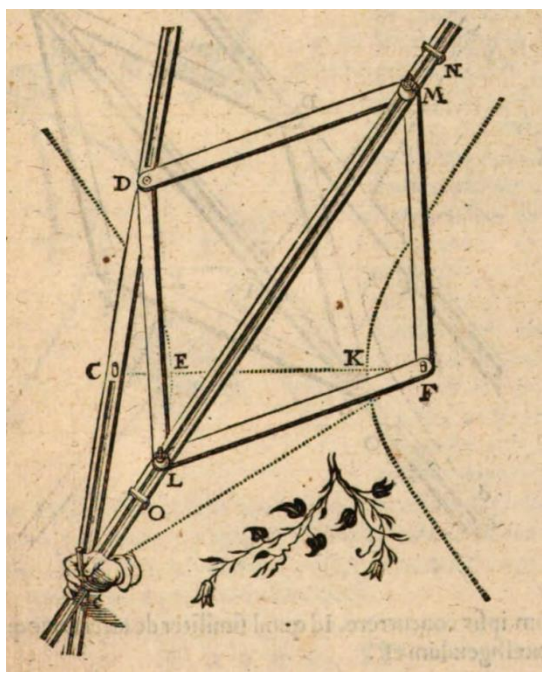
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2021 年第 10 卷第 2 期



舒腾（F. van Schooten, 1615-1660）的双曲线规（1657 年）

《上海 HPM 通讯》编委会

刊首新语

HPM 教学观摩札记

虽然随着研究的深入，HPM 与 PME 之间的联系日益密切，但两者之间也有着巨大的差异，其中之一便是“自下而上”的研究路径。笔者常常说，HPM 领域的知识，一半来自书本，一半来自课堂，指的就是 HPM 实践研究的重要性。

近年来，随着 HPM 专业学习共同体的建立，HPM 课例研究活动日益频繁，HPM 研究者、共同体的成员以及其他在职和职前教师走进课堂的机会也日益增加。刚刚接触 HPM 领域的教师需要通过教学观摩，了解教学设计中的“why”，“what”和“how”，这也是 HPM 教学评议的三个视角。

1 Why：数学史的价值

关于“why”，数学史的六类价值是常用的评议框架。2020 年 12 月 9 日，笔者在上海市某中学观摩“一元二次方程根与系数的关系”一课，课后从六类价值出发作了点评。

- 知识之谐：搭建脚手架（根据方程的根，构造出方程），引出根与系数关系，但由于历史研究的局限性，没有解决根与系数关系的必要性问题；
- 方法之美：再现韦达的代入相减法、欧拉的因式分解法和拉克洛瓦的“设一求一”法，渗透“设而不求”的思想；
- 探究之乐：让学生对定理的证明进行探究，积累了数学活动经验；
- 能力之助：落实了数学抽象、数学运算和逻辑推理素养；
- 文化之魅：再现了知识源流（韦达定理的历史）和多元文化（借助地图，展示不同时空数学家的贡献）；
- 德育之效：培养理性思维，让学生穿越时空与数学家对话，树立学生的自信心（像古代数学家一样“做数学”），但课堂上执教者未涉及数学家的故事。

2021 年 12 月 11 日，笔者在上海市某中学观摩“圆的周长”一课，课后作了如下点评：

- 借鉴历史构建知识之谐：教学过程按照“无意识几何-实验几何-演绎几何”的主线展开；
- 通过折纸彰显方法之美：通过不断折纸，得到边数越来越大的正多边形，其边长逐渐逼

近圆周长；

• 利用视频展示文化之魅：HPM 微视频追溯东西方数学家在圆周率的探求上所作的贡献；

• 借助探究达成德育之效：培养理性思维和科学精神，感悟数学家的优秀品质。

2020 年 12 月 24 日，笔者在海南省乐东黎族自治县某中学观摩了“平方差公式”一课，课后从六类价值出发作了点评。

• 知识之谐：从数学外部（佃户租地问题）和数学内部（简化计算）来揭示学习平方差公式的必要性，自然而然地引入主题；

• 方法之美：从几何和代数两个方向推导平方差公式，而几何推导方法，学生至少找到了六种拼图方案，可谓精彩纷呈；

• 探究之乐：学生通过拼图，经历了平方差公式的产生过程，积累了数学活动经验；

• 能力之助：落实了数学运算、逻辑推理和直观想象素养；

• 文化之魅：再现了知识源流（赵爽与平方差公式）和社会角色（数学在现实生活中的应用）；

• 德育之效：点明了数学家勤奋、执着的优秀品质（赵爽“负薪余日，聊观周髀”）以及树立学生的自信心（可以不仅可以像古代数学家一样“做数学”，而且可以超越他们）。

但很多情况下，由于多种原因，在短短一节课上观察不到数学史的多元教育价值，此时我们可以从课堂教学所解决的特定问题切入。2020 年 12 月 4 日，笔者在上海市某中学观摩了“可化为一元一次方程的分式方程”一课，课后从“数学教学中的为什么”的角度作了点评。

• 为什么要学习分式方程：从数学外部（动车问题）和内部（从整式和整式方程，类比到分式和分式方程；

• 为什么使用 HPM 微视频：通过追溯历史，实现古今对照，并让学生体会数学的动态发展过程，形成动态数学观；

• 为什么会产生增根：引导学生剖析增根产生的原因；

• 为什么不用完美解法：用历史上的完美解法不会产生增根，可今人大多采用会产生增根的去分母法，原因在于解方程过程中涉及的计算量。

2 How：数学史的运用

关于“how”，数学史的四种运用方式是常用的评价框架。

2020 年 12 月 21 日，笔者在上海市某中学观摩了“函数的周期性”一课，课后从重构式的角度作了点评。本节课让学生经历了周期函数概念的发生和发展过程——

- 生活中的周期现象：民族服饰、月相变化、摩天轮、24 节气；
- 周期函数的描述性定义：从民族服饰中的图案抽象出数学上的函数图像，再利用文字语言对函数的周期性加以描述；
- 不完善的形式化定义：用符号语言刻画周期函数，但未关注函数的定义域以及作为周期的常数的非零性；
- 完善的形式化定义：关注定义域、周期的非零性、最小正周期的存在性问题。

如今，很多教师对 HPM 视角下的数学教学很感兴趣，但由于未加入 HPM 专业学习共同体，他们手头可用的素材很少，对于数学史的运用方式也不甚了了，此时我们也可以跳出 HPM 的范围，去捕捉课堂上的亮点。2020 年 11 月 10 日，笔者在上海市某中学观摩了“幂函数的概念”一课，课后作了点评，总结了本节课的一些亮点：

- 从生活到数学：二次幂和三次幂都有现实情境，但四次及以上次幂，在现实世界找不到模型，从而需要进一步抽象；
- 从对象到过程：根据数学概念的两重性，一个数学概念往往兼具“过程”和“对象”两重属性，执教者将分数指数幂（对象）与根式（过程）进行互化，有利于学生的理解；
- 从历史到课堂：执教者利用函数概念的早期历史（莱布尼茨将与曲线相关的几何量定义为函数）引出幂函数的图像，并从图像出发研究函数的性质，最后用符号语言进行刻画。

3 What：数学史的素材

关于“what”，历史素材所满足的基本原则是常用的评议框架，但该框架却难以成为不熟悉数学史的教师的选择。历史材料是 HPM 视角下的数学教学的基础，我们经常听到教师所发出的“巧妇难为无米之炊”的感叹，笔者也在很多场合强调 HPM 专业学习共同体的重要性，因为在这个共同体中，历史素材是可以共享的。

在笔者所观摩的许多数学课（比赛课、公开课或研讨课）中，或多或少都有一些数学史的影子，但所涉及的素材往往不能满足一些基本的原则，如：

- 科学性：常见的科学性错误有名人名言、人物画像或数学贡献张冠李戴，数学主题的逻辑顺序和历史顺序混为一谈，等等；
- 有效性：数学史与教学目标并不匹配，为历史而历史；
- 可学性：数学史材料不符合学生的认知基础，等等。

HPM 教学观摩之后的教学评议，虽然并无定法，但 why，what 和 how 却是三个核心视角，也可以说，它们是初入 HPM 领域之三条门径。但研究、实践 HPM 的专家教师还需要探寻更具学术性的教学评价框架。

窥一个领域，采三个视角，会八方良师，观千节好课，留百世佳作，惠无数学子，不亦乐乎？

目 录

CONTENT

理论探讨

关于 HPM 课堂教学评价的案例分析

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

近年来，随着数学史与数学教育（HPM）专业学习共同体的不断扩大和 HPM 教学案例的不断增加，数学史的多元教育价值以及 HPM 教学理念受到越来越多一线教师的关注。HPM 课例开发遵循“选题与准备-研讨与设计-实施与评价-整理与写作”的流程，其中课例的评价采用了四维度评价框架[1][2]，这四个维度分别是“史料的适切性”、“方法的多元性”、“融入的自然性”和“价值的深刻性”。其中，“史料的适切性”是指教学中所使用的历史素材是否满足科学性、可学性、有效性、人文性和趣味性，“方法的多元性”是指运用或融入数学史的具体方式是否为附加式、复制式、顺应式和重构式；“融入的自然性”是指数学史的运用是否做到了逻辑序、历史序和心理序的有机统一：“价值的深刻性”是指课堂上数学史是否有助于构建知识之谐、彰显方法之美、营造探究之乐、实现能力之助、展示文化之魅和达成德育之效。上述框架完全是“自下而上”得出的，还缺乏扎实的理论基础，且与数学教育领域已有的课堂评价方式之间缺乏密切的联系，因而还有很大的完善空间。

美国学者熊菲尔德（A. Schoenfeld）和他的研究团队提出“为强有力的理解而教”（Teaching for Robust Understanding，简称 TRU）的课堂评价框架，该框架包含数学内容、认知需求、学习机会、学生表现和评价运用五个维度[3][4][5]。本文融合原有的四维度评价框架和 TRU 评价框架，建立更为合理的 HPM 教学评价框架，并将其应用于 HPM 课例——“三角形的中位线”，以期为未来的 HPM 课例研究提供指导。

2 从 TRU 框架到 HPM 教学评价框架

表 1 给出了熊菲尔德用和他的团队建立的 TRU 课堂教学评价表[3][4][5]。其中，“内容呈现”对应于“教什么”，“认知需求”、“学习机会”和“评价运用”对应于“怎么教”，“学生表

现”对应于“怎么学”。整个框架具有鲜明的“以学生为中心”的特点。

表 1 “为强有力的理解而教”的课堂评价框架

	内容呈现	认知需求	学习机会	学生表现	评价运用
内涵	数学内容的准确、连贯与合理性程度	对学生理解和掌握数学概念的支持程度	对全体学生获得学习机会的支持程度	学生在想法及其讨论上的贡献程度	揭示学生思维、利用学生想法或处理学生错误的程度
水平 1	课堂活动不聚焦或仅仅以技能为导向，缺乏参与推理或问题解决等数学活动的机会	课堂活动结构化，学生大多运用所记住的方法去做常规练习	学生参与数学活动的程度各异，教师对此视若无睹。	学生表达的机会很少，且受教师或课本的约束	学生的推理未能得到积极的评价，教师的回应仅仅局限于鼓励或正误反馈
水平 2	课堂活动以技能导向为主，鲜有机会在方法、概念和背景之间建立联系或参与数学活动	课堂活动为丰富概念理解和挑战问题解决提供了机会，但师生互动偏离主题，失去探索的机会	学生参与数学活动不均衡，但教师作过努力，试图让大多数学生能够参与其中。	学生有机会表达自己的数学思维，但仅靠教师或课本作判断；学生的想法并未得到进一步利用	教师提及学生的思维甚至错误，但特定的学生的想法并未得到进一步的利用
水平 3	课堂活动支持方法、概念和背景之间的联系，提供参与数学活动的机会	教师的引导或脚手架支持学生有效地构建理解、参与数学活动	教师积极支持并有效促进了全体学生参与数学活动	学生有机会解释自己的独立想法或推理；学生彼此回应、利用彼此的想法	教师引导学生思维，后续教学充分回应了学生的想法或解决了学生的错误

为了将 TRU 框架用于 HPM 课例的评价，需要将数学内容替换为与数学史相关的教学内容。

与“数学内容的准确、连贯与合理性程度”相对应的，就是“数学史料的准确、连贯和合理性程度”，即四维度评价框架中的“史料的适切性”；教师如何利用数学史料设计和组织课堂活动以为学生理解和掌握数学概念提供支持，与四维度框架中“方式的多元性”和“融入的自然性”相对应。

四维度框架并没有专门关注“学习机会”，而“方式的多元性”只是与“评价运用”部分相关；从学生表现可以看到数学史在课堂上实际体现的价值，因而“价值的深刻性”与“学生表现”之间则是“应然”和“实然”的关系。根据 TRU 评价框架，我们建立 HPM 课例评价的新框架，见表 2。

表 2　HPM 课堂教学评价新框架

	内容呈现	认知需求	学习机会	学生表现	评价运用
内涵	数学史料的准确、连贯与合理性程度	数学史的应用对学生理解和掌握数学概念的支持程度	基于数学史的数学活动对全体学生获得学习机会的支持程度	基于数学史的数学活动中，学生在任务完成、想法及其讨论上的贡献程度	基于数学史的数学活动中，教师揭示学生思维、利用学生想法或处理学生错误的程度
水平 1	数学史料不符合科学性	只采用了附加式和复制式，未采用顺应式和重构式	少数学生参与数学活动	学生表达机会或探究成果很少	未能对学生回答、论证、推理给予回应和评价
水平 2	数学史料符合科学性和可学性，但与教学目标的关联不大	采用了顺应式，但未采用重构式	多数学生参与数学活动	学生表达机会或探究成果较多，但缺乏创造性	对学生回答、论证、推理给予简单的回应和评价
水平 3	数学史料满足科学性、可学性、有效性和人文性	采用了重构式	全体学生参与数学活动	学生表达机会或探究成果很多，且有一定的创造性	对学生回答、论证、推理给予充分的回应和评价，且对后续教学产生积极影响

3 案例分析

我们以 “三角形中位线”一课为例，来说明 HPM 课例评价框架的应用。

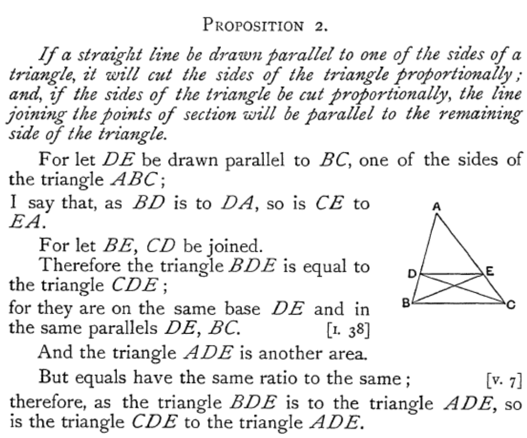
本节课的实施是 HPM 工作室所开展的课例研究活动的一部分，整节课由“情境引入”、“新知探究”、“定理应用”和“课堂小结”四个环节组成。在情境引入环节，教师首先展示中国古代数学典籍《九章算术》中的三角形面积问题及其解法（圭田术），让学生思考：三角形面积公式是如何推导的？在新知探究环节，教师为学生准备了三角形纸片，让学生分组通过剪纸和拼图来推导公式。学生给出的两种方案都利用了三角形两腰中点的连线，教师由此引出中位线的概念，并让学生猜想三角形中位线与底边的位置和大小关系。在学生猜想出结论之后，教师让学生对结论加以证明，经过小组合作探究，学生给出多种不同的证明。接着，教师播放一段 HPM 微视频，追溯三角形中位线定理的历史，并让学生说一说观感。在定理应用环节，在关于“距离测量”的例 1 之后，给出关于中点四边形的例 2，引导学生探讨中点四边形的面积。在课堂小结环节，教师让学生总结收获，最后教师以“一个定理、两种思想、三类方法、四点启示”对本节课加以总结。

3.1 内容呈现

我们从科学性、可学性、有效性和人文性四个子维度来看本节课搜用的数学史料。

其一，本节课所涉及的数学史料有数学问题（三角形面积问题）、数学定理（三角形中位线定理的历史、瓦里尼翁与中点四边形）、数学方法（出入相补法、面积法）。数学问题出自

今有圭田廣十二步正從二十一步問爲田幾何答曰
九章算術 卷一 土
一百二十六步
又有圭田廣五步二分步之一從八步三分步之二問
爲田幾何答曰二十三步六分步之五
術曰半廣以乘正從
半廣知以盈補虛爲直田也亦可半正從以乘廣按
半廣乘從以取中平之數故廣從相乘爲積步畝法
除之即得也
今有斜田一頭廣三十步一頭廣四十二步正從六十
四步問爲田幾何答曰九畝一百四十四步



PROPOSITION 2.

If a straight line be drawn parallel to one of the sides of a triangle, it will cut the sides of the triangle proportionally; and, if the sides of the triangle be cut proportionally, the line joining the points of section will be parallel to the remaining side of the triangle.

For let DE be drawn parallel to BC, one of the sides of the triangle ABC;

I say that, as BD is to DA, so is CE to EA.

For let BE, CD be joined.

Therefore the triangle BDE is equal to the triangle CDE;

for they are on the same base DE and in the same parallels DE, BC. [I. 38]

And the triangle ADE is another area.

But equals have the same ratio to the same; [V. 7]

therefore, as the triangle BDE is to the triangle ADE, so is the triangle CDE to the triangle ADE.

图 1 《九章算术》书影（影印四库全书版） 图 2 《几何原本》书影（希思注释版）

《九章算术》方田章；数学定理的历史根据古巴比伦、古希腊、中国古代、17-18 世纪欧洲的数学文献、早期美英几何教科书中的有关内容整理、归纳而成；数学方法中，出入相补法出自刘徽《九章算术》方田章“圭田术”注（图 1），面积法出自欧几里得《几何原本》卷六命题 2（图 2）；中点四边形定理出自 18 世纪法国数学家瓦里尼翁（P. Varigonon, 1654-1722）的《数学基础》（1734，图 3）。因此，本节课涉及的数学史料都具备科学性。

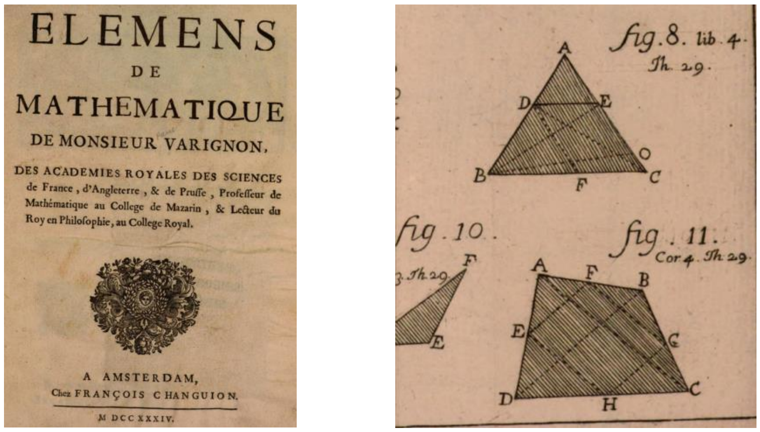


图 3 瓦里尼翁《数学基础》以及书中的插图

其二，由于三角形面积公式是学生十分熟悉的内容，尽管教师呈现了《九章算术》原文，但经过解释，学生在理解上毫无困难；历史上数学家所给出的各种方法都是通过学生自主探究再现于课堂的，而非教师的灌输；三角形中位线定理的历史通过 HPM 微视频呈现，为学生所喜闻乐见，其中所介绍的定理证明方法，与学生所采用的方法相对应；瓦里尼翁四边形则是三角形中位线定理的直接应用。可见，本节课所涉及的数学史料符合学生的认知基础，具备可学性。

其三，教师采用《九章算术》中的三角形面积问题三角形面积公式，对应于“经历三角形中位线概念的形成过程”这一教学目标，并为“经历三角形中位线定理的探索过程”这一教学目标埋下伏笔；刘徽的出入相补法和欧几里得的面积法，对应于“经历三角形中位线定理的探索过程”、“培养学生的逻辑推理素养”以及“理解从特殊到一般和转化的数学思想”的目标；瓦里尼翁中点四边形对应于“应用三角形中位线定理解决问题”的目标；中位线定理的历史发展概貌，则对应于“感受数学文化的多元性、体会数学背后所蕴含的理性精神”的目标。因此，本节课所运用的数学史料完全服务于教学目标，具备有效性。

其四，本节课所涉及的历史素材，都与数学家相对应，凸显三角形中位线定理发展过程中数学家的作用，并揭示定理所蕴含的理性精神，具备一定的人文性。倘若教师在教学中进一步

引发学生思考“为什么不同时空的数学家会不断地去探究新方法”这一问题，对于人物的生平事迹也有涉及，则数学史料的人文性将得到加强。

总的说来，本节课在“内容呈现”维度上，基本达到了水平 3。

3.2 认知需求

在数学史素材的运用方式上，本节课主要采用重构式来促进学生对概念、定理的理解与运用，并在重构的过程中，兼用了附加式、复制式和顺应式。

从历史上看，几何概念往往经历从“无意识几何”到“实验几何”、再到“演绎几何”的过程。古巴比伦泥版书记录了许多三角形土地分割问题，人们在分割土地的实践中，已经不自觉地应用了三角形中位线，但并未正式提出过“三角形中位线”的概念和性质，故属于“无意识几何”阶段。

虽然在古巴比伦泥版书和欧几里得《几何原本》之间相关史料是缺失的，但正如三角形内角和定理源于现实生活中的铺地砖（图 4）一样，三角形中位线定理也可能有同样的起源。如图 5 所示，将四个同样的三角形拼成一个三角形，易于从中发现三角形中位线与底边之间的大小关系。显然，这样的发现过程属于“实验几何”阶段。中国古代数学家刘徽在推导三角形面积公式时也应用了中位线，但他所实施的“以盈补虚”操作，就三角形中位线定理而言，亦属于“实验几何”阶段。

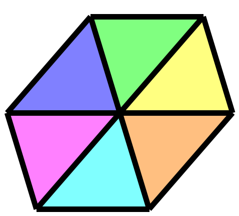


图 4 六个同样的三角形拼成一个六边形

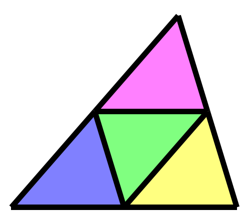


图 5 四个同样的三角形拼成一个三角形

欧几里得在《几何原本》卷六中严格证明了命题 2：“将三角形两腰分割成成比例的线段，则分点连线段平行于三角形的底边。”显然，三角形中位线定理是该定理的特殊情形，欧几里得的面积证明同样适用，这标志着中位线定理进入“演绎几何”阶段。

本节课对三角形中位线定理的历史发展过程进行了重构，如图 6 所示。教学中，这个重构的过程是通过“三角形面积的推导”“中位线定理的证明”和“中点四边形面积的探究”三个

探究活动来实现的。

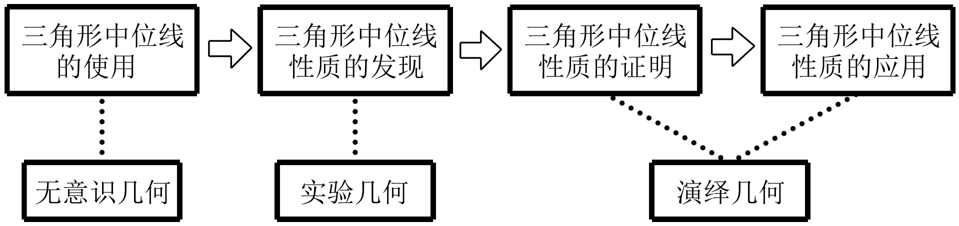


图 6 三角形中位线定理产生与发展过程的重构

在第一个探究活动中，教师采用了《九章算术》中的原始问题，属于复制式，证明“圭田术”的问题，属于顺应式，对于学生推导三角形面积公式所采用的方法，教师通过“古今联系”的策略加以评价，属于顺应式。在第二个探究活动中，对于学生证明中位线定理的不同方法，教师也采用了“古今联系”的策略加以评价，故属于顺应式。在第三个探究活动中，教师根据瓦里尼翁中点四边形，提出新的面积问题，属于顺应式。HPM 微视频的运用则属于附加式。

要满足学生的认知需求，教师需要为学生提供足够的思维空间，即充分“留白”。本节课中，教师通过数学史的四种运用方式，为学生留出“发现之白”、“论证之白”和“方法之白”，有效地促进了学生的学习。

总的说来，本节课在“认知需求”维度上达到了水平 3。

3.3 学习机会

一枝独秀不是春，百花齐放春满园。将数学史融入数学教学，不是让少数学生受益，而是为全体学生创造学习机会。本节课中，探究活动分组开展，组内研讨、全班交流、个体展示、生生交流，绝大多数学生都有机会表达自己的想法，所有的学生都积极参与到活动之中。通过在线研讨、课堂观察以及课后与执教者的交流发现，有四个因素导致本节课在“学习机会”维度上取得了成功。

一是教师的 HPM 教学理念。比利时-美国著名科学史家萨顿（G. Sarton, 1884-1956）曾经指出，数学史研究的主要目的是揭示数学的人性（humanity）。数学史告诉我们，数学研究乃是人类的一种文化活动，是人在做数学，是人在创造历史。HPM 以沟通历史与现实、融合数学与人文、创建人性化课堂为目标，其基本教学理念是教学的实施即为文化活动的实施，以学生为中心，给予他们探究机会，让他们经历新知的发生和发展过程，从而将历史再现于课堂。本节课

充分体现了这一理念。

二是基于数学史的探究任务的设计。本节课采用“温故知新”策略来设计探究任务：三角形面积公式的推导为“温故”，推导过程中使用了中位线并导致中位线性质的发现，为“知新”（图 7）。“温故”需要关注学生的认知基础，“知新”需要激发学生的学习动机，“温故知新”为全体学生的参与提供了保障。

图 7 温故知新

三是 “同侪学习”的组织形式。本节课上，探究活动是按照小组合作（四人一组）的形式开展的，每一小组都需要汇报本组的探究成果，每一小组都需要倾听其他小组的汇报，当一个小组在某个地方被“卡住”时，别的小组需要予以解决。例如，当一个小组展示面积证法（下一节方法 6）时，只证明了中位线与底边的位置关系而未能解决大小关系，另一小组给予了补充，从而完善了证明。为了小组的荣誉，每一位学生都需要贡献自己的智慧。

四是学生本身的知识基础。同样一份 HPM 视角下的教学设计，在不同层次的学校实施的效果互不相同，很多时候，当学生的基础较弱或数学情感比较消极时，学生参与度会较低，这种情况下，为了增加全体学生的学习机会，教师需要对教学设计加以改进。本节课的成功，部分得益于学生良好的基础。

总的说来，本节课在“学习机会”维度上达到了水平 3。

3.4 学生表现

本节课中，学生的表现主要体现在探究过程和结果上。探究活动 1 中，学生通过拼图得到三角形面积公式的两种推导方法：一是将三角形转化为平行四边形，一是将三角形转化为矩形（图 8），无意中都为三角形中位线性质的发现和证明埋下了伏笔。基于探究活动 1 中的方案，

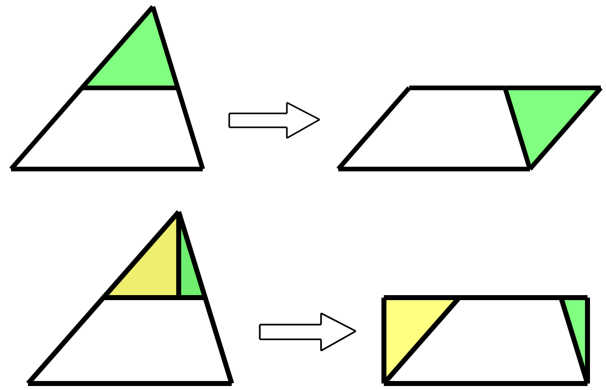


图 8 三角形面积公式的推导方案

学生很快猜想出中位线的性质。在探究活动 2 中，学生相继给出六种方法证明中位线性质（图 9）：方法 1 是课本上呈现的方法，是人们最常见的方法；方法 2 和 3 分别通过作中位线上的高线和中线，将以中位线为底边的小三角形进行分割，从而将原三角形转化为矩形和平行四边形；方法 4 则是通过中位线上的任意一点与顶点的连线对小三角形进行分割，是对方法 1-3 的一般化、动态化。对于各种方法，学生都能够完整地表达证明的过程（图 10），气氛活跃，精彩纷呈。

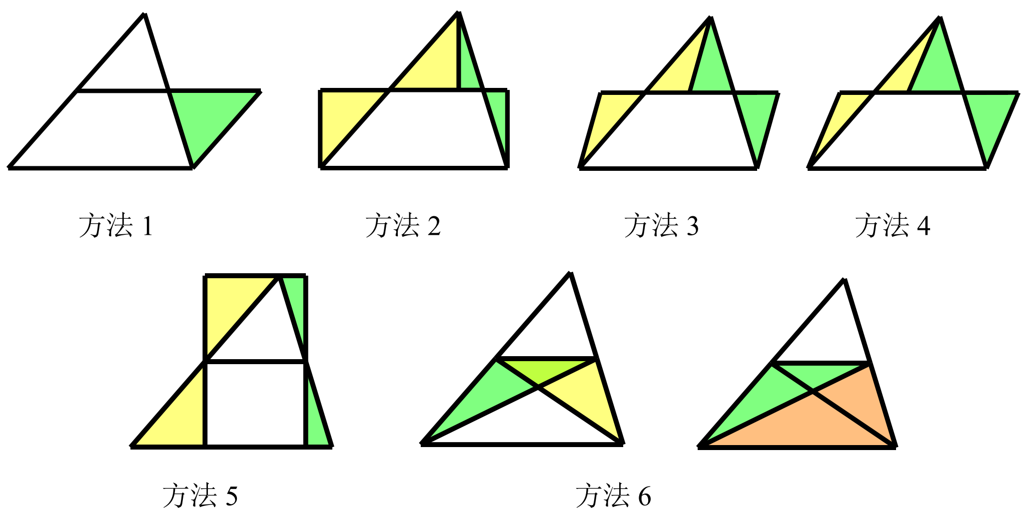


图 9 学生关于三角形中位线定理的不同证明

方法 5 分别过两腰中点作底边的垂线，从而将原三角形转化为矩形，但学生未能像方法 4 那样将该方法进行一般化、动态化。事实上，如图 11 所示，过两腰中点任作两条平行线，都可以证明中位线定理。

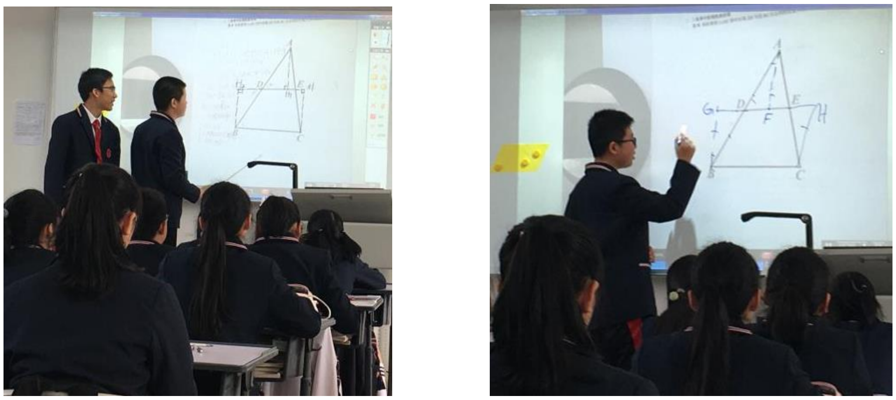


图 10 学生展示三角形中位线定理的不同证明

在探究活动 3 中，学生证明了中点四边形的形状，但由于没有足够的时间，他们未能用等积变形得出中点四边形的面积。

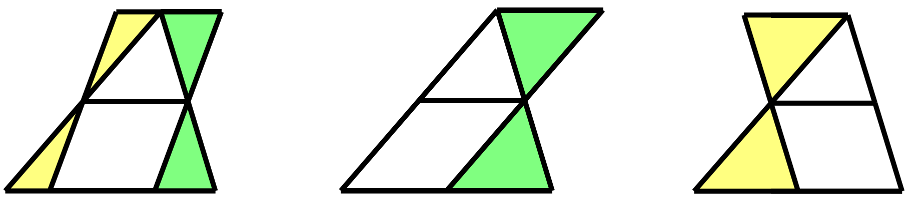


图 11 方法 5 的一般化（课堂上没有出现）

总的说来，本节课在“学生表现”维度上达到了水平 3。

3.5 评价运用

本节课中，教师采用“古今联系”的策略来评价学生的探究成果。学生的方法 2 和方法 5 与刘徽的两种出入相补法完全一致（图 12），方法 6 的第一部分再现了欧几里得的方法。

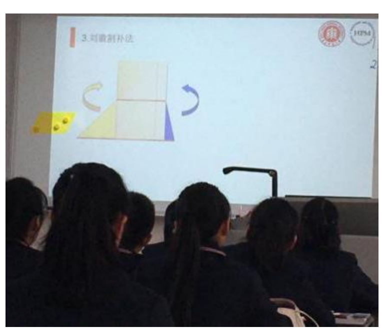


图 12 古今联系

方法 4 将方法 1-3 囊括其中，是对历史的完美超越。方法 6 的第二部分解决了《几何原本》

未涉及的中位线与底边的大小关系，是对欧几里得方法的精彩补充。“古今联系”策略让学生仿佛穿越时空与数学家对话，既再现历史，又超越古人，有效地激发了学生的兴趣，增强了学生的自信心。此外，本节课中，“同侪互评”往往代替教师的评价，成了本节课的亮点之一。

但本节课中，尽管“古今联系”和“同侪评价”对学生产生了积极的影响，但对于后续教学，特别是中点四边形的探究，并未产生显著的影响。因此，本节课在“评价运用”上与水平 3 略有差距。

4 结语

以上我们看到，融合 TRU 框架和 HPM 四维度评价框架后所形成的新框架，涉及“教师教什么”、“教师怎么教”以及“学生如何学”，可用于 HPM 课例的评价；与旧的四维度评价框架相比，新框架更加关注学生的学习过程，并且避免了旧框架中“融入的自然性”和“价值的深刻性”两个维度的主观性，可操作性更强，因而更适用于教研活动。当然，该框架还需在未来的 HPM 教研实践中进一步加以完善。

对 HPM 课例的评价，主要关注与数学史相关的教学内容、教学方式、学习过程与教学成效。但从 HPM 视角设计和实施的一节课毕竟是数学课，而不是数学史课，不可能从头到尾都与数学史相关。因此，评价过程中需要注意与数学史相关的教学内容和无关数学史的教学内容的区别，客观地呈现数学史在教学中所扮演的角色。

参考文献

[1] 汪晓勤, 栗小妮. 数学史与初中数学教学: 理论、实践与案例. 上海: 华东师范大学出版社, 2019

[2] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与高中数学教学: 理论、实践与案例. 上海: 华东师范大学出版社, 2020

[3] Schoenfeld, A. H. What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined[J]. *Educational Researcher*, 2014, 43(8): 404-412

[4] Schoenfeld, A. H. Video analyses for research and professional development: the teaching for robust understanding (TRU) framework[J]. *ZDM*, 2018, 50: 491-506

[5] Schoenfeld, A. H. Uses of video in understanding and improving mathematical thinking and teaching [J]. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2017, 20: 415-432

历史研究

美英早期代数教科书中的复数概念

狄迈

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

众所周知，虚数概念从滥觞到被人们普遍接受，经历了漫长的过程。17 世纪，笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）将“负数平方根”命名为“虚数”，意指“想象中的数”；18 世纪，欧拉（L. Euler, 1707-1783）将其称为“不可能的数”，认为这种数“只存在于想象之中”；19 世纪，德摩根（A. de Morgan, 1806-1871）仍以“荒谬”来形容它。[1]历史告诉我们，早期数学家对于虚数的认识存在很大的障碍。

美国数学史家史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）认为：“困扰世界的东西也会困扰儿童，世界克服其困难的方式提示我们，儿童在其发展过程中会以类似的方式来克服类似的困难。”[2]研究表明，学生在初学虚数时，也像数学家一样对其充满疑惑；学生在复数的定义与分类上存在一定的误解。如，学生会根据 $a+b\mathrm{i}$，误认为复数=实数+虚数、复数是实数与虚数的代数和；将虚数单位 i 看作判断复数的依据；将实数排除在复数之外等[3]。研究发现，这些错误观点与历史上人们对复数的认识是相似的，因此，通过复数概念的历史，可以预测学生的认知困难。另一方面，尽管数学教师对复数的一般历史已经有所了解，但他们对于西方早期教科书中复数概念的呈现方式却知之甚少。开展早期教科书的研究，乃是 HPM 视角下复数概念教学的需要。

鉴于此，本文聚焦复数概念的定义，对 1800-1959 年间出版的 201 种美、英代数教科书进行考察，归纳定义类别，搜集教学素材，探寻错误之源，为今日教学提供参考。

2 早期教科书的选取

本文从有关数据库中选取 201 种美英早期代数教科书为研究对象。若以 20 年为一个时间段，则这些教科书的时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

201 种代数教科书中，复数的定义所在章节大致可以分为“方程的解”、“幂与方程根”、

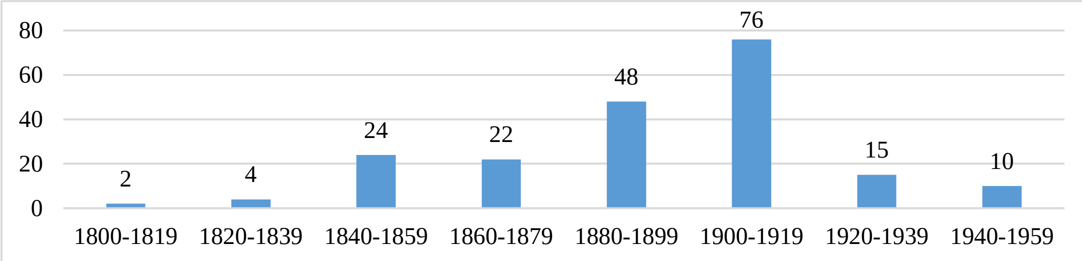


图 1　201 种代数教科书的时间分布

“无理数”、“无理数与复数”、“数”、“虚数与复数”6 类，如图 2 所示。其中复数定义最多出现在“虚数与复数"章节，占 45%；其次是“幂与方根”，占 30%；再次为“方程的解”，占 13%。

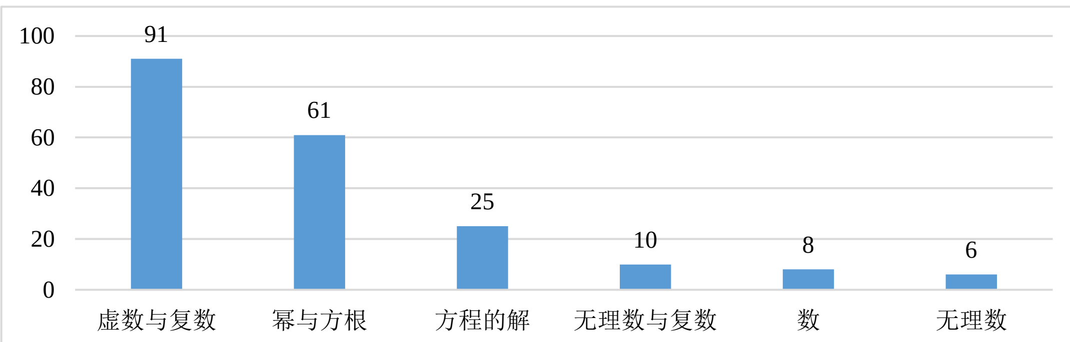


图 2 复数概念在 201 种代数教科书中的章节分布

我们对复数的定义进行归类，并对其在 160 年间的演变规律作一讨论。

3 复数定义的分类

3.1 未涉及复数概念的虚数定义

201 种教科书中，有 98 种教科书（占 48%）仅仅给出了虚数概念，而未涉及复数概念。进一步分析发现，虚数的定义又可以分为根式定义、符号定义与运算定义 3 类。

3.1.1 根式定义

根式定义可分为“负数平方（偶次方）根”与“含有负数平方（偶次方）根的式子”两类。

81 种教科书采用了“负数平方（偶次方）根”定义。如 Taylor（1893）提出：“虚数是负

数的偶次方根。”[4] Wells & Hart（1913）给出定义：“虚数是负数的平方根，所有虚数都可表示成虚数单位 i 与一个实数的乘积。”[5]Perkins（1942）给出定义：“虚数是负数的偶次方根，它们可以化为$b\sqrt{-1}$的形式。”[6]这里，Wells & Hart（1913）与 Perkins（1942）对虚数与纯虚数不加区分；负数的高于 2 次的偶次方根也不能表示为纯虚数的形式。

5 种教科书采用了“含有负数平方（偶次方）根的式子”定义。如 Robinson（1850）将虚数定义为“包含符号$\sqrt{-b}$的数”[7]，van Velzer & Slichter（1890）将虚数定义为“包含负数偶次方根的式子”[8]，这类定义在一定程度上对虚数有了更好的认识，但在之后出版的教科书中，错误定义依然会反复出现。

3.1.2 符号定义

1920 年之前，有 7 种教科书用符号来定义虚数。如 Lacroix（1818）给出的定义是“形如$a+\sqrt{-b}$与$\sqrt{-b}$的式子称为虚数”[9]；Hall（1840）的定义是“形如$a\pm\sqrt{-b}$的式子称为虚数”[10]；Ford & Ammerman（1919）的定义是“形如$\sqrt{-b}$的式子称为虚数”[11]。在默认$b\neq 0$的情况下，上述第一个定义并未区分虚数与纯虚数，第三个定义则局限于纯虚数。复数的概念似乎并未进入作者的视野。

3.1.3 运算定义

5 种教科书从“能否实施计算”或“能否取得准确值或近似值”的角度来定义实数与虚数。Davies（1859）指出：“虚数是负数平方根这样无法进行运算的数。”[12]Robinson（1862）指出：“能进行逼近或准确表达的都是实数，虚数是无法算出的数，是不可能的数，它们与实数相对。”[13]

可见，在 19 世纪中叶，人们对于虚数的普遍理解依然停留在运算层面，对于虚数的引入与表达，也只为了满足运算与方程求解的需要，并未真正探索虚数的实际意义与价值。

3.2 复数的定义

103 种教科书（占 52%）给出了复数的定义。根据分析，这些定义又可以分为根式定义、符号定义、形式定义、数对定义和组合定义共 5 类，其分布情况见图 4。其中，形式定义与符号定

义占比最高。

3.2.1 根式定义

涉及复数概念的 103 种教科书中，仅有 5 种使用根式来定义复数。Evans（1899）将复数定义为“负数的平方根”[14]，在今天看来，这显然是错误的。Wentworth（1888）提出复

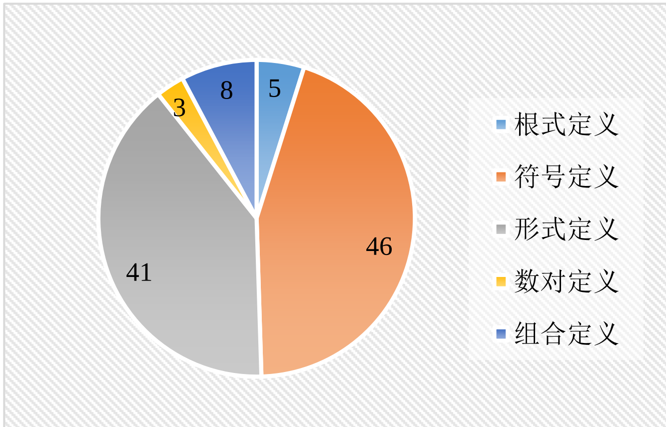


图 4 复数定义的五种类型分布

数是“包含负数偶次方根的式子”[15]，这实际上是虚数的定义，与未涉及复数概念的教科书所提出的虚数定义相同。可见，早期人们对虚数与复数的认识是相当模糊的，并未明确对两者加以区别，Slaught & Lennes（1912）则明确将两者等同起来：“包含负数偶次方根的式子称为虚数，亦称复数。”[16]

3.2.2 符号定义

有 46 种教科书用符号来定义复数，即将复数定义为“形如 $a+b\mathrm{i}$ ”、“形如 $a+\sqrt{-b}$ ”或“形如 $a+b\sqrt{-1}$ ”的式子或数。

Davis（1890）提出：“复数是形如 $a+b\mathrm{i}$ 的式子，其中 a 为实部，$b\mathrm{i}$ 为虚部”[17]，此种定义在形式上与现行教科书相似，但今日称实数 b 为虚部，而非纯虚数 $b\mathrm{i}$；Rietz & Crathorne（1909）给出正确的定义：“形如 $a+b\mathrm{i}$ 的式子称为复数，其中 a 和 b 都是实数。”[18]

表 1 列举了定义复数的教科书中出现的各种形式的符号定义。从表 1 可见，符号定义多出现在 19 世纪 90 年代后，符号的表述与当今的定义基本相同，对虚数与复数的理解也日趋完善，但仍有未指明 a 和 b 取值范围的情况。

表 1 不同形式的符号定义

教科书	定　义
Davis（1890）	形如 $a+b\mathrm{i}$ 的式子称为复数，其中 a 是实部，$b\mathrm{i}$ 是虚部。
Fine（1904）	复数是形如 $a+b\mathrm{i}$ 的式子，亦称为虚数，a 是实数，$b\mathrm{i}$ 是纯虚数。[19]
Rietz & Crathorne（1909）	形如 $a+b\mathrm{i}$ 的式子称为复数，其中 a 和 b 都是实数。当 $a=0$ 时，$a+b\mathrm{i}$ 是虚数。

3.2.3 形式定义

41 种教科书用“实数与虚数的代数和”来定义复数。如 Bradbury & Emery（1889）指出：“复数是一个实数与一个虚数之和。”[20]Cowles & Thompson（1947）指出：“虚数是负数的偶次方根；纯虚数是一个实数与虚数单位 i 的乘积；复数是一个实数与一个纯虚数之和或差。”[21]

以上几种定义将复数看成实数与虚数（或纯虚数）的代数和，将实数排斥于复数之外。

3.2.4 数对定义

爱尔兰数学家哈密尔顿（R. Hamilton, 1805-1865）指出：与 2+3 不同，$a+b\mathrm{i}$ 并非真正意义上的和，加号的使用只是历史的偶然，$b\mathrm{i}$ 并不能加到 a 上去；$a+b\mathrm{i}$ 只不过是一个有序实数对 (a,b) 而已。有 3 种教科书采用数对的形式来定义复数。Weiss（1949）给出定义：“复数为有序的一对实数 $(a,b)=a+b\mathrm{i}$；实数属于复数，$(a,0)=a$，$(0,1)=\mathrm{i}$。”[22]。此种定义方式与复数的向量表示有着千丝万缕的联系，是 20 世纪中叶人们普遍认识复数几何意义的结果。

3.2.5 组合定义

8 种教科书采用此类定义。如 Durell & Robbins（1909）定义复数为“由实部与虚部组成的数”[23]。该定义将 $a+b\mathrm{i}$ 中的“+”看作一个连接符号，而非代数和，从而更加准确地表达了复数的内涵。

4 复数定义的演变

以 20 年为分布单位，图 5 呈现了“未涉及复数概念的虚数定义”与“复数的定义”的具体

时间分布情况。

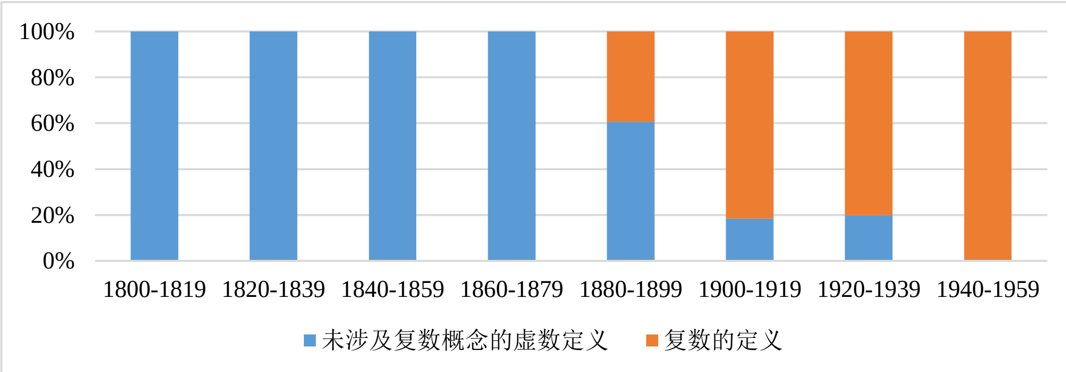


图 5 两类定义的时间分布

从图中可见，由于教科书相对于复数概念的历史发展有一定的滞后性，在 19 世纪 80 年代之前，教科书中未出现复数概念的踪迹，人们对虚数的认识大多停留在“负数平方根”，并常将虚数与纯虚数等同起来。19 世纪，德国数学家高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）将引入复平面概念，将复数表示为复平面上的点，从而完善了复数的几何表示，并引入复数这一术语。因此，到了 19 世纪末 20 世纪初，引入复数概念的教科书数量激增；1940 年后，所有教科书都给出了复数的定义。

以 20 年为单位，1840-1959 年间出版的代数教科书中的虚数和复数定义的分布情况如图 6 所示。

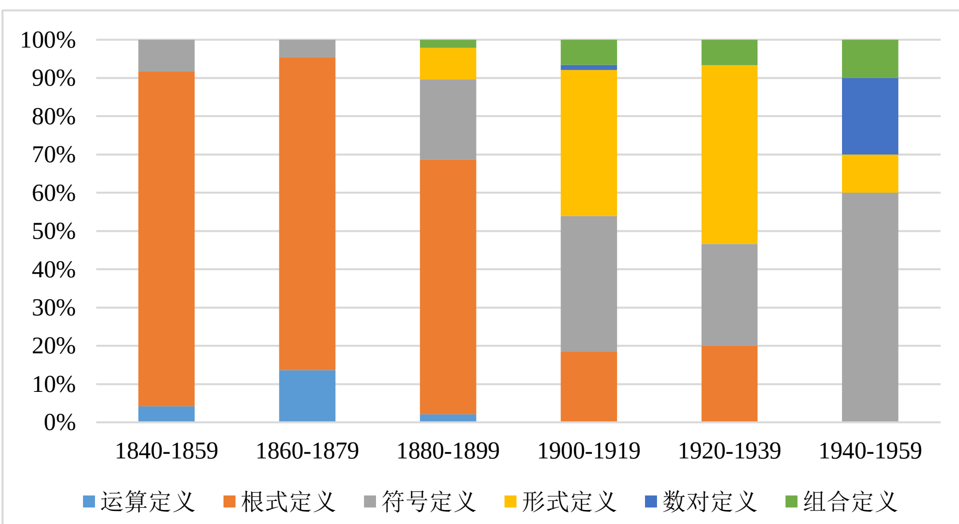


图 6 6 类定义的时间分布

1880 年以前，复数的定义方式较为单一，以运算定义、根式定义与符号定义为主，其中根

式定义占主导地位。随着复数理论的逐渐完善，根式定义占比逐渐下降，最终退出历史舞台。运算定义仅出现于 1840-1880 年间，呈现“先增后减”的趋势，到了 19 世纪末，这种定义被人们彻底抛弃。

形式定义出现于 1880 年后，1880-1939 年间，形式定义的时段占比不断递增，其直观性受到编写者的青睐；1940 年后，受哈密尔顿的影响，编写者意识到复数使用“加号”的历史偶然性，对复数的本质有了更清晰的认识，因而逐渐抛弃了这一不准确的定义。组合定义自 1880 年出现后始终占有一席之地，但 1940 年之后，数对定义闪亮登场，后来居上。

符号定义因表达简洁直观、突出复数特点，在 1880 年后时段占比呈递增趋势，到 1940 年后已占据半壁江山。

图 7 给出教科书所呈现的复数定义的演进过程。

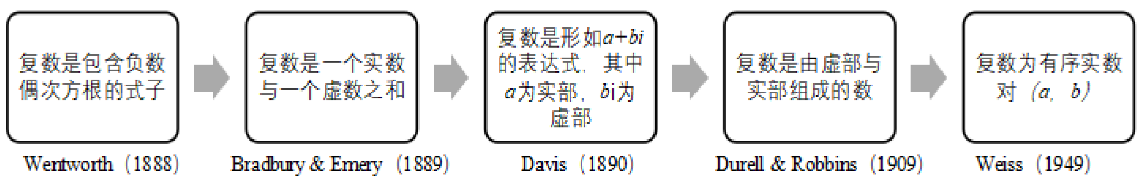


图 7 复数定义演进过程

可见，早期人们局限于已有知识与复数在数学内部的应用，用“根式”来定义虚数，对于虚数的认识仅仅停留在表面上，未能跳出原有的一维世界；随着时间的推移，到了 19 世纪末期，符号定义与形式定义因形象直观而迅速发展起来，它们的出现也更有利于虚数与复数的分类，但人们仅仅局限于外在的形式，将复数看作实数与虚数的代数和，从而将实数排斥于复数之外。到了 20 世纪初，复数的图形表示、实际应用以及哈密尔顿对于复数中“加号”的解释加深了人们对复数本质的认识，二维观取代了一维观，组合定义和数对定义登上了历史舞台。

5 关于复数概念的错误认识

从上文可见，早期教科书所呈现的虚数和复数定义存在许多不完善之处，其主要体现在虚数和复数定义以及虚数和复数关系两个方面。

5.1 虚数和复数定义中的错误

表 2 给出了早期教科书中虚数和复数典型定义中的错误。

表 2 虚数和复数定义中的错误

教科书	类别	定 义	错 误
Wentworth（1888）	根式定义	复数是包含负数偶次方根的式子。[15]	将复数与虚数等同起来，未将实数归入复数之中。
Evans（1899）	根式定义	复数是负数的平方根。[14]	将复数等同于纯虚数；未将实数与一般虚数归入复数之中。
Rietz & Crathorne（1909）	符号定义	形如 $a+bi$ 的式子称为复数，其中 a 和 b 都是实数。当 $a=0$ 时，$a+bi$ 是虚数。[18]	将纯虚数与一般虚数等同起来；忽略复数表达式中 $b=0$ 的情形，因而未明确复数与实数之间的关系。
Slaught & Lennes（1912）	根式定义	虚数是负数的偶次方根，复数是包含负数偶次方根的数。[24]	将复数与虚数等同起来，未将实数归入复数之中。
Perkins（1942）	根式定义	虚数是负数的偶次方根，可化为 $b\sqrt{-1}$ 的形式。[6]	未区分一般虚数与纯虚数，以纯虚数代替所有虚数；误认为负数的高于 2 次的偶次方根为纯虚数。
Cowles & Thompson（1947）	形式定义	虚数是负数的偶次方根；纯虚数是一个实数与虚数单位 i 的乘积；复数是一个实数与一个纯虚数之和或差。[21]	将复数与虚数等同起来，未将实数归入复数之中；将“+”视为通常意义下的求和符号。

由表 2 可见，早期教科书中虚数和复数定义中的错误在于未厘清复数、实数、虚数、纯虚数之间的关系，或将实数排斥于复数之外，或将复数与虚数混为一谈，或以纯虚数代替所有虚数。

5.2 对虚数与复数关系的错误认识

数系扩充到复数后，复数、实数和虚数之间具有如下关系：

$$\text{复数}a+bi\begin{cases}\text{实数（}b=0\text{）}\\ \text{虚数（}b\neq0\text{）（}a=0\text{时为纯虚数）}\end{cases}$$

早期教科书中对于复数与虚数关系的错误认识见表 3。

表 3 对于复数与虚数关系的错误认识

教科书	虚数与复数的关系	错误
Skinner（1917）	虚数与复数都属于虚数。[25]	将复数与虚数等同起来，两者包含关系认识错误，将实数排斥在复数之外。
Wentworth（1888）	虚数与复数都是包含负数偶次方根的式子。[15]	将虚数与复数等同起来，将实数排斥在复数之外。

除此之外，一些教科书对数进行了错误的分类，如 Ford & Ammerman（1920）对数作如下分类[26]：

$$\text{代数中的数}\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\\\text{无理数}\end{cases}\\\text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数}\\\text{复数}\end{cases}\end{cases}$$

可见，部分教科书将复数与一般虚数混为一谈，或将复数视为虚数的一类，或认为复数与实数无关。

6 结论与启示

虚数并非“虚幻的数”或“不存在的数”。我们会知道，虚数实际上是与其他任何数一样“真实”的，但是“虚数”这个古老的名字，仍然保留于数学文献之中[27]。早期教科书中的定义形式与错误与复数的历史发展大体一致。复数始于卡丹的“分十”问题，在其被赋予几何意义之前人们多将其看作负数的方根，为解决某些方程而存在，对复数的认识始终囿于一维世界；维塞尔、阿甘德和高斯相继给出了复数的图形直观表示，哈密尔顿建立了完善的复数理论体系，人们的思想最终跳出一维世界走向二维世界，使用数对形式对其进行定义。早期教科书中虚数与复数概念的发展，为 HPM 视角下的复数概念教学提供了丰富的教学素材和教学启示。

（1）从历史上看，很长一段时间里，人们的头脑中并没有“复数”的概念。为了解决“负数开方”的问题，才给出了“虚数”的定义，并且多将“负数的偶次方根”、“形如 $a+b\mathrm{i}$ 的表达”都定义为虚数。数学家在对复数的几何意义进行研究之后，才给出了复数的定义，进而研

究二元数，对数系进行了扩充。因此，复数的几何意义与图形表示或可成为帮助学生理解复数概念、虚数概念、复数与虚数之间关系的抓手，通过复数与复平面上点的对应，直观地认识虚数与复数。

（2）早期教科书中复数概念与定义方式的研究，可以让教师了解如今看似简单概念背后的历史轨迹，知道复数的本质为二元数，而非简单的代数和。同时，通过了解历史上数学家认识复数这一概念的曲折过程以及复数定义方式的演变，教师可以预测学生的认知障碍，根据已有的历史素材（如 Slaught（1912）、Skinner（1917）的错误理解），采用复制式，让学生进行复数概念的辨析，帮助学生深入剖析虚数、纯虚数与复数之间的关系，避免产生如历史一样的错误理解。

（3）教师在完成虚数与复数概念的讲解后，可以介绍复数概念在历史与早期教科书之中的演进过程，通过古今思想的碰撞，让学生体会到古人也有和自己一样的困惑，使学生感受到数学家刻苦探求的精神，懂得原有世界中解决不了的问题，寻求更广阔的世界才能得以解决，帮助学生体会到数学中的理性价值与人文精神，构建动态的数学观。

（4）早期教科书中从数对入手定义复数为我们的教学提供了新的思路，复数作为与向量、三角函数、有序数对紧密联系的知识，在课堂中不应将几何与代数剥离，在讲述复数的概念时注意其与几何之间的联系，帮助学生实现不同表征方式之间的转化，也可以通过问题的设置达到数学知识之间的普遍联系。

（5）复数是中学阶段最后一次数系的扩充，也是数由一维向二维的一次跨越。起初对虚数的定义起源于已有数系的运算困难，而虚数引入的前提就是其满足实数范围内的开方与乘方运算，使已知世界的规则适用于未知世界，确保数学内部法则的一致。因此，在复数知识的教学过程中，要让学生懂得如何在面对未知问题时跳出原有思维的桎梏，学会数学推广的一般方法。

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[2] Smith, D. E. *Teaching of Elementary Mathematics*[M]. New York: The Macmillan Co., 1900, 42-43.

[3] 卢成娴, 汪晓勤, 沈中宇. HPM 视角下复数概念教学的反馈研究[J]. 中小学数学(高中版), 2019(Z2), 8-11.

[4] Taylor, J. M. *An Academic Algebra*[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1893, 260.
[5] Wells, W. Hart, W. W. *First Year Algebra*[M]. Boston: D.C. Heath&Co, 1912, 279.
[6] Perkins, G. R. *A Treatise on Algebra*[M]. Utica: O. Hutchinson.,1842, 141.
[7] Robinson, H. N. *A Theoretical and Practical Treatise on Algebra*[M]. Cincinnati: J. Ernst, 1850, 256.
[8] Van Velzer, C. A., Slichter, C. S. *School Algebra*[M]. Madison: Tracy, Gibbs & Co., 1890, 274.
[9] Lacroix, S. F., Farrar, J. *Elements of Algebra*[M]. Cambridge: The University Press, 1818, 122.
[10] Hall, T. G. *The Elements of Algebra*[M]. London: John W. Parker, 1840, 162.
[11] Ford, W. B., Ammerman, C. *First Course in Algebra*[M]. New York: Macmillan, 1919, 278.
[12] Davies, C. *New Elementary Algebra*[M]. New York: A. S. Barnes & Co., 1859, 183.
[13] Robinson, H. N. *New University Algebra*[M]. New York: Ivison, Phinney & Co., 1862, 201.
[14] Evans, G. W. *Algebra for Schools*[M]. New York: H. Holt and Company, 1899, 254.
[15] Wentworth, G. A. *A College Algebra*[M]. Boston: Ginn & Co., 1888, 146.
[16] Slaught, H. E., Lennes, N. Johann., Lennes, N. J. *First Principles of Algebra: Advanced Course*[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1912, 351.
[17] Davis, E. W. *An Introduction to the Logic of Algebra*[M]. New York: J. Wiley & Sons, 1890, 64.
[18] Rietz, H. L., Crathorne, A. R. *College Algebra*[M]. New York: Henry Holt and Co., 1909, 105.
[19] Fine, H. B. *A College Algebra*[M]. Boston: Ginn & Co., 1904, 71.
[20] Bradbury, W. F., Emery, G. C. *The Academic Algebra*[M]. Boston: Thompson, Brown, 1889, 269.
[21] Cowles, W. H., Thompson, J. E. *Algebra for Colleges and Engineering Schools*[M]. New York: D. Van Nostrand Co, 1947, 102.
[22] Weiss, M. J. *Higher Algebra for the Undergraduate*[M]. New York: J. Wiley, 1949, 31.
[23] Durell, F., Robbins, E. R. *A Grammar School Algebra*[M]. New York: C. E. Merrill, 1909, 251.
[24] Slaught, H. E., Lennes, N. Johann., Lennes, N. J. *First Principles of Algebra: Advanced Course*[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1912, 351.
[25] Skinner, E. B. *College Algebra*[M]. New York: The Macmillan Co., 1917, 125.
[26] Ford, W. B., Ammerman, C. *Second Course in Algebra*[M]. New York: The Macmillan Co., 1920, 109.
[27] Myers, G. W., Atwood, G. E. *Elementary Algebra*[M]. Chicago: Scott, Foresman and Co., 1916, 253.

美国早期代数教科书中的集合概念

闫 欣

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

集合作为现代数学的基本语言，可以简洁、准确地概括、表达数学内容。在 19 世纪之前，虽然 *set* 作为一个名词经常出现在人们的生活中，但其含义类似于 *collection*，概念模糊，并无确切的定义。19 世纪 70 年代，德国数学家康托尔（G. Cantor，1845-1918）创立了集合论。他在解决涉及无限量的数学问题时，跳出传统的数集研究，提出了一般性的集合概念。无穷概念抽象而准确的表达、无穷集合与其真子集的一一对应、由罗素悖论引发的第三次数学危机，促使了集合论一步一步走向公理化，同时也促进其他数学领域如微积分、实变函数论、代数拓扑等的发展[1]。经过半个世纪的演变，集合论在 20 世纪 20 年代的数学理论体系中已经拥有无可比拟的重要地位，现代数学各个分支几乎所有成果都离不开严格的集合论支撑。

人教版将集合定义为研究对象组成的总体，并设置了判断某些元素的全体是否组成集合的课后习题。作为高中数学的第一节课，集合不仅衔接了初中与高中数学，也体现了高中数学更加抽象、更加严谨的思维要求。不免有学生会问：学习集合有什么用？我们为什么要在高中第一节课学习集合？数学上的“集合”与我们日常生活中熟知的“集合”有什么区别？教师也会思考：在课堂教学中，如何更好地刻画集合的概念、理清集合的关系、把握集合的运算？

为了解决以上问题，我们需要了解集合概念的历史。集合概念在数学教科书中的演变过程反映了人们在认识上的逐渐完善过程。同时，参考早期教科书，也是站在前人肩膀上，可以帮助我们从更高的视角来更好地讲授集合概念。

基于此，本文考察了 1954-1963 年间出版的 14 种美国代数教科书中与集合相关的内容，试图解答以下问题：美国早期教科书呈现了有关集合的哪些内容？又是如何呈现的？与今日教科书有何不同？对今日教学有何启示？

2 教科书的选取

本文从相关数据库中选取了 14 种美国早期代数教科书为研究对象，其中，出版于 1958、

1959 和 1961 年的各 1 种，出版于 1954 和 1963 年的各 2 种，出版于 1960 年的 1 种，出版于 1962 年的有 4 种。

考察 14 种美国早期代数教科书中集合的相关内容，其中 8 种分布在介绍集合及其相关内容的章节中，如集合和数轴、命题、变量、函数；其余 6 种分布在将集合视为预备知识的章节中，如自然数、数学语言、概率、等价关系、函数。14 种教科书中，11 种含有独立介绍集合的小节；3 种没有独立介绍集合的章节，集合的相关概念出现在其他章节里，如数学符号与运算、概率事件、等价关系等。

14 种教科书中，集合的相关内容主要可分为以下四个板块：集合的定义、集合的表示、集合的关系、集合的运算。

3 集合的概念

3.1 集合概念的引入

作为通常的生活用语，*set* 一词至迟已出现于英国数学家弗伦德（W. Frend, 1757-1841）的《代数学原理》（1796）中，之后，它常常被数学教科书所采用。现代数学意义上的“集合”（德文 *menge*，法文 *ensemble*）一词源于集合论创立者康托。在英文中，作为数学专有名词的 *set* 一词直到 20 世纪初才出现。

到了 20 世纪中叶，集合概念进入数学教科书。一些教科书在引入集合概念时，往往会交代学习该概念的缘由，主要包括集合的地位、意义、用途等，见表 1。

表 1 集合概念的引入

类别	具体叙述	作者（年份）
集合的地位	集合是数学中的常用名词、基础概念、原始术语。	Levi（1954）[2]
集合的意义	集合论的语言和符号将贯穿整个课程。	Dubisch & Kelley（1960）[3]
	集合可以用于表示其他数学抽象概念。	Kelley（1960）[4]
	集合能极大地增强代数学主题之间的连贯性和交互性。	Haag（1960）[5]
	集合是学习实数系统时不可或缺的概念，可用于分	SMSG（1962）[6]

	类数字、验证数字运算的性质、解方程和不等式、学习函数。	
	集合是现代数学基本概念的基础，在统计学、电气开关设计、保险问题和其他领域中也有多种多样的广泛应用。	Hall & Kattsoff（1962）[7]
集合的用途	总结归纳数学中某一类别（如有理数）的性质。	Maria（1958）[8]
	定义和学习函数（两个集合之间的对应关系）。	Brumfiel（1962）[9]
	论证概率论样本空间的相关理论。	Miller & Green（1962）[10]
	对生活情景中常见的、模糊的集合进行准确定义。	SMSG（1959）[11]

多数教科书都论及集合论在数学上的重要地位。Koo、Burchenal、Blyth（1963）还解释了用 set 而不用 collection 来表达数学上的“集合”的缘由：人们默认“collection”是由相似的物品组成，比如玩具、邮票、硬币，有“收集”之意；而“set”可以由完全没有任何相似之处的物品组成，因而更符合数学上的涵义[12]。

3.2 集合的定义

多数教科书引入集合概念后，对其进行了定义。表 2 给出了教科书中若干典型的定义。

表 2 集合的定义

类别	具体叙述	作者（年份）
直接定义	具有某种共同特征（客观或抽象）的元素组成的整体。	Maria（1958）[8]
间接定义	集合中的元素不一定相似或相关，可以随意搭配，比如金鱼、旱冰鞋、汽车。	Levi（1954）[2]
	集合是未定义的概念，比如所有美国的州、所有天上的星星、所有大于 17 的实数的集合。	Hall & Kattsoff（1962）[7]
	对任何一个元素，都有标准判断其是否属于一个集合。	Rosenbaum（1963）[13]

由表 2 可见，Rosenbaum（1963）强调了集合元素的“确定性”，即：对于任何一个集合，都有相关标准来判断一个元素是否属于该集合，并称之为“完备的集合定义”[13]。14 种教科书

中，有 6 种体现了集合元素的“确定性”。

但除了“确定性”，早期教科书很少涉及集合元素的其他性质，只有 2 种教科书间接体现了“无序性”，2 种教科书间接体现了“互异性”。Kelley (1960) 举例论述了三种性质[4]。

3.3 集合的表示

在 14 种教科书中，11 种使用大写字母 A、B、C、…来表示集合，8 种用小写字母 a、b、c…来表示元素，6 种采用了“属于”和“不属于”的符号（$a\in A, a\notin A$）。

集合的表示方法有“自然语言”、“列举法”和“描述法”三类，其中，“自然语言”即为通过日常语句概括、描述、表示集合的共同特征；“列举法”即为一一枚举集合中的元素，并用花括号将其括起来，如果元素过多且符合某项特征规律，可使用省略号；“描述法”即为仅使用抽象的数学符号来概括、描述、表示集合的共同特征。

在 14 种教科书中，7 种使用了自然语言，10 种使用了列举法，2 种使用了描述法。由于自然语言能帮助学生准确概括集合的共同特征，列举法能帮助学生清晰准确逐个给出集合中的元素，因此，多种教科书同时使用了自然语言和列举法。但由于描述法的抽象程度较高，所以鲜有教科书采用。Artin（1954）同时采用了三种表示方法，并以 Z 表示整数集，Q 表示有理数集，R 表示实数集，C 表示复数集[14]。

3.4 集合的分类

少数教科书从集合论的视角给出了有限集和无限集的定义。Levi（1954）将有限集定义为“可以与标准集{1，2，3，…，n}建立一一对应关系的集合”，将无限集定义为“可以与自己的真子集建立一一对应关系的集合”[2]。SMSG（1959）将有限集定义为“可以从头至尾一一数出其中的元素的集合”，将无限集定义为“不能从头至尾一一数出其中的元素的集合”[11]。Haag（1960）则将有限集定义为“不能与自己的真子集建立一一对应关系的集合”[5]。Levi（1954）还给出了基数的概念：“与标准集{1，2，3…，n}建立一一对应关系的集合的基数为 n”[2]。

4 集合的关系与运算

4.1 集合之间的关系

13 种教科书给出了子集的定义：若集合 A 中的所有元素都是集合 B 中的元素，就称集合 A

为集合 B 的子集。

关于真子集，Levi（1954）给出定义："若集合 A 是集合 B 的子集，且 B 中存在某个元素 x 不是 A 的元素，则称集合 A 是集合 B 的真子集"[2]。Haag（1960）的定义为："集合 A 是集合 B 的子集，且 A 和 B 不相等，则集合 A 是集合 B 的真子集"[5]。

6 种教科书采用了包含关系的符号，即：若集合 A 是集合 B 的子集，则 B 包含 A，即 $A \subset B, B \supset A$。Rosenbaum（1963）则用 $A \subseteq B$ 表示"A 是 B 的子集"，$A \subset B$ 表示"A 是 B 的真子集"[13]。

关于集合的相等，Levi（1954）给出的定义为"若构成两个集合的元素相同，则称两个集合相等"[2]；Artin（1954）的定义为"集合 A 包含集合 B，集合 B 包含集合 A，则集合 A 和集合 B 相等"[14]。

关于空集，Levi（1954）的定义为"不含任何元素的集合"[2]，而 Artin（1954）的定义为"集合 A 相对于集合 A 的补集"[14]。SMSG（1959）[11]和 SMSG（1961）[15]特别指出：集合$\{0\}$不是空集，它包含了元素 0；Kelley（1960）指出：空集不代表无，就像"一个空盒子不同于完全没有盒子"一样；同时，空集也不等于以空集为元素的集合[4]。Koo、Burchenal、Blyth（1963）交代了空集符号$\varnothing$及其读法[12]。

一些教科书给出了有关子集和空集的性质：

- 空集是任何集合的一个子集[15]；
- 任何一个集合都是其自身的一个子集[15]；
- 一个集合的最大子集是它本身，最小的子集是空集[4]；
- 空集的子集只有空集[4]；
- 若 A 是 B 的子集，B 是 C 的子集，则 A 是 C 的子集[4]；
- 若集合 A 的真子集一定是空集，则 A 只有一个元素[2]。

此外，3 种教科书还给出了集合之间的一一对应关系：对于集合 A 中的每个元素，都有集合 B 中的某个元素与之对应，反之亦然，且一个集合中的不同元素，不会有另一个集合中的同一个元素与之对应。

4.2 集合的运算

表 3-5 分别给出了早期教科书中的并集、交集和补集的不同定义。Levi（1954）给出了任意

数量的集合的并集、交集定义[2]，Miller、Green（1962）在概率论样本空间基础之上，类比数字的加法、乘法给出集合的并集、交集定义，并以数字 0 类比空集，数字 1 类比样本空间[10]。

表 3 并集的定义

类别	具体叙述	作者（年份）
直接定义	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的并集。	Dubisch & Kelley（1960）[3]
一般定义	给定集合，至少属于其中一个集合的元素组成的集合称为这些集合的并集。	Levi（1954）[2]
类比定义	类比加法。在集合 A 中，或在集合 B 中，或同时在集合 A 和 B 中的元素组成的集合称为集合 A 和集合 B 的并集。	Miller & Green（1962）[10]

在定义并集和交集概念的教科书中，有 8 种采用了符号 $A\cup B$ 和 $A\cap B$。Kelley（1960）用 $A\sim B$ 来表示集合 B 相对于集合 A 的补集[4]；Hall 和 Kattsoff（1962）用 $U–C$ 来表示集合 C 相对于全集 U 的补集[7]。Artin（1954）讨论了任意多个集合的并集、交集和积集[14]。

表 4 交集的定义

类别	具体叙述	作者（年份）
直接定义	由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的交集。	Dubisch & Kelley（1960）[3]
一般定义	给定若干集合，同时属于所有这些集合的元素组成的集合称为这些集合的交集。	Levi（1954）[2]
类比定义	类比数字乘法。所有同时在集合 A 和集合 B 中的元素组成的集合称为集合 A 和集合 B 的交集。	Miller & Green（1962）[10]
间接定义	集合 A 和集合 B 中相同、共有的元素组成的集合称为集合 A 和集合 B 的交集。	Brumfiel（1962）[9]

表 5 补集的定义

类别	具体叙述	作者（年份）
直接定义	全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对全集 U 的补集。	Miller & Green（1962）[10]
一般定义	集合 A 是集合 B 的子集，由集合 B 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于集合 B 的补集。	Artin（1954）[14]

Kelley（1960）使用韦恩图来表示交集、并集运算法则和德摩根律[4]，如图 1 所示。

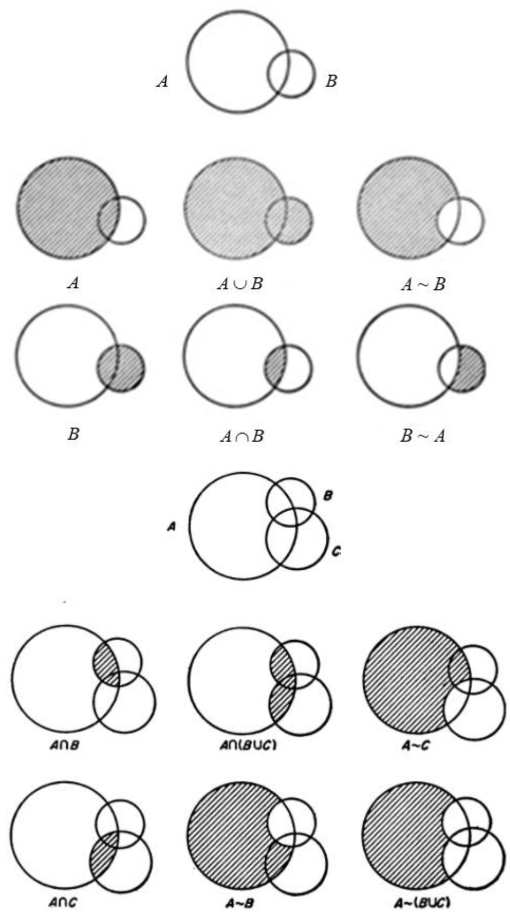


图 1 Kelley（1960）使用的韦恩图

Miller、Green（1962）强调韦恩图的作用：韦恩图可以使集合运算可视化、直观展示集合之间的关系，并采用了各类韦恩图，类比实数运算法则，推导出一些交集、并集的运算法则[10]，如图 2 所示。

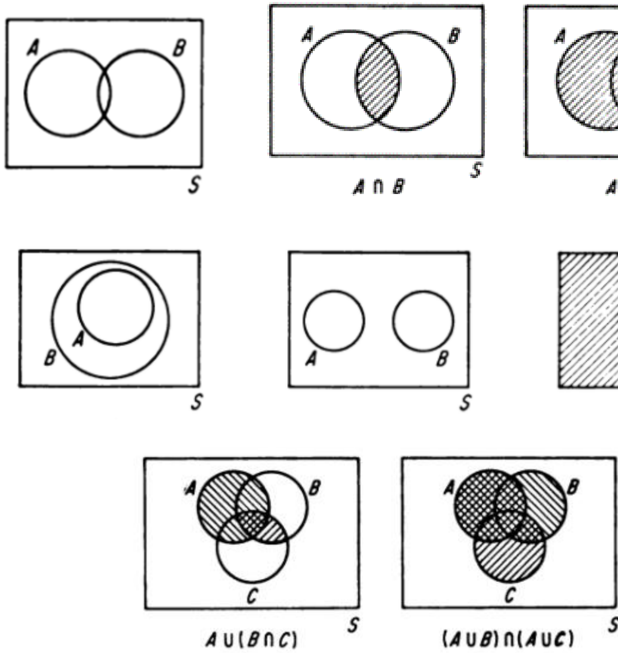


图 2 Miller 和 Green（1962）采用的韦恩图

Brumfiel（1962）利用矩形韦恩图来表示集合的并集和交集[9]，如图 3 所示。

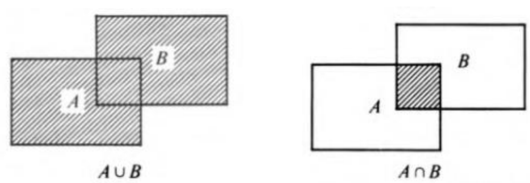


图 3 Brumfiel（1962）采用的韦恩图

除去以上类型的集合运算，4 种教科书给出笛卡儿积集的概念，即：集合 A 中元素 a 和集合 B 中元素 b 组成的有序数对（a，b）组成的集合，符号表示 A´ B。Brumfiel（1962）还指出，如果集合 A 中有 m 个元素，集合 B 中有 n 个元素，那么集合 A´ B 中有 mn 个元素，这也是为何称之为积集并使用乘法符号的原因[9]。

5 集合的应用

在高中数学中，集合用于定义函数的对应关系、刻画不等式的解集。早期教科书中的集合应用多属高等数学范畴，如利用集合的有界性证明 $\sqrt{2}$ 是无理数，进一步学习连续性定理和阿基米德公理，或是定义集合的等价关系和偏序集，推导佐恩引理。表 6 列出了早期教科书中出现的高中数学范畴内集合的应用方式。

表 6 集合的应用

应用	作者（年份）
表示变量的取值范围。	Levi（1954）[2]
定义从集合之间的映射（函数）。	Artin（1954）[14]
利用集合语言，如元素、子集、集合来推理三段论。	Kelley（1960）[4]
概率论、计算机设计（为符号逻辑提供了数学基础）。	Miller & Green（1962）[10]

早在初中学习初等函数和不等式时，学生就已知道解集的含义。早期教科书中，SMSG（1959）[11]、Haag（1960）[5]、Kelley（1960）[4]将解集定义为：所有使得开命题变为真命题的元素组成的集合。Hall、Kattsoff（1962）通过利用两个方程的解集的交集求得其公共解[7]。

值得一提的是，部分教科书，如 SMSG（1959）[11]、Haag（1960）[5]、Brumfiel（1962）[9]、Hall 和 Kattsoff（1962）[7]等给出了数集图像（*The Graph of a set*）的定义：与集合中的数字相对应的实数轴上的点组成的集合即为集合的图像。其中，元素是点的坐标表示，点是元素的图像表示。Kelley（1960）在平面直角坐标系上画出满足 $y=x+1$ 的有序数对（x, y）的集合的图像[4]；Hall、Kattsoff（1962）将横轴与纵轴的积集称为笛卡儿平面，并利用横实数轴上、下的点组成的集合与纵实数轴左、右的点组成的集合的交集表示出第一、第二、第三、第四象限的定义[7]。

6 教学启示

以上我们看到，关于集合概念，早期教科书呈现了引入、定义、性质、运算、应用等丰富的内容。早期教科书为今日课堂教学提供了许多启示。

其一，关于为什么要学习集合，而且为什么要在高中第一节课学习集合的问题，早期教科书指出，集合是常见的数学语言，可以对数学研究对象进行分类归纳，是各个数学分支（映射函数、逻辑推理、概率统计）的基础，在现代数学中影响深远。

其二，从早期教科书表示集合的方法可以看出，对于刚刚接触集合概念的学生来说，列举法能够帮助他们清晰、直观的表示集合，加深集合定义的刻画；自然语言能够帮助他们准确、简洁的表示集合，培养概括数学对象的能力。描述法在早期教科书中出现较少，这说明描述法对于学生来说可能存在归纳提取、抽象表述元素共同特征等方面的学习障碍。

其三，部分早期教科书通过现实情境来帮助学生理解集合的相关概念和集合之间的关系，

如：空集并不代表没有集合，就像“空盒子不同于没有盒子”一样。在集合的教学中，教师可以充分利用现实情境，例如，教师可以这样打比方：以空集为元素的集合并不等于空集，就像“含有空盒子的抽屉不同于空抽屉”一样；集合$\left\{0\right\}$并不等于空集，就像“含有一张标有 0 的卡片的盒子不是空盒子”一样。

其四，关于学习集合有什么用的问题，早期教科书给出了不同维度的解答。对学生来说，从短期来看，学习集合可以帮助他们更加清晰地刻画函数定义、更加准确地表示方程和不等式的解集、更加严谨地推导三段论；从长期来看，学习集合可以通过进一步建立等价关系从而得到划分下的商集，进一步论述“无穷”的内涵[16]，解答“0 和 1 之间的有理数多还是无理数多”等抽象数学问题。

其五，多数教科书只强调集合元素的确定性，而忽略其无序性和互异性，这提示我们，今天的学生也可能会出现同样的错误，教师在课堂上可以通过集合相等的概念，让学生发现，即使元素顺序不同，集合也保持不变；而集合本身的含义就要求了其元素两两不同。教师也可以设计反例，让学生加以辨析。

参考文献

[1] 彭文静. 基于 HPM 视角下的集合概念教学研究[J]. 中学数学参考, 2015, (05): 5-6.

[2] Levi, H. *Elements of Algebra*[M]. New York: Chelsea Pub. Co, 1954, 7-17.

[3] Dubisch, R., Kelley, J. L. *Student Manual for the Study of Introduction to Modern Algebra*[M]. Princeton: Van Nostrand, 1960, 10-18.

[4] Kelley, J. L. *Introduction to Modern Algebra*[M]. Princeton: Van Nostrand, 1960, 36-50.

[5] Haag, V. H. *Structure of Elementary Algebra*[M]. New Haven: Yale University Press, 1960, 33-41.

[6] School Mathematics Study Group. *Introduction to Algebra*[M]. New Haven: Yale University Press, 1962, 2-8.

[7] Hall, D. W., Kattsoff, L. O. *Unified Algebra and Trigonometry*[M]. New York: Wiley, 1962, 1-23.

[8] Maria, M. H. *The Structure of Arithmetic and Algebra*[M]. New York: Wiley, 1958, 88-91.

[9] Brumfiel, C. F. *Algebra* II[M]. Michigan: Addison-Wesley Pub. Co, 1962, 151-157.

[10] Miller, I., Green, S. *Algebra and Trigonometry*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1962, 302-

306.

[11] School Mathematics Study Group. *Mathematics for High School: First Course in Algebra*[M]. Ann Arbor: Cushing Malloy. Inc, 1959, 8-25.

[12] Koo, D., Burchenal, J. M., Blyth, M. I. *First Course in Modern Algebra*[M]. New York: F. Ungar Pub. Co. 1963, 1-9.

[13] Rosenbaum, R. A. *Introduction to Projective Geometry and Modern Algebra*[M]. Michigan: Addison-Wesley Pub. Co, 1963, 39-42.

[14] Artin, E. *Selected Topics in Modern Algebra*[M]. North Carolina: Chapel Hill, 1954, 1-3.

[15] School Mathematics Study Group. *Introduction to algebra*[M]. Ann Arbor: Cushing Malloy. Inc, 1961, 1-11.

[16] 汪晓勤, 周保良. 高中生对实无穷概念的理解[J]. 数学教育学报, 2006, (04), 90-93.

周期函数概念的历史

韩 粟

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 关于周期现象的早期认识

昼夜交替，阴晴圆缺，潮涨潮落，春去秋来……这些循环往复的自然现象伴随着人类社会的产生与发展。古代先民通过观测、记录天象的变化规律，制订历法，选址建筑，经营农耕等等。

西方文明中，位于英国威尔特郡的史前遗迹——巨石阵（Stonehenge）被认为是世界上最早的天文台。如图 1 所示，它可以用来观察月相由新月到满月的周期变化，一些学者还认为它可以用来确定太阳升起和落下的最北处和最南处。在古巴比伦，人们发明日晷来确定一天中的时刻；编制能够协调月相盈缺和太阳升落的阴阳合历，又将七个星宿和七个神灵一一对应，创立七天一循环的星期制度，用以安排农事活动。古埃及的祭司还会通过东方天空中天狼星的显现来预言尼罗河的泛滥日，以便防范洪灾，树立其威信[1]。

图 1 英国邮票上的巨石阵

古代中国的先人同样擅长利用大自然的周期变化规律，他们既能仰观天宇，通过圭表测日等制定二十四节气；又能俯察大地，研究动植物生长乃得七十二候。《汉书·礼乐志》中载有的“精健日月，星辰度理，阴阳五行，周而复始”一说，反映出古代人民对自然节律的认识塑造了其朴素的辩证唯物哲学观。约一千年后，金元之际的数学家李治（1192-1279）在《敬斋古今黈》中首提“周期”一词，书中记载：“阴阳相配之物，而老少又必相当。乾之策，二百一十有六，老阳也；坤之策，百四十有四，老阴也。老阴老阳相得为三百六十，则周期之日也。”[2]

这一典故源于《周易》中的“六爻”占卜法，其中一爻对应的策数只有 36、32、28、24 四种，36 策为老阳，记为乾卦，24 策为老阴，记为坤卦，则六爻至多可得乾卦 216 策，至多可得坤卦 144 策，二者合并，得周期之数为 360。

无论哪一种文明的迹象都表明：周期起源于天文学。天象的周期变化为人类社会确定了自然时序，引起的各种周而复始的现象又致使周期一词在农牧、地理、宗教、哲学等方面具有了丰富的内涵。但截至目前，倘若用数学的眼光看周期，它在抽象之后无非就是一些简单的算术而已。直到三角学的解放和微积分的创立，周期才被赋予数学上更广泛的意义。

2 三角函数的周期性

在欧洲，德国数学家雷格蒙塔努斯（J. Regiomontanus, 1436-1476）最早将三角学从天文学中独立出来，成为数学的一个分支。进入 17 世纪，代数也不再是几何的附庸，经过沃利斯（J. Wallis, 1616-1703）、牛顿（I. Newton, 1643-1727）和莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646-1716）等大数学家的努力，代数及分析的理论不断拓展。此后，函数日趋成为主流，角的概念得到推广，在此背景下，三角函数应运而生。法国数学家拉尼（T.-F. de Lagny, 1660-1734），英国数学家柯特斯（R. Cotes, 1682-1716）都曾致力于三角函数的研究，他们不约而同地发现三角函数可以用来描述自然界中普遍存在的周期现象，这一性质即三角函数的周期性（periodicity）[3-4]。

图 2 法国数学家拉尼

图 3 英国数学家柯特斯

1748 年，欧拉（L. Euler，1707-1783）的划时代巨作——《无穷分析引论》出版，函数被确立为分析学中的基本对象。欧拉从函数的视角审视了前人所作的研究，与今日教科书中的顺序不同，在第八章《来自圆的超越量》中，他首先给出两角和的正弦及余弦公式：

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

将上述两式中的一个角依次替换成$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3}{2}\pi$ 和2π，并用n表示全体整数，进一步将它们替换成加上$2n\pi$后的值，得到一系列诱导公式：

表 1 《无穷分析引论》中的诱导公式

正弦函数		余弦函数	
$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$	$\sin\left(x+\frac{4n+1}{2}\pi\right)=\cos x$	$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$	$\sin\left(x+\frac{4n+1}{2}\pi\right)=-\sin x$
$\sin(x+\pi)=-\sin x$	$\sin\left(x+\frac{4n+2}{2}\pi\right)=-\sin x$	$\cos(x+\pi)=-\cos x$	$\cos\left(x+\frac{4n+2}{2}\pi\right)=-\cos x$
$\sin\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=-\cos x$	$\sin\left(x+\frac{4n+3}{2}\pi\right)=-\cos x$	$\cos\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin x$	$\cos\left(x+\frac{4n+3}{2}\pi\right)=\sin x$
$\sin(x+2\pi)=\cos x$	$\sin\left(x+\frac{4n+4}{2}\pi\right)=\cos x$	$\cos(x+2\pi)=\cos x$	$\cos\left(x+\frac{4n+4}{2}\pi\right)=\cos x$

欧拉没有明确提出三角函数周期性的概念，但由他默许n在整数集内任意取值，说明他已经发现自变量每增加（或减少）2π，正弦函数值或余弦函数值重复出现。还有一条有力的证据来自于第 21 章《超越曲线》，此章的内容表明：正弦曲线和平行于自变量所在坐标轴的直线（不超出振幅）有无数多个交点，且每两个相邻交点间距离相等，余弦曲线同理，代数曲线则不具有这一性质[5]。

欧拉的工作使得针对三角函数周期性的研究开始全面化、系统化。此后，一些数学家跟随欧拉，通过列举诱导公式来表述正弦函数和余弦函数的周期性变化特征，并补充了正切函数等其他三角函数的周期性。

19 世纪中后期，周期函数（periodic function）一词面世。英国数学家惠勒（Wheeler，1877）指出：记任意角 XOP 的角度为φ。对任意（非零）整数k，$\varphi\pm 2k\pi$和φ对应角的所有三角函数值相等。这一性质使得三角函数又称为周期函数，周期为2π。他还注意到正切函数和余切函数有着更小的周期π[6]。

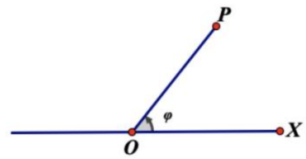


图 4 任意角 *XOP*

1883 年，美国数学家奥利弗（Oliver）在“函数的周期性”一节给出了更详细的解释：当 k 取正整数，则 $+2\pi,+4\pi,\cdots,+2k\pi$ 表示角 XOP 的终边 OP 逆时针转过 $1,2,\cdots,k$ 圈；当 k 取负整数，则 $-2\pi,-4\pi,\cdots,-2k\pi$ 表示终边 OP 顺时针转过 $1,2,\cdots,k$ 圈。因此，角度 φ 和 $\varphi \pm 2k\pi$ 对应的终边均为 OP，则它们对应的三角函数值相同，所以称三角函数为“角的周期函数”[7]。维钦斯基（Wiczynski，1914）借助单位圆中角终边 OP 的旋转给出了相同的解释[8]。

上述数学家基于诱导公式和角的终边说明了三角函数的周期性，还有数学家结合三角函数的图像给出了直观的解释，如格兰维尔（Granville，1909）以正弦函数 $y=\sin x$ 的图像为例，指出：角在 0 到 2π 内变化时，正弦值先从 0 增加到 1，再从 1 减少到-1，最后从-1 增加到 0；在 2π 到 4π 内，正弦值经过相同系列的值，依次类推，所以正弦函数的周期为 2π，同理，余弦函数、正割函数 $y=\sec x$ 及余割函数 $y=\csc x$ 的周期都为 2π。由于正切和余切在每 π 弧度内经过相同系列的值，所以它们的周期为 π。综上，他提出：当角匀速增加或减小时，每一个三角函数反复经过同样系列的值，故称其为周期函数[9]。

美国数学家德累斯顿（Dresden，1921）研究了广义的正弦及余弦函数，即 $y=\sin\left(a\theta+b\right)$ 和 $y=\cos\left(a\theta+b\right)$，$a$ 是任意有理数，然后结合图像指出了它们的周期为 $\dfrac{2\pi}{|a|}$ [10]。他认为，许多自然现象都有着周期变化的特征，三角函数具有的周期性是其在自然现象研究中具有重要意义的原因之一。

至此，我们看到，当欧拉将三角学从静态的解三角形中解放出来后，动态的三角函数的研究如雨后春笋般涌现，数学家们用尽三角学内的各种工具，如诱导公式、角的终边、单位圆、函数图像等，分别定义了三角函数的周期性，还展开了充分的探讨，因此得出的结论也是比较准确的。

3 周期函数的定义

19 世纪末至 20 世纪初，无论是物理学中对各种信号波形的处理，引发了对数学工具的强烈需求，还是数学内部函数作为一门数学语言的飞速发展，如来自函数图像的直观证据等，它们都促使数学家们着手探索一般周期函数的定义。尽管三角函数的周期性已经昭然若揭，但同奇、偶函数一样，要发展出用代数的符号语言完整表述的周期函数定义，其中经历了曲折的数学抽象过程。

3.1 描述性定义

最初，一些数学家倾向于用自然语言描述周期函数这一概念，与此同时，周期的概念也开始登上历史舞台。

1900 年，杜尔斐（Durfee）给出如下定义：当自变量或幅角增加时重复自身的函数称为周期函数。周期是使函数值发生重复的自变量的改变量[11]。而帕尔默（Palmer，1914）给出的定义为：周期函数是指当自变量增加一个常量时值不变的函数。该常量的最小正值称为周期[12]。比较两定义，可以看出前者尚未摆脱三角函数的影响，抽象程度较低，而后者尽管未使用函数符号，但已经初具雏型。按照杜尔斐的说法，周期应该有无数个，帕尔默却只取最小正值的那一个作为周期。可以推测，在周期函数概念的诞生之初，数学家们对周期该如何定义存在着一定的分歧。

还有一种定义是基于函数的图像来描述周期性，如莫里兹（Moritz，1915）先定义：每隔一个确定区间重复自身的曲线称为周期曲线（periodic curve），发生重复的区间称为周期。然后称这种曲线所表示的函数即为周期函数[13]。盖伊（Gay，1935）的定义则为：若一个函数的图像由一系列形状完全相同的弧所构成，则称该函数为周期函数，x 轴上使曲线纵坐标取遍所有可能值的区间长度称为曲线的周期[14]。诚然，一个数学概念一开始总是建立在直观和经验上，但过分依赖几何直观容易导致致命的错误，且看下面两个简单的函数图像（图 5）：

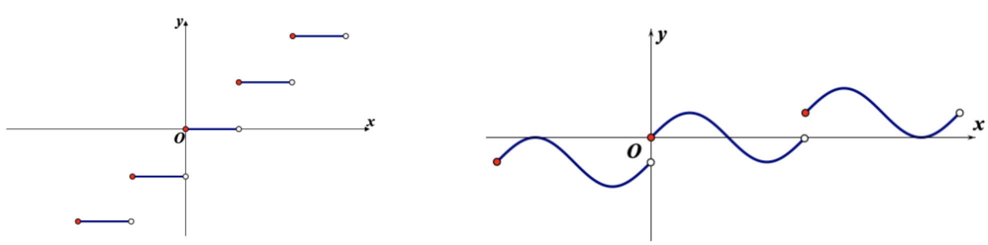


图 5 两个函数的图像

对照上述定义，两个曲线显都在重复自身，每一段弧的形状更是完全相同，按照莫里茨的

定义，它们都有确定的周期，但按照盖伊的定义，周期则是雾里看花，不知所云。事实上，借助构造分段函数的方法，我们可以画出很多满足上述定义的函数图像，但它们表示的未必是真正的周期函数。

综上，尽管上述定义适用于三角函数，但符号语言的缺位，定量刻画的缺失，导致此类定义未能清晰地界定一般周期函数概念的内涵，自然语言的滥用又使得概念的外延被错误地放大，导致周期的定义也不甚明朗。所以，此类描述性定义不符合数学的抽象性和严谨性，尔后不再被使用。

3.2 不完善的形式化定义

1899 年，穆雷（Murray）在《平面三角学》一书中首次用函数的符号语言给出了周期函数的定义：若函数 $f(x)$ 具有性质 $f(x)=f(x+k)$，其中 x 可取任意值，k 为常数，则称 $f(x)$ 为周期函数，而满足该等式的最小（正）数 k 称为该函数的周期[15]。该定义可以视作上文中帕尔默定义的符号代数版本，也是现行教科书中定义的雏型，但结合函数概念及其构成要素仔细推敲，该定义还存在一些可待商榷之处，比如：

（1）没有明确周期函数的定义域（根据下方的注释，可以推测穆雷默认周期函数的定义域为全体实数一）；

（2）认为周期函数的周期一定存在且只有一个，其在正数范围内取值。

此后，对于周期的讨论延续不断。罗森巴赫（Rosenbach，1937）指出：一个周期函数的周期的任意（整数）倍也是周期[16]。斯梅尔（Smail，1952）定义：使 $f\left(x\right)=f\left(x+P\right)$ 的绝对值最小的常数 P 为原始周期（primitive period）（又称基本周期，fundamental period）[17]。1955 年，怀利（Wylie）在《平面三角学》中首次明确了周期的非零性[18]。

上述工作解决了从三角函数的周期性抽象到一般周期函数过程中围绕周期产生的一系列问题，在三角学中，将角的终边旋转 0 圈自然是无意义的，然而一般化后，却极易忽略周期取值非零这一点。基本周期的概念，正对应着将终边旋转 1 圈的情形。

1940 年，德累斯顿在《微积分导论》定义周期函数如下：设函数 $f(x)$ 的定义域为 R（Range，表示取值范围），若对任意的 x，x 和 $x+P$ 都属于 R，且满足 $f\left(x\right)=f\left(x+P\right)$，则称 $f(x)$ 是周期为 P 的周期函数[19]。德累斯顿的定义表明：周期函数的定义域不需要为整个实数集 R，甚至

不需要是连续的区间，只要定义域至少有一侧无界即可。

符号语言的使用，使得周期性被确认为函数的重要性质之一，实现了周期函数从描述性定义到形式化定义的飞跃。但上述数学家的定义并非尽善尽美，比如：斯梅尔所说的基本周期一定存在吗？周期的取值范围到底是什么？此时期内，没有一个数学家给出了完整无误的周期函数定义。

3.3 较完善的形式化定义

1958 年，夏普（Sharp）集前人之大成，给出了较完善的周期函数定义：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D， k 为非零实数，当 x 在 D 中时， $x \pm k$ 也在 D 中。若对于 D 中 x 的每一个值，均有 $f(x)=f(x+k)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，数 k 称为 $f(x)$ 的一个周期[20]。与斯梅尔对基本周期的定义略有差异，夏普只取最小的正数 k 为基本周期，又称最小正周期（the smallest positive period），这与今日教科书中的说法相同。那么，最小正周期一定存在吗？夏普通过常值函数这一反例，简短有力地说明了周期函数不一定存在最小正周期。

夏普还指明了周期的取值范围是 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$，据此我们可以研究数学史上一个著名的函数——狄利克雷函数（Dirichlet Function）

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in Q\\ 0, x\notin Q\end{cases}$$

的周期性。

取任意有理数 $q \neq 0$，则当 x 为有理数时， $x+q$ 为有理数，有 $f(x+q)=1=f(x)$；当 x 为无理数时， $x+q$ 为无理数，有 $f(x+q)=0=f(x)$；所以，任意有理数都是狄利克雷函数的周期。取任意无理数 ∂ ，其相反数 $-\partial$ 为无理数，则 $f(-\partial)=0$ ，而 $f(-\partial+\partial)=f(0)=1$ ，即 $f(-\partial)\neq f(-\partial+\partial)$，所以，任意无理数都不是狄利克雷函数的周期。对狄利克雷函数周期性的讨论同样表明了周期函数的最小正周期不一定存在。

此外，夏普在书中还提出并证明了周期函数的若干定理：

定理 1 若周期函数 $f(x)$ 的周期为 k ，则 k 的任意非零整数倍也是 $f(x)$ 的周期。

定理 2 若函数 $f(x)$ 是周期为 k 的周期函数，则对任意的非零数 c ，函数 $f(cx)$ 是周期为 $\frac{k}{c}$ 的周期函数（x 均为自变量）。

定理 3 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为周期为 k 的周期函数，则函数 $h_1(x)=f(x)+g(x)$，$h_2(x)=f(x)-g(x)$，$h_3(x)=f(x)\times g(x)$ 及 $h_4(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ 仍为周期为 k 的周期函数。

夏普特别强调，定理 3 中的周期不可与最小正周期一概而论，即不能由函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最小正周期均为 k 而推出上述任何一个函数 $h_i(x)(i=1,2,3,4)$ 的最小正周期仍为 k。接着夏普不加证明地给出了下列定理：

定理 4 若周期函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最小正周期的比为（非零）有理数，则它们存在一个共同的周期，且上述函数 $h_i(x)(i=1,2,3,4)$ 仍为周期函数。

现行高中教科书定义周期函数如下："一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有 $f(x+T)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数。"[21]与该定义相比，夏普的定义要求 $x\pm k$ 必须都在定义域 D 中，势必导致周期函数的定义域在数轴的两侧都要无界，高等数学中许多教科书便采取了与之相似的定义。若取正弦函数的正半部分 $y=\sin x, x\in[0,+\infty)$，在此定义下它便不是周期函数。

两种定义孰对孰错？孰优孰劣？许多一线教师就此问题屡屡产生争鸣。综合、辨析他们的观点[22-23]，笔者认为：在高中阶段，学生只需理解周期函数的定义域是无界的，无需基于定义去考究其范围是至少单侧无界还是双侧无界，能针对具体问题情境具体分析即可。回到周期的起源，几乎所有具有周期性的自然现象都是从某一时刻开始的，如果采取后者，不承认仅单侧无界的函数的周期性，则大大削弱了周期函数的应用价值，也背离了运用三角函数构建事物周期变化的数学模型的出发点。考虑到初等数学与高等数学的衔接，或许数学工作者们应当将周期函数的定义进行适当的推广，如定义"弱周期函数"[24]等，以消释现行两种周期函数定义的矛盾。

4 结论与启示

综上所述，我们可以大致勾勒出周期函数概念的历史演进过程：

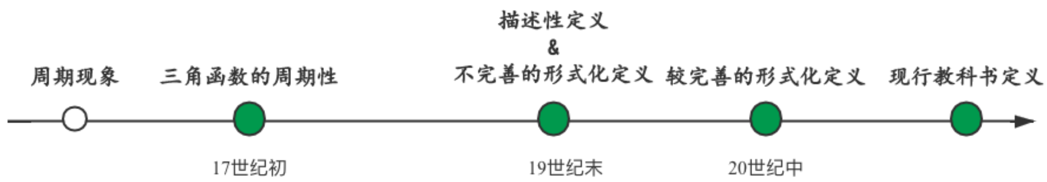


图 6 周期函数概念的历史演变

有诗云：东升西落照苍穹，影短影长角不同。昼夜循环潮起伏，冬春更替草枯荣。为准确刻画这些与现实生活息息相关的周期现象，数学家们首先建立起三角函数这一数学模型，而数学内外部的需求又推动着一般周期函数概念的诞生，其间经历了为时一百余年，由描述性定义、不完善的形式化定义到较完善的形式化定义的演变。直至今日，数学界对周期函数概念的定义仍未达成统一。

对周期函数定义的追本溯源、刨根问底，为当前高中数学教学提供了诸多启示：

其一，提供丰富的课堂教学素材。在最新一届的国际数学史与数学教育会议上，教育取向的数学史研究超过了三分之一[25]。研读与梳理原始史料，特别是西方早期数学教科书的原文，为一线教师提供了最贴近中学教学实际的历史素材，能够用于预测和解释学生的的学习困难，精准设计教学过程。已有的实证研究[26]也表明：融入数学史的周期函数教学，不仅能够加深学生对概念本质的理解，更能帮助学生树立动态的数学观。

其二，培养严密的数学抽象素养。数学抽象是数学的基本思想，而数学史让我们看见，人们正是从自然界中的周期现象中逐步抽象出周期函数的数学概念，最初过分依赖直观和经验让数学家们走了一些弯路，但经过数代人的不懈努力，最终形成了较完善的定义。以史为鉴，可以让学生在辨析历史中积累从具体到抽象的经验，以新代旧，跨越历史，深刻地体会数学的严谨性与抽象性。

其三，开展跨学科的数学建模活动。人教版教科书以我国古代发明的一种灌溉工具——筒车为例，筒车上盛水筒的运动具有周期性，因此可以用三角函数建立盛水筒运动的数学模型[21]。天文学中的天体运动，物理学中的交变电流，医学中的心电图，艺术中的音调音色，这些都呈现出周期变化的特点，能够用于开展数学建模活动，且学生仅有数学中三角函数和周期函数的知识是远远不够的，还需要他们广泛调动其他学科的知识来建立并检验模型。在课时允许的情况下，数学教师可以与其他学科的教师合作，走进校内实验室或者校外更广阔的实践天地，让

数学建模素养的培育落地生根。

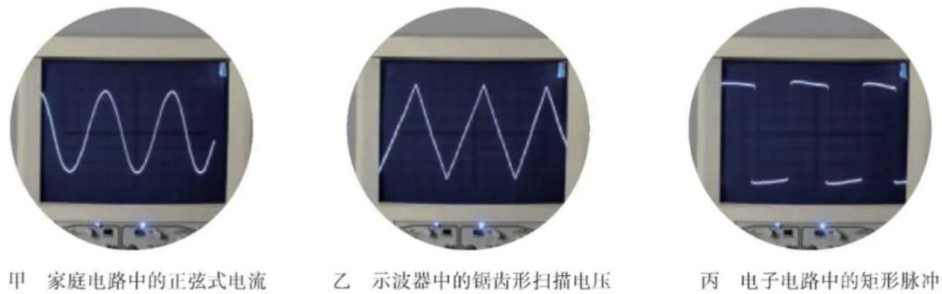


图 7 几种交变电流的波形（人教版物理选择性必修二）

其四，尝试高观点下的数学教学。上文讨论了数学史上的著名函数——狄利克雷函数的周期性，这实则是大学微积分教科书中的习题。曾有教师将其呈现为课堂例题，少数学生可以当堂给出完整的证明，在教师引导下，多数学生可以理解证明的过程和结论，无形间提升了逻辑推理素养。若有学生在经历了周期函数定义的演变后产生“现在书中的定义一定准确吗”等疑问，教师不妨呈现高等数学中的另一定义，引导他们辨析二者的异同，或许对学生批判性思维的培养能够有所增益。

参考文献

[1] V·卡茨. 数学史通论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[2] 李冶. 敬斋古今黈[M]. 北京：中华书局, 1995.

[3] M·克莱因. 古今数学思想（第 2 册）[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2014

[4] Cajori, F. *A History of Mathematics*[M]. New York: The Macmillan Company, 1919.

[5] Euler, L. *Introduction to Analysis of the Infinite, translated by J. D. Blanton*[M]. New York: Springer, 1988.

[6] Wheeler, H. N. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Heath, 1877.

[7] Oliver, J. E. *A Treatise on Trigonometry*[M]. Ithaca, N.Y.: Finch & Apgar, 1881.

[8] Wilczynski, E. J. *Plane Trigonometry and Applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914.

[9] Granville, W. A. *Plane and spherical Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1909.

[10] Dresden, A. *Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1921.

[11] Durfee, W. P. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1900.

[12] Palmer, C. I., Leigh, C. W. *Plane Trigonometry with Tables*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1914.

[13] Moritz, R. É. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915.

[14] Gay, H. J. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Ann Arbor: Edwards Brothers, 1935.

[15] Murray, D. A. *Plane Trigonometry for Colleges and Secondary Schools*[M]. New York: Longmans, Green & Company, 1899.

[16] Rosenbach, J. B., Whitman, E. A., Moskovitz, D. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1937.

[17] Smail, L. L. *Trigonometry, Plane and Spherical*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1952.

[18] Wylie, C. R. *Plane Trigonometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955.

[19] Dresden, A. *Introduction to the calculus*[M]. New York: H. Holt & Company, 1940.

[20] Sharp, H. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1958.

[21] 章建跃. 普通高中教科书 • 数学（必修第一册）[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.

[22] 史嘉, 陆学政, 韦兴洲. 评析问题 223[J]. 数学通讯, 2013(7): 35-36.

[23] 蔡悦. 不同版本周期函数概念的解析·比较·疑惑[J]. 中学数学, 2018(01): 5-6.

[24] 潘劲松, 童丽娟. 关于周期函数定义的研究[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 2012, 35(01): 21-26.

[25] 邹佳晨, 沈中宇, 汪晓勤. 架设沟通数学史与数学教育的桥梁——基于 HPM-2016 的文献分析[J]. 数学通报, 2020(12): 14–19+40.

[26] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与高中数学教学——理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020.

教学实践

双曲线的历史与高三复习课教学

张佳淳[1] 舒适[2] 秦语真[1]

（1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2.上海市市北中学，上海 200071）

1 引言

高三双曲线复习课第一课时主要围绕“双曲线及其标准方程”、“双曲线的性质”等知识点进行系统梳理与知识巩固。其中，“双曲线的标准方程”与“双曲线的性质”是沪教版高中数学教科书第 12 章第 5-6 节的内容。纵观上海教科书的内容编排，双曲线是椭圆之后的又一类圆锥曲线，是从“曲线方程”视角下来研究的重要二次曲线之一。

教科书在“本章小结”的拓展阅读部分介绍了“圆锥曲线”名称的由来，但学生对此认识并不深刻。由于高三学生对于双曲线已具备一定的认知基础，倘若从数学史角度引入，通过定义及标准方程的深刻挖掘与探究，厘清知识发展脉络，就能回答学生提出的“为什么双曲线称为圆锥曲线”、“为什么方程 $xy=1$ 表示双曲线”等问题，也能帮助学生厘清双曲线的来源，开阔其学科视野。

有鉴于此，我们尝试从 HPM 视角来设计“双曲线高三复习课（一）”的教学，旨在通过数学史问题的解决，落实双曲线定义、方程推导及性质应用的复习巩固，构建知识之谐，彰显方法之美，实现能力之助，展示文化之魅。

2 历史材料及其运用

2.1 双曲线的定义

随着 17 世纪解析几何的创立，西方涌现了一大批解析几何视角下的圆锥曲线著作，其中呈现了各种各样的双曲线定义方式。

第一种是原始定义，即“平面截一圆锥面，当截面与圆锥面的母线不平行也不通过圆锥面顶点，且与对顶圆锥都相交时，交线称为双曲线[1]”；第二种是第一定义，即“平面内到两个定

点的距离之差的绝对值为常数（小于这两个定点间的距离）的点的轨迹称为双曲线”[2]；第三种是第二定义，即“平面内到给定一点及一定直线的距离之比为常数 e（e>1）的点的轨迹称为双曲线”[3]；第四种是基于方程的定义，即“二元二次方程

$$F(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

满足 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时[4]，或

$$F(x,y)=Ax^2+By^2+C=0$$

满足 $AB<0$[5]时，其图像为双曲线。

以上四种定义中，原始定义由阿波罗尼奥斯（Apollonius, 262 B.C.? -190B.C.?）提出，说明圆锥曲线是“来自立体的轨迹”；第一定义落实教材复习；针对第二定义，教师可联系抛物线，因为对于抛物线而言 $e=1$，用联系的观点，拓宽学生视野；对于第四个定义，可以 $xy=1$ 为例，用方程定义的视角说明其图像是双曲线，建立初、高中知识的对接。因此，通过历史上的四类定义，可以让学生建立起比较完整的知识体系。

2.2 双曲线第一定义的诞生

法国数学家拉希尔（P. de Lahire, 1640-1718）在《圆锥曲线新基础》（1679）一书中给出了双曲线的第一定义，这是有关文献记载中第一定义的首次出现。

1822 年，比利时数学家旦德林（G. P. Dandelin, 1794-1847）在一篇论文中利用圆锥的两个内切球，在圆锥上推导出双曲线的第一定义[6]，从而在古希腊阿波罗尼斯的截面定义和 17 世纪拉希尔的第一定义之间架起了一座桥梁。

2.3 双曲线标准方程的推导

历史上，除了今天人们耳熟能详的“两次平方法”外，数学家还采用了多种其他方法来推导双曲线的标准方程。

17 世纪法国数学家洛必达（G. de L’Hospital, 1661-1704）在《圆锥曲线分析》（1707）中采用“和差术”来推导双曲线标准方程[7]。如图 1 所示，由第一定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，故设 $|PF_1|=u+a, |PF_2|=u-a$，其中 u 为待定参数。根据两点间距离公式可得：

$$|PF_1|^2=(u+a)^2=(x+c)^2+y^2 \quad (1)$$

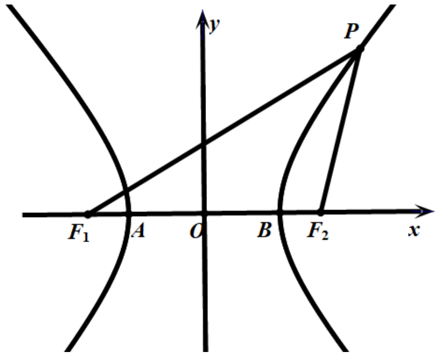


图 1 基于第一定义的双曲线方程推导

$$|PF_2|^2=(u-a)^2=(x-c)^2+y^2 \qquad (2)$$

由（1）–（2）和（1）+（2）分别得$u=\dfrac{cx}{a}$和$a^2+u^2=y^2+c^2+x^2$，将前式代入后式，并令$c^2-a^2=b^2$，即得双曲线方程。

19 世纪英国数学家赖特（J. M. F. Wright）在《圆锥曲线与其他曲线的代数体系》（1836）中给出“平方差法”。[8]如图 1，不引入参数 u，直接由（1）–（2）得：

$$|PF_1|^2-|PF_2|^2=\left(|PF_1|+|PF_2|\right)\left(|PF_1|-|PF_2|\right)=4cx$$

因$|PF_1|-|PF_2|=2a$，故$|PF_1|+|PF_2|=\dfrac{2cx}{a}$，于是得焦半径公式

$$|PF_1|=\frac{cx}{a}+a,|PF_2|=\frac{cx}{a}-a \qquad (3)$$

代入（1）或（2），即得双曲线标准方程。

19 世纪数学家皮尔斯（J. M. Peirce）在《解析几何教科书》（1857）中用余弦定理来推导双曲线方程[9]。如图 1，设$\angle PF_1F_2=\varphi$，$|PF_1|=r$，由余弦定理得$|PF_2|=\sqrt{r^2+4c^2-4cr\cos\varphi}$，故由第一定义得$|PF_1|-|PF_2|=r-\sqrt{r^2+4c^2-4cr\cos\varphi}=2a$，化简得双曲线标准方程。

除了两次平方法作为教材中的方法需加以复习巩固外，平方差法与第一定义紧密联系，可以设计问题加以落实，而和差术、余弦定理法可以让学生认识到推导双曲线标准方程的不同路径，拓宽思维，建立不同知识之间联系。

2.4 双曲线作图法的出现

17 世纪荷兰数学家舒腾（F. V. Schooten, 1615-1660）在其《几何练习题》中设计了双曲线

的两种作图工具[10]，如图 2~3 所示，这两种工具均利用了双曲线的第一定义。

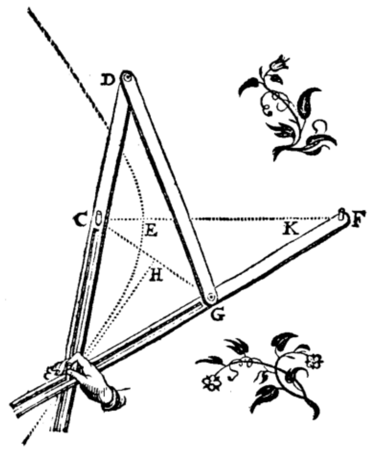


图 2 舒腾的第一种双曲线规

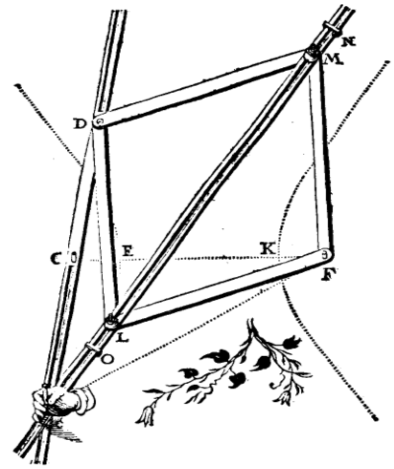


图 3 舒腾的第二种双曲线规

让学生思考舒腾的第一种双曲线规为什么能画出双曲线的一支，既回顾双曲线的第一定义，同时提高逻辑推理和直观想象素养。

2.5 双曲线的现实应用

光学应用：从双曲线一个焦点发出的光，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线都汇聚到双曲线的另一个焦点上[11]。因此，可以利用双曲线的光学性质来制作望远镜。

建筑学应用：双曲线在图形学上叫做贝塞尔曲线（Bezier curve），它是最利于流体流动的一种曲线。热电站、核电站的冷却塔都采用双曲线的结构，利用循环水自然通风冷却，以使得冷却器中排出的热水在其中冷却后可重复使用[12]。

军事应用：双曲线在通信定位上也有广泛的应用。利用双曲线上的点到两个点的距离是个定值，根据两条双曲线的交点可以确定位置。同时，双曲线也被应用于雷达[13]和导航[14]中，如Loran（Long Range Navigation）系统。

3 教学设计与实施

3.1 引入：双曲线规与第一定义

上课开始，教师介绍荷兰数学家舒腾的生平及其在传播笛卡儿解析几何思想方面的贡献，并通过改编自舒腾双曲线规的问题引入课题。

例 1 17 世纪荷兰著名数学家舒腾设计了一种双曲线规，如图 2 所示。直杆 FG 的一端固定于点 F 处（可绕 F 转动），直杆 DC 固定于点 C（可绕 C 转动），直杆 DG 的两端分别用铰链固定于点 D 和点 G，$DG=CF$，$FG=DC$，FG 和 DC 的延长线上带有滑槽。于是，在 FG 和 DC 相交处用笔带动二杆，证明：笔尖（P 点）所画出的轨迹是双曲线的左支。

师：我们要证明点 P 的轨迹是双曲线的左支，因为舒腾双曲线规是根据第一定义设计的，那么点 P 到哪两点的距离之差为定值？

生 1：PF 减去 PC 是一个定值。

师：怎么证明？由 $DG=CF$，$DC=FG$，能推出什么？

生 2：三角形 DCG 与三角形 FCG 全等。

师：能推出什么结论？推出 $\Delta DCG \cong \Delta FGC$ 对吧？然后推出什么？

生 2：$\angle DCG=\angle FGC$，所以$\angle GCP=\angle CGP$，$CP=GP$。

师：那 $PF-PC$ 实际上就是什么？

生 2：就是 GF 或 DC。

师：所以点 P 满足双曲线的第一定义，其轨迹为双曲线的一支。下面我们回顾一下双曲线的第一定义。

在学生叙述双曲线第一定义之后，教师让学生辨析常数 $2a$ 不小于$|F_1F_2|$以及 $a=0$ 时的动点轨迹，并通过以下练习题来巩固对第一定义的理解。

练习1 判断下列方程是否表示双曲线，并说明理由。

（1）方程 $\sqrt{(x+5)^2+y^2}-\sqrt{(x-5)^2+y^2}=10$；

（2）方程 $\sqrt{(x+3)^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\pm 4$。

3.2 回望：历史上的双曲线定义

师：翻开数学史的画卷才发现，第一定义只是双曲线概念发展过程中的一个片段。公元前 3 世纪，古希腊数学家阿波罗尼奥斯就用一个平面去截一个圆锥面，当截面与圆锥面的母线不平行，也不通过圆锥顶点，且与对顶圆锥都相交的时候，截面与圆锥面的交线就是双曲线，所以双曲线也被称为“来自立体的轨迹”。阿波罗尼奥斯的截线定义与今天教科书所采用的第一定义是否等价呢？大家要思考一下。

师：我跟大家多次提到的 17 世纪法国数学家拉希尔，他在 1679 年首次明确提出双曲线的第一定义，这在我们所见的文献中他是第一人。还有一种定义就是第二定义，那么请大家思考。

例 2 第二定义中如果 $e=1$，也就是动点到一个定点和定直线的距离之比等于 1，那么动点的轨迹是什么？

生：抛物线。

师：历史上还有一种定义，即方程定义，形如 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 的方程当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时所表示的曲线为双曲线，那么根据方程定义，如何解决以下问题？

例 3 初中所学的反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像为什么是双曲线？

师：将解析式写成方程 $xy-1=0$ 的形式，我们看看它是否满足 $\Delta>0$？（板书）$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times0\times0>0$。所以反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像是双曲线，旋转一下就是标准形式的双曲线了。那怎么旋转，怎么转化成标准形式，用什么？

生 3：用矩阵。

师：所以从方程的角度看，$y=\dfrac{1}{x}$ 表示双曲线。好，所以基本上有四种定义，而我们之前只学了其中的一种。那么下面我们就要研究它的标准方程了。

接下来，教师引导学生用两次平方法推导焦点在 x 轴上的双曲线的标准方程，并类比得到焦点在 y 轴上的标准方程。

3.3 应用：双曲线的价值

师：双曲线的应用非常广泛，比如二战时期用于定位。比如说，有只船在这里（图 4 中的点 P），然后通过主发射塔与副发射塔（教师标出图 4 中点 A 和 B）同时发射脉冲信号，利用点 P 处接收信号的时间差算出船到两点的距离差，实际上是双曲线的什么？

生 6：实轴长 $2a$。

师：$2a$ 知道，两个发射塔的距离 $2c$ 也知道，那么就可以确定双曲线。然后再设一个副台（教师标出图 4 中点 C），从副台 B 与副台 C 同时发射信号，根据点 P 处接收信号的时间差，再确定另一条双曲线。那么通过两条双曲线的交点就可以把轮船的位置算出来。

接着教师讲解冷却塔与双曲线的声、光学性质。

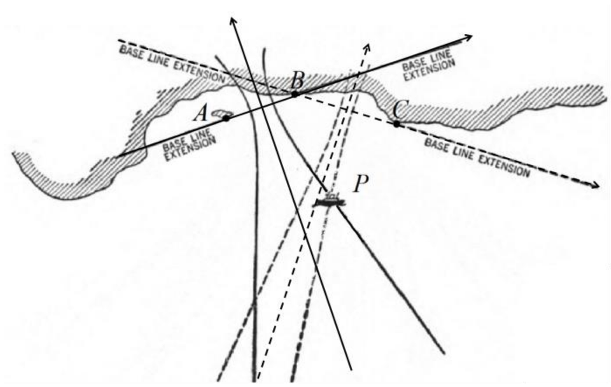


图 4 双曲线在军事上的应用

师:双曲线有如此广泛的应用,所以我们接下来要像费马一样更深入地研究双曲线的性质。

3.4 研究：旦德林双球模型

教师引导学生通过代数方法，从双曲线方程入手研究双曲线的几何性质——对称性、顶点 、范围、渐近线等性质。

师：以$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$为例，你说说看有什么性质？

生 7：这是偶函数。

师：是函数吗？

生 7：哦，不是。哦，它关于 y 轴对称。

师：为什么关于 y 轴对称，你要用代数去证明。

生 7：把$(-x, y)$代进去。

师：那它也关于 x 轴对称，把什么代进去？

生 7：$(x,-y)$。

师：代入方程也成立是吧，那它还关于原点对称，把什么代进去？

生 7：$(-x,-y)$。

……

师：所以双曲线的性质不是看图得出来的，而是要用代数方法研究出来的。因为当你研究一个陌生的方程时，你可能不清楚它的图形是什么样的，所以你要依靠方程去研究它的性质。

接着，教师对等轴双曲线和双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda(\lambda\neq 0)$ 的渐近线方程进行了讲解，并通过练习题 2 进行巩固。

练习 2

（1）以 $y=\pm\sqrt{3}x$ 为渐近线，一个焦点是 $F(0,2)$ 的双曲线方程为（　　）

$A.\ x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　$B.\ x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　$C.\ \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{\sqrt{3}}=-1$　　$D.\ \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{\sqrt{3}}=1$

（2）求与双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 共渐近线且过 $A\left(3\sqrt{3},-3\right)$ 的双曲线的方程。

例 4　如图 5，一对对顶圆锥中各有一球与圆锥内表面相切，现用一个与圆锥底面所在平面 α 垂直的平面 β 去截圆锥，且平面 β 与两球分别相切于点 F_1 和 F_2，点 P 在平面 β 与圆锥的交线上。求证：点 P 的轨迹是双曲线。

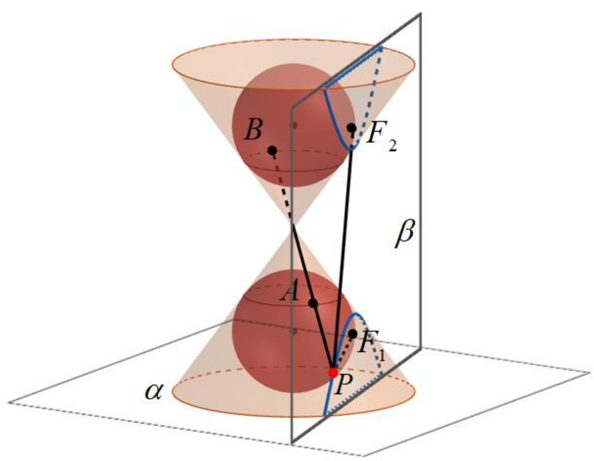


图 5　旦德林双球模型

师：你们觉得哪两个点是焦点？

生 8：感觉是 F_1 和 F_2 两个点。

师：那么我们就要证明 P 点到两个点 F_1 和 F_2 的距离之差，即 $\left|PF_2-PF_1\right|$ 是定值吧？

生 8：是的。

师：我问你一个问题，数学史上这么多年，只有一个人想到了。请问什么叫“球和圆锥相切”啊？

生：（思考。）

师：（教师用手比划模型中位于下方的球）这个球和这个圆锥的什么相切？什么线？

生 8：与母线相切。

师：与母线相切，这是非常关键的一点，因为 P 点在圆锥面上，所以这个 P 点肯定在某条母线上，那母线一定是穿过这个圆锥的顶点，那 PB 就是球的切线，PF_2 也是球的切线，这两条线段有什么关系啊？（教师画草图辅助演示）圆外一点如果引两条切线，切线长相等，那么球外一点引同一个球的两条切线呢？

生 8：也相等。

师：那么刚刚说的 PF_2 等于什么？

生 8：$PF_2 = PB$。

师：同理，PF_1 也是切线，PA 也是球的切线，那么有什么？

生 8：$PF_1 = PA$。

师：所以$|PF_2 - PF_1|$等于什么？

生 8：$|PB - PA|$。

师：$|PB - PA|$也就是等于？

生 8：AB。

师：AB 是什么？

生 8：AB 是上面的小圆锥母线长加下面的小圆锥的母线长，长度是定值。

师：这就是旦德林双球模型，其实两个球的半径不一样也是可以的。距今 2300 年前，古希腊时期，数学家们用平面去切圆锥，得到了圆锥曲线。当我们理解了证明过程，就理解了旦德林双球模型，从模型中导出了第一定义，在原始定义和第一定义之间架起了一座桥梁，也就知道了双曲线的焦点是怎么来的。

例 5 已知双曲线$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$上一点 P 到双曲线的一个焦点的距离为 9，求它到另一个焦点的距离。

生 9：答案是 15 或 3。

师：为什么？

生 9：按照定义，所以一个是 15 一个是 3。

师：他考虑到定义中的绝对值，非常严谨哦。那如果把题目中点 P 到焦点的距离改成 2，答案又是多少？这时我们要审视一下双曲线上的点到焦点的距离。双曲线上的点到焦点的距离用什么公式呢？

生：（思考。）

师：那椭圆上的点到焦点的距离用什么公式？

生 10：焦半径公式。

师：可是，焦半径公式又是如何得到的呢？让我们一起推一推。（教师通过板书，利用赖特的平方差法推导双曲线焦半径公式）

师：上述方法称为平方差法。借用平方差法的结论，在本题中不妨设 F_1 是左焦点，$|PF_1|=\frac{5}{3}x+3$，$|PF_2|=\frac{5}{3}x-3$，本题没有说点 P 是在哪一支，就要分析一下 P 和 F_1 会不会在 y 轴的同侧或异侧？假设点 P 在右支，如果是 $|PF_1|=\frac{5}{3}x+3=2$，解出来 x 是负值，因此只能 $|PF_2|=\frac{5}{3}x-3=2$，因此到另一个焦点的距离是多少？

生：是 8。

师：对，只有一个解，是 8，我们也可以用这个办法去检查为什么刚才那道题两个答案都可以。因为假设点 P 在右支，$|PF_1|=\frac{5}{3}x+3$、$|PF_2|=\frac{5}{3}x-3$ 都可以取 9，但是刚才点 P 到焦点的距离为 2 时只能解出一种情况。

师：我们刚才了解了平方差法，我们看数学史上有四种推导方法，除了两次平方法和平方差法，还有洛必达法，法国数学家洛必达也是引入了一个“$u+a$”和一个“$u-a$”，但是这个方法生命力不强，因为其技巧性非常强，谁会想到引入 u，所以生命力强的一定是被大众接受的，就是两次平方法和平方差法；还有余弦定理法，我们班的某同学在解题时就用了余弦定理，有可能你将来会成为数学家。

3.5 小结：主题的升华

教师结合双曲线的历史和应用，写下以下文字作为课堂小结：

在漫长的一千多年时间里，古代数学家们致力于用纯几何的方法研究圆锥曲线的性质。之后因为几何问题不断推广，涌现出越来越多无法解决的复杂情况。直到笛卡儿发明平面直角坐

标系，圆锥曲线的研究才步入一个新时代——从代数视角、解析方法研究几何性质的时代。也希望同学们不断运用数学史中的方法去解决问题，甚至是提出问题，不断完善和创新！最后用一首我自己写的诗结束这节课：

来自于立体的轨迹，

经历了几何和代数的前世今生！

古希腊人给出了原始定义，

舒腾为它的生成制作了工具，

旦德林球跨越了鸿沟，

填平了第一定义和原始定义之间的缝隙。

代数说透了它的属性，

双臂虽不能包揽一切，

却总能拘谨持续向着远方梦想迈进！

军事、工业上有重要应用，

它的故事需要你我继续！

4 结语

数学史融入高三课堂的落脚点是问题解决，因此教师可以将数学史高位的方法和视角与学生的实际情况相结合，从而设计有内在逻辑关联的数学问题串。图 6 呈现了双曲线史料与本节课所用问题串之间的关系。

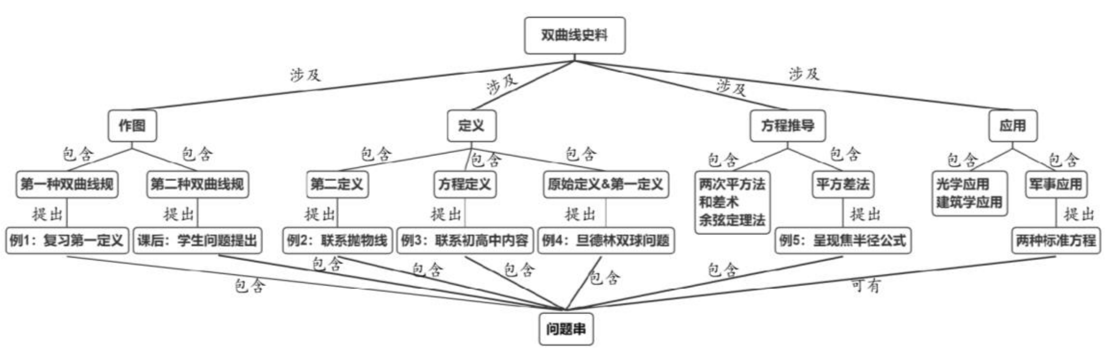


图 6 双曲线史料与问题串的关系

为了设计基于数学史的问题串，本节课采用了自由式、条件式、复制式、对称式[15]等问题

提出策略。首先，教师希望解决原始定义与第一定义之间的鸿沟，但从学生心理序而言，并不适合在课堂伊始就展示旦德林球，因为学生不清楚为什么会出现旦德林球。所以教师先采用自由式策略，根据第一种双曲线规的使用方法，自行设定条件和目标提出例题 1，旨在复习巩固第一定义。其次，教师认为在通过问题解决剖析四种定义，有了宏观视野之后，再呈现旦德林双球模型，才能使得学习水到渠成。所以教师采用条件式策略，改变双曲线第二定义中关键属性 e 的取值范围，并且将方程定义中曲线方程的一般形式特殊化，从而改编得到例题 2 和例题 3。接着，教师采用复制式策略，让学生通过例题 4 经历旦德林当年攻克原始第一与第一定义关联的过程，由此让学生看到数学家勤奋、刻苦的品质和数学演进发展的过程，传递数学人文性的一面。最后，为了呈现焦半径公式如何推导以及如何应用，教师将推导双曲线方程的条件与结论互换，利用对称式策略提出已知方程求焦半径的例题 5，从而揭示焦半径公式这一知识之源。另外，为了充分运用史料，教师还将第二种双曲线规作为课后阅读材料，要求学生根据史料提出数学问题，帮助学生在问题提出的过程中检视自己的学习结果。

总之，此次双曲线高三复习课的教学从历史出发设计出一系列问题，同时按照教科书“从定义到代数方程，再到利用解析几何思想研究双曲线性质及其应用”的逻辑顺序，将问题串联成线。最终，以温故知新为目标，丰富学生对双曲线的概念意象；以问题解决为途径，提升学生数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算等素养；以数学文化为抓手，鼓励学生像舒腾、旦德林等数学家一样善于思考、严谨求实，增强高三学生的自信心，渗透数学的科学价值、应用价值与文化价值，落实立德树人根本任务。不过，本节课中，若执教者将军事应用中的两条双曲线特殊化，使其焦点分别位于 x 轴和 y 轴上，由此设计相关问题，则可实现数学史的更丰富的教育价值。

参考文献

[1] Young, J. W. A. *Plane and solid analytic geometry* [M]. New York: Macmillan, 1921: 124-12.

[2] Young, J. R. *The Elements of Analytical Geometry* [M]. Philadelphia, Carey, Lear & Blanchard, 1835: 95-100.

[3] Wentworth, G. A. *Elements of analytic geometry*[M]. Boston, Ginn & company, 1891: 87-91

[4] Davies, C. *Mathematical Dictionary and Cyclopedia of Mathematical Science*[M]. New York: A. S.

Barnes & Co., 1856: 293-297.

[5] Runkle, J. D. *Elements of Plane Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1888: 178-185.

[6] Smith, E. S. *Analytic Geometry*[M]. New York Wiley, 1954: 52-55; 96-102.

[7] L' Hospital M. de. *Traité Analytique des Sections Coniques*[M]. Paris: Montalant, 1720: 22-25.

[8] Wright, J. M. F. *An Algebraic System of Conic Sections & Other Curves*[M]. London: Black & Amstrong, 1836:94-95

[9] Peirce, J. M. *A text-book of analytic geometry*[M]. Cambridge: J. Bartlett, 1857:113-120.

[10] van Schooten, F. *Exercitationum Mathematicarum*[M]. Lvgd Batav: Johannis Elsevirii, 1657: 321-361.

[11] Claudel, J. *Handbook of Mathematics for Engineers and Engineering Students*[M]. New York: McGraw Publishing Company, 1906: 511-514.

[12] Kaltenborn, H. S. *Meaningful Mathematics*[M]. New York: Prentice-Hall, 1951: 293-300.

[13] Taylor, A. E. *Calculus, with Analytic Geometry*[M]. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1959: 146-151.

[14] Nathan, D. S. *Analytic Geometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1947: 153-155.

[15] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020, 59(05): 9-15.

HPM 视角下的“一元二次方程根与系数关系”同课异构课例研究

司 睿[1] 余庆纯[2]

（1 华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2 华东师范大学 数学科学学院，上海 200241）

1 引 言

“一元二次方程根与系数关系”（韦达定理）是沪教版数学九年级拓展Ⅱ第一章“一元二次方程与二次函数”第一节的内容。《义务教育数学课程标准》指出：了解一元二次方程的根与系数的关系[1]。现行不同版本的教科书在该主题的呈现上互有不同（见表 1）。

表 1 “一元二次方程的根与系数关系”在三版教科书中的呈现

版本	教科书位置	引入方式	证明方法
人教版	九年级上册“一元二次方程”章	直接给出	求根公式法、因式分解法
北师大版	同人教版	通过解方程发现规律	求根公式法
沪教版	九年级拓展II“一元二次方程与二次函数”章	同北师大版	同北师大版

已有的教学设计大多依照教材的思路展开，未能揭示韦达定理的重要性、必要性和蕴含的思想。走进定理的历史，才能了解数学家证明定理时真正采用的思想方法。鉴于此，HPM 学习共同体开展韦达定理的课例研究，将历史序、逻辑序和心理序统一起来，引导学生经历韦达定理的发现、探究、证明过程，发挥数学史的多元教育价值。教师 A 与 B 分别执教了本节课。

课例研究前期，A 和 B 研读韦达定理的史料，完成初步的教学设计；然后通过 HPM 专业学习共同体的网络研讨，修正各自的教学设计并开展第一轮教学；之后，执教者与高校研究者举行在线研讨，进一步改进教学设计，并实施多次试教；最后两位教师在 B 所任教学校的八年级实施正式教学。学生在八年级第一学期已经学习了一元二次方程的解法以及应用，并且已经初步接触过两根之和、积与方程系数的关系。

本文从宏观和微观两个层面，对教师 A、B 的教学进行比较分析，旨在回答以下问题：两位教师如何选取与运用史料？他们的课堂教学分别体现了数学史的哪些价值？两节课各有哪些特色？

2 历史材料及其运用

1545 年，意大利数学家卡丹（G. Cardano, 1501-1576 年）在研究三次方程求根公式时发现方程的根与系数的规律。1554 年，法国数学家佩勒蒂耶（J. Peletier, 1517-1582）发现方程的根总是常数项的某个因数。1572 年，意大利数学家邦贝利（R. Bombelli, 1526-1572）在《代数》中也给出与卡丹类似的结论。[2]因此，在韦达（F. Viète, 1540-1603）以前，数学家已经发现了方程的根与系数之间存在密切联系。

1591 年，法国数学家韦达第一次以定理的形式给出具有两个正根的一元二次方程的根与系数关系：方程 $-x^2+px=q(p,q>0)$ 的两根之和为 p，两根之积为 q。韦达的证明如下：设方程的两个根分别为 x_1 和 x_2，则有

$$-x_1^2+px_1=q \qquad (1)$$

$$-x_2^2+px_2=q \qquad (2)$$

由（1）和（2）可得

$$-x_1^2+px_1=-x_2^2+px_2$$

$$p(x_1-x_2)=x_1^2-x_2^2$$

韦达并未考虑重根的情况，由此得到 $x_1+x_2=p$，将其代入（1）或（2）得 $x_1x_2=q$[3]。因此，后人把一元二次方程根与系数关系称为“韦达定理”。

1629 年，荷兰数学家吉拉尔（A. Girard, 1595-1632）在《代数新发明》中讨论了一般 n 次方程根与系数的关系，并将韦达的结论进行推广[3]：若一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 两根分别为 x_1 和 x_2，则无论这两个根为正数、负数还是虚数，或者是否相等，都有 $x_1+x_2=-p$，$x_1x_2=q$。英国数学家哈里奥特（T. Harriot, 1560-1621）和沃利斯（J. Wallis, 1616-1703）也分别在各自的著作中探讨了方程根与系数的关系。[2]

18 世纪，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《代数基础》中给出根与系数关系的严格的证明[4]：一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根分别为 x_1 和 x_2，则原方程可表示为

$(x-x_1)(x-x_2)=0$，即

$$(x-x_1)(x-x_2)=x_1^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=x^2+px+q$$

比较系数可以得到 $x_1+x_2=-p$， $x_1x_2=q$。

18 世纪，法国数学家拉克洛瓦（S. F. Lacroix，1765-1843）在其《代数基础》中给出一种新的证明方法[5]：设一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根为 x_1，根据等式的意义有

$$x^2+px+q=x_1^2+px_1+q$$

移项化简有

$$(x-x_1)(x+x_1+p)=0$$

于是得另一个根 $x_2=-x_1-p$，故有 $x_1+x_2=-p$， $x_1x_2=x_1(-x_1-p)=-x_1^2-px_1=q$。

19-20 世纪的英美早期教科大多采用求根公式法来导出根与系数关系：方程 $x^2+px+q=0$ 的两根分别为 $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$， $x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$，则 $x_1+x_2=-p$， $x_1x_2=q$。

19 世纪，苏格兰数学家华里司（W. Wallace, 1768-1842）在《大英百科全书》“代数学”辞条中，应用韦达定理来推导求根公式。[6]设一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根分别为 x_1 和 x_2，由韦达定理知 $x_1+x_2=-p$， $x_1x_2=q$。因 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=p^2-4q$，故得 $x_1-x_2=\pm\sqrt{p^2-4q}$，于是有 $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$， $x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$。

3 宏观比较

3.1 教学目标

A 和 B 拟定的教学目标基本相同，具体如下：

（1）经历观察、分析、发现与证明一元二次方程的根与系数关系的过程，获得探索“韦达定理”的体验，提高分析、归纳、推理论证的能力；

（2）在一元二次方程根与系数关系的探究活动和解决问题的过程中体会特殊到一般、化归、

整体代入、分类讨论等思想方法。

此外，A 增加了一个目标：在韦达定理证明的探究过程中，体会“设而不求”的数学思想，感受韦达定理的简洁美；B 增加了一个目标：了解根与系数关系的发展史，感受数学文化的魅力，在推导定理的过程中培养学生的质疑精神。

A 和 B 的教学重、难点略有不同。A 的教学重点是韦达定理证明方法的探究，难点是定理的运用；B 的教学重点是韦达定理的证明与运用，难点是定理的证明。

3.2 教学过程

A 和 B 的教学过程均由五个环节构成，具体信息见表 2。A 依据课前布置的学习单，在

表 2　A 和 B 的教学过程比较

环节	教师 A	教师 B
活动引入	任务：求解 8 个一元二次方程并计算两根之和与积（课前已完成），总结根与系数的关系，并思考：所总结的关系可以作为一个定理使用吗？	（1）回顾：呈现一元二次方程思维导图； （2）问题：已知一元二次方程的两个根分别为 2 和 4、2 和 x_1、x_1 和 $2x_1$，要求写出方程，观察上述方程，你能得到什么结论？ （3）游戏：根据条件匹配合适方程
定理探究	（1）引导学生探究韦达定理的不同证明方法； （2）对证明方法进行古今对照，并总结各方法的特点； （3）利用韦达定理推导求根公式	（1）探究二次项系数为 1 的韦达定理的证明； （2）古今对照，总结不同证明方法的特点； （3）讨论一般二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根与系数的关系； （4）播放微视频，追溯根与系数关系的历史
学以致用	探究一元三次方程根与系数关系	不解方程，写出方程两个实数根的和与积： （1）$x^2-4x+2=0$；（2）$-3x^2=x-4$
课堂小结	让学生总结韦达定理的基本内容以及本节课所学的数学思想方法	让学生总结本节课所学的知识和方法
课后作业	数学写作：韦达定理的发现	—

课堂上围绕逐步深入的四个问题——“规律是什么”、“特例是否可以作为定理”、“如何证

明定理”、“有多少不同的证明方法”展开，定理探究环节，渗透 “因式分解”、“比较系数”、“代入相减”、“分类讨论”等方法，并强调了“设而不求”的思想。应用环节设置的三次方程问题，目的是检验学生对教学中所渗透的数学思想方法的掌握程度。B 从方程的根着手，让学生寻找根与系数之间的内在联系。通过搭建的有关一元二次方程知识的“脚手架”，引导学生探究韦达定理的证明。

A 为学生提供了更为丰富的探究机会，总结证明方法的过程中强调运用的数学方法，突出蕴含的数学思想。B 的课堂开放程度不及 A，引入部分结合学生已有的知识基础，借助思维导图和“脚手架”做了较多的铺垫。

4 微观比较

我们从史料的适切性、融入的自然性、方式的多样性以及价值的深刻性四个维度来分析 A 和 B 的教学。

4.1 史料的适切性

表 3 对 A 和 B 在各教学环节所用数学史素材进行了对照。

表 3 A 和 B 所用数学史素材的比较

环节	教师 A	教师 B
活动引入	—	古巴比伦泥版上的一元二次方程的问题
定理探究	韦达、欧拉、拉克洛瓦对韦达定理的证明；华里司利用韦达定理推导一元二次方程求根公式	韦达、欧拉、拉克洛瓦以及英美早期教科书对韦达定理的不同证明；根与系数关系的历史；韦达与符号代数
课后作业	数学写作“韦达定理”的发现	—

A 和 B 所用的史料源自原始文献或专业数学史研究文献，符合科学性。两位教师所选用的历史上数学家对韦达定理的不同证明方法，符合学生的认知基础，体现数学史的可学性。数学家的证明方法有助于学生理解和体会“设而不求”的思想，不同的证明方法所蕴含的数学思想对学生后续的学习和能力的发展有很大作用，体现数学史的有效性。

A 强调韦达证明方法的局限性，让学生体会“分类讨论”的数学方法以及证明推理的严谨性以达成教学目标；选取的数学家华里司运用“韦达定理”推导求根公式的史料，打破学生运

用求根公式推导“韦达定理”的思维定式，这些都符合有效性。B 改编古巴比伦数学泥版上的问题，成功引导学生发现根与系数的关系；了解根与系数关系的历史有助于达成感受文化魅力的教学目标，符合有效性。A 和 B 在课堂上虽然都提及了数学家，但是只关注证明方法本身，并未进一步介绍数学家背后的故事，呈现数学的理性精神，人文性体现稍弱。两位教师的课堂都未能体现数学史的趣味性。

4.2 融入的自然性

教科书仅通过求根公式证明韦达定理，而历史上数学家则采用了多种不同的证明，图 1 给出了不同方法的时间顺序，求根公式法出现在最后，最终为数学教科书普遍采用。这表明，

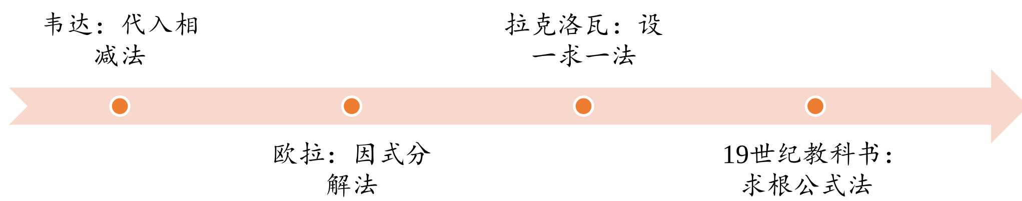


图 1 历史上韦达定理的证明之旅

求根公式并非韦达定理产生的动因和基础，只是随着时间的推移，一元二次方程求根公式逐渐登上历史舞台，因而被用于证明韦达定理，但韦达定理的价值却被打了折扣。人们会问：根都求出来了，还讲什么“根与系数关系”？

学生已经学过求根公式与二次三项式的因式分解，因此，求根公式法与因式分解法比较接近他们的最近发展区；相较而言，韦达的代入相减法和拉克洛瓦的设一求一法更不易想到。但在 A 的课堂上，在 A 的巧妙引导下，学生依次想到了求根公式法、因式分解法和代入相减法。之后，A 提出“韦达本人如何证明韦达定理”的问题，然后将学生的方法与韦达的方法进行对照，将学生关于 x_1 和 x_2 的“分类讨论”（见图 2）与韦达忽略重根的局限性相比较，结合学生

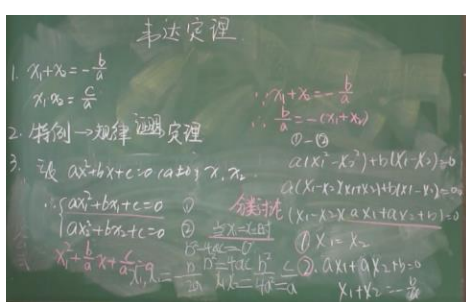


图 2 A 授课班级学生的板书

的板书，将史料和教学内容自然结合。总结证明方法后，A 又问：“实际上不仅可以不通过教材中的求根公式推导韦达定理，反而可以用韦达定理推导求根公式，大家可以尝试吗？”在学生的认知冲突中引出华里司的方法。

B 在活动引入环节，改编“已知两数的和与积，求这两个数”问题，根据方程根的特点自然地引出根与系数的关系。在定理探究环节，考虑到学生已经学习过二元一次方程组，对“加减消元”有初步的认识，故在课堂上呈现了三个等式：$x^2+px+q=0$，$x_1{}^2+px_1+q=0$，$x_2{}^2+px_2+q=0$。学生提出，选择三个方程中的任意两个作差可以证明韦达定理，对应的正是韦达与拉克洛瓦的证明方法。从学生的起点出发，将数学史自然而然地融入其中，才使得学生原本不易想到的韦达与拉克洛瓦的证法都得以呈现（见图 3）。

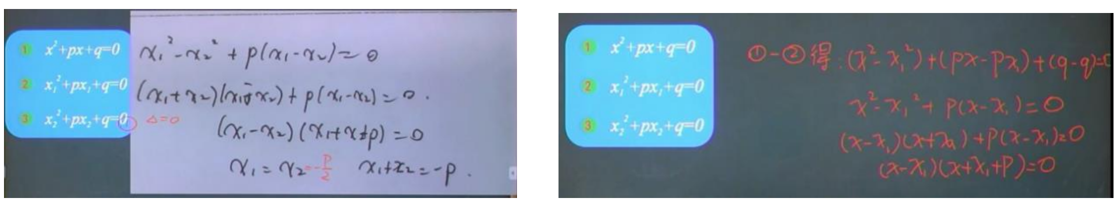


图 3 B 授课班级学生对韦达定理的证明

可见，A 通过学生自主探究，将历史自然而然地再现于课堂，B 通过搭脚手架，引导学生水到渠成地发现历史，两位教师都兼顾了历史序、逻辑序和学生心理序。

4.3 方式的多样性

虽然 A 和 B 都按照“定理的发现→定理的证明→定理的应用”的主线展开教学，但就数学史的运用方式上，两位教师并未真正采用重构式，而主要采用了顺应式，即以历史上韦达定理的不同证明为参照，设计探究活动；在学生探究得出不同证明方法后，教师采用“古今联系”的策略，依次呈现数学家的方法。

在活动引入环节，B 根据学生的认知基础，将古巴比伦泥版上的问题改编为“已知矩形的周长与面积，求长和宽”问题，属于顺应式；通过一段微视频呈现根与系数关系的发展史，追溯历史上数学家对韦达定理的探索与证明，属于附加式。在探究活动之后，A 利用韦达定理推导一元二次方程的求根公式，复制式利用了苏格兰数学家华里司的方法。

4.4 价值的深刻性

我们根据课堂的内容呈现以及学生的反馈，来分析数学史的教育价值[7]。为收集学生反馈，课前、课后分别对两个班级的学生进行问卷调查。A 执教的班级提交了 38 份有效问卷，B 执教的班级提交 37 份有效问卷。

A 和 B 的活动引入环节仅关注“如何发现根与系数的关系”，但并未解决“为什么要研究根与系数关系”的问题，因此，在“知识之谐”的构建上还有进一步完善的空间。课后问卷调查表明，在韦达定理的应用上，A 所执教班级的正确率达 79%，B 所执教班级的正确率达 65%。

在 A 和 B 的课堂上，数学史的融入都营造了“探究之乐”，但 A 的课堂上的探究水平更高，整节课学生上台板演多达六次；B 的学生只是在教师的不断引导下自主探究、小组讨论。课后问卷调查表明，关于“对本节课印象最深刻的内容”，A 的学生写道：“老师给学生自由发挥的空间”，“让学生积极思考，上台分享”，“自己探索的上课模式使我印象深刻”；B 的学生也有类似反馈：“探究定理这一过程，让我体会到了探究的有趣，并且领会了推导的神奇之处，丰富了我的思维”，“对小组讨论探究的环节印象深刻”。

A 的课堂再现了韦达定理在历史上的三种不同证明，B 的课堂成功再现了四种不同证明，体现了方法之美。对于探究得到的四种证明，两个班级学生的倾向性如图 4 所示。A 在课堂上

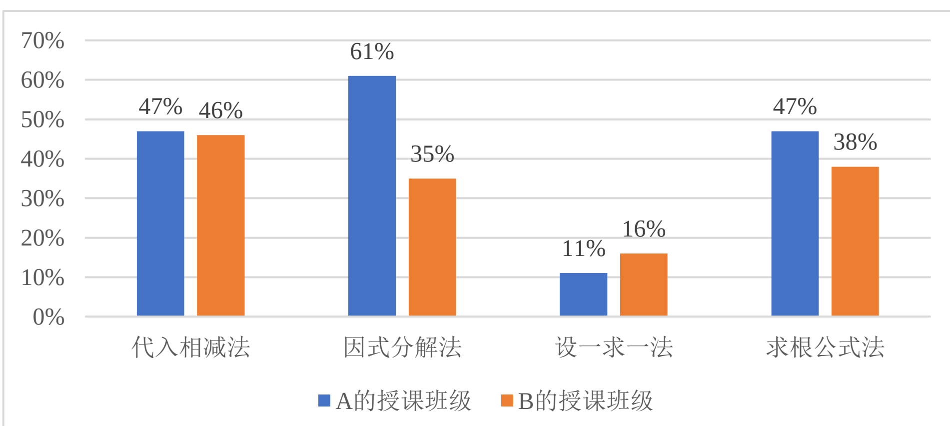


图 4　A 和 B 的学生对四种证明方法的倾向性

多次强调不同证明方法所体现的数学思想，对于四种证明的异同点，约 55%的学生都能回答出韦达、欧拉、拉克洛瓦的方法都体现了“设而不求”的思想。B 的学生对于四种证明的倾向性相对均匀，可能与 B 在课堂上引导学生得出所有四种方法有关。B 执教的班级中，约 46%的学

生对韦达的方法印象深刻，原因主要有以下两点：（1）学习字母表示数的时候， B 曾经介绍过韦达的成就，故有的学生对数学家韦达比较感兴趣；（2）有学生认为韦达的方法和以前学习的一元二次方程的知识联系紧密，比较容易理解。

定理的证明有助于培养学生逻辑推理能力，历史上数学家对“韦达定理”的不同证明方法有助于拓展学生思维，尤其是欧拉通过因式分解证明的方法可以推广到一元三次方程以及 n 次方程，能为学生后续的学习拓宽思路，充分体现能力之助的价值。课前，只有 B 的两个学生能写出一元三次方程的韦达定理形式，课后 A 的学生中有大约 45%能完成正确推导，并且有两位同学采用了两种证明方法（见图 5），B 的学生中有 41%能完成正确推导，其中还有 2 位学生写出了一元四次方程的韦达定理形式（见图 6）。可见，课堂上对韦达定理证明方法的探究对拓展学生的思维、提升他们的能力是有一定帮助的。

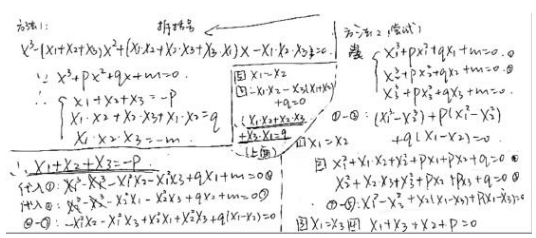


图 5 两种证明方法

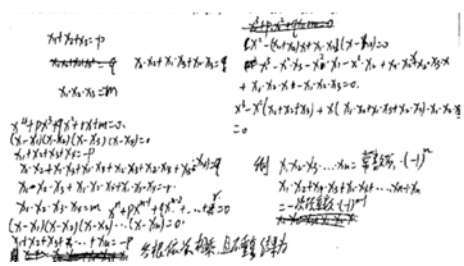


图 6 推导一元四次方程的韦达定理形式

两位教师均借助证明方法的历史相似性激发学生探索数学的兴趣，达成“德育之效”。对于教师提供的课后阅读材料（数学家韦达和华里司刻苦钻研数学的故事），两个班级的学生获得的部分启示如下：

A1：我能从数学家身上获得只要认真钻研，就一定会有回报的启示。

A2：数学家的成功源于他们对数学的兴趣与喜爱，我们遇到难题也要不畏困难，孜孜不倦。

B1：无论从事什么职业，你只要有一颗爱学、要学之心，就一定会有成果。出身、职位、知识都不能阻挠你学习的脚步。

B2：要勇于探索数学中的奥秘，坚持不懈，勤于思考，对数学秉持好奇心与热爱。

B3：书山有路勤为径，学海无涯苦作舟。

A 通过让学生体验不同数学家的证明方法感悟知识源流与文化的多元性，B 通过微视频让学生感受不同时空数学家（卡丹、韦达、吉拉尔、欧拉）对同一课题的探究，两节课都体现了

数学的文化之魅。微视频所展现的地图是体现多元文化的一个创新点，以生动明了的方式呈现不同国家和地区对同一个数学课题的探索，带给学生有人类文明的地方就有数学的直观感受，为培养学生的国际意识提供了一个契机。课后，B 的学生对于微视频给出如下反馈："各个国家和时代都有人在为证明根与系数的关系迈出一步"，"数学是不分国界的"，"韦达对代数的研究，为各地数学家对代数的探究奠定了基础"，"微视频中的地图清晰地展示了当时世界上发现根与系数关系的国家的位置，并且从历史方面介绍了韦达定理出现的时间"。

6 结论与启示

综上分析，两位教师的教学内容各具特色，教学风格各有千秋。共同之处在于，在史料的选取上都符合科学性、可学性、有效性、人文性，趣味性都有所欠缺；在数学史的运用方式上，两位教师都采用了顺应式；两节课均体现了数学史的多元教育价值。

不同之处在于， A 将重点放在学生的自主探究上，从"发现韦达定理"到"证明韦达定理"逐步展开，重在证明方法的探究与"设而不求"数学思想的渗透；B 充分把握学生已有的认知基础，联系新旧知识，并充分利用信息技术，为韦达定理的发现铺平道路；在数学史的运用方式上，除了顺应式，A 还使用了复制式，B 还采用了附加式。

通过同课异构的课例比较与分析，我们得到以下启示。

（1）加强历史研究。两位教师未能真正运用重构式，究其原因，还是在于专业学习共同体的历史研究还不够深入。韦达定理产生的历史动因是什么？如果不能回答这个问题，重构式教学设计就缺乏参照系。完整而深入的历史研究是 HPM 课例研究取得成功的前提。

（2）注重自主探究。HPM 的教学理念是：课堂教学的实施是文化活动的实施，学生是课堂的主人，让学生在探究活动中经历知识的发生发展过程，提升能力、获得成长。学生的能力不容低估，教师如果能基于学生的心理序、知识的历史序、教材的逻辑序为学生铺设合适的阶梯，会收获意外的惊喜。

（3）运用信息技术。信息技术的运用在教学中无处不在：思维导图的使用帮助学生构建知识的脚手架；希沃授课助手的使用增加学生实际体验，活跃课堂学习氛围；希沃白板的使用有助于及时展示学生反馈；微视频运用生动的图画与声音展现千百年来数学的发展，使用地图直观呈现数学的多元文化。信息技术的辅助，激发学生学习的兴趣，增加数学史的融入方式，助

力课堂教学的效果。

参考文献

[1] 义务教育数学课程标准(2011 版)[M]. 北京:北京师范大学出版社.2012:29.

[2] 张小明, 汪晓勤. 根与系数关系简史[J]. 中学教研, 2004(08): 45-47.

[3] Viète F. *The Analytic Art*[M]. New York: Dover Publications, 2006.

[4] Euler L. *Elements of Algebra*[M]. London: Longman, Hurst, Rees, Orme, & Co. , 1822.

[5] Lacroix S F. *Elements of Algebra*[M]. Boston: Hilliard, Gray, Little and Wilkins, 1831.

[6] 汪淳, 韩建平. 关于韦达定理的历史注记[J]. 中学数学月刊, 2016(06): 64-66.

[7] Wang X., Qi C., Wang K. A categorization model for educational values of history of mathematics: an empirical study[J]. *Science & Education*, 2017, 26: 1029-1052.

学术讯息

HPM 网络读书会经验交流沙龙纪要

胡永强[1] 孙丹丹[2]

（1.苏州市阳山实验中学，苏州 ；2.华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

2019 年 7 月，汪晓勤教授团队领衔发起并组建了全国范围内的第一个初中数学史与数学教育（HPM）网络研修班，凝聚了全国 13 个省市对 HPM 感兴趣的 60 余位初中数学教师，研修班以历史研读与课例研讨为主要内容，开展了为期一年的 HPM 网络研修，至 2020 年 7 月研修班圆满结业。一年的研修学习让参与的教师收获颇丰，老师们也在研修过程中形成了互相学习、互相鼓励的共同体，积累了深厚的感情。研修班结业之际，部分老师倡议继续一起学习 HPM，于是在汪晓勤教授和孙丹丹博士的建议下，老师们积极组建了 HPM 网络读书会（成员名单见文末），2020 年 7 月 27 日，第一次 HPM 共读活动启动，HPM 研修再谱新章。

2021 年 1 月 29 日，为期半年的阅读学习阶段性告一段落，读书会全体成员借腾讯会议齐聚一堂，分享交流近半年来的读书心得。会议由孙丹丹博士主持，华东师范大学汪晓勤教授、上海浦东教育发展研究院的王丽琴老师、汪教授团队的部分硕士研究生、HPM 读书会成员参与了本次活动。

本次经验交流共分为四个环节：孙丹丹博士总结梳理读书会近半年来工作；读书会成员分享心得体会；王丽琴老师分享读书会组织经验；汪晓勤教授总结点评与展望。

1 梳理总结

华东师范大学数学科学学院的孙丹丹博士首先回顾了为什么读书，指出读书会成立的初衷是把对 HPM 感兴趣、热心学习的老师组织在一起形成 HPM 学习共同体，以读书交流的形式，系统学习数学史，研讨教学设计，互相激励、分享对话，促进教师专业发展，接着从谁参与、读什么、怎么读、参与如何、效果怎样回顾概览了过去一年所开展的读书研讨活动及大家的参与和收获，最后结合老师们小结反思指出了目前阅读中存在的若干问题，展望了今后可以改进和发展的方向。

2 体会分享

9 位读书会成员代表依次分享了自己的读书收获与感悟，他们展示了 HPM 阅读研讨如何与身处不同教育情景的教师及学生结合产生多样而纷繁的精彩。

上海建平远翔学校的贾彬老师结合实例总结道：阅读让自己更加理解教材编写的意图，进而更好的引导学生；阅读让自己更加理解学生，对学生也更多了一份宽容；阅读有助于教师丰富突破教学难点的策略；阅读有助于教师实施跨学科教学的研究。最后，贾老师感慨团队协作让阅读之路走的更远，共同体对教师专业学习至关重要。

四川武侯实验学校的刁瑞阳老师结合自己阅读经验分享了诸如根据计划重点阅读、准备赛课或讲座中带着任务阅读、常规备课阅读等不同阅读类型，推荐了《数学简史》、《名人名题》等书籍，强调了随读随记灵感想法的重要性，最后分享了课前课后人物故事讲解、名人名题融入练习、做数学小报等多样化的数学史课堂内外融入形式。

广东湛江市第二中学的吴秀燕老师分享道：阅读促进了自己对数学的理解，由单纯的逻辑视角拓展到了逻辑与历史视角结合；阅读促进了自己对数学教学的理解，更加体会了数学的科学精神和数学史的德育价值。阅读促进了自己“单元教学设计”课题的研究，自己的执着阅读也感染带动着学生，寒假要带着学生一起阅读《几何原本》。

河南郑州市第八十二中学的朱航鹭老师分享了自己的领读经历和感触，自己在做领读期间提前几天完成领读内容，就其中的困惑请教了团队中的老师，通过认真研读文本，自己对 60 进制、位值制、古巴比伦泥版相关知识的理解更为深入，扩充了个人的数学认知边界。朱老师认为做领读工作虽然有些辛苦，但只有通过领读深度参与整个过程才能对相关主题有更深刻的理解。

海南省农垦中学的聂海波老师认为读书要多方面的读，广泛涉猎专业书、史书、科普书等，多方面的阅读可以给教学带来多样而鲜活的灵感，参加读书会使自己意识到教师的专业成长要从教学走向研课，走向论文写作。阅读促进了个人的数学专业思考，生活中有许多问题都蕴含着深刻的数学知识，只要用心处处皆有学问。

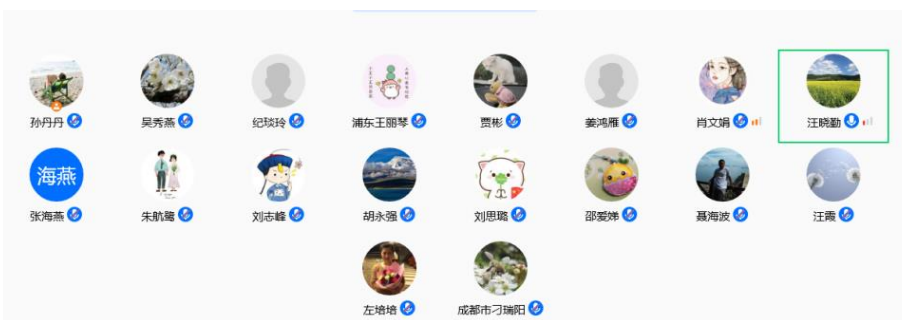
上海浦东模范中学的左培培老师分享了“高度测量”课例中学生创造出的丰富多彩的问题解决方法，还分享了数学史阅读给班上一位孤僻的孩子带来的改变，数学文化给他打开了一扇

交流的窗口，他越来越积极主动分享自己的探索，得到了班级同学的认可赞扬。左老师也总结说数学史阅读让自己充分享受到 HPM 的美丽与魅力。

上海华师大二附中国际部的肖文娟老师分享道：虽然现在在高中任教，但读书会中阅读学习到的内容对自己教学也有很大帮助，同时还感觉到阅读的东西可能不一定会立马用上，但是给自己的备课提供了另外一个视角，受到数学史阅读学习的影响，自己现在做教学设计时会主动地分析知识的源与流。

江苏省苏州市阳山实验初级中学校的胡永强老师分享说：参加研修班以来自己主动广泛涉猎数学史，使得自己的数学学科素养得到了较大提升，自己的阅读行为也潜移默化地影响了学生的学习积极性。在教学中融入数学史使学生更加喜欢数学，学生时常主动查阅相关数学知识的历史，自己在教学中还尝试用《几何原本》给学生做好平面几何的启蒙。

江苏省无锡市河埒中学的姜鸿雁老师强调“0”的发展历程的阅读使自己很有感触，结合研修班的学习，体会到纵横结合、常常温习的必要性，知识常读常新，要不停的阅读，不停的思考。姜老师说数学史的阅读深深影响、滋养了自己，给自己的前行发展增添了好多的底气。读书会里每个人都是学习者也是组织者，每位老师既是客人也是主人。



沙龙参会成员剪影

3 组织经验分享

上海浦东教育发展研究院的王丽琴老师分享了她和浦东小伙伴的 N 种共读方式：可以在专家团队的引领下 N 个人共读一个人物或一个主题，这个过程可能催生多位共读领袖，形成共读著作，读书小组要拟定规则、权利义务说明；可以建立有着固定成员的读书会，一起阅读多样化的书目；可以将共读过程的文本、视频等内容课程化，做成一种学习资源与更多老师分享。王老师特别强调了共读与私读、共读与课题研究、共读与行动、共读与写作的结合，表示期待

未来更多教师共读的可能。

4 点评展望

活动最后，华东师范大学汪晓勤教授指出数学史的共读远远优于私读，有些数学史艰涩乏味，大家一起交流讨论才能更好地解决困惑、碰撞出更多的思想火花。老师们的分享很好地回答了为什么要阅读的问题，阅读改变了老师，改变了学生，改变了课堂。汪教授也给读书会提出了两点建议：读一些原著，和思想先哲直接交流对话，例如，《几何原本》是一份宝藏，能给我们平面几何教学提供很多的启发，《计算之书》中也有很多有意思的问题；读和写是相辅相成的，及时将自己的阅读思考整理写作，增强教研意识。

两个多小时的交流分享为共同体凝聚了更多感动与力量。HPM 读书会是 HPM 研修的新尝试，新的尝试总会遇到很多问题，需要在将来的更多实践中不断优化，新的尝试也一定会带来新的契机，为教师专业发展注入一股新的力量。数学的天地广袤无垠，书海无涯，给教师专业发展与终身学习留足了空间，希望老师们在书香的浸润里，在冷静的思考与火热的碰撞中，积累更多教研能量。

HPM 读书会成员名单：胡永强（江苏省苏州市阳山实验初级中学校）、贾彬（上海建平远翔学校）、姜鸿雁（江苏省无锡市河埒中学）、刁瑞阳（四川省成都市武侯实验中学）、王媛媛（河南省汤阴县实验中学）、张光艳（河南省汤阴县实验中学）、朱航鹭（河南省郑州市第八十二中学）、聂海波（海南省农垦中学）、吴秀燕（广东省湛江市第二中学）、肖文娟（华东师范大学第二附属中学国际部）、左培培（上海市浦东模范中学东校）、张海燕（上海市复旦大学第二附属中学）、蒋来（上海市实验学校南校）、纪琰玲（山东省青岛市李沧区教育研究发展中心）、汪霞（江西省德兴市第一中学）、卢曦（上海市同济大学第二附属中学）、曹嘉芮（深圳实验学校）

2020 年 HPM 研究成果*

HPM 理论探讨

[1] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020, 59(05): 9-15.

[2] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. 数学通报, 2020, 59(03): 7-12+19.

[3] 孙丹丹, 汪晓勤. 中国数学教师信念研究二十年[J]. 数学教育学报, 2020, 29(02): 76-83.

[4] 余庆纯, 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵实证研究[J]. 数学教育学报,2020, 29(03): 68-74.

[5] 岳增成, 沈中宇, 王鑫, 邹佳晨. 影响小学数学教师HPM实践的叙事研究[J]. 数学教育学报, 2020, 29(06): 74-79.

[6] 姜浩哲, 汪晓勤. HPM 视角下的分配问题学习进阶设计[J]. 数学通报, 2020, 59(07): 12-18.

[7] 王海雯, 汪晓勤. 美国数学教育家杨格的数学价值观[J]. 教育研究与评论, 2020(01): 43-48.

[8] 林佳乐. 数学文化融入高中数学课堂的实践[J]. 黄浦教育, 2020(11): 52-55.

教育取向的历史研究

[9] 王鑫, 栗小妮, 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方早期教科书中的对数概念[J]. 中学数学月刊, 2020(02): 53-56.

[10] 汪晓勤. 一个中世纪法律问题的解决方案与数学教育价值[J]. 中学数学月刊, 2020(01): 42-44.

[11] 杨孝曼, 汪晓勤. 美英早期代数教科书中的方程定义[J]. 中学数学月刊, 2020(11): 43-46.

[12] 王娟, 汪晓勤. 16 世纪的测量工具与相似三角形的应用[J]. 中学数学月刊, 2020(03): 47-51.

[13] 彭思维. 汪晓勤. 基于托勒密定理的平面三角知识网络[J]. 中小学数学(高中版), 2020(Z2): 120-124.

[14] 彭思维, 汪晓勤. 美英早期三角学教科书中的“解三角形”应用问题[J]. 数学教学, 2020(06): 2-10.

---

* 由刘思璐、张佳淳、纪妍琳、雷沛瑶、姜浩哲、孙丹丹、余庆纯、李卓忱整理。

[15] 彭思维, 汪晓勤. 美英早期三角学教材中的数学文化[J]. 中国数学教育, 2020(Z4): 89-96.

[16] 彭思维, 汪晓勤. 英美早期三角学教科书中的弧度制[J]. 数学教学, 2020(11): 1-6.

[17] 张佳淳, 汪晓勤. 古希腊数学中的平面轨迹问题[J]. 数学教学, 2020(01): 5-10+15.

[18] 秦语真, 汪晓勤. 美英早期解析几何教科书中的双曲线方程[J]. 中学数学月刊, 2020(06): 47-50.

[19] 秦语真, 汪晓勤. 17 世纪的圆锥曲线规[J]. 数学教学, 2020(03): 1-5+20.

[20] 秦语真, 汪晓勤. 英美早期解析几何教科书中的抛物线弓形面积[J]. 数学通讯, 2020(06): 1-6.

[21] 王娟, 汪晓勤. 美英早期平面几何教科书中的垂径定理[J]. 数学教学, 2020(10): 16-21.

教学实践与案例开发

[22] 方倩, 汪晓勤. HPM 视角下的“排列”教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(06): 6-11.

[23] 王剑, 汪晓勤. 从基本不等式到“勾股容方”——HPM 视角下的高三“基本不等式”复习课教学[J]. 中学数学月刊, 2020(05): 47-51.

[24] 马艳荣, 汪晓勤. HPM 视角下“两角和与差的余弦公式”课例研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(03): 8-12+18.

[25] 孙丹丹, 胡锡娥. 有理数乘法教科书设计及教学分析——基于有理数乘法的历史[J]. 中学数学月刊, 2020(10): 15-18.

[26] 栗小妮, 贾彬. 运用数学史玩转单位分数[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(12): 7-11+30.

[27] 于骏. “数学史融入”的数学教学探析——以七巧板拼图教学为例[J]. 现代基础教育研究, 2020(03): 188-195.

[28] 贾彬, 余庆纯. “十字相乘法”: 基于学生问题，选取HPM视角[J]. 教育研究与评论, 2020(06): 40-47.

[29] 朱彪, 刘思璐. HPM 视角下的函数概念同课异构课例分析[J]. 数学教学, 2020(01): 11-15.

[30] 纪妍琳. HPM 视角下的类比推理教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(04): 9-14.

[31] 彭思维, 汪晓勤. HPM 视角下的“点到直线距离”同课异构课例分析[J]. 中小学数学(高中版), 2020(Z1): 82-86.

[32] 张佳淳, 汪晓勤. 基于数学史:轨迹概念教学中的问题串设计——以深度学习的原则为指导[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2020(02): 24-29.

[33] 张佳淳, 汪晓勤. HPM 视角下的“轨迹”概念同课异构课例研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(05): 9-14+49.

[34] 张佳淳, 汪晓勤. HPM 视角下的“轨迹”课例研究[J]. 上海课程教学研究, 2020(Z1): 75-80.

[35] 张佳淳，纪妍琳. 以史为线，串联知识[J]. 数学通讯, 2020(09): 6-10+27.

[36] 秦语真, 汪晓勤, 余庆纯.HPM 视角下的初中函数概念课例研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(02): 7-13+28.

[37] 王海雯, 汪晓勤. HPM 视角下的"扇形的面积"同课异构课例分析[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(8): 9-14.

[38] 赵丽红, 汪晓勤. HPM 视角下的"基本不等式"同课异构课例分析[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(1): P.8-14.

[39] 胡永强. 发现数学之路——以测量建筑物高度为例[J]. 中学数学月刊, 2020(04): 39-40.

[40] 胡永强. 探寻数学的本源——以“负负得正”为例[J]. 数学之友, 2020(02): 6-7.

[41] 赵玉梅. HPM 视角下的“解三角形的应用”专题复习课[J]. 数学教学, 2020(05): 44-51.

[42] 杜金金，林庄燕，沈中宇. HPM 视角下的“余弦定理”教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(07): 7-13.

[43] 高振严. 和差术在高三数学复习课中的应用[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(09): 7-11.

[44] 任念兵，彭思维，雷沛瑶. HPM 视角下的“点到直线的距离”教学[J]. 中学数学月刊, 2020(10): 46-49.

[45] 蔡东山, 彭思维, 雷沛瑶. HPM 视角下的点到直线的距离课例研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(11): 7-13+39.

[46] 胡佳婧，赵丽红，沈中宇. HPM 视角下基本不等式的教学[J]. 中小学数学(高中版), 2020(Z2): 114-119.

[47] 向荣, 彭思维, 沈中宇. HPM 视角下的复数序言课教学[J]. 中学数学月刊, 2020, (07): 46-50.

[48] 黄蓓，栗小妮. HPM 视角下的“全等三角形角边角判定定理”教学[J]. 上海中学数学, 2020(04): 35-38.

[49] 蔡颖慧, 栗小妮. HPM 视角下“二元一次方程组概念”的教学[J]. 上海中学数学, 2020(12): 44-47.

[50] 王进敬. HPM 视角下“三角形一边的平行线性质定理及推论”教学[J]. 上海中学数学, 2020(03): 18-21+24.

[51] 王进敬, 李怡泉, 余庆纯. 培育问题解决能力 品味多元数学文化——HPM 视角下“平面向量的分解”教学[J]. 上海中学数学, 2020(12): 34-38.

[52] 张静. “为什么‘负负得正’”学习探究的课例研讨[J]. 上海中学数学, 2020(Z2): 40-43.

会议综述

[53] 刘思璐, 韩嘉业, 姜浩哲. 第八届全国数学史与数学教育学术研讨会纪要[J]. 数学教育学报, 2020, 29(01): 93-97.

[54] 纪妍琳, 张佳淳, 李怡泉. 第七届 HPM 高级研修班综述[J]. 数学教学, 2020(10): 22-27+43.

[55] 邹佳晨, 沈中宇, 汪晓勤. 架设沟通数学史与数学教育的桥梁——基于 HPM-2016 的文献分析[J]. 数学通报, 2020, 59(12): 14-19+40.

疫年纪事*

韶华似水流，同舟度时艰。天道酬人勤，疫岁变丰年。

——题记

01 月

1 月 13 日，教师教育学院数学教育研究所工作研讨会在华东师范大学中北校区教师教育学院小红楼举行。数学教育研究所特聘专家、双名工程高峰计划和攻关计划主持人以及教师教育学院数学教育专业部分师生参加了会议。

1-10 月，由王华老师主持的上海市第四期“双名工程”高峰计划项目——“上海市中小学数学专家型教师课堂教学表征研究”项目组开展了名师访谈研究，教师教育学院 HPM 方向的博、硕研究生分别对 13 位上海市专家型教师（特级教师、正高级教师为主）实施了访谈。

02 月

2-4 月，第一期初中 HPM 网络研修班先后举行了 21 场线上教学研讨。

03 月

3-12 月，“上海市中小学数学专家型教师课堂教学表征研究”项目组先后开展了 21 次线上研讨和课堂观摩活动。

3 月 21 日，汪晓勤老师为中学师生作了题为“美丽数学、智慧人生——关于防疫期间数学学习的思考”的线上讲座。

3 月，华东师大 HPM 方向部分研究生与 HPM 初中教师网络研修班教师先后围绕有理数乘法、等腰三角形性质、三角形内角和、无理数开展了 4 次在线研讨。

04 月

4-12 月，华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学、高中数学学科先后举行 8 次教研活动。

* 由孙丹丹、雷沛瑶、李卓忱、刘思璐、沈中宇、姜浩哲、韩嘉业、邵爱娣、张佳淳、纪妍琳整理。

4 月 15 日，华东师范大学基础教育学科教研联盟高中数学学科举行线上教研活动，活动主题为“数学史融入高中数学课堂教学的课例研究”，研讨的课例为“函数的概念”。

4 月 22 日，华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学学科举行线上教研活动，活动主题为“数学史融入初中数学课堂教学的课例研究”，研讨的课例为“有理数的乘法”。

4 月，华东师大 HPM 方向部分研究生与 HPM 初中教师网络研修班教师先后围绕用字母表示数、函数概念、相似三角形应用开展了 3 次在线研讨。

05 月

5 月 26 日，汪晓勤老师在交大附中嘉定分校为高中数学教师作了题为“基于数学史的数学问题编制策略”的线下讲座。

5 月 26 日， HPM 工作室与义乌市王芳高中数学工作室联合举行“基于历史名题的单元复习课”的线上课例论证会。华东师范大学 HPM 方向的博、硕研究生、内蒙古师范大学李春兰老师及其研究生、王芳工作室全体教师参加了会议。

06 月

6 月 16 日，华东师范大学基础教育学科教研联盟高中数学学科举行线上教研活动，活动主题为“数学史融入高中数学课堂教学的课例研究”，研讨的课例为“二项式定理”和“基本不等式”。

6 月 17 日，汪晓勤老师为初中数学教师作了题为“基于数学史的初中数学问题编制策略”的线上讲座。

6 月 18 日，华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学学科举行线上教研活动，活动主题为“数学史融入初中数学课堂教学的课例研究”，研讨的课例为“演绎证明”和“等腰三角形”。

6 月 24 日，汪晓勤老师在上海交通大学附属中学为初高中数学教师作了题为“课例研究与数学教师专业发展”的讲座。

6 月 26 日，汪晓勤老师为中学数学教师作了题为“数学写作与数学学习”的专题讲座。

6 月，HPM 方向博士研究生栗小妮、牟金保圆满完成学业，顺利通过博士学位论文答辩。他们的论文主题分别是“HPM 视角下初中数学学科德育的案例研究”和“西藏职前初中数学教

师基于数学史的专门内容知识个案研究”。

6 月，HPM 方向硕士研究生陈君煜、林庄燕、卢成娴、瞿鑫婷、周天婷顺利通过论文答辩，并赴深圳、厦门、杭州和上海的中学任教；姜浩哲同学顺利通过硕博连读考核，提前成为博士研究生。

07 月

7 月 11 日，汪晓勤老师为中小学教师作了题为“数学史融入数学教学的实践与案例”的线上讲座。

7 月 15 日，高中 HPM 网络研修班开班仪式在线举行。研修班的专家团队、全体学员与 HPM 工作室义乌市教研基地的教师们参加了开班仪式。汪晓勤老师作了题为“HPM 视角下的课例研究与高中数学教师专业发展”的讲座。

7 月 15 日，小学 HPM 网络研修班开班仪式在线举行。7 位专家组成员、来自全国 17 个省、自治区、直辖市的 75 位学员参加了开班仪式。汪晓勤老师作了题为“HPM 视角下的课例研究与小学数学教师专业发展”的讲座。

7 月 19 日，第一届初中 HPM 网络研修班结业典礼在线举行。来自网络研修班的五十余位一线初中数学教师、研修班专家委员会成员、部分硕士和博士研究生共聚云端，回顾过去一年的研修历程，总结收获与成果，分享心得和体会，展望教师专业发展的美好明天。

7 月 22 日，汪晓勤老师在苏州市为高中数学教师作了题为“HPM 视角下的课例研究与高中数学教师专业发展”的讲座。

7 月 23 日，上海市第四期“双名工程”高峰计划项目“上海市中小学数学专家型教师课堂教学表征研究”项目组在上海市晋元高级中学举行线下会议，研讨、修正课堂教学评价工具的指标与水平。

7 月 27 日，由第一届初中 HPM 网络研修班部分学员发起的初中教师 HPM 网络读书会举行第一次线上读书活动，约 30 位教师参加了活动。读书会的初衷是建立 HPM 学习共同体，以读书交流的形式，系统学习数学史，互相激励、分享对话，让阅读成为习惯，促进教师专业发展。

08 月

8 月，浙江省义乌市王芳高中数学工作室联合华东师范大学和内蒙古师范大学部分研究生先后五次举行“基于历史名题的 HPM 高中单元复习课例”在线研修活动。

09 月

9 月 2 日，“上海市中小学数学专家型教师课堂教学表征研究”项目组在上海市晋元高级中学举行线下研讨活动，讨论前期数据分析的结果以及需要进一步分析的视频内容。

9 月 22 日，2020-2021 学年 HPM 学术讨论班开班，HPM 专业学习共同体迎来了蔡春梦、狄迈、韩粟、司睿、王焓、闫欣和杨孝曼七位新同学。汪晓勤老师作了“与 HPM 专业学习共同体一起成长”的专题讲座，详细介绍了 HPM 专业共同体的研究框架、特色经验和成果成效，勉励新同学“耕耘、收获、砥砺、成长”。

9 月 26 日，第二期初中 HPM 网络研修班开班仪式在线举行。研修班的专家团队、全体学员参加了开班仪式。汪晓勤老师作了题为“HPM 与初中数学教师专业发展”的讲座。

9 月，2019 级教育硕士彭思维、韩嘉业、赵丽红、王海雯、秦语真、王娟、李怡泉赴中学开始为期三个月的教育实习。实习期间，秦语真同学展示了一节高三复习课——双曲线的定义与方程。

10 月

10-11 月，华东师范大学基础教育学科教研联盟初、高中数学学科举行教学比赛，主题为“指向数学学科德育的数学教学”，参赛对象为联盟学校初、高中数学教师。

10 月 12 日，汪晓勤老师在安徽省铜陵市为初中生作了题为“美丽数学、精彩人生——数学和数学家的故事”的讲座。

10 月 12 日，HPM 工作室举行“分数的除法”教学设计在线研讨活动，HPM 工作室学员与 HPM 方向部分研究生参加研讨。

10 月 16-17 日，“上海市中小学数学专家型教师课堂教学表征研究”项目组在上海市崇明中学举行课堂观摩与项目任务推进活动。

10 月 18 日，HPM 工作室第二期初中组和高中组各举行在线开班仪式。

10 月，在线开放课程“数学史与数学教育”在“爱课程”网上正式开课。

10 月 20 日，HPM 工作室在华东师大二附中附属初级中学举行课例研究活动。HPM 工作室学员陈慧老师执教“分数的除法”一课，教师教育学院部分师生参加了教学观摩和课后研讨。华东师范大学基础教育学科教研联盟部分初中数学教师线上观摩了教学。

10 月 27 日，HPM 工作室与华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学学科在上海民办华二初级中学联合举行初中课例研究活动。工作室学员、上海民办华二初级中学的王苗老师执教“三角形的中位线”一课，教师教育学院部分师生以及工作室部分学员参加了教学观摩和课后研讨。学科教研联盟学校的部分初中教师线上观摩了本节课。

11 月

11 月 1 日，高中 HPM 网络研修班举行在线研讨活动。汪晓勤老师作了题为“函数的概念：从历史到课堂”的线上专题讲座。

11 月 1 日，HPM 工作室举行“双曲线及其标准方程”教学设计第一次在线研讨，教师教育学院部分师生以及工作室部分学员参加了研讨。11 月 17 日和 12 月 9 日又分别举行了第二次和第三次在线研讨。

11 月 3 日，HPM 工作室举行“指数函数”教学设计在线研讨，教师教育学院部分师生以及工作室部分学员参加了研讨。

11 月 5 日，“上海市中小学数学专家型教师课堂教学表征研究”项目组在上海市晋元高级中学举行教学观摩和研讨活动，主题为“幂函数的概念”。

11 月 6 日，HPM 工作室举行“复数的概念”教学设计在线研讨，教师教育学院部分师生以及工作室部分学员参加了研讨。

11 月 10 日，汪晓勤老师在上海市嘉定二中为高中数学教师作了题为“数学概念的历史与教学”的专题讲座。

11 月 10 日，HPM 工作室举行“双曲线及其标准方程”教学设计在线研讨，教师教育学院部分师生以及工作室部分学员参加了研讨。

11 月 12 日，HPM 工作室在华东师范大学第二附属中学举行高中课例研究活动。工作室学员、华东师范大学第二附属中学的蔡东山老师执教“椭圆的概念与方程”公开课，公开课面向

全国直播。

11 月 13 日，HPM 工作室在华东师范大学第一附属中学举行高中课例研究活动。工作室学员、华东师范大学第一附属中学的方倩老师执教“复数的概念”一课，工作室部分教师以及教师教育学院部分研究生参加了教学观摩和课后研讨。

11 月 15 日，高中 HPM 网络研修班举行在线研讨活动。研修班的 6 位教师分别汇报了“函数概念”的教学设计，研修班专家和教师进行了交流和研讨。

11 月 17 日，HPM 工作室在上海市行知中学举行高中课例研究活动。工作室学员、上海市行知中学的高振严老师执教“椭圆的概念与方程”一课，工作室部分教师以及教师教育学院部分师生参加了教学观摩和课后研讨。汪晓勤老师作了题为“数学概念的历史与教学”的讲座。

11 月 17 日，HPM 工作室与华东师范大学基础教育学科教研联盟高中数学学科联合举行课例研究活动。工作室学员、上海市建平中学的李传峰老师执教“椭圆及其标准方程”一课，教师教育学院部分学生参加了教学观摩和课后研讨。学科教研联盟学校的部分高中教师线上观摩了本节课。

11 月 19-20 日，第二届上海数学教育研究与实践高峰论坛暨第八届数学史与数学教育（HPM）高级研修班在上海市大同中学举行。HPM 工作室学员贾彬老师和张冰老师分别执教初中“轴对称图形”一课和高中“指数函数”一课。

11 月 23 日，HPM 工作室在上海交通大学附属中学嘉定分校举行高中课例研究活动。工作室学员、上海交通大学附属中学嘉定分校的钟萍老师执教“复数的概念”一课，工作室部分教师以及教师教育学院部分研究生、访问学者参加了教学观摩和课后研讨。

11 月 24 日，汪晓勤老师在上海市青浦区华新中学为初中数学教师作了题为“数学史融入初中数学教学的实践与价值”的讲座。

11 月 25 日，HPM 工作室在同济大学第二附属中学举行初中课例研究活动。工作室学员、同济大学第二附属中学的胡晓娟老师执教“圆的周长”一课，教师教育学院部分师生参加了教学观摩和课后研讨。

11 月 25 日，HPM 工作室上海师范大学附属经纬实验学校举行初中课例研究活动。工作室学员、上海师范大学附属经纬实验学校的顾海萍老师执教“圆的周长”一课，教师教育学院部分师生参加了教学观摩和课后研讨。

11 月 26-27 日，HPM 工作室学员、华东师范大学第二附属中学的蔡东山老师和工作室学员、上海市市北中学的舒适老师分别开展 HPM 教学实践，执教“双曲线及其标准方程”一课。

11 月 26 日，高中 HPM 网络研修班举行在线研讨活动。“函数概念”教学设计小组的教师和部分硕、博研究生参加了交流研讨。

11 月 27 日，HPM 工作室在上海市晋元高级中学举行高中课例研究活动。工作室学员、上海市晋元高级中学的邵夏燕老师执教“双曲线及其标准方程”一课，工作室部分教师以及教师教育学院部分研究生、访问学者参加了教学观摩和课后研讨。

11 月 29 日，高中 HPM 网络研修班举行在线研讨活动。汪晓勤老师作了题为“高中数学概念的历史与教学”的线上讲座。

11 月 30 日，HPM 工作室举行“函数的周期性”教学设计第一次在线研讨，教师教育学院部分师生以及工作室部分学员参加研讨。12 月 19 日又举行第二次在线研讨。

12 月

12 月 3 日，“上海市中小学数学专家型教师课堂教学表征研究”项目组在上海市晋元高级中学举行阶段任务落实会议。

12 月 4 日，HPM 工作室在上海市第三女子中学举行高中课例研究活动。工作室学员、上海市第三女子中学的孙佳琰老师执教“复数的概念”一课，工作室部分教师以及教师教育学院部分研究生、访问学者参加了教学观摩和课后研讨。

12 月 6 日，初中 HPM 网络研修班举行在线研讨活动。汪晓勤老师作了题为“初中数学概念的历史与教学”的线上讲座。

12 月 9 日，HPM 工作室在上海实验学校南校举行初中课例研究活动。工作室学员、上海市实验学校南校的蒋来老师、上海中学东校的牛德军老师、上海杨思中学的张翼翔老师分别执教“一元二次方程根与系数的关系”一课，教师教育学院部分师生、工作室部分学员参加了教学观摩和课后研讨。

12 月 11 日，HPM 工作室在上海市市西初级中学举行初中课例研究活动。工作室学员、上海市西中学王进敬老师、上海市进才中学北校徐志华老师与上海师范大学附属经纬实验学校付敏老师分别执教“圆的周长”一课，教师教育学院部分师生、工作室部分学员参加了教学观摩和

课后研讨。

12 月 13 日，小学 HPM 网络研修班举行在线研修活动。汪晓勤老师作了题为“字母表示数的历史”的讲座。

12 月 13 日，高中 HPM 网络研修班举行在线研讨活动。研修班的两位教师汇报了各自的“函数概念”教学设计，邹佳晨老师、张海强老师分别作了点评。

12 月 14 日，HPM 工作室成员、上海市七宝中学附属鑫都实验中学的夏進老师开展 HPM 教学实践，执教“指数函数”一课。

12 月 15 日，通识教育课程“人类思维与学科史论：数学”获得华东师范大学教务处的立项。本课程将于 2020-2021 学年第二学期开始面向强基班本科生开设。

12 月 18 日，“上海市中小学数学专家型教师课堂教学表征研究”项目组在上海市奉贤中学举行教学观摩与阶段性任务研讨活动。HPM 工作室学员、奉贤中学的张益明老师执教“反函数的图像”一课。

12 月 21 日，HPM 工作室与华东师范大学基础教育学科教研联盟高中数学学科联合举行课例研究活动。工作室学员、上海市回民中学的徐洁岚老师执教“函数的周期性”一课，华东师范大学教师教育学院部分师生、工作室部分学员参加了教学观摩和课后研讨。学科教研联盟学校的部分高中教师线上观摩了本节课。

12 月 22 日，HPM 工作室在上海市松江第四中学举行高中课例研究活动。工作室学员、上海市松江第四中学的朱亮雅老师执教“复数的概念”一课，教师教育学院部分师生、工作室部分学员参加了教学观摩和课后研讨。

12 月 23 日，“上海市中小学数学专家型教师课堂教学表征研究”项目组在上海市晋元高级中学举行教学观摩与研讨活动，普陀区高中数学教研员陈兴义老师分别采用“讲练式”、“掌握互动式”和“掌握留白式”的策略来执教同一个主题——反函数的概念。

12 月 24 日，华东师范大学基础教育学科联盟初中和高中数学组在华东师范大学第二附属中学乐东黄流中学举行学术年会，乐东黄流中学的石文莉老师和邹佳芯老师分别执教初中“平方差公式”一课和高中“等差数列”一课。汪晓勤老师和邹佳晨老师分别对两节课作了点评。汪晓勤老师作了题为“数学文化视角下的中学数学教学”的讲座。硕士研究生刘思璐和邵爱娣同学参加了本次年会。

12 月 25 日，HPM 工作室在上海市行知中学举行高中课例研究活动。工作室学员、上海市行知中学的李晓郁老师执教“函数的周期性”一课，教师教育学院部分师生、工作室部分学员参加了教学观摩和课后研讨。

12 月 27 日，小学 HPM 网络研修班举行在线研修活动。汪晓勤老师作了题为“数学史在小学数学教学中的运用方式”的讲座。

12 月 31 日，汪晓勤老师在浙江省湖州市数学年会上作了题为“数学文化视角下的数学教学”的学术报告。

12 月，《数学史与高中数学教学：理论、实践与案例》（汪晓勤、沈中宇著）由华东师范大学出版社出版。全书由理论篇、实践篇和分析篇组成，呈现了数学史融入课堂教学的多元方法、具体过程和实践效果，彰显了 HPM 对于高中数学教学的巨大价值。

12 月，博士研究生孙丹丹结束了在丹麦奥胡斯大学为期 15 个月的访学，顺利回国。在丹麦访学期间，孙丹丹同学积极参与奥胡斯大学 Jankvist 教授团队的学术活动，有力地促进了中国和丹麦 HPM 团队的学术交流。