上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2015 年第 4 卷第 6 期

尤里乌斯·戴德金

（J. W. R. Dedekind, 1831-1916）

《上海HPM通讯》编委会名单

刊首语

本期封面人物为德国数学家、教育家尤里乌斯 •戴德金（J. W. R. Dedekind, 1831-1916），是近代抽象数学的先驱。

戴德金于 1831 年 10 月 6 日出生于德国下萨克森州东部城市不伦瑞克的一个知识分子家庭，父亲和外祖父都是卡罗莱纳学院的教授。他 7 岁入学，早年对物理和化学很感兴趣，但不久觉得物理的逻辑结构不够严密，注意力转向数学。1848 年，16 岁的戴德金进入卡罗莱纳学院学习，打下了坚实的数学基础；1850 年，转入哥廷根大学的物理数学研修班学习，秋季开始跟随高斯（J. C. F. Gauss, 1777-1855）学习最小二乘法，并在高斯的指导下完成了关于欧拉积分的博士学位论文，于 1852 年获得哥廷根大学的博士学位；1854 年，取得哥廷根大学的任教资格，讲授概率论与几何学；1855 年，高斯去世，狄利克雷（J. P. G. L. Dirichlet, 1805-1859）继任，戴德金在教学之余聆听了狄利克雷的数论、势能、定积分及偏微分方程和黎曼（G. F. B. Riemann, 1826-1866）的阿贝尔函数和椭圆函数，同时研读了伽罗瓦（Évariste Galois, 1811-1832）的著作，成为讲授伽罗瓦理论的第一人，并引入了“域”的概念；1858 年秋天，开始了他在苏黎世工学院的教学生涯；1862 年，戴德金回到家乡进入不伦瑞克工学院（前身为卡罗莱纳学院）任教，直到 1894 年退休。

戴德金在数学上有许多重大贡献，其中标志性的工作就是按照戴德金分割对无理数的重新定义，发表在《连续性与无理数》（1872）一书中。在定义了有理数域的由任一有理数产生的分割（F • 克莱因称之为“正常分割”）之后，戴德金写道：“如果存在一个不是由任何有理数产生的分割$\left(A_1, A_2\right)$，那么，我们就创造了一个新的无理数α，这个无理数完全由上述分割来定义。我们说，这个数 α 对应于该分割，或者生成了该分割。”这个分割被称为“戴德金分割”（F 克莱因称之为“非正常分割”）。事实上，在戴德金初次讲授微积分、考虑如何教学时，戴德金分割的思想就产生了。因为微积分的基础是极限，而极限理论的完备需要一个封闭的实数域，这就涉及了实数域的连续性问题，其关键正是无理数。据他所说，这个思想产生于 1858 年 11 月 24 日，得益于欧几里得《几何原本》中处理度量的不可公度比时所用的方法。其基本思想是：每个实数 r 都可以把有理数集分成两个子集：所有小于 r 的有理数构成的集合 A_1 和所有大于 r 的有理数构成的集合 A_2，满足：

（1） A_1 中的每一个数都小于 A_2 中的每一个数；

（2）r 是 A_1 的最大元或 A_2 的最小元，

若 r 同时满足（1）和（2），则 r 是有理数；若 r 满足（1）而不满足（2），则 r 是无理数。

“戴德金分割”理论和康托（G. F. L. P. Cantor, 1845-1918）的“基本序列”理论、魏尔斯特拉斯（K. T. W. Weierstrass, 1815-1897）的“有界单调序列”理论共同完成了变量数学独立建造完备数域的历史任务，填平了算术与几何之间两千多年的鸿沟。戴德金与此相关的著作还有《代数整数理论》（1879）、《数的性质与意义》（1888）等。

此外，戴德金编辑整理了高斯、狄利克雷和黎曼的著作。他在整理狄利克雷的著作时开始了代数数域的研究并引入了理想的概念，将其关于数论的演讲编辑成《数论讲义》（1863），并在该书的第三版（1879）和第四版（1894）中作了补充，在环论的基础上引入了理想的概念，形成了代数数域的整数环理论。

戴德金的才华不仅在于其所做的数学研究，还在于其清晰的阐述。由他开始的数学风格至今仍对数学家产生重大影响。正如爱德华（H. M. Edwards, 1936-）所说：戴德金的遗产不仅仅包含了重要的理论、例子和概念，还包含了整个数学的风格，这种风格激励了一代又一代人。

目　录

Content

教材研究

西方早期几何教科书中的面面平行判定定理*

沈中宇

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

面、面位置关系是高中立体几何的重要内容，而面、面平行的判定定理是其中的一个重要定理。人教版高中数学教科书通过“观察长方体模型”的活动直接引入了该定理，但未对定理加以证明。而在教学实践中，从公理化思想的角度看，学生对于这样的做法是心存疑惑、不甚满意的。另一方面，出于后续有关二面角知识的教学需要，一些教师往往也会补充定理的证明。那么，教科书中究竟应该如何呈现该定理？课堂教学中应如何选择最合适的证明方法？在高中数学教科书即将开始修订之际，这些问题自然是值得我们探讨的。

本文首先介绍欧几里得和勒让德对面面平行判定定理的叙述与证明，在此基础上，对1839-1939 年间 60 种西方立体几何教科书中的证明方法进行考察和分析，试图勾勒出该定理的历史发展脉络，并从中获得教科书编写和课堂教学的启示。

1 欧几里得的证明

古希腊数学家欧几里得（Euclid，约公元前 330-275 年）在《几何原本》第 11 卷给出“面面平行”的定义：“若两平面总不相交，则称它们是平行平面。”同卷命题 15 给出如下判定定理：“如果两条相交直线平行于不在同一平面上的另外两条相交直线，则两对相交直线所在的平面平行。”[1]由于没有线面平行的概念，欧几里得的表述与我们今天的表述是不同的。欧几里得首先证明命题 14：“和同一直线成直角的两个平面是平行的”。为了叙述简便，我们用今天的“垂直”来代替“成直角”这样的表达方式。

如图 1 所示，已知 $AB\perp$平面 CD，$AB\perp$平面 EF。假设平面 CD 和 EF 不平行，则它们相交于 GH。在 GH 上任取一点 K，连接 AK，BK。因为 $AB\perp$平面 EF，所以 $AB\perp BK$，即$\angle ABK$ 为直角，同理，$\angle BAK$ 也是直角，于是，ΔABK 中就有两个直角，这是不可能的，所以假设不成立，$CD// EF$。接下来证明命题 15。

* 人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列论文之一。

如图 2，设两条相交直线 AB 和 BC 分别平行于不在同一平面上的另两条相交直线 DE 和 EF。从点 B 作直线 BG 垂直于过 DE、EF 的平面，设垂足为 G。过 G 作 $GH//ED$，$GK//EF$。则 $BG\perp GH$，$BG\perp GK$。因 $DE//AB$，$EF//BC$，故 $GH//AB$，$GK//BC$，从而 $BG\perp AB$，$BG\perp BC$，因此，BG 垂直于 AB 和 BC 所在平面，由命题 14 知，AB、BC 所在平面平行于 DE、EF 所在平面。

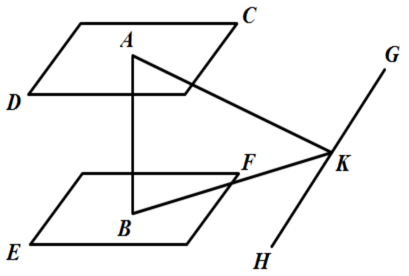


图 1

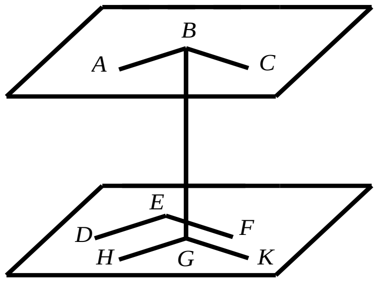


图 2

为了用命题 14 来证明命题 15，欧几里得主要用到了以下命题：（1）与同一直线平行的两直线平行；（2）两条平行线中，若有一条垂直于第三条直线，则另一条也垂直于该直线；（3）线面垂直的判定定理。因为欧几里得没有线面平行的概念，所以他的证明显得比较繁琐，后世的教科书中相继对其作出了改进。

2 勒让德的等距法

18 世纪法国著名数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）在其《几何与三角学基础》（1819）中给出了一种完全不同于欧几里得的证明 [2]。勒让德首先证明命题：“若两个平行平面与第三个平面相交，则两条交线平行。”如图 3，$\alpha // \beta$，$\alpha \cap \gamma = AC$，$\beta \cap \gamma = BD$。假设 $AB \cap CD = E$，则 E 也是α 和β 的公共点，故α 和β 相交，与已知条件矛盾。

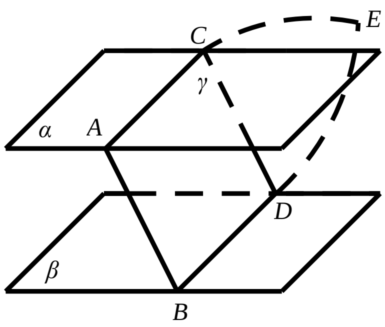


图 3

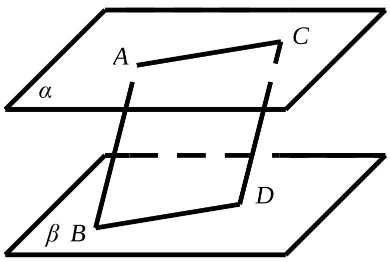


图 4

根据上述命题，勒让德又证明：“若两条平行线被两个平行平面所截，则所截得的线段

相等。”如图 4，已知α // β，*AB*//*CD*，*AB* 和 *CD* 所确定的平面与α和β 交于 *AC* 和 *BD*，则 *AC*//*BD*，故 *ABCD* 为平行四边形，从而 *AB* = *CD*。

接下来，勒让德证明面面平行判定定理。如图 5，已知 *AC*//*BD*，*AE*//*BF*。取 *AC*=*BD*，*AE* = *BF*，连接 *CE*、*DF*、*AB*、*CD*、*EF*，则四边形 *ABDC* 和 *ABFE* 均为平行四边形，故四边形 *CDFE* 也是平行四边形，从而知 *AB* = *CD* = *EF*，且 *AB*//*CD* //*EF*。过 *A* 作平面与平面 *BDF* 平行，假设此平面与 *DC*、*FE* 相交于不同于 *C* 和 *E* 的 *G* 和 *H*，则由刚才证明的命题，*AB* = *DG* = *FH*，故知点 *C* 与 *G* 重合，点 *H* 和 *E* 重合。因此，所作的平面 *AGH* 与平面 *ACE* 重合，命题得证。

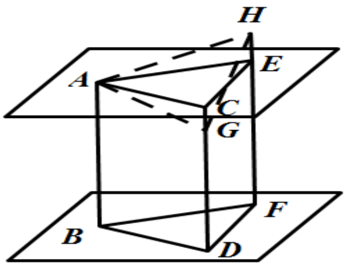


图 5

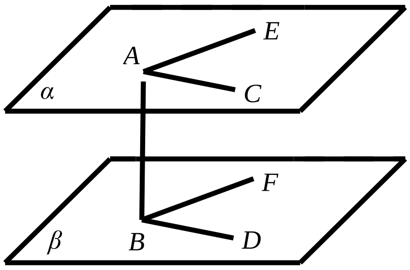


图 6

欧几里得和勒让德的证明对后世教科书产生了深远的影响。以下我们对 1839-1929 百年间西方教科书中的面面平行判定定理的证明方法进行考察。

3 19 世纪

19 世纪出版的 25 种西方几何教科书都含有面面平行的判定定理，共出现了 6 种证法。笔者将这 6 种证法分为 3 类：（1）欧氏证法及其改进形式，有 3 种证法；（2）反证法，有 2 种证法；（3）等距法。

3.1 欧氏证法

Hayward 在《几何基础》（1829）中沿用了欧几里得的证法，但给出了欧几里得命题 14 的另一种证明 [3]。如图 6，*AB*⊥ α，*AB* ⊥ β，在α内作 *AC*、*AE*，过点 *B* 作 *BD//AC*，*BF//AE*，则 *BD*⊥*AB*，*BF*⊥*AB*，故 *BD* 和 *BF* 都在平面β上。*BD*、*BF* 确定平面β，*AC*、*AE* 确定平面α，因为 *BD//AC*，*BF//AE*，故α 和 β 在 *BD* 和 *AC* 方向上不相交，在 *BF* 和 *AE* 方向上也不相交，由于 *AC*、*AE* 的任意性，因此在任意方向上都不相交，根据两平面平行的定义，两平面平行。

3.2 改进的欧氏证法之一

Tappan 在其《几何基础》（1885）中给出了欧氏证法的一种改进形式 [5]。首先定义“线面平行”：若直线与平面上的一条直线平行，则称直线与平面平行。根据定义，当一条直线与平面平行时，通过平面上任一点可作一条平面内的直线与给定直线平行。“线面平行”概念出现后，面面平行判定定理在条件的表述上就发生了变化。仍如图 6，已知 $AC//\beta$、$AE//\beta$。过 A 作 $AB\perp\beta$，垂足为 B；过 B 作直线 $BD /\!/ AC$，$BF /\!/ AE$，则 BD 和 BF 都在平面β上，故 $AB\perp BD$，$AB\perp BF$，从而 $AB\perp AC$，$AB\perp AE$，于是知 $AB\perp\alpha$。因此，$\alpha//\beta$。

3.3 改进的欧氏证法之二

Schuyler 在其《几何基础》（1876）中给出了欧氏证法的另一种改进形式，用到了线面平行的性质定理，进一步将证明进行了简化 [6]。仍如图 6，已知 $AC//\beta$、$AE//\beta$，AC 与 AE 确定平面α。过 A 作 $AB\perp\beta$，垂足为 B；AB 与 AC 所确定的平面与β相交于 BD，由线面平行的性质定理，$AC /\!/ BD$，同理，$AE /\!/ BF$，故 $AB\perp AC$，$AB\perp AE$，从而 $AB\perp\alpha$。因此，$\alpha//\beta$。

3.4 反证法之一

Robinson 在《几何基础与平面和球面三角学》（1868）中利用反证法来证明面面平行的判定定理 [7]。如图 7，已知 $AC\subset\alpha$，$AE\subset\alpha$，$AC\cap AE=A$；$BD\subset\beta$，$BF\subset\beta$，$BD\cap BF=B$；$AC /\!/ BD$，$AE /\!/ BF$。假设$\alpha\cap\beta=l$，则 $l\subset\alpha$，因 $AC\cap AE=A$，故其中必有一条与 l 相交，设 AC 与 l 相交。假设 AC 与 β 相交，因 $AC /\!/ BD$，故 AC 和 BD 确定一个平面，AC 必与 β 在直线 BD 上相交，但 $AC /\!/ BD$，它们没有公共点，所以假设不成立，$AC//\beta$。但 l 也在β上，所以 l 与 AC 的交点也在β上，即 AC 与 β 相交，矛盾。所以 AC 和 AE 都不能与 l 相交，假设不成立，命题得证。

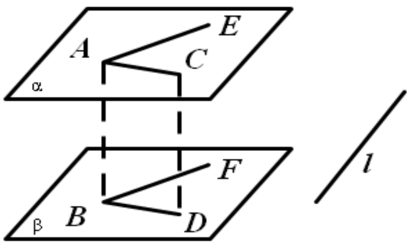


图 7

由于当时没有线面平行的概念，所以证明 AC 与平面β平行实际上是证明线面平行的判定定理，因此总共要用到两次反证法，显得较为繁琐。之后的教科书几乎都将线面平行判定定理单独列出，从而使此证明得到简化，如 Wilson 在其《立体几何与圆锥曲线》（1880）中即采用了这种做法 [8]。

3.5 反证法之二

Thompson 在其《立体几何基础与测量几何》（1896）中也采用了反证法，但利用了线面平行的性质定理进一步简化了证明 [9]。仍如图 7，已知平面α 和β, $AC \subset \alpha$, $AE \subset \alpha$, $AC \cap AE = A$，且 $AC /\!/ \beta$，$AE /\!/ \beta$。假设α 和β不平行，则必相交于某直线 l，由线面平行的性质定理，$l /\!/ AC$，$l /\!/ AE$，故得 $AC /\!/ AE$，这与已知条件“AC 和 AE 相交”矛盾，所以假设不成立，即$\alpha /\!/ \beta$。

3.6 等距法

一些教科书基本延用了勒让德的等距法, 值得注意的是，部分教科书直接将其作为“两组直线对应平行，则各所成角相等”这一命题的推论，如 Wentworth 在其《平面与立体几何基础》（1880）中即采用了这种方式 [10]。

4 20 世纪

20 世纪出版的 35 种教科书基本延续了 19 世纪的证明方法，不过欧氏证明销声匿迹了，改进的欧氏证明之一也基本不被采用，改进的证明之二则还保持一定数量，而反证法则异军突起，为绝大多数教科书所采用，而且还出现了第三种反证法：仍如图 7，已知 $AC /\!/ BD$，$AE /\!/ BF$。若$\alpha \cap \beta = l$，则 l 至少与 AC 或 AE 中的一条相交。设 l 与 AC 相交，则因 l 与平面 $ABDC$ 只能有一个交点，则 l 与 AC 和 BD 相交于同一点，因此 AC 与 BD 相交，矛盾，假设不成立。Nyberg 在《立体几何》（1929）中采用了上述方法 [11]。

此外，这个时期的部分教科书对定理不加证明。

图 8 和 9 分别给出了 60 种教科书中各种证法的频数分布以及年代分布情况。

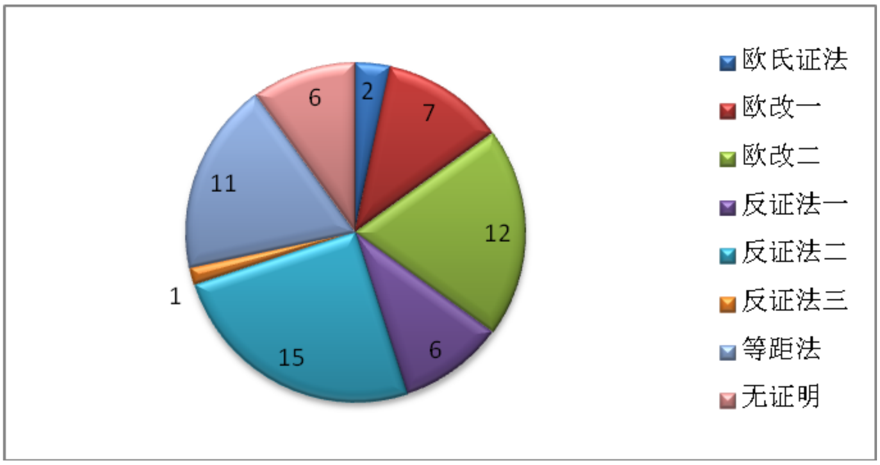


图 8　60 种教科书中各种证法的分布情况

从图 8 和 9 可见，西方百年几何教科书证明面面平行判定定理的主要方法是改进的欧氏证法之二、反证法之二和等距法，其中前期主要使用的是欧氏证法和等距法，之后改进的欧氏证法开始流行，到了 20 世纪，改进的欧氏证法之二和反证法之二并驾齐驱，最后反证法之二受到了青睐，但也出现了淡化证明的情况。

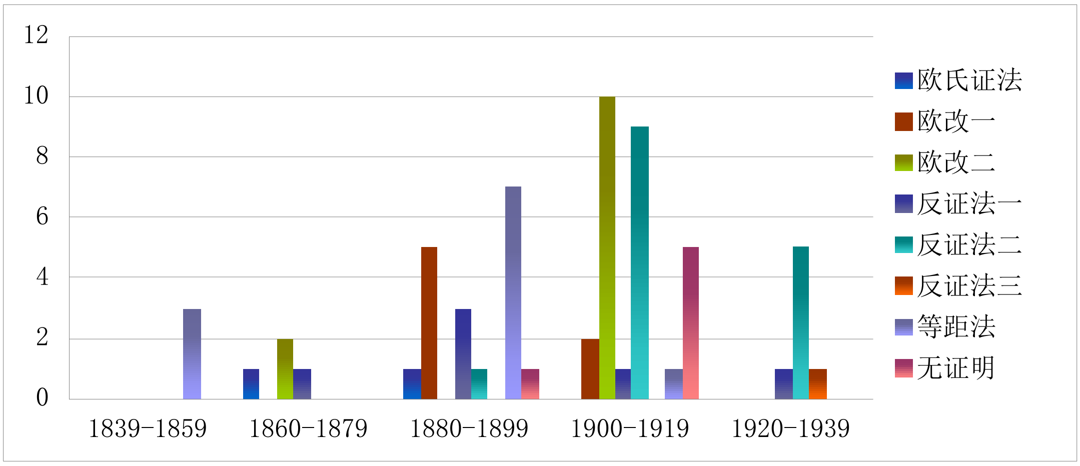


图 9 不同证法的时间分布情况

5 结语

以上我们看到，1839-1939 百年间的西方立体几何教科书中，面面平行的判定定理始终是一个重要定理，共出现了 7 种证明方法，分别为欧氏证法、等距法、两种改进的欧氏证法、三种反证法，分属三种传统：欧几里得的传统（利用与同一直线垂直的平面互相平行）、勒让德的传统和反证法的传统（假设两平面相交，引出矛盾）。欧氏证法和反证法都由于线面平行概念的不断完善而经历了由繁至简的过程：欧几里得的证法由于线面平行概念的缺失而不得不涉及多条线段；第一种改进的欧氏方法由于线面平行概念的引入而减少了辅助线的条

数，但仍显得不够直观；而第二种改进的欧氏方法则利用了线面平行的性质而更具优越性。第一种反证法由于线面平行判定定理的缺失而显得较为繁琐；第二种反证法则采用线面平行的性质定理使得证明显得简洁优美。由这一过程可见，线面平行的概念和性质定理在面面平行判定定理的发展过程中起着重要作用。

由于学生在学习面面平行判定定理之前已经学过线面平行的性质定理，因此，在 HPM 视角下的该定理教学中，教师可以向讲授第二种改进的欧氏证法以及第二种反证法，并补充巧妙的等距法，而其余证法则可作为阅读材料。将数学史融入面面平行判定定理的教学，可以让学生感悟数学的演进性、数学思维的灵活多样性、古今方法的优劣以及数学背后的理性精神，更加深刻地理解立体几何中前后知识之间的联系。

参考文献

[1] 欧几里得. 几何原本[M]. 西安: 陕西科学技术出版社. 2003. 520-521.

[2] Legendre, A. M.. *Elements of Geometry and Trigonometry*. Cambridge: The University Press. 1819. 111-112.

[3] Hayward, J.. *Elements of Geometry*. Cambridge: Hilliard & Brown. 1829. 76-77.

[5] Tappan, E. T.. *Elements of Geometry*. New York: D. Appleton & Company. 1885. 169.

[6] Schuyler, A.. *Elements of Geometry*. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Company. 1876. 237.

[7] Robinson, H. N.. *Elements of Geometry, Plane & Spherical Trignometry Geometry*. New York: Ivison, Blakeman, Taylor & Company. 1868. 165.

[8] Wilson, J. M.. *Solid Geometry and Conic Sections*. London: Macmillan & Co.. 1880. 13-14.

[9] Thompson H. D.. *Elementary Solid Geometry and Mensuration Geometry*. New York: The Macmillan Company. 1896. 19-20.

[10] Wentworth, G. A.. *Elements of Plane and Solid Geometry*. Boston: Ginn & Heath. 1880.

[11] Nyberg, J. A.. *Solid Geometry*. New York: American Book Company. 1929. 304.

如何表示 2 的算术平方根：七年级学生的创新设计*

施慧慧[1]　汪晓勤[2]

（1. 上海市延安初级中学，上海, 200050; 2. 华东师范大学数学系，上海, 200242）

我们今天耳熟能详的任何一个数学符号，都是历史上数学家的创造，且都是在经过长期的优胜劣汰之后被人们所普遍采用的。数学符号的历史可以让学生认识数学和数学活动的本质，让学生自己动手创造数学符号，则是积累数学活动经验的一种途径。实践证明，如果教师在课堂上能够将学生所创造的符号与历史上数学家曾经创造过、但今日可能已被淘汰的符号进行比较，让学生感受到两者的相似性，那么，学生与数学的心理距离将得以拉近，学生的自信心将得到提升，学生对数学活动将会有更深刻的认识[1]。

那么，为了表示 2 的算术平方根，七年级学生能创造出哪些数学符号？这些符号是否具有历史相似性？从中可以看出学生的理解现状如何？他们对于数学符号特征又有怎样的认识？对为了回答上述问题，我们对上海某初级中学七年级 9 个班级共 310 名学生进行了测试。测试题为：“我们已经知道，面积为 2 的正方形的边长用符号 $\sqrt{2}$ 来表示。请你也来构造一个新的符号，用以表示面积为 2 的正方形的边长，并简单说明构造的理由。”所有学生在学校里都刚学过第一个无理数 $\sqrt{2}$ 。

1 学生设计的符号

在总共 310 名学生中，283 人（占 91.3%）为“2 的算术平方根”设计了符号，其中合理的符号可以分为几何图形、借鉴、运算、指数、字母、艺术、其他共七类。图 1 给出了具体的分布情况。

---

* 上海市教育研究项目“培养六、七年级学生数感的数学教学活动研究”（批准号：B13183）研究成果之一。将发表于《中学数学月刊》。

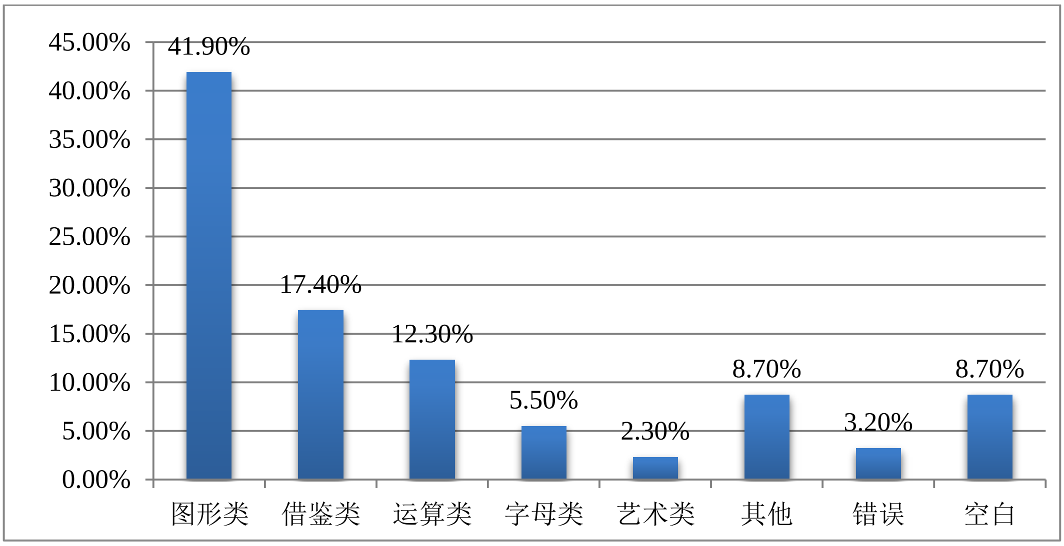


图 1 学生创造的根号类型分布

1.1 几何图形类

1.1.1 面积为 2 的正方形边长

130 人（占 41.9%）采用几何图形符号来表示$\sqrt{2}$。其中，最普遍的符号是“内含数字 2 的正方形”，表示“方二之面”；一些学生在正方形某一边的外侧添一个大括号或一条线段，或将某条边加粗，或在某一条边上划两根短杠，以强调所设计的符号表示正方形的“边长”，如图 2 所示。

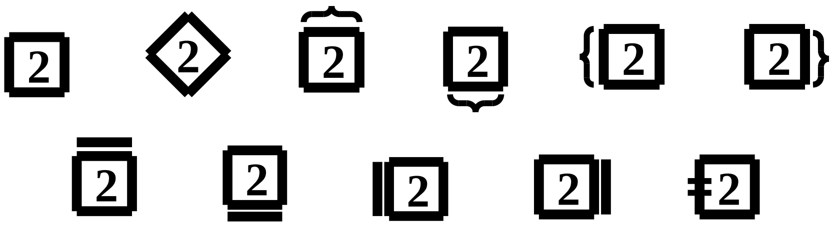


图 2 几何图形符号之一

有的学生将正方形的一条边画成虚线、三条边画成实线，虚线表示$\sqrt{2}$；或将三条边画成虚线、一条边画成实线，实线表示$\sqrt{2}$；或将一条边两端或一端延长，如图 3 所示。

图 3 几何图形符号之二

部分学生在正方形下方标 2，而在正方形的一条边上标一个箭头，或在正方形的右边标

2 或标带括号的 2，或在正方形的左侧或上侧标上字母 *a*，如图 4 所示。

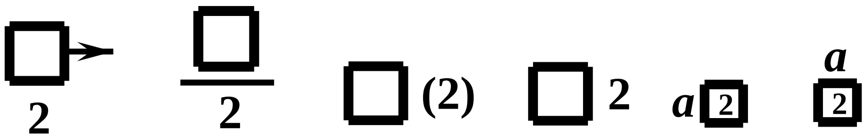


图 4 几何图形符号之三

还有学生用正方形的一部分（三边、两边或一边）与数字 2 组合起来表示“面积为 2 的正方形的边长”，这类符号更加简洁，如图 5 所示。

图 5 几何图形符号之四

1.1.2 其他几何图形

部分学生单位正方形的对角线或直角边为 1 的等腰直角三角形的斜边来表示 $\sqrt{2}$。还有少数学生用内含数字 2 的圆来表示 $\sqrt{2}$。个别学生用内含数字 2 的三角形或内含 2 的两条平行线来表示 $\sqrt{2}$。如图 6 所示。

图 6 几何图形符号之五

1.2 借鉴类

54 人（占 17.4%）在设计符号时直接利用或借鉴了今天通用的根号“$\sqrt{\ }$”。较多的学生将该符号施以反射变换，得到新符号；或者将反射后的符号与原来的符号组合成对称的新符号。还有学生将“$\sqrt{\ }$”做了部分改动，如图 7 所示。

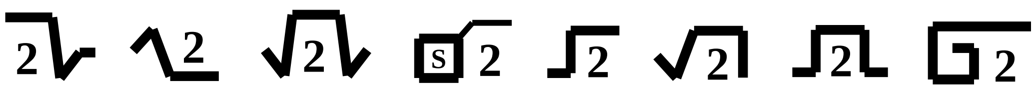


图 7 借鉴类符号

1.3 运算类

38 人（占 12.3%）从运算的角度来设计 $\sqrt{2}$ 的新符号，又分成几种情形。一是利用方程，设边长为 *x*，则得方程 $x^2=2$，或 $x=\frac{2}{x}$。二是展示运算过程，如符号“$\overset{2}{\square\times\square}$”、“$\overline{2}^{\,2}$”、“●2●”、“2●●”等。后两个例子中，2 后面加两点或两边各加一点，表示两个同样的数相乘等于 2。三是体现开方是乘方的逆运算，如符号“$\underline{\times}2$”，在乘号（表示乘方）之下添一负号“—”，表示逆运算；或因为 2^2 表示 2 的二次方，所以将指数 2 写在 2 的右下角、左下角或左上角，即得 $\sqrt{2}$ 的新符号：2_2，${}_2 2$，${}_{(2)}2$ 或 ${}^2 2$；个别学生给出正确的分数指数幂 $2^{\frac{1}{2}}$，一名学生给出 $\left(2^*\right)^2=2$，已呈现分数指数幂之萌芽。

还有学生想象将 2 分解成两个相同的数的乘积，于是将 2“切成两半”，创造了符号“$\cancel{2}$”和“$\bcancel{2}$”。一位学生用 Δ 来表示“先减 2，再开方”的运算，于是，符号“$\Delta 4$”就表示 $\sqrt{2}$ 了。

当然，也有学生采用运算结果等于 $\sqrt{2}$ 的表达式，如 $\frac{2}{\sqrt{2}}$，$\sqrt[4]{4}$，$\sqrt{\sqrt{4}}$ 等。

1.4 字母类

17 人（占 5.5%）利用字母来设计新符号。比较典型的有：

- 用 *a* 表示正方形的边长，内含数字 2 表示正方形的面积，于是得到符号 a（内含 2）；
- 用 *S* 表示正方形的面积，内含两个数字 2，的符号 S（内含两个 2）；
- 因为 $\sqrt{2}$ 与 π 一样是无理数，故用希腊字母 π 与数字 2 的组合来表示它，得到符号 π（内含 2）；
- “平方根”的英文为 Square root，取其首字母，即得符号 SR2；
- “根”的英文为 root，取其首字母，即得符号 R2；
- 取“根号”二字的汉语拼音首字母 gh，得到符号 2_{gh}；

- 取“边”的汉语拼音首字母 B，得到新符号 $B\boxed{2}$；
- 取“正方”二字的汉语拼音首字母 ZF，得到新符号 ZF2；
- 由“边长”联想到英文“length”，取首字母是 L，得到新符号 $L2$。

1.5 艺术类

7 人（2.3%）的学生从美观的角度来设计符号。典型的有蝴蝶结、笑脸、五角星、太阳等，如图 8 所示。

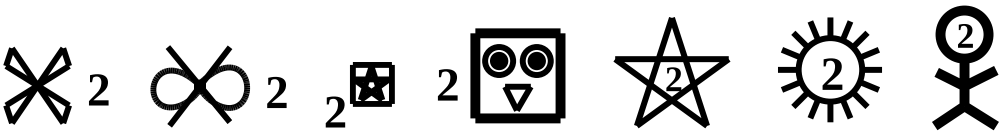


图 8 艺术类符号

1.6 其他

有 27 人（占 8.7%）设计的符号并不属于上述各类型，但大多十分简洁，如 $*2$， 2^*，$2!$，$2^\#$，$\hat{2}$，$\underset{\cdot}{2}$，$\underset{\cdot}{\dot{2}}$，⋈ 2，⧖ 2 等。

此外，4.4%的数学给出错误的表示方式，如，一位学生构造一个大于 1 且小于 2 的无理数 1.010010001…，以此表示 $\sqrt{2}$，显然是错误的。还有几位学生各用 $\sqrt[2]{4}$、$\frac{\sqrt{4}}{2}$、$-\sqrt{-2}$、$3\sqrt{4}$、$4\sqrt{2}$、$\left(\frac{1}{2^2}\right)^2$、$2^{\frac{2}{1}}$ 等来表示 $\sqrt{2}$，都是错误或不合理的。不过，“$2^{\frac{2}{1}}$”这一符号似乎已呈现出分数指数幂的萌芽了。

2 若干评论

2.1 历史相似性

$\sqrt{2}$ 的几何意义是“面积为 2 的正方形的边长”，沪教版七年级数学教科书中以此引入 $\sqrt{2}$。由于学生初次接触 $\sqrt{2}$，对于无理数还没有深刻的认识，因此，我们将问题表述为“请

你创造一个新的符号来表示面积为 2 的正方形的边长”，而不是“创造一个新的符号来表示 2 的算术平方根”。受课本、课堂教学以及问题表述方式的影响，设计几何图形符号的学生比例是最高的。

从历史上看，正方形先后被 16 世纪法国和意大利数学家用来表示未知数的立方和平方，17 世纪，对数发明者、英国数学家纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）曾用“$\sqcup$”表示平方根，用正方形表示五次方根，但他的符号似乎并非源于几何意义。因此，学生的几何图形符号并不具备明显的历史相似性。位居第二的借鉴类符号源于今天的通用符号，并没有多少创新性。

在运算类符号中，在 2 前面加点来表示平方根，重复了历史上德国数学家的做法，15 世纪德国数学手稿中提及这种符号 [2]。而用上标或下标来表示平方根，则已经有了分数指数幂的萌芽，是非常有创意的。

历史上数学家创造的根号主要源于文字的缩写。数学上，“根”这个词源于阿拉伯，传入欧洲后，“根”被译为拉丁文“radix”，于是，它的首字母 R 或 r 就被 15-16 世纪数学家用来表示平方根 [2]。按照欧拉的说法，16 世纪德国数学家鲁道夫（C. Rudolff, 1499-1543）创用的符号“√ ”就是源于字母 r，是 r 的变形（上方的横线是后来笛卡儿加上去的，便于表示复杂的根式）。法国数学家拉缪斯（P. Ramus, 1515-1572）则用拉丁文“边”（latus）的首字母“l”来表示平方根 [2]。因此，学生创用的字母类符号最具历史相似性。

2.2 学生对 $\sqrt{2}$ 的接受程度

本次调查是在学生初识 $\sqrt{2}$ 后实施的，从学生创造的符号，特别是几何图形符号以及运算符号来看，他们对 $\sqrt{2}$ 的接受程度是相当好的，相当多学生能给出清晰的几何表征。我们知道，古希腊毕达哥拉斯学派在研究正方形对角线与边长之比时发现不可公度量的存在性，也就是说，无理数的发现源于几何情境。教材和课堂教学从几何情境出发引入无理数符合历史规律，也易于创造学生学习新数的动机；$\sqrt{2}$ 因此也易于为学生所理解。

2.3 数学符号史在教学中的缺失

虽然，学生创造的字母符号具有历史相似性，但这类符号所占的比例很低。究其原因，学生对根号“$\sqrt{}$”的起源一无所知，大多数学生并不知道，可以从文字缩写的角度来设计

平方根的符号，而这又源于课堂上符号史知识的缺失。虽然“$\sqrt{\ }$”是一全新的符号，但教师不加任何解释地使用它，就像使用 +、—、×、÷等符号一样。

2.4 学生对数学符号特征的片面认识

直观、简洁、贴切、普适，是数学符号的重要特征。虽然学生几乎每天都会接触到各种数学符号，但从他们所创造的大多数符号来看，他们对于数学符号特征的认识是片面的。多数几何图形符号和部分运算符号都很直观，而多数艺术类符号都很美观，但它们都不够简洁，书写不够方便，且其中的大多数并不具备普适性，不能适用于其他数字的平方根或根式。借鉴类符号中，多数属于“画蛇添足”，不如原来的符号简洁。“其他类”符号虽然大多很简洁，但不够贴切，因为它们与“根”的含义没有必然的联系。

3 结语

以上我们看到，关于 2 的算术平方根，绝大多数学生能够创造出自己的新符号，这些符号可以分为几何图形类、借鉴类、运算类、字母类、艺术类等。这些符号表明，学生对于$\sqrt{2}$这一全新的实数的接受程度是比较令人满意的，相当多学生对该数给出了十分清晰的几何表征；教材和教学在激发学生学习无理数的动机、促进学生对无理数的理解方面是比较成功的。少数学生设计的字母符号具有显著的历史相似性，但由于符号史的在教学上的缺失，多数学生未能从文字缩写角度去创造根号。绝大多数学生所设计的符号具有直观或美观的特点，但简洁性和普适性明显不足，反映了他们在数学符号认识上的片面性。

数学符号的历史是数学史不可分割的一部分。将数学史融入无理数的教学，对初中数学教师来说并非什么新鲜事物，但绝大多数教师往往局限于西帕索斯发现无理数的故事。让学生创造表示平方根的新符号，呈现历史上数学家创造的根号，让学生穿越时空与古人对话，必能更好地发挥数学史的教育价值。

参考文献

[1] 王芳, 刘智敏. 不等号: 从历史到课堂[J]. 中学数学月刊. 2014, (2): 51-53.

[2] Cajori F. *A History of Mathematical Notations* (Vol.1). La Salle: The Open Court Publishing Company. 1951-1952. 115-120.

七年级学生关于$\sqrt{2}$的概念意象*

王烨 [1]　汪晓勤 [2]

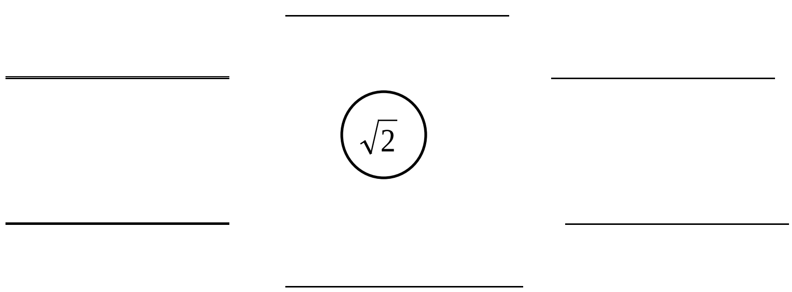
（1.上海市延安初级中学，上海, 200050; 2.华东师范大学数学系，上海, 200241）

1 引 言

所谓概念意象（concept image），是指与某一个概念相关的整个认知结构，包括图形、符号、与概念相关的一组性质等 [1]。人们往往通过对学生的概念意象的研究来了解他们对概念的理解现状。

$\sqrt{2}$是学生在初中阶段认识的第一个无理数。沪教版七年级（下）第一章“实数”的第一节就是以$\sqrt{2}$为引例来导出无理数概念的。为了加深学生对这个新数的认识，我们专门设计了“$\sqrt{2}$的认识”一节课。首先引入活动：画出面积为 2 的正方形，进而提出问题：面积为 2 的正方形的边长是多少？这个数是否分数？在证明它不可能是有理数后，引出新的数，并对实数进行分类。接着，提出新问题：如何在数轴上准确地标出$\sqrt{2}$？从而更进一步建立$\sqrt{2}$的几何表征。

那么，刚刚接触这一新数的七年级学生，对其持有何种意象？从中可以看出学生的数感的现状如何？教学上有哪些不足之处？为了回答上述问题，我们对某校七年级 9 个班级共 310 名小学生进行了调查。调查题目是：谈到$\sqrt{2}$，你想到哪些内容？请把想到的内容写在下面横线上，并简单说明理由。



* 上海市教育科学研究项目“培养六、七年级学生数感的数学教学活动研究”（批准号：B13183）研究成果之一。

我们希望对学生的答案进行归类。

2 测试结果

学生共给出了 1566 条回答，人均 5.05 条。这些回答可以分成以下 8 类：属性类、图形类、符号类、数值类、运算类、历史类、信念类、证明类，图 1 给出了各类意象出现频率的分布情况。

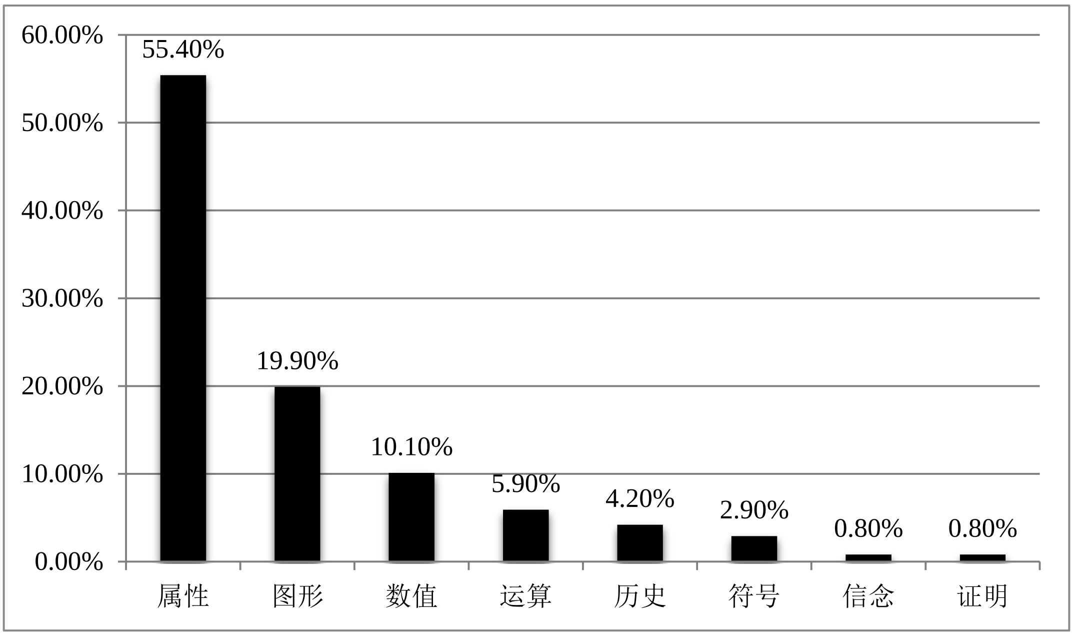


图 1 不同回答类型的频率分布

每位学生所持意象的类别数互有不同，最少的只有 1 类，最多有 6 类，平均每人 2.75 类。图 2 给出了各类别数的分布情况。

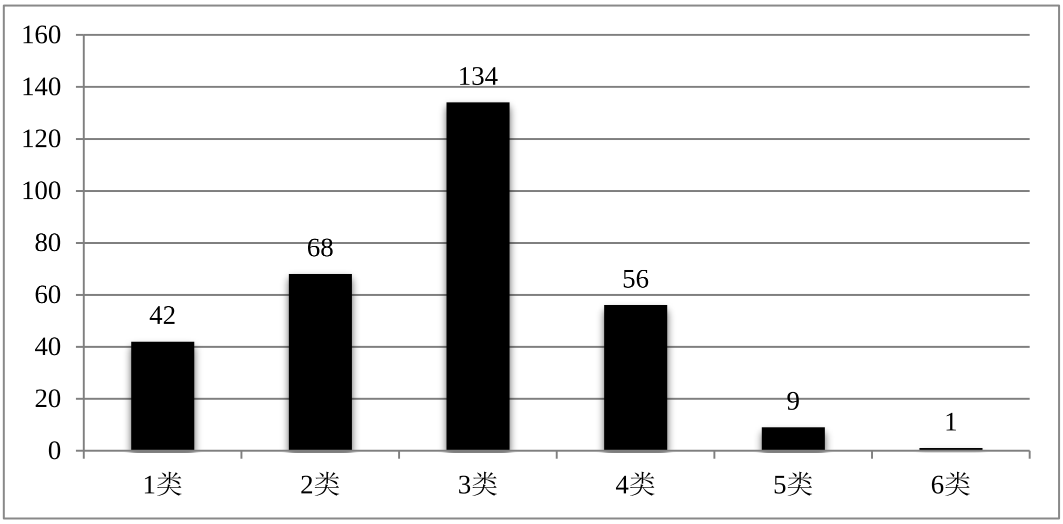


图 2 各类别数的分布情况

2.1 属性类

属性类的频数为 868（占 55.40%），其中，学生提得最多的是“无理数”或“无限不循环小数”，频数为 269。其次是“其他无理数”，频数为 165。学生由 $\sqrt{2}$ 联想到无理数 π，$\pi+1$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}+1$，$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[5]{2}$，$0.1010010001\cdots$，$0.123456\cdots$，等等，还有一位学生给出一般结伦：“$\sqrt{\text{非平方数}}$=无理数”。其他回答依次为“实数”、“正数”、“有理数”、“不可比数”或“不能表示成分数的数”，频数依次为 143、71、41 和 31。其中，一些学生由 $\sqrt{2}$ 联想到 $\sqrt{4}$，$\sqrt{9}$，$\sqrt{25}$ 等，或因不是有理数的数是无理数，或实数由有理数和无理数组成，故写上“有理数”。

2.2 图形类

图形意象的频数为 311（占 19.9%）。其中，“面积为 2 的正方形边长”（少数学生还画出图 3）、“面积为 1 的正方形的对角线”、“面积为 1 的等腰直角三角形的直角边”、“直角边为

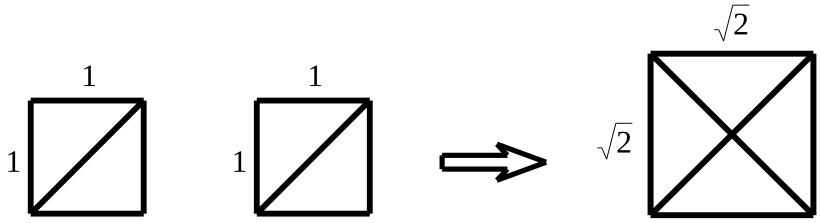


图 3 教材中的 $\sqrt{2}$ 的引入

1 的等腰直角三角形的斜边”等的频数为 223，“数轴”或“直角坐标系”的频数为 76、“勾股定理”的频数为 12。学并未学过勾股定理，但少数学生由等腰直角三角形的斜边或正方形的对角线联想到该定理，还有学生直接写出等式 $1^2+1^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$，可见课外已对其有所接触。

2.3 数值类

数值类意象的频数为 158，占 10.1%。主要有以下几种情形：

- 区间（频数为 98）：$1<\sqrt{2}<2$，$1<\sqrt{2}<\sqrt{3}$，$1.4<\sqrt{2}<1.5$，$1.41<\sqrt{2}<1.42$，$1.414<\sqrt{2}<1.415$；

- 近似值（频数为 56）：$\sqrt{2}\approx 1$，$\sqrt{2}\approx 1.4$，$\sqrt{2}\approx 1.41$，$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{2}=1.414\cdots$；
- 3 人写出了分数指数幂的形式：$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$；
- 1 人写出了 $\sqrt{2}$ 的连分数形式：$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}$。

2.4 运算类

运算类的频数为 92。主要有以下几种情形：

- 对 $\sqrt{2}$ 实施某种运算（频数为 73）：如 $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$，$\left(\sqrt{2}\right)^4=4$，$\sqrt{2^2}=2$，$\left|\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}$ 等；
- 开平方是平方的逆运算（频数为 13）；
- 方程 $x^2=2$（频数为 6）。

2.5 历史类

数学史包括人物与事件，频数分别为 51 和 14。人物主要是无理数的发现者希帕索斯以及相关的毕达哥拉斯，还有第一个使用根号“$\sqrt{\ }$”的数学家笛卡儿。数学史事件主要是：

- 在发现 $\sqrt{2}$ 之前，人们认为所有的数都可以表示为 $\frac{q}{p}$（$p\neq 0$，且 p，q 为整数）；
- 希帕索斯因为发现无理数而被毕达哥拉斯学派处死；
- 希帕索斯是被他的老师毕达哥拉斯淹死的；
- $\sqrt{2}$ 的发现导致第一次数学危机；
- $\sqrt{2}$ 的发现导致了数学的发展。

2.6 符号类

这类意象的频数为 45。一些学生直接写“根号”，另一些学生对“$\sqrt{\ }$”这一新的数学符号印象深刻：有人称其为“一个钩子”，有人认为它像“除法的符号”，有人将其想象为“汽

车的坐标左半部分，2 为坐在副驾驶室的人”，有人联想到了“滑滑梯”，有人联想到了“鱼”（或许因为根号像鱼钩）。一名学生联想到“工厂里的 2 个人”（因为根号与“厂”字相像）。还有一名学生由$\sqrt{2}$联想到了试卷上的分数：“一个勾，加 2 分”。

2.7 证明类

由于教学中，一些教师对$\sqrt{2}$的无理性进行了证明，所以有 13 人提到了“如何证明$\sqrt{2}$为无理数”、“反证法”或证明中的某个步骤，如“假设$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$（p 和 q 互素）”，或“由$\left(\frac{q}{p}\right)^2=2$，可证明整数 p 和 q 不存在”。

2.8 信念类

13 人提到了对$\sqrt{2}$的认识或评价：“$\sqrt{2}$是存在的”、“$\sqrt{2}$弥补了数的缺陷”、“人类对数有了更深的认识”、“发现$\sqrt{2}$是数学的一大进步”、“$\sqrt{2}$是一个神奇的数”、“$\sqrt{2}$反映了数学家的探究精神”、“无理数为不常用数，有理数为常用数”、“无理数很难被用到”、“无理数是没有规律的数”、“无理数不可测量”。

3 若干评论

3.1 关于$\sqrt{2}$的意义

“了解数字的基本意义”是数感的基本成分之一。$\sqrt{2}$的基本意义包括“$\sqrt{2}$的产生”、“$\sqrt{2}$的几何表征”以及“$\sqrt{2}$的属性”（即不能表示成分数，故不属于有理数）等内容。在本次测试中，频数最多的两种意象，即$\sqrt{2}$的属性与几何表征，源于教材和教学中的无理数的引入方式、无理数的证明、几何作图以及无理数的小数定义。易见，学生对$\sqrt{2}$的接受程度比较令人满意，在建立$\sqrt{2}$的基本意义上，教学是成功的。

很多学生由$\sqrt{2}$联想到$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$，$\sqrt{8}$等等，并指出，这些数与$\sqrt{2}$一样，

都是无理数。这表明，学生能够将“已知正方形面积求边长”的几何情境与开平方对应起来，从“不尽根”的角度来认识无理数。在早期西方教科书中，我们看到无理数概念与不尽根（surd）概念几乎是等同的，从某种意义上说，学生对无理数的认识具有一定的历史相似性。

3.2 关于根号

学生首次遇到根号，将其想象成一个钩、 一个汉字、一张滑梯、一个除号，这自然是无可厚非的。但是，倘若教师能够向学生介绍根号“$\sqrt{\ }$”的历史，学生就不会有那些肤浅的想象了。数学上，“根”这个词源于阿拉伯，传入欧洲后，“根”被译为拉丁文“radix”，于是，它的首字母 R 或 r 就被 15-16 世纪数学家用来表示平方根[2]。符号“√ ”是 16 世纪德国数学家鲁道夫（C. Rudolff, 1499-1543）创用的，它实际上源于字母 r，是 r 的变形。如果学生知道这一点，他们对于根号就会有新的认识。此外，“$\sqrt{\ }$”上方的横线是后来笛卡儿加上去的，但“笛卡儿是第一个使用根号的人”这一说法是不准确的。

3.3 关于$\sqrt{2}$的历史

提到数学史的学生只集中于两三个班级，显然，只有这几个班级的任课教师在课堂上介绍了无理数的历史。这些学生对于数学史印象十分深刻，部分学生从数学史中感悟到数学的演进性、无理数的意义以及数学家的探究精神，数学史的教育价值由此可见一斑。不过，教师讲到无理数的历史，都只是重复了那则传说：希帕索斯因为发现无理数而被毕达哥拉斯学派处死。有学生写道：“无理数的发现者希帕索斯被他的老师毕达哥拉斯杀死了。”事实上，这则传说未必可信，较为可信的一种说法是“希帕索斯被逐出师门”。我们认为，后一种传说更适合向学生介绍。

尽管部分学生知道无理数为“不可比数“或”不能表达成分数的数”，但仍有学生认为无理数“没有规律”，这可能源于对“无理数”一词的望文生义式的理解。事实上，“无理数”是“不可比数”（irrational numbers）的误译，如果教师在课堂上向学生解释这个术语的历史，必将有助于学生的理解。

3.4 关于生活中的$\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$在现实生活中的运用之例在课堂上是缺失的，因此会有学生认为"$\sqrt{2}$很难用到"。事实上，现实生活中学生很熟悉的 A4 纸，其长宽之比即为$\sqrt{2}:1$。设 A4 纸的宽为 1，教师可以将 A4 纸沿对角线对折，由一开始的探究活动可知，折痕的长度为$\sqrt{2}$。再按对角线对折，可以看出 A4 纸的长度与刚才得到的折痕长度完全相等，如图 4 所示。

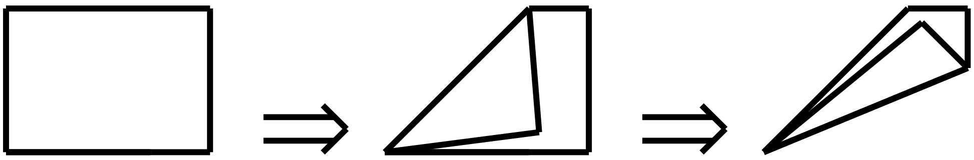


图 4 通过折纸活动揭示 A4 纸的长宽之比为$\sqrt{2}:1$

4 结语

以上我们看到，经过"$\sqrt{2}$的认识"一节课的学习之后，初中生关于$\sqrt{2}$的意象可分成属性、图形、数值、运算、符号、历史、信念、证明 8 类，每位学生平均持有的意象为 2.75 类，写出 3 类意象的学生最多。从中可知，学生对于$\sqrt{2}$的接受程度较为理想，基于数感的"$\sqrt{2}$的认识"的教学在建立$\sqrt{2}$的基本意义上是比较成功的。学生易于理解不尽根概念，因而能够顺利地将$\sqrt{2}$推而广之，得到更多的无理数。证明类意象很少，说明学生在理解$\sqrt{2}$无理性的证明时存在困难。

调查结果也表明，多数教师并未运用数学史；对于运用数学史的教师来说，相关的史料还有待于完善。根号的历史则付之阙如，影响了学生的理解。教师在课堂上并未给出$\sqrt{2}$在现实生活中的实例，造成部分学生对$\sqrt{2}$的消极信念。

参考文献

[1] Vinner, S.. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 1983, 14(3): 293-305.

[2] Cajori F.. *A History of Mathematical Notations* (Vol.1). La Salle: The Open Court Publishing Company. 1951-1952. 115-120.

为什么$\sqrt{5}$是无理数：七年级学生的证明*

戚双泱 [1]　汪晓勤 [2]

（1.上海市延安初级中学，上海, 200050; 2.华东师范大学数学系，上海, 200241）

1 引 言

实数的概念是沪教版初中数学七上第 12 章第 1 节的内容，在这一节，学生第一次遇到无理数这一全新的概念。以往的教学实践表明，许多学生初学无理数概念之后，对有理数与无理数的本质区别依然不甚了了，甚至有学生将$\frac{22}{7}$看作无理数，$\frac{\sqrt{3}}{2}$看作有理数。要让学生真正接受无理数、深刻理解无理数与有理数的区别，就需要让学生看到一个无理数何以不是有理数的理由，而有关实证研究表明，“无限不循环小数”这一定义无助于学生对无理数的理解 [1]。对于“为什么$\sqrt{2}$不是有理数”，教科书在阅读材料中给出了证明，而教师在课堂上却很少运用这则材料。原因有三：一是因为与考试关系不大，教师和学生并不重视阅读材料；二是很多教师认为课堂上没有足够的时间；三是，教师担心学生在证明的理解上存在困难。

笔者之一所在学校的七年级数学组在实施“培养学生数感”的教学活动中，专门设计了“$\sqrt{2}$的认识”一节课，教师在引入$\sqrt{2}$之后，用反证法对$\sqrt{2}$的无理性给予了证明：假设$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$，其中 a、b 为正整数，$a\neq 0$，且 a 与 b 互素，则有$2=\frac{a^2}{b^2}$，即$a^2=2b^2$。故 a 为 2 的倍数；设$a=2m$，且 m 为正整数，则有$(2m)^2=2b^2$，即$b^2=2m^2$。故 b 也是 2 的倍数。于是，a 和 b 有公因数 2，与 a、b 互素矛盾。因此，$\sqrt{2}$不能表示成$\frac{a}{b}$的形式，即$\sqrt{2}$不是有理数。从历史上看，这个证明很可能是无理数的发现者西帕索斯本人给出的 [2]，也是数学史上反证法的第一个应用之例。

那么，学生对上述证明的理解情况如何？存在哪些问题？为了回答上述问题，我们通过以下问题对为了回答上述问题，我们对七年级 9 个班级共 310 名学生进行了测试。测试问题是：“你能用证明$\sqrt{2}$是无理数的方法来证明$\sqrt{5}$是无理数吗？若能，请给出证明。”

* 上海市教育科学研究项目“培养六、七年级学生数感的数学教学活动研究”（批准号：B13183）研究成果之一。

2 测试结果

2.1 总体测试结果

我们将“$\sqrt{5}$为无理数”的证明分成七步：

（1）否定所证结论：假设$\sqrt{5}=\frac{q}{p}$；

（2）限定 p、q 范围：p，q 为正整数，$p \neq 0$，且 p，q 互素；

（3）建立 p、q 关系：$q^2=5p^2$；

（4）获得 q 之性质：q 为 5 的倍数；

（5）推导 p^2 表达式：设 $q=5m$，得出 $p^2=5m^2$；

（6）获得 p 之性质：p 为 5 的倍数；

（7）得出矛盾结果：p，q 不互素，与假设矛盾。

图 1 给出了完成不同步数的人数分布情况。

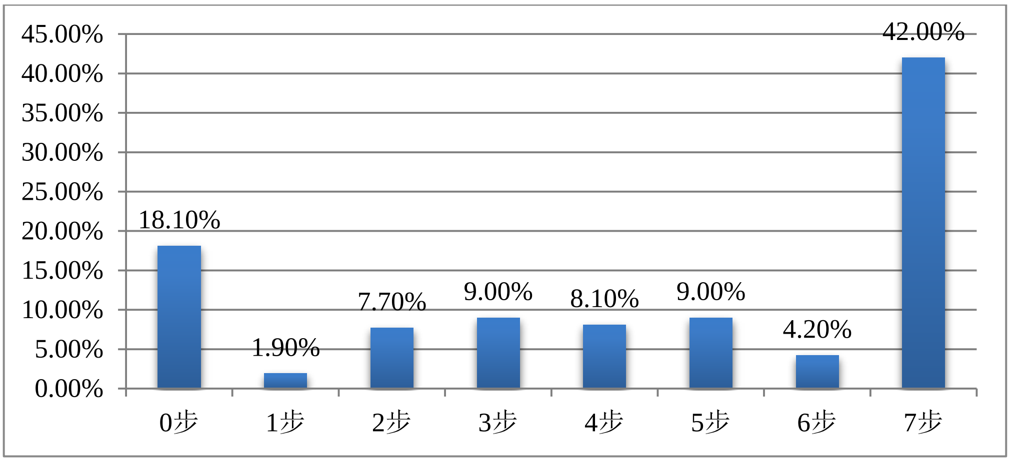


图 1 各步数上的人数百分比

在 310 人中，有 130 人给出了完整的证明，占了 42%。这部分学生已完全理解教师在课上所讲的“$\sqrt{2}$为无理数”的证明，并将其运用于证明“$\sqrt{5}$为无理数”。

13 人只完成了 6 步，占 4.2%。其中有 8 人没有给出第 6 步，2 人没有给出第 5 步，3 人没有给出第 2 步。 28 人只完成了 5 步，占 9.0%其中 19 人未能给出第 5、6 步，3 人未给出第 6、7 步，2 人未给出第 2、5 步，各有 1 人未给出第 1、2 步、第 4、5 步和第 4、6 步。25 人只完成了 4 步，占 8.1%。其中 13 人未写出第 4-6 步，10 人未写出第 5-7 步，2 人未写出第 2、6、7 步。28 人只完成了 3 步，占 9.0%，主要集中在前 3 步。24 人只完成了第 1-2 步或第 1、3 步，占 7.7%。有 6 人只写出了第 1 步。

56 人（占 18.1%）完全不知道如何证明“$\sqrt{5}$是无理数”，其中大多数人只字未写；少

数人只写了“能”或“不能”；还有个别学生错误地采用了几何作图法或数值验算法。

图 2 给出了完成各步骤的人数分布情况。

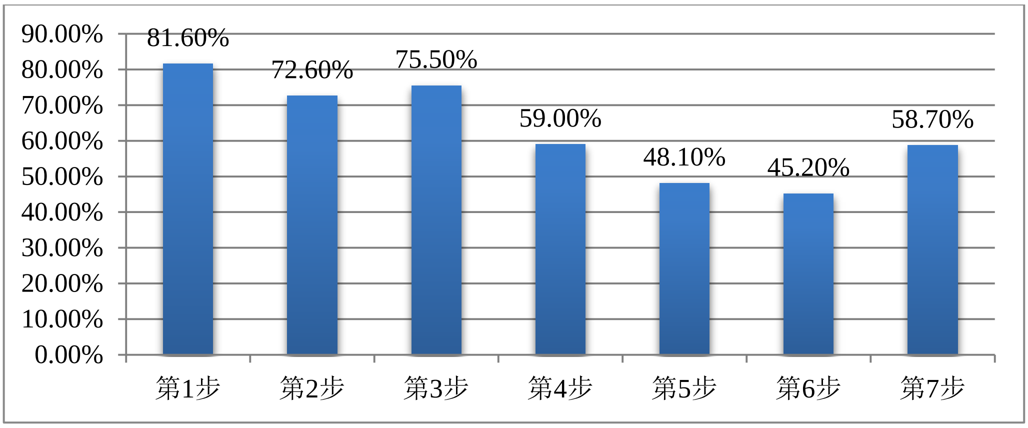


图 2 完成各步骤的人数分布情况

完成人数从高到低依次为第 1 步、第 3 步、第 2 步、第 4 步、第 7 步、第 5 步和第 6 步。其中，完成第 4-7 步的学生人数比率较前 3 步明显减低，特别是第 5-6 步，完成者不足半数。

2.2 反证法的运用情况

肯定命题的条件而否定命题的结论，引出矛盾，从而证明原命题成立，这样的证明方法叫做反证法。从历史上看，反证法的使用与无理数的发现密切相关 [3]。

本次测试中，81.6%的学生正确写出了第 1 步，即能正确否定所要证明的结论；58.7%的学生正确写出了第 7 步，除了极个别学生外，写出第 7 步的学生都正确写出了第 1-2 步。这表明，这部分学生对反证法有了基本的理解，知道在否定结论的条件下，若能导出矛盾或错误结果，则假设不成立，结论得到了证明。

大部分学生对最后一步的表述是准确的：在得出 p，q 有公因数 5 后，指出该结论与假设中“p，q 互素”这一条件矛盾（或不符、不合、不同、冲突、不一致），从而断言假设不成立，即 $\sqrt{5}$ 为无理数。但也有部分学生的表述不准确甚至是错误的，如：

- p、q 不互素，与题意产生矛盾；
- p、q 不互素，设立的条件不成立；
- p、q 不互素，所以假设“p、q 互素”不成立；
- p、q 不互素，与有理数性质相矛盾；
- p、q 不互素，与前面矛盾；
- p、q 不互素，所以 $\sqrt{5} \neq \dfrac{q}{p}$；
- p、q 不互素，所以结论不成立；

• p、q 不互素，所以$\frac{q}{p}$不成立；

• p、q 不互素，所以$\frac{q}{p}$是无理数，所以$\sqrt{5}$是无理数；

2.3 学生推理过程中的错误

学生在第 4-6 步上遇到了较大的困难。多数学生能够由$\sqrt{5}=\frac{q}{p}$导出$5=\frac{q^2}{p^2}$或$q^2=5p^2$，但有很多学生未能正确得出"q 为 5 的倍数的"这一结论；更多的人未能进一步得出"p 为 5 的倍数"这一结论。

事实上，由$q^2=5p^2$推出$5\mid q$，其背后的依据是初等数论中的一个重要定理：若 m 为素数，a 和 b 为正整数，$m\mid ab$，则有 $m\mid a$ 或 $m\mid b$。由此可得，若$5\mid p^2$，则$5\mid p$。多数学生对该定理不甚了了，一些学生能够由$q^2=5p^2$推出$5\mid q$，完全是类比了关于$\sqrt{2}$证明中的"$q^2=2p^2\Rightarrow 2\mid q$"。另一些学生则作了各种错误或模糊的推理，主要有以下几种情形。

（1）鸿沟难越

未能得出 p 或 q 为 5 的倍数，半途而废：

- 由$q^2=5p^2$得出结论"q^2是 5 的倍数"，但未能进一步得出"q 是 5 的倍数"；
- 由$q^2=5p^2$得出$q^2=5m$，$p^2=m$；
- 由$q^2=5p^2$得出$q=5n$，但将其未能代入$q^2=5p^2$；
- 由$q^2=5p^2$得出$q=5n$，从而得到$p^2=5n^2$，但未能进一步得出"p 是 5 的倍数"；
- 由$q^2=5p^2$，设$q^2=5m$，则得$5m=5p^2$，从而得$p^2=1$，$q^2=5$；
- 因$q^2=5p^2$，故p^2和q^2的末位数必为 0 或 5，它们有一个共因数 5。

（2）言而无据

直接得出结论，蒙混过关：

- 由$q^2=5p^2$直接得出结论"p、q 不互素"；
- 由$q^2=5p^2$直接得出结论"p、q 都含有因数 5"；
- 由$q^2=5p^2$得出"q 含有因数 5"的结论后，断言"同理，p 含有因数 5"；
- 由$q^2=5p^2$得出"p 中含有因数 5"。

（3）张冠李戴

盲目照搬关于$\sqrt{2}$为无理数的证明，没有变通：

- 由$q^2=5p^2$，设$q=2m$，则得$4m^2=5p^2$，从而p也含有因数 2；
- 由$q^2=5p^2$得出“p、q均为偶数”。

（4）概念错误

学生推理过程中也反映出概念不清的问题。

- 由$q^2=5p^2$得q有因数$\sqrt{5}$，设$q=n\sqrt{5}$，则得$q=n$。
- 由$q^2=5p^2$，可得p，q有公因数 5；设$q=5m$（m 为整数），则$p^2=5m^2$，也可得p，q有公因数 5。
- 由$q^2=5p^2$得q有因数 5，设$p=5m$，则得p也有因数 5。

（5）运算错误

在学生推理过程中出现各种运算错误，五花八门：

- $\frac{q^2}{p^2}=5\Rightarrow p^2=5q^2$；
- $\frac{q^2}{p^2}=5\Rightarrow \frac{q}{p}=5$；
- $\frac{q}{p}=\sqrt{5}\Rightarrow \frac{q^2}{p^2}=25$；
- $\frac{q^2}{p^2}=5\Rightarrow \frac{q}{p}=5m$（$m$为正整数）；
- $\frac{q}{p}=\sqrt{5}\Rightarrow \frac{q^2}{p^2}=5m^2$（$m$为正整数）；
- 由$q^2=5p^2$，设$q=5m$，则$p=5m$；
- 由$q^2=5p^2$，设$q=5m$，则$p^2=5m$；
- 由$q^2=5p^2$，设$q=5m$，则$p^2=m^2$或$p=m$；
- 因$q^2=5p^2$，故q含有因数 5，因$p^2=5q^2$，故p含有因数 5。

2.3 其他尝试

一名学生画出数轴，并写道：“因为数轴上没有一个可以直接表示$\sqrt{5}$的点，所以$\sqrt{5}$是无理数。”显然，这名学生认为“无限不循环小数”无法在数轴上准确标出来，所以用“能否用数轴上的一个点来表示”作为判别无理数的标准。这反映了无理数的“小数”定义对学生的负面影响，也印证了国外的有关研究结果[1]。

另一名的做法学生恰好相反，用几何方法在x轴上找到了$\sqrt{5}$这一点。这名学生误将几

何作图看作是证明。

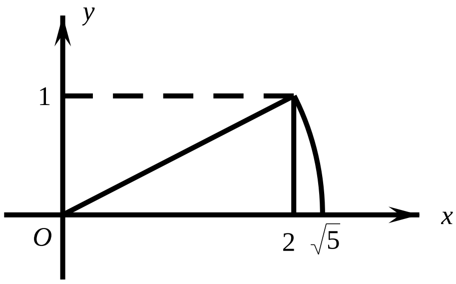


图 3 在数轴上的表示$\sqrt{5}$

3 结语

测试结果表明，经过“$\sqrt{2}$ 的认识”一节课的教学，7 年级学生中约有四成能够完全理解“$\sqrt{2}$ 为无理数”的证明，并将其运用于$\sqrt{5}$的无理性的证明之中。鉴于多数学生并没有学过基本的数论知识，我们认为，这个比率还是比较理想的。近六成学生知道反证法“否定结论，推出矛盾，从而证明结论成立”的思路。但是，不少学生在最后一步的表述上还存在问题。

在证明$\sqrt{5}$为无理数时，学生最大的困难在于从等式$q^2 = 5p^2$中推出$5|q$，并据此推出$5|p$，其原因是，他们对数论中的定理“m 为素数，$m|ab \Rightarrow m|a$ 或$m|b$”不甚了了。概念不清、运算能力弱，也是学生未能正确完成证明的原因之一。

必须指出，尽管很多学生未能完成$\sqrt{5}$为无理数的证明，但是课后访谈表明，他们对“$\sqrt{2}$为无理数”的接受程度很高，这表明，课堂上对$\sqrt{2}$的无理性进行证明，促进了学生对无理数的理解。

测试结果表明，教师在讲授“$\sqrt{2}$为无理数”的证明时，首先需要让学生回顾一些基本的概念，如素数、合数、互素、整除、因数等；其次，需要借助实例，对关键的数论定理进行补充说明；最后，需要交待反证法的基本思想，并强调表述的准确性。

参考文献

[1] Sirotic, N., Zazkis, R.. Irrational numbers on the number line -- where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2007, 38(4): 477-488.

[2] von Frits, K.. The Discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Mathematics*. 1945, 46 (2): 242-264.

[3] 汪晓勤. 正五边形、无理数与反证法[J]. 中学教研(数学). 2006, (6): 45-48.

HPM 视角下全等三角形应用的教学*

沈琰[1] 沈中宇[2] 洪燕君[2]

（1.上海市顾村中学，上海，200000；2 华东师范大学数学系，上海，200241）

1 引言

帮助学生积累数学活动经验，引导学生感受数学的价值以及数学与生活的联系，提高学生学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，培养学生的应用意识与创新意识，这些都是义务教育数学课程标准提出的数学教学的重要目标。全等三角形的概念与性质和全等三角形的判定是沪教版七年级（下）的重要内容，但教科书对全等三角形知识的应用却反映不多，不利于上述各目标的达成。从历史上看，全等三角形判定定理一开始就与测量实践有着密切的联系：古埃及的水准仪实际上运用了边边边定理；泰勒斯在测量轮船到海岸的距离时运用了角边角定理[1]。而到了 20 世纪，西方教科书为了体现几何学的实际应用，将许多测量问题编入习题之中。

有鉴于此，我们利用或借鉴相关历史材料，从 HPM 的视角来设计“全等三角形应用”的教学，并拟定了以下教学目标：

（1）通过对距离测量问题的探究，让学生学会利用全等三角形知识来解决实际问题，增加他们的数学活动经验，培养他们的数学应用意识和创新意识；

（2）通过古希腊数学家泰勒斯和拿破仑随军工程师测量距离的故事，让学生感受数学的价值，激发他们的学习兴趣，拉近他们与数学的心理距离，增加他们的自信心；

（3）培养学生合作交流的习惯。

2 历史材料及其运用

基于 HPM 视角下数学教学设计的趣味性、科学性、有效性、可学性和新颖性五项原则，我们选取了泰勒斯测量轮船距离、拿破仑随军工程师测量河宽以及 20 世纪初美国教科书上

* 华东师范大学基础教育办公室与上海市宝山区教育局合作项目“HPM 与初中数学教师专业发展”系列教学案例之一。

的有关测量问题，以顺应的方式将其运用于教学设计之中。

2.1 泰勒斯与角边角定理

亚里士多德的弟子欧得姆斯（Eudemus，前 4 世纪）将角边角定理归功于公元前 6 世纪的古希腊哲学家泰勒斯（Thales）。而普罗克拉斯（Proclus, 5 世纪）则告诉我们，泰勒斯运用角边角定理求出了海上的轮船到海岸的距离 [2]。那么，泰勒斯是如何求轮船到海岸距离的？英国数学史家希思（T. L. Heath, 1861～1940）的猜测 [2]如图 1 所示。直竿 *EF* 垂直于地面，在其上有一固定钉子 *A*，另一横杆可以绕 *A* 转动，但可以固定在任一位置上。将横竿调准到指向船的位置，然后转动 *EF*（保持与底面垂直），将横竿对准岸上的某一点 *C*。则根据角边角定理，$DC = DB$。

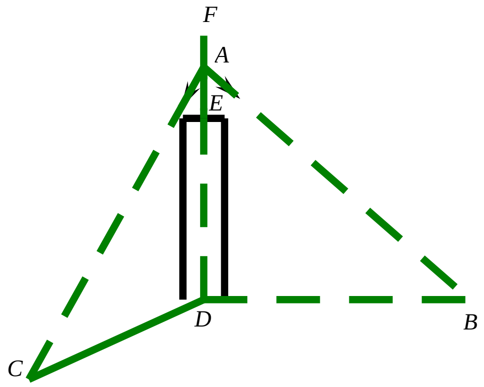


图 1

图 2

泰勒斯的方法为后人所广泛采用，图 2 是 16 世纪意大利数学家贝里（S. Belli, ?～1575）于 1565 年出版的著作中的插图 [3]，图中所示即为泰勒斯的方法。

我们将测量轮船距离的测量编制成问题，希望学生能重新发现泰勒斯的方法。

2.2 拿破仑的故事

有一个故事说，拿破仑军队在行军途中为一河流所阻，一名随军工程师运用该方法迅速测得河流的宽度，受到拿破仑的嘉奖 [1]。

我们以何宽的测量作为新的问题情境，希望学生进一步运用全等三角形知识加以解决。

2.3 早期美国教科书中的应用题

1910 年代以后，美国几何教科书开始重视几何的实际应用。如，温特沃斯和史密斯在

《平面几何》(1913)中给出全等三角形应用题[4]：如图4，为测量池塘两侧点 A 和点 B 之间的距离（不能直接测得），在岸上立一木桩 P，分别在 AP 和 BP 的延长线上立木桩 A'和 B'，使得 $PA' = PA$，$PB' = PB$。于是 $A'B' = AB$。

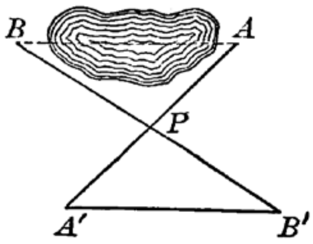


图 3

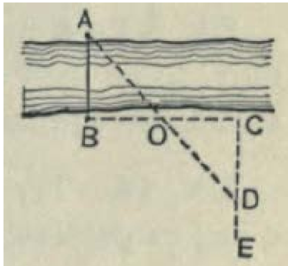


图 4

韦尔斯与哈特在《平面与立体几何》中利用图4所示的方法测量河宽[5]：点 A 和 B 位于河两岸，取 $BC \perp AB$，在 BC 上取点 C，作 $CE \perp BC$，在 BC 的中点 O 处立一木桩，在 CE 上确定点 D，使得 D、O、A 三点共线，于是 $CD = AB$。

3 教学设计与实施

3.1 小试牛刀

首先让学生回忆全等三角形的判定与性质，接着给出以下三个应用问题，为后面的教学环节做铺垫。

问题1：如图5，把两根钢条 AB、CD 的中点合在一起，可以做成一个测量工件内槽宽的工具(卡钳)，只要测得 AC 的长，就可知工件的内径 BD 的长，你明白其中的道理吗？

问题2：如图6，小明不慎把三角形模具打碎为三块，他是否可以只带其中的一块碎片到商店去，就能配一块与原来一样的三角形模具呢？如果可以，应该带哪块去？为什么？

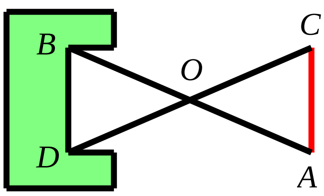


图 5

图 6

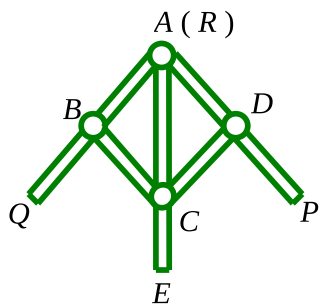


图 7

问题3：如图7，仪器 $ABCD$ 可以用来平分一个角，其中 $AB=AD$，$BC=DC$，将仪器上的点 A 与 $\angle PRQ$ 的顶点 R 重合，调整 AB 和 AD，使它们落在角的两边上，沿 AC 画一条射

线 *AE*，*AE* 就是∠*PRQ* 的平分线，你能说明其中的道理吗？

在教师的引导下，学生利用全等三角形知识解决了上述三个问题；教师从图形变换的角度对全等三角形作了解释。

3.2 轮船测距

如图 8 所示，教师介绍古希腊数学家泰勒斯当时遇到的问题：测量海面上的船到海岸的距离。让学生思考：泰勒斯是如何解决这一问题的？

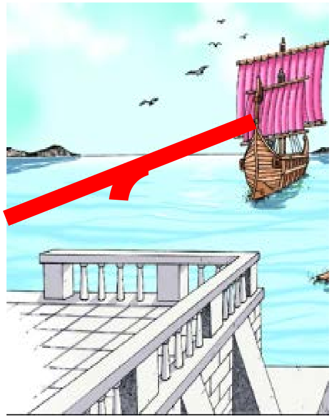


图 8

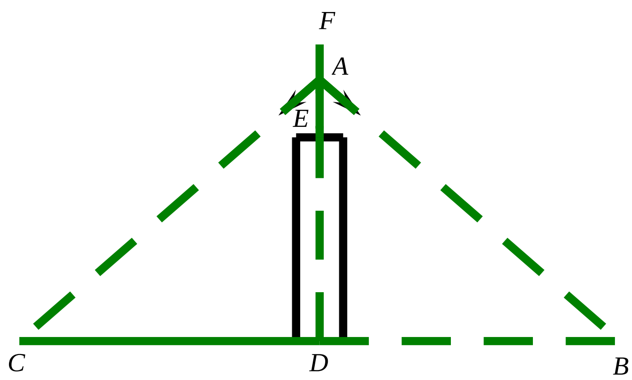


图 9

学生的应用意识十分薄弱，面对上述问题一筹莫展。于是，教师利用圆规来模拟泰勒斯的测量方法。如图 9 所示，要测量 *DB* 的距离，在讲台上利用圆规一边 *EF* 垂直于桌面，在圆规上有一固定点 *A*，圆规的另一脚可绕 *A* 转动。将该脚调准到窗台方向，然后转动 *EF*（保持与底面垂直），旋转 180° 以后，将该脚对准窗台边水瓶的位置 *C*。则根据角边角定理，得 *DC* = *DB*，而 *DC* 的距离可以直接测得。考虑到泰勒斯的方法需要具备一定的空间想象能力才能理解，所以教师这里将 EF 转过 180°，使得 RtΔ*ADC* 与 RtΔ*ADB* 共面。

接下来，教师向指出，上述“转圆规”方法最早为泰勒斯所运用，并讲述了泰勒斯的故事。

3.3 拿破仑的故事

接下来，教师讲述拿破仑远征途中为河流所阻的故事，并提出问题：你能帮拿破仑测得河宽吗？教师通过 PPT 展示图 10，指出：*A*、*B* 之间的距离不能直接测得，你能用运用类似的方案，求得 *AB* 吗？

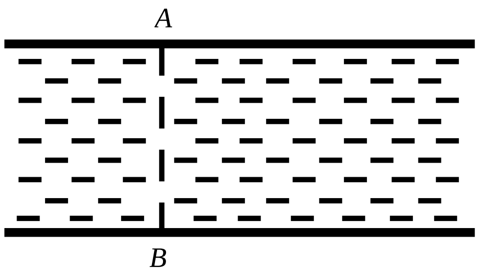


图 10

经提示，学生 1 给出图 11 所示的方案：过点 B 作 $BC \perp AB$，在 BC 上取一点 C，测得 $\angle ACB$ 的度数，作 $\angle DCB = \angle ACB$，交 AB 的延长线于 D，由角边角定理可知，$Rt\Delta ABC \cong Rt\Delta DBC$，故得 $BD = BA$。所以，只要测量陆地上的 BD 即可。

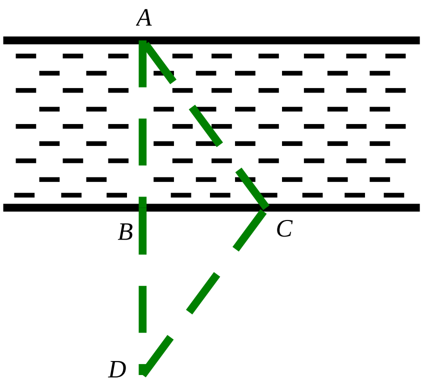


图 11

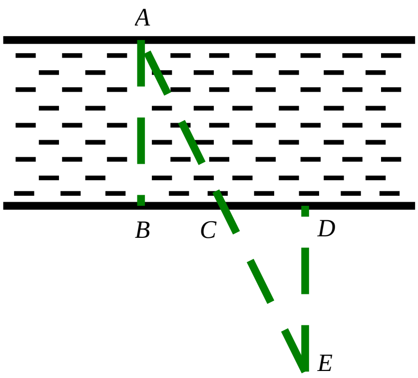


图 12

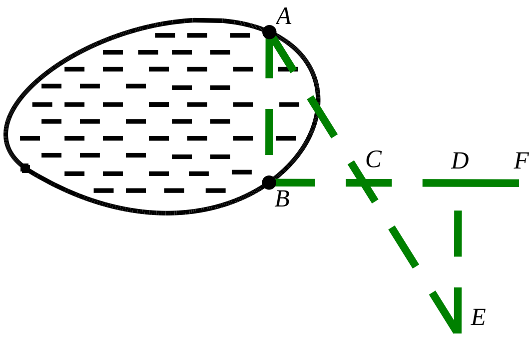
教师补充了另一种方案。如图 12，过点 B 作 AB 的垂线 BD，在 BD 上选取点 D，测量 BD 的长度，并取其中点 C，过 D 作 BD 的垂线 DE，在 DE 上取点 E，使得 A、C、E 三点共线。于是，$Rt\Delta ABC \cong Rt\Delta EDC$，故 $AB = ED$。所以，只要测量陆地上的 ED 即可。该方案就是韦尔斯与哈特的方案。

教师总结，上述两种方案都是通过构造两个全等三角形来解决问题的，一个通过翻折，一个通过旋转，将不可直接测量的距离转变为可直接测量的距离。

3.4 巧测池塘宽

在下一环节，就是给出如下问题：湖岸上 A、B 两点之间的距离不能直接测得，你能用全等三角形知识设计一种方案，求出这段距离吗？

受河宽问题的启发，学生 2 给出图 13 所示的方案，与韦尔斯与哈特的方案相同。



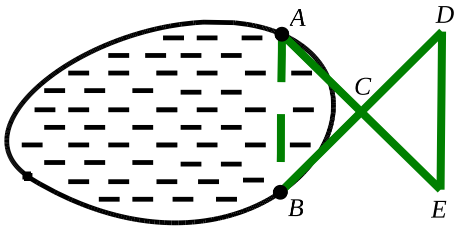


图 13　　　　　　　　　　图 14

学生 3 给出了图 14 所示的方案：从点 A 出发沿湖岸画一条射线 AE，取中点 C，联结 BC 并延长到点 D，使得 $BC = CD$，联结 DE，利用边角边定理，得 $DE = BA$。故只要测量 ED 即可。这与温特沃斯和史密斯的方案如出一辙。

教师指出，上述方法在早期美国教科书中都出现过，两位同学都很出色，重新发现了百年前数学家的方法。当然，还可用许多别的方法来求湖岸上两点之间的距离，同学们课后可以进一步探索。

4 学生反馈

课后，我们对学生进行了问卷调查。绝大多数学生能理解教师在课上提出的实际问题的解法，并认为对实际问题的探究促进了他们对全等三角形判定定理的理解。绝大多数学生喜欢老师在本节课中所采用的授课方式。

关于本节课的收获，学生典型的回答有“知道了全等三角形的应用”、“认识了全等三角形的历史，上课简单易懂”、“明白了学习的重要性，懂得了如何学习”、“知道了泰勒斯创造的数学，让我对全等三角形更加理解”等。大多数学生对“泰勒斯的测量方法”印象深刻，理由是“泰勒斯测量距离的故事让我受益匪浅，在解题时常常会想起这个故事，帮助我解题。”

5 结语

本节课中，泰勒斯和拿破仑的故事属于附加式，轮船距离与河宽测量问题由历史材料编制而成，属于顺应式；而池塘宽度问题则采自百年前的美国教科书，属于复制式。

整节课中，数学史的味道比较浓厚。泰勒斯和拿破仑的故事激发了学生的兴趣，而轮船、河宽、池塘两侧距离的测量问题为学生提供了探究、交流、积累数学活动经验的机会，并让

他们感受到了数学的价值、数学与现实生活的联系。由于缺乏有效的引导，学生对于泰勒斯的轮船测距问题束手无策，教师只好自己给出泰勒斯的方法，这是本节课中令人失望的地方。不过，在河宽测量问题中，学生的思维逐渐被激活，问题的解决有了突破；而在最后的池塘测量问题中，学生给出了两种不同方案，而这两种方案正式百年前美国教科书中的方法，此时，经教师点破，学生仿佛穿越时空与数学家对话，与数学家之间的距离得以拉近，学习的自信心得到了增强。

无疑，数学史为教学目标的达成发挥了无可替代的作用，但如何让数学史更有效地促进学生探究，仍需要教师在实践中继续探索。

参考文献

[1] 汪晓勤，王甲. 全等三角形的应用：从历史到课堂［J］. 中学数学教学参考(初中版). 2008, (10).

[2] Heath, T. L.. *A History of Greek Mathematics*. Oxford: The University Press. 1921.

[3] Smith, D. E.. *History of Mathematics* (Vol. 2). Boston: Ginn & Company. 1923.

[4] Wentworth, G., Smith, D. E.. *Plane Geometry*. Boston: Ginn & Company. 1913.

[5] Wells, W., Hart, W. W.. *Plane and Solid Geometry*. Boston: D. C, Heath. 1916.

HPM 视角下的“方程的根与函数的零点”教学*

陈　飞

（习水县第一中学，习水, 564600）

1 引言

“方程的根与函数的零点”是人教版高中数学教材必修 1“函数的应用”一章的起始课。教材通过作二次函数 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 的图象，发现该图象与 x 轴的交点和相应二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根之间的关系，从而引出函数零点的概念。这样的引入方式虽然建立在学生的知识基础之上，但存在以下问题：一方面，学生对一元二次方程的求根公式耳熟能详，利用公式可以直接快捷地求出方程的根，为什么还要借助二次函数的图像呢？这一做法显得多此一举；另一方面，学生对二次函数的图象也是耳熟能详的，为什么要另外给图像与 x 轴交点的横坐标一个新的名称？学生对此有疑惑。这说明，此种引入方式难以激起学生的学习动机。

此外，在完全基于教材的课堂教学中，该知识点背后的数学历史文化知识付之阙如，学生面对的是干巴巴的概念、例题和练习。

实际上，教材编写者也注意到了这个问题，在“阅读与思考”栏目中给出了“方程求解的历史”。由于教师受到教学课时数的限制，课堂上往往忽略该栏目；即使有所涉及，由于缺乏足够的数学史知识，也不了解历史材料的具体运用方式，因而未能将有关材料有效地融入教学之中。

有鉴于此，笔者希望从 HPM 的视角进行教学设计，并付诸实施。

2 数学史料及其运用

数学好比一座金碧辉煌的宫殿，宫殿里珍藏着各种各样的珍宝，方程是其中之一。在解决各种各样的实际问题中，人们需要解方程。

一元二次方程有着十分悠久的历史，大约在公元前 1700 年，两河流域的古巴比伦泥版

*人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列教学案例之一。将发表于《教育研究与评论》2015 年第 12 期。

上即记载了大量的一元二次方程问题及其解法。在中国，汉代《九章算术》中已有一元二次方程问题方程的实际问题；三国时代数学家赵爽在注解《周髀算经》时，相当于给出了一类一元二次方程的几何解法。现行初中数学教材中通用的一元二次方程求根公式在西方被称为“印度求根公式”，最早由 7 世纪印度数学家婆罗摩笈多（Brahmagupta, 598～670）给出。9 世纪阿拉伯数学家花拉子米（al-Khwarizmi，780?-850?）用配方法来解一元二次方程，并给出几何模型 [1]。

一元三次方程的历史也可以上溯到古巴比伦时期，当时的祭司已能通过查表解决一类特殊的三次方程。10 世纪波斯数学家奥玛 • 海牙姆（Omar Khayyam）利用圆锥曲线的交点来解三次方程。13 世纪，意大利著名数学家斐波那契（L. Fibonacci）在一次宫廷数学竞赛中解决了一个三次方程问题，并将根精确到了小数点之后的 6 位数字，但他的具体解法至今仍是一个谜。直到 15 世纪末，意大利数学家帕西沃利（L. Pacioli，1445-1517）还声称：三次方程的代数解法与化圆为方问题一样是不可能的！最终，16 世纪意大利数学家给出了三次方程的一般解法。

我们将斐波那契解三次方程这则史料用于教学，引领学生对数学史上的一个未解之谜进行探秘，设计了“引入”、“操作”、“探究”、“再探”4 个环节。通过故事引入环节激发学生学习动机，感受数学家的奇思妙想；通过学生自己动手操作环节总结规律；通过探究环节给故事中解方程方法一个解释，形成函数零点的概念，为下一节课学习“用二分法求方程的近似解”埋下伏笔。

3 教学过程

3.1 引 入

教师从一个中世纪的数学故事开始：在神圣罗马帝国时期，人们经常在公共场所举办解方程比赛，比赛常常吸引众多的观众，其盛大景况堪与明星演唱会相媲美。那时的数学家就像今日的电影明星一样受人追捧。神圣罗马帝国皇帝腓特烈二世也是个数学迷，有一次，他举办了一场宫廷数学竞赛。其中一道竞赛题是求三次方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 的根。来自比萨的大数学家斐波那契成功地获得了它的近似解，并精确到了小数点后的 6 位数字。斐波那契赢得了比赛，深受皇帝的赞赏。

没有人知道斐波那契在比赛中究竟用了什么神秘的方法来解三次方程。他的方法成了数

学史上的未解之谜。同学们，你们想解开这个谜团吗？今天，老师将和同学们一起踏上三次方程的探秘之旅。

师：斐波那契在宫廷竞赛中的解方程方法未能记录下来。

生：为什么没记录下来呢?

师：这里有两种可能性。

生：哪两种呢?

师：第一种可能性是当时的纸张价格昂贵，没能记录下来。

生：对，纸是我国的四大发明之一。他们那时可能还没有。

师：还有一种可能，大家想听吗?

生：想，老师快点说吧。

师：还有一种可能就是当时意大利数学家们常常互相挑战，不仅仅是为了赢得荣誉，而且也是为了各自的切身利益。失败者名誉扫地，门前冷落，再也招不到弟子，从而失去经济来源；而胜利者则会受到邀请去各地讲学，受人拥戴，从者如云，财源滚滚。因而一个新方法的发明者往往不肯轻易泄露自己的发现，因为有了这样的秘密武器，他就可以向对手提出自己拥有解法的相关问题。[2]

生：也就是斐波那契不愿意让别人知道解法，没有告诉过其他人，以至于解法失传了。

师：对，我说的就是这个意思。

生：真可惜!

师：同学们，这节课就充分发挥你们的奇思妙想，看看能不能找到一个解答方法，给这个千古之谜一个合理的解释。

生：好。

学生们都被故事所吸引，去思考解决这个问题的方法。

3.2 操作

为了求出 $x^3+2x^2+10x=20$ 的根，学生先把已经学过的方程写出来：一元一次方程、一元二次方程等，试图从中发现规律。为了让大家的思路统一起来，笔者设计了具体的方程让学生求解。

操作 1：分别求出以下方程的根：

（1）$2x+1=0$；　（2）$2x^2+5x+3=0$；　（3）$\frac{1}{x}=0$；

（4）$2^x=0$；　（5）$\log_2^x=0$；　（6）$x^3=0$。

学生试图通过解上述方程发现规律，可是找不到。教师让学生继续进行下面的操作。

操作 2：画出下列函数的图象：

（1）$y=2x+1$；　（2）$y=2x^2+5x+3$；　（3）$y=\frac{1}{x}$；

（4）$y=2^x$；　（5）$\mathrm{y}=\log_2 x$；　（6）$y=x^3$。

通过画函数的图象，观察函数的图象与 x 轴的交点，让学生思考下列问题：

（1）方程的根分别有几个？对应的函数的图象与 x 轴分别有几个交点？

（2）方程的根和对应的函数图象交点有什么关系？

让学生分小组讨论，到讲台上展示讨论的结果。

生：我们小组讨论的结果是，方程有几个根，对应的函数图象与 x 轴的交点就有几个。

师：还有要补充的没有?

生：就是方程的根和对应的函数图象与 x 轴的交点相等。

师：和对应函数的图象与 x 轴的交点相等?

生：与 x 轴交点的横坐标相等。

师：很好。大家总结得非常好。下面请大家再来想一下，斐波那契在宫廷竞赛中遇到的方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 怎么解?

生：要求方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 的根，可以画出它对应的函数的图象。

师：然后呢?

生：找函数的图象与 x 轴的交点。

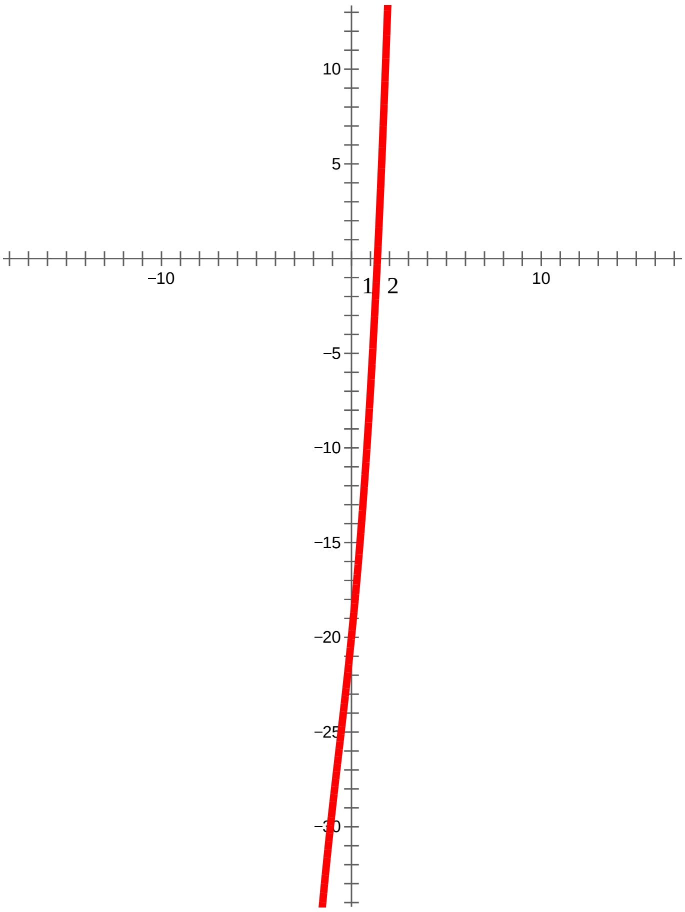
师：交点和方程的根是什么关系?

生：交点的横坐标和方程的根相等。

3.3 探究

学生通过列表、描点、连线的方法画出函数 $y=x^3+2x^2+10x$ 的图象，教师提示学生，该函数是一个增函数。教师抽一个小组的学生代表到黑板上展示小组所画的图象，如下图所

示。通过图象得知函数与 x 轴有一个交点，交点的横坐标在 1 和 2 之间，学生猜测方程有一个根，并且根是大于 1 小于 2 的。



师：同学们，你们所画的函数图象与 x 轴有几个交点?

生：1 个。

师：方程有几个根?

生：1 个。

师：交点在哪里?

生：在 1 和 2 之间。

师：那么，方程的根是多少?

生：在 1 和 2 之间。

师：用这种方法就可以知道方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 有一个根在 1 和 2 之间。

生：太神奇了!

师：当年斐波那契可能就是用这种方法解出来的，同学们用短短一节课的时间就可能破解了这个千古之谜。

教师让进一步给出函数零点的概念和方程的根与函数的零点之间的等价关系：方程的根

$\Leftrightarrow$ 函数的零点 $\Leftrightarrow$ 函数的图像与 x 轴交点横坐标。强调函数的零点不是坐标轴上的点。

学生学到了解方程的一种新方法：运用对应函数的零点。此时学生面露喜悦之色，教师趁机话锋一转。

师：同学们，斐波那契当年不仅求出了方程的根，还把根精确到了小数点之后 6 位数字。

生：是呀。

师：大家求得根在 1 到 2 之间，怎么精确到小数点之后 6 位数字呢?

生：这……

师：下节课我们将学习新的知识："用二分法求方程的近似解"。学了这个新知识之后，我们就能真正揭开八百多年前的秘密了!

4 结语

访谈中了解到，学生在初中阶段从未接触过数学史，初中教师在课堂上从来不讲数学家的故事。受访者中没有一人能同时说出三个数学家的名字。本节课中，斐波那契参加宫廷数学竞赛的故事引发了学生浓厚的兴趣，课堂气氛始终十分活跃。在访谈中，关于本节课印象最深的内容，学生都回答"斐波那契的故事和他所求解的三次方程"；关于数学史故事，学生都一一致表示"很喜欢"；而对于问题"数学史故事对你们有何启示"，学生回答"思想上的启示"。对于问题"为什么要建立方程的根与函数零点之间的联系"，学生回答：这是"从解二次方程到解三次方程，再到解四次方程，再到解更高次方程"的需要，这表明，学生已经认识到，对于难解的方程，函数零点知识是必要的，可见，斐波纳契的三次方程问题激发了学生的学习动机。

本节课有两点不足：一是数学史实的准确性问题。在斐波那契所生活的时代，函数概念还远远没有出现，斐波那契不可能通过函数图象来解三次方程，这一点需要向学生交待清楚。二是教师未能使用几何画板软件来作出三次函数的图象，影响了课堂效率。

参考文献

[1] 沈志兴, 洪燕君. HPM 视角下的配方法教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学). 2015, 10.

[2] 汪晓勤, 韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 北京：科学出版社. 2002.

罗泾中学 HPM 教学观摩与研讨活动

方倩 沈中宇

（华东师范大学数学系，上海，200241）

2015 年 10 月 28 日，在华东师范大学汪晓勤教授及其 HPM 研究团队的指导下，沪太路教育发展区合作项目组在上海市罗泾中学以同课异构的形式开展了 8 年级数学“函数与变量”的课例开发与研讨活动，共计 20 余人参与，授课教师是罗泾中学的杨泓和杨琼老师。

课堂一：函数与变量（以生活实例融入为特色）

第一节课由杨琼老师讲授。杨老师首先利用几何画板模拟出租车计价器在超过起步价之后的跳动情况，引导学生观察单价、路程以及总价的变化，随后给出变量和常量的概念，并以生活中买笔情形为例，帮助学生进一步理解了新概念。杨老师总结了这两个例子的特点，自然地给出了“函数”的概念；又给出“学生的成绩与体重的关系”等 4 个贴近生活的例子请学生判别是否为函数，对函数概念进行了更深入的讲解，之后请学生自己举一些生活中的函数例子，课堂气氛十分活跃；然后杨老师讲解了用图形和图表表示的函数，使学生对函数有了更全面的认识。

接下来杨老师用几何画板演示了圆半径的变化过程，请学生判断其中的变量、常量、函数以及解析式，在复习旧知的基础上学习新知，学生的表现也十分积极。最后，杨老师指出出租车的起步价和路程也为一个函数，称为“常值函数”，将在今后学习。

（杨琼老师公开课）

（杨泓老师公开课）

课堂二：函数与变量（以历史发展为视角）

第二节课由杨泓老师讲授。杨老师首先给出一些题目，请学生用代数式表示。师生一起观察代数式中的变量、常量、函数解析式，从而得出函数定义的核心，即确定的依赖关系。杨老师总结说函数的概念就是从古代的代数式定义发展到现在的依赖关系定义的。随后杨老师讲述了“函数”名字的由来与函数概念的发展历程：从最初含有 x 的幂，到伯努利提出代数式，再到欧拉提出的依赖关系，最后狄利克雷和欧拉提出对应关系。接下来，杨老师用 3 个例子得出“教材的依赖关系定义”需要进行突破，从而引入“函数的对应关系定义”。

在学生理解了解析式类型的函数之后，杨老师给出了图像与图表形式的函数，使学生了解函数的多种表示形式。最后，学生通过判断“汽车行驶的速度与驾驶员的身高”等 4 个生活中的例子是否为函数，加深了对函数的理解。

（交流与研讨）

教学观摩结束以后，华东师范大学 HPM 团队分别对两个课堂的学生进行了问卷调查，同时抽取了部分学生进行访谈，随后与项目组的老师一起进行了热烈的教学交流与研讨。两位老师首先介绍了自己的教学设计思路，然后与会者也阐述了自己的观点。对于杨琼老师的课，听课老师纷纷表示对其中的生活元素与活跃的课堂气氛印象深刻，并指出在讲解出租车起步价的情况时有点匆忙。对于杨泓老师的课，听课老师都对其中融入的数学史元素表示赞同，因为这解答了老师和学生心中“为什么常值函数是函数”的疑惑，也可以更好的与高中的函数定义相对接，同时也提出可以多一些与学生之间的互动，在一开始适当降低难度，这样可以让学生有更多的思考空间。

毫无疑问，这是两节新颖且精彩的课，两位老师通过这两节课以及之后的交流与研讨收获颇丰，也给了与会者不少启示。

光明初级中学 HPM 教学观摩与研讨活动

方倩　沈中宇

（华东师范大学数学系，上海，200241）

2015 年 9 月 30 日，华东师范大学数学系汪晓勤教授率领 HPM 研究团队在上海光明初级中学参加 HPM 课例开发及研讨活动。授课老师为光明初级中学的陆鼎元老师，在 HPM 的视角下展现 7 年级“一元二次方程的解法——配方法”的课堂教学。

课堂教学：一元二次方程的解法——配方法

引入部分，陆老师首先介绍古人用正方形面积求解一元二次方程的方法，并借此求解 $x^2=4$ 和 $\left(x+2\right)^2=9$；接着提出公元 9 世纪阿拉伯数学家花拉子米的《代数学》中的问题：一个数的平方与这个数的十倍之和为 39，求这个数，列出方程 $x^2+10x=39$，让学生探索如何利用之前的几何方法求解方程？学生思考后，将 x^2 画成边长为 x 的正方形，10 x 画成边长为 10、宽为 x 的长方形，从而组成一个长为 $x+10$、宽为 x 的长方形。但将其补成边长为 $x+10$ 的正方形，不能求得该边长，于是陆老师用几何画板展示并引导学生用“割”的方法拼凑成正方形，最终解决问题。然后陆老师让学生利用图形从代数角度得到解决一元二次方程的方法——配方法，并总结出配方法的一般步骤。接着陆老师让学生利用配方法求解 $x^2-4x-8=0$ 和 $2x^2-8x-11=0$。针对学生的错误，陆老师完善了之前总结的步骤。在最后 7 分钟，陆老师给出了思考题，让学生从几何角度解方程 $x^2-8x=65$，随后进行了讲解，加深学生对几何方法的印象。

陆鼎元老师的课堂

教学结束后，授课教师与听课者进行了交流和研讨。首先由陆老师介绍自己的教学设计

思路，然后听课者阐述了个人的观点。听课老师对数学史融入教学表示赞同，并提出了一些具体建议，如课堂习题中“ x^2 前面的系数为 2”是否可以放到下一节课，便于学生掌握。毫无疑问，这些交流促使 HPM 视角下的课堂教学越来越成熟，越来越精彩。

最后，汪晓勤教授对数学史融入数学课堂的教学表示肯定，同时指出教师在讲述历史材料时不应强调古人解法的繁琐，数学史传递的是正能量，可以使学生对数学产生兴趣，且终身受益。

带着满满的收获，我们结束了光明中学之行。期待这份正能量，随着 HPM 教学活动的开展，传递给每一位师生.....

罗店中学 HPM 教学观摩与研讨活动

沈中宇

（华东师范大学数学系，上海，200241）

2015 年 9 月 23 日，华东师范大学数学系汪晓勤教授及其 HPM 团队与沪太路教育发展区合作项目组的教师共计三十余人在上海罗店中学参加 HPM 课例开发及研讨活动。

本次活动由罗店中学的沈志兴老师讲授 8 年级“一元二次方程的解法-配方法”的内容，在汪教授及其 HPM 研究团队的指导下，沈老师采用了阿拉伯数学家花拉子米的几何方法来探究配方法解一元二次方程。

沈老师首先引导学生们复习了一元二次方程的解法：开平方法与因式分解法。接下来沈老师精心设计了一个阿拉伯时期的问题，其实质是解一个一元二次方程，而这个一元二次方程并不能用开平方法和因式分解法解决，从而引出花拉子米的几何法求解，展开新课。当学生们经过了几次尝试，最终解决了这个问题时，沈老师因势利导的给出了配方法的定义，并介绍了阿拉伯数学家花拉子米在代数方面做出的贡献，同学们听得津津有味。接下来，沈老师抛出了一个更难的巴比伦泥板上的问题，这次一次项系数变为了负数，在利用相同的几何法进行求解时，学生遇到了很大的挑战，但最后在沈老师的引导下最终一起解决了这个问题。

课堂练习阶段，同学们首先练习了刚刚学到了配方的方法，接下来思考了当二次项系数不为 1 的时候的情形怎么求解。练习之后，沈老师和同学们总结了配方法的一般步骤，最后，让学生谈谈今天的收获，同学们表示学到了几何方法求解代数问题这一思想，并且今天的课让他们不但知其然，更知其所以然。在同学们热烈的回答中，沈老师强调了花拉子米给我们做出的贡献，课堂在一片人文的意境中结束了。

教学观摩课结束之后的交流探讨中，沈老师首先回顾和反思了自己的教学设想，并提到

学生对第二个问题的反应超出了他的教学预期，在下次讲课时会注意改进。接下来，听课的老师们对用花拉子米的几何法引入配方法的方式给出了高度的认可，认为这种方法能促进学生对数学的理解，并对板书书写、几何法教学的方式和概念的强调等细节方面提出了具体的建议，沈老师认真的倾听并给出及时地回应，并表示会在以后的教学中继续尝试。

最后，汪晓勤教授对这次活动进行了全面的总结。汪教授首先给大家讲述了几何法解决一元二次方程的历史，接着总结了这节 HPM 课堂的三个联系：几何与代数的联系，历史与现实的联系，以及数学与人文的联系。最后，也提到了这节课存在的一些问题，如第二个问题的改进以及这节课生活气息不足的问题，并鼓励大家说：教学没有完美，正是在不断改进中，我们才能越来越好，没有最好，只有更好！

这节课是华东师大与沪太路教育发展区的合作项目在本学期的第一次活动，同时也进入到这个项目的收尾阶段，但 HPM 带给我们的欣喜，感动与收获都将永远留驻在大家的心间，HPM 与我们的故事也才刚刚开始…….

友爱实验中学同课异构教学观摩及研讨

董艳梅

（华东师范大学，上海，200241）

2015 年 12 月 7 日，上海的天空湛蓝静谧，温暖的阳光，挥散了严寒。由汪晓勤教授带领的华东师范大学 HPM 团队与友爱实验中学教师共计二十余人，参加了 7 年级“可化为一元一次方程的分式方程”的同课异构观摩课及研讨活动，本次课由友爱实验中学的薛碚碚老师和刘姗老师讲授。

薛碚碚老师的课堂

刘姗老师的课堂

薛碚碚老师在遵循教材的基础上，采用传统方式进行教学。首先通过情境引出分式方程；随后通过与前面所学方程比较，让学生发现不同，产生认知冲突，给出分式方程的概念；接着利用书上的课后练习，通过让学生归纳、类比和猜想突出整式方程与分式方程的区别，强化学生对概念的理解。然后薛老师主要以引导的方式，启发学生寻找最简公分母，使分式方程化为整式方程。最后薛老师通过例 3 直接给出增根概念，通过分组讨论的方式让学生寻找产生增根的原因。

刘姗老师则采用 HPM 视角下的教学设计进行教学。首先通过斐波那契在《计算之书》中的两个问题，让学生发现所得方程的不同，从而引出分式方程的概念，并向学生简单介绍了数学家斐波那契。接着刘老师让学生观察归纳出需要“去分母”将分式方程化为整式方程，而去分母的关键是“方程两边同时乘以最简公分母”。随后，学生发现解出的不一定是原方程的根，于是刘老师引入增根的概念，帮助学生找出产生增根的原因，强调了分式方程验根的必要性。最后，刘老师向学生说明历史上增根的发现与解决经历了很长时间，让学生知道数学家也同样会犯错误，鼓励学生加强自信心；同时也让学生明白现在我们几分钟就解决问题，是因为我们站在前人肩膀上。刘老师在每个环节都采用了步骤填空法，便于学生突破难重点。

观摩课结束之后大家进行了交流与研讨。

交流研讨

首先薛老师和刘老师分别向大家介绍了她们的教学设计思路，并反思了教学实施过程。听课教师对两位老师的教学给予较高的肯定，也提出了意见和建议；对于刘老师融入数学史的教学方法，教师们认为这种方法能激发学生的学习兴趣。刘老师也表示在今后将努力尝试将数学史融入教学。

最后汪晓勤教授对这次活动进行了总结：数学史告诉我们数学是人类的一种文化活动，数学史为数学教学提供了一个新视角。