021 年 12 月 28 日, 华东师范大学教师教育学院 HPM 研究团队撰写的学习材料上传至研修群, 学习材料主要包括: 历史材料、课标与教材解读和思考题。小组的每位学员在两周内认真阅读了材料, 针对每一个思考题展开了激烈的讨论, 并由组长记录下了答案。

第一次集体研讨于 2022 年 1 月 8 日 19:30 在腾讯会议上举行, 会议持续了 2 小时。首先由华东师范大学教师教育学院的研究生韩粟和王智洋分别汇报历史材料(图 1)、解读课标与教材

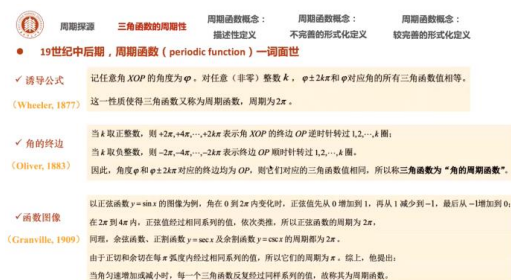


图 1 史料汇报



图 2 课标与教材解读

(图 2), 然后每一位小组长对小组内得到的思考题答案进行交流研讨(图 3), 最后由华东师范大学教师教育学院的邹佳晨老师和汪晓勤教授对史料进行深度分析, 指出了其背后的教育价值, 并对教学设计中如何融入数学史提出了看法与建议。



图 3 思考题交流研讨

(二) 教学设计研讨

教学设计研讨这一部分主要的参与对象是选择函数周期性主题的 7、8 小组的学员, 具体流程是: 在选题时提交一份关于函数周期性的初始教学设计——经过材料学习与交流研讨后提交第一版 HPM 的教学设计——小组内分享各自的教学设计并相互交流讨论——集体汇报研讨。

第二次的集体研讨于 2022 年 1 月 22 日 19:30 在腾讯会议上举行(图 4), 在此之前 7、8 小组所有学员已经在小组内分享了各自的教学设计, 并进行了汇报、研讨和修改。在小组研讨的基础上, 两个小组共推选了六份优秀教学设计在集体研讨中进行汇报。第二次集体研讨首先由开课的六位教师汇报各自的教学设计(图 5), 包括江西科技学院附属中学的黄越老师、南昌市第十中学的龙泽南老师、四川省宣汉中学的孙佳老师、上海市北虹高级中学的丁倩文老师、新疆生产建设兵团第二中学的洪春梅老师以及新疆库车二中的杨育池老师, 接着所有学员对六位教师的教学设计分享感受并提出建议, 而后上海市长宁区教育学院教研员栗小妮老师与华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授对教学设计进行了点评。最后, 汪老师表示, 老师们在研修班中的进步卓著, 肯定了老师们分享的教学设计中运用的重构式教学, 指出了课堂教学中还应当重视学生的表现和课堂评价, HPM 教学应当给予学生更多参与课堂的机会, 强调了 HPM 的德育价值。

数学史与数学教育 (HPM) 工作室 HPM 网络研修班-“函数的周期性”教学设计研讨 1月22日 晚上 19:30-20:50 腾讯会议号: 225-751-550	
19:30-20:00	“函数的周期性”教学设计汇报 江西科技学院附属中学 黄越 南昌市第十中学 龙泽南 四川省宣汉中学 孙佳 上海市北虹高级中学 丁倩文 新疆生产建设兵团第二中学 洪春梅 新疆库车二中 杨育池
20:00-20:40	“函数的周期性”教学设计研讨 01-08 小组 每组 5 分钟
20:40-20:50	研讨交流

图 4 第二次集体研讨安排

物理量 (经过一个周期后)	数学量 (经过一个周期后)	历史相似性
点A旋转到原来的位置	角 α 的终边不发生变化	终边定义
点A的位移不发生变化	点A的坐标不发生变化	诱导公式定义

6. 介绍周期函数的起源以及数学家基于诱导公式和角的终边说明三角函数的周期

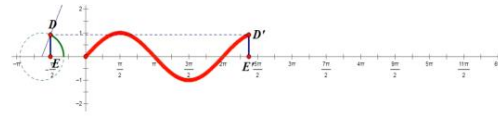


图 5 教师分享教学设计

研讨过后，7、8 两组的学员提交最终版本的教学设计，六位开课教师还提交了开课视频，并分享至研讨群供所有学员观摩学习。至此，关于函数周期性主题为期一个月的研讨活动圆满结束，学员们在研修期间涌现了许许多多的奇思妙想，展示了精彩纷呈的教学设计，常常围绕一个问题在研修群与小组群中研讨至深夜。春光不负赶路人，教育共富正当时。经过一个月的研修，学员们对于函数的周期性内容本身与课堂教学都有了更深刻的理解，彼此也成为了朋友，希望他们在后续的研修学习中继续努力、共同进步。