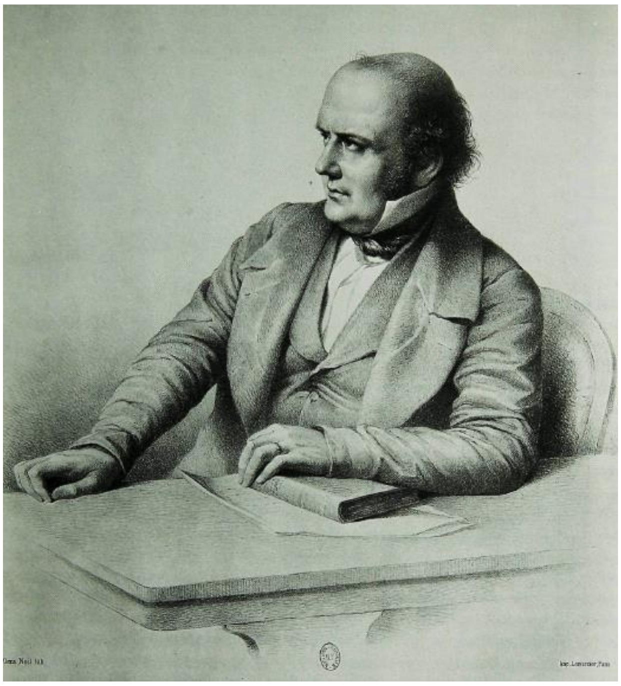
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2016 年第 5 卷第 1 期



古列尔莫 · 利布里

（Guglielmo Libri，1803～1869）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

本期的封面人物是意大利数学家古列尔莫·利布里，他出生于佛罗伦萨，袭伯爵。自幼接受良好教育，才华横溢。1816 年，他进入比萨大学开始学习法律，但他的兴趣很快就切换到数学的研究上了。他在 1820 年毕业前发表的第一篇数学论文受到了巴贝奇（C. Babbage, 1791～1871）、柯西（A. L. Cauchy, 1789～1857）、高斯（C. F. Gauss, 1777～1855）等一流数学家的表扬。

1823 年，20 岁的他被任命为比萨大学的数学物理教授，但他不喜欢教学，次年离职前往巴黎。在那里，他和许多杰出的数学家包括拉普拉斯（P. S. Laplace, 1749～1827）、泊松（S. D. Poisson, 1781～1840）、安培（A. M. Ampere, 1755～1836）、傅里叶（J. Fourier, 1768～1830）和阿拉果（F. J. Arago, 1786～1853）成为朋友。后来回到意大利，他开始参与政治，面对逮捕和起诉，1830 年他逃亡到法国。

1833 年，他成为法国公民。在一位政界朋友的帮助下他当选为法国学术院成员，担任国民教育部的图书馆总监察员。于是，他经常视察法国图书馆，包括那些偏远的，被人遗忘的图书馆，并发掘了很多被弃置的珍本书，重新整理了这些被遗弃的稀有图书，偶尔他也销毁了一些手稿。由于这些珍贵的书籍常常不翼而飞，利布里伯爵终于受到了怀疑，然而他镇定自若。1848 年，在逮捕令下达之前他收到密报，于是坐船出逃到英国，而且带了三万多卷珍贵典籍，他的偷书反而被视为爱国的壮举。

1861 年他在英国进行了两次大的销售活动，第一次拍卖从 4 月 25 日开始，持续 12 天，引起了英国收藏家对重要历史思想的极大关注；第二次拍卖从 7 月 18 号开始，为期 8 天。利布里把这些书籍包括数学、历史以及著名图书馆的文献目录汇编撰写了一个目录，其中给出了针对一般科学史特别是数学史研究的极具思想性的见解。比如他说，我们应该经历发明者所追求的道路，从思想上研究人类知识的进步，如果昆虫学家只关注美丽蝴蝶的形状，不去关注幼期的毛毛虫显然是不够的。销售中伽利略（Galileo Galilei, 1564～1642）、哥白尼（N. Copernicus, 1473～1543）、开普勒（J. Kepler, 1571～1630）、卡丹（G. Cardan, 1501～1576）等人的书籍及手稿等，利布里还写了长长的注释指出它们的价值和意义，促进了科学领域书籍的收藏工作。

1850 年，法国法院以盗窃罪对他进行了 10 年有期徒刑的缺席宣判。事实上，他没有坐牢，这笔赃物的销售为他带来了 100 万法郎的收益，那时候一个法国工人一天的日工资平均

才 4 法郎，从此他过着贵族般的生活，逍遥自在地活到 1869 年才去世。

利布里的早期研究是数学物理，特别是热量定理。在数学的很多领域，如数论、数理物理学、方程理论等方面他也做了很多贡献。在 19 世纪 30 至 40 年代，他的最佳成就是对数学历史的研究。基于他收集到的由伽利略、费马、笛卡儿、莱布尼兹和其他一些名人的 1800 份手稿和书籍，在 1838-1841 年间撰写了并出版了四册《意大利数学科学史》。据说到 1846 年时，利布里的藏书已达 4 万余册。

利布里曾说过：I can do only two things in this world: love and read。

意大利著名文艺批评家、历史学家、哲学家贝奈戴托·克罗齐（Benedetto Croce, 1866～1952）这样评价利布里：他是一个优秀的收藏家，有着多才多艺的学习能力和生动的思想，并且他是科学史工作者的榜样。英国数学家德·摩根（A. De Morgan, 1806～1871）曾为利布里的偷书行为作辩解：法国历史学家没有公平对待利布里伯爵，也许是出于政治敌意的诽谤，一个坏人的心里总是认为收藏家就是贼，这样说来盗窃罪就是真的了。

2003 年，《欧洲数学会通讯》里来自法国的评论家费勒雷特·沙勒（Philarète Chasles, 1798～1873）说：利布里的收藏令人钦佩，他是一个极其友善、聪明灵活、幽默的法国和意大利的好作者，是一个有深邃思想的数学家、几何学家、物理学家，有透彻、完全的历史知识、分析及比较能力，比科学书籍的出版商或销售商更专业，但唯一不幸的是：他真的是一个贼。

实际上，当我们就某件事去评价一个人做得好坏（道德素质方面）的时候是很难做到公正的，但从研究的角度来说，利布里给我们带来了方法上的启迪，这是值得我们铭记和学习的。

目 录

Content

文献研究

和角公式的历史[*]

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海，200241）

两角和与差的正、余弦公式常常被称为平面三角学的基本公式。这些公式有着十分悠久的历史，伴随着三角学的诞生而诞生。打开 20 世纪中叶以前的任何一部西方三角学著作，我们都能看到，这些公式中至少有一个是用几何方法推导或证明的，这些几何方法精彩纷呈，为 HPM 视角下的公式教学提供了极其丰富的素材。

1 托勒密定理

在三角学发展的初期，天文学家关心的是一段长度已知的弧所对弦的长度。如图 1 所示，在单位圆中，弧长（圆心角）α 所对弦长（Chord α）与我们今天的正弦之间的关系是

$$\text{Chord}\ \alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (1)$$

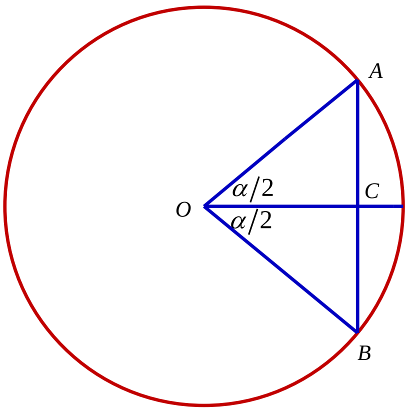


图 1 弦长与弧长的关系

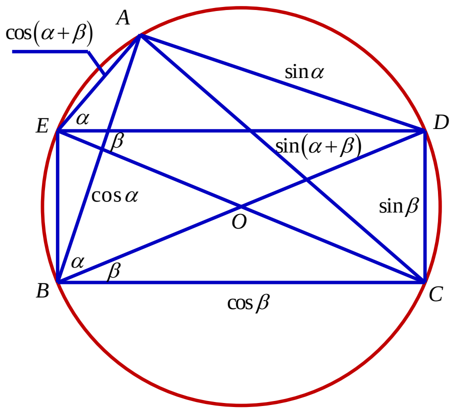


图 2 托勒密定理与和角公式

法国数学史家坦纳里认为，早在希帕切斯之前，阿基米得和阿波罗尼斯可能已经编制过弦表，阿基米得的折弦定理似乎就是一个证据。希腊三角学创始人希帕恰斯、梅内劳斯都制作过弦表，可惜没有流传下来。

公元 2 世纪，托勒密为造出从 $\frac{1}{2}$ 度到 180 度每隔 $\frac{1}{2}$ 度所有弧的弦表，提出了后人以其名字命名的定理：圆内接四边形两条对角线乘积等于两组对边乘积之和。利用该定理，已知

[*] 本文为《HPM：数学史与数学教育》第 4 章中的一节，略有删减。

两角所对弦，就可以求出它们的和或差所对的弦长。

如图 2，设 $ABCD$ 是单位圆 O 的内接四边形，对角线 BD 为圆之直径。$\angle ABD=\alpha$，$\angle DBC=\beta$， 则由托勒密定理，在四边形 $ABCD$ 中：$AC\cdot BD = AD\cdot BC + AB\cdot CD$，即

$$\text{Chord}\,2(\alpha+\beta)=\text{Chord}2\alpha\times\text{Chord}(\pi-2\beta)+\text{Chord}(\pi-2\alpha)\times\text{Chord}2\beta \tag{2}$$

由（2）即得我们今天的和角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{3}$$

类似地，在四边形 $AEBD$（EC 为直径）中应用托勒密定理可得

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$

若圆内接四边形 $ABCD$ 的一边 BC 为圆 O 的直径（如图 3），设$\angle ABC=\alpha$，$\angle DBC=\beta$，则由托勒密定理可得

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{5}$$

类似地，在圆内接四边形 $ABEC$（ED 为直径）中应用托勒密定理有

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{6}$$

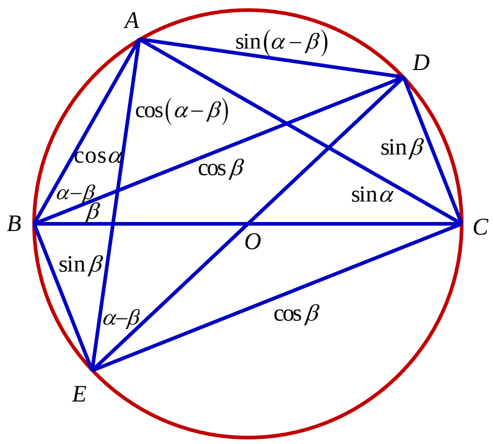


图 3 托勒密定理与差角公式

18-19 世纪的少数三角学著作，如 Audierne（1756）、Woodhouse（1819）和 Cirodde（1847）即采用托勒密定理来推导公式（3）、（4）、（5）和（6）。

2 帕普斯模型

三角公式与几何命题之间的密切关系也明显地反映于帕普斯（Pappus，3 世纪末）的《数学汇编》的几何命题之中。《数学汇编》第 5 卷第 4 部分是对阿基米得《论球与圆柱》的评注，其中，帕普斯给出如下命题：如图 4，设 C、E 是半圆 O 上的两点，CD 和 EF 为 OA 的垂线，D、F 为垂足；过圆心 O 作 $OH\perp CE$，H 为垂足，则 $(CD+EF)\cdot CE=2OH\cdot DF$ 。

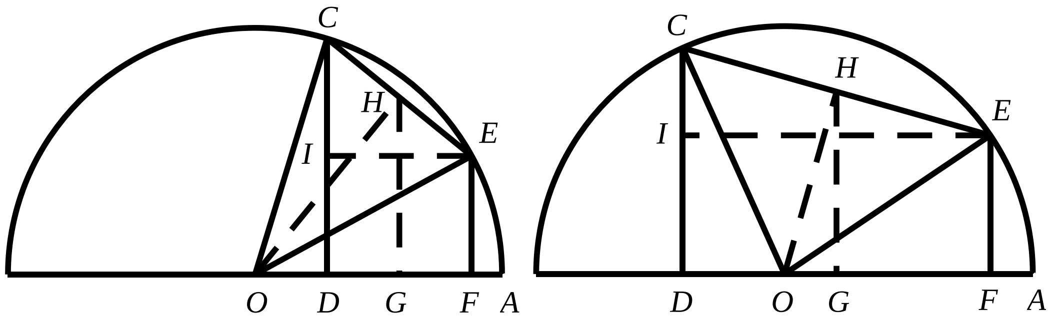


图 4 帕普斯的几何命题

事实上，作 $HG \perp OA$，垂足为 G，已知 $\mathrm{Rt}\Delta OGH$ 与 $\mathrm{Rt}\Delta CIE$ 相似，注意到 $HG=\dfrac{1}{2}\left(CD+EF\right)$ 由此即得结论。

托勒密的几何命题具有十分丰富的三角学内涵，为我们提供了许多三角公式的几何模型。如图 5，设 $\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$（$0<\beta<\alpha<\pi$，$0<\alpha+\beta<\pi$），$OA=OB=OC=1$，过 C 作 $CH\perp OB$，垂足为 H，交半圆于 E。过 H 作 $\mathrm{HG}\perp OA$，$HM\perp CD$，垂足分别为 G 和 M，又过 E 作 $EF\perp OA$，垂足为 F。于是有：

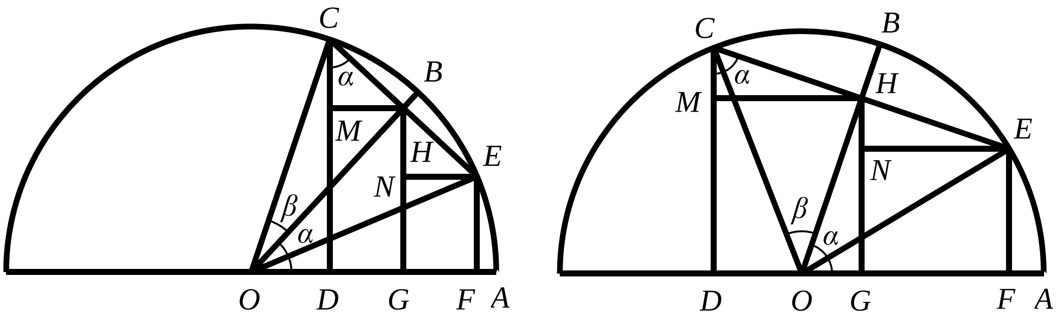


图 5 和角公式的帕普斯模型

$$CH=\sin\beta，\ OH=\cos\beta，$$

$$CD=\sin\left(\alpha+\beta\right)，\ OD=\cos\left(\alpha+\beta\right)，$$

$$EF=\sin\left(\alpha-\beta\right)，\ OF=\cos\left(\alpha-\beta\right)，$$

$$HG=\sin\alpha\cos\beta，\ OG=\cos\alpha\cos\beta，$$

$$MH=DG=\sin\alpha\sin\beta，\ CM=\cos\alpha\sin\beta。$$

因 $CD=HG+CM$，$OD=OG-MH$，$EF=HG-CM$，$OF=OG+MH$，故分别得公式（3）-（6）。

利用帕普斯的几何模型，不难证明其他三角公式，如倍角公式、积化和差公式、和差化积公式等。

20 世纪中叶以前，绝大多数西方三角学教科书都采用了帕普斯的几何模型来证明和角与差角正余弦公式（如 Keil（1726），8；Emerson（1749），16-17；Maseres（1760），19-20；Lacroix（1803），7-9；Legendre（1830），267-270；De Morgan（1837），32-36；Todhunter（1866），137-142；Oliver, Wait & Jones（1881），28-29；Loney（1893），87-88；Wentworth（1902），53-57；Wentworth & Smith（1915）， 97-101；Gay（1935），81-82；Hearley（1942），109-110；Smail（1952），126-133），然后利用诱导公式证明公式适用于任意角。

3 阿布·韦发的单位圆方法

公元 10 世纪，阿拉伯天文学家阿布 • 韦发（Muhammad Abū'l-Wafā, 940～998）著《天文学大全》。该书并未提出天文学新理论，但对三角学却做出了重要贡献。比利时-美国科学史家萨顿（G. Sarton, 1884～1956）说："阿布 • 韦发的名声更多地建立在他对数学而非天文学的贡献之上。"（Sarton, 1927, 666-667）。阿布 • 韦发是三角学历史上最早使用所有六种三角函数、并系统研究它们之间关系的数学家。

阿布 •韦发继承并简化了托勒密等人对三角公式的证明，不再依赖托勒密定理。如图 6，在单位圆 O 中，作 $\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$（α 和 β 均为锐角），OA 和 OC 位于 OB 的两侧，过 B 作 $BD\perp OA$，$BE\perp OC$，垂足分别为 D、E，与圆 O 分别交于 G、H，则 D、E 分别是 BG、BH 的中点。连接 DE、OG、OH、GH。过 B 作 DE 的垂线，垂足为 F。于是，$\angle GOH=2(\alpha+\beta)$，$GH=2\sin(\alpha+\beta)$。从而得 $DE=\frac{1}{2}GH=\sin(\alpha+\beta)$。

又 $\angle BDE=\angle BGH=\beta$，$\angle BED=\angle BHG=\alpha$，$\mathrm{Rt}\Delta BFD\backsim\mathrm{Rt}\Delta BEO$，于是得 $\frac{BF}{BD}=\frac{BE}{BO}$。而 $BD=\sin\alpha$，$BE=\sin\beta$，故得 $BF=\sin\alpha\sin\beta$。由勾股定理得

$$DF=\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta}，\quad FE=\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}。$$

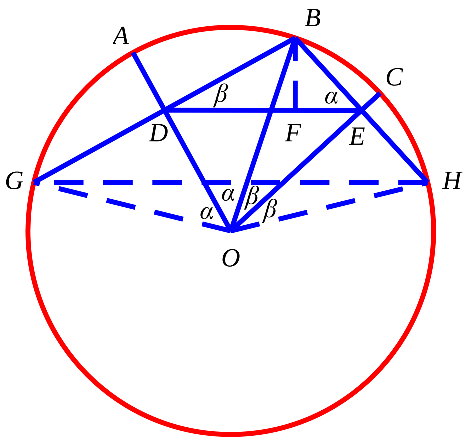


图 6 阿布 · 韦发对和角正弦公式的证明

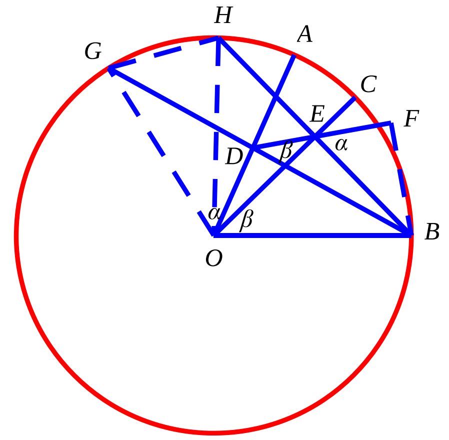


图 7 阿布 · 韦发对差角正弦公式的证明

因 $DE = DF + FE$， 故有

$$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta}+\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta} \tag{7}$$

上述作图法中，如果 OA 和 OC 位于 OB 的两侧，且 $\alpha>\beta$，则得到图 7 所示的情形。此时，$\angle GOH = \mathbf{2}(\alpha-\beta)$，$GH = \mathbf{2}\sin(\alpha-\beta)$，从而得 $DE=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}GH=\sin(\alpha-\beta)$。同样由 Rt$\Delta BFD$ 和 RtΔBEO 的相似性及勾股定理，根据 $DE = DF - FE$ 得出

$$\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta}-\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta} \tag{8}$$

在《天文学大全》中，阿布·韦发给出了公式的另一种推导：仍如图 6 和 7，由 RtΔBFE ∽RtΔBDO，RtΔBFD∽RtΔBEO，可得 $\frac{BE}{FE}=\frac{BO}{OD}$，$\frac{BD}{DF}=\frac{BO}{OE}$，从而得 $FE=\cos\alpha\sin\beta$，$DF=\sin\alpha\cos\beta$。在图 6 中，$DE = DF + FE$；在图 7 中，$DE = DF - FE$。故得公式（3）和（5）。

19 世纪，英国数学家克雷斯维尔（D. Cresswell, 1776～1844）给出了简化的方法（Cresswell, 1816, 181-182）。如图 8，在单位圆内作 $\angle AOB=\mathbf{2}\alpha$，$\angle BOC=\mathbf{2}\beta$，过点 B 作 $BD\perp AC$，垂足为 D。则

$$AC=\mathbf{2}\sin(\alpha\pm\beta),\quad AB=\mathbf{2}\sin\alpha,\quad BC=\mathbf{2}\sin\beta,$$

$$AD=\mathbf{2}\sin\alpha\cos\beta,\quad CD=\mathbf{2}\cos\alpha\sin\beta,$$

由 $AC=AD\pm CD$，即得公式（3）和（5）。用 $\frac{\pi}{\mathbf{2}}-\beta$ 代替β，即可导出公式（4）和（6）。

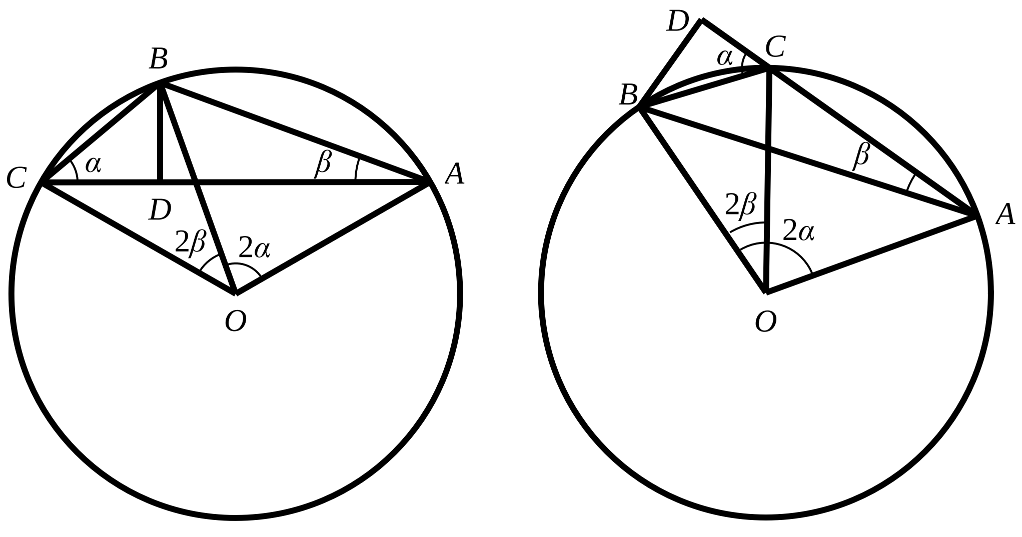


图 8 克雷斯维尔对和角公式的证明

4 克拉维斯的单位圆方法

16 世纪德国数学家克拉维斯（C. Clavius, 1538 ~ 1612）在出版于 1593 年的天文著作《星盘》（*Astrolabium*）中证明了一系列三角公式。

如图 9 所示。在单位圆 O 中，$\angle AOB=\beta$，$\angle COD=\alpha$，$0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$OA\perp OD$。于是 $\angle BOC=\dfrac{\pi}{2}-\alpha-\beta$。过点 C 作 OA 的垂线，垂足为 H，交圆于 K；又作 OD 的垂线，垂足为 G。过点 C 作 OA 的垂线，垂足为 H，交圆于 K；又作 OB、OD、KN 的垂线，垂足分别为 E、G、P。分别过点 H、K 作 OB 垂线，垂足分别为 L 、N。易知 $\angle OCE=\alpha+\beta$，$\angle OKN=\alpha-\beta$。因此，在 RtΔOCE 和 RtΔKON 中有：

$$OE=\sin(\alpha+\beta)\ ,\ CE=\cos(\alpha+\beta)\ ,\ ON=\sin(\alpha-\beta)\ ,\ KN=\cos(\alpha-\beta)\text{。}$$

但

$$OL=OH\cos\beta=CG\cos\beta=\sin\alpha\cos\beta\text{，}$$

$$NL=LE=QC=HC\sin\beta=OG\sin\beta=\cos\alpha\sin\beta\text{，}$$

$$HQ=KM=HC\cos\beta=OG\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta\text{，}$$

$$MN=HL=OH\sin\beta=CG\sin\beta=\sin\alpha\sin\beta\text{，}$$

因此，从 $OE=OL+LE$，$CE=LQ=HQ-HL$，$ON=OL-NL$，$KN=KM+MN$，即得公式(3)- (6)。

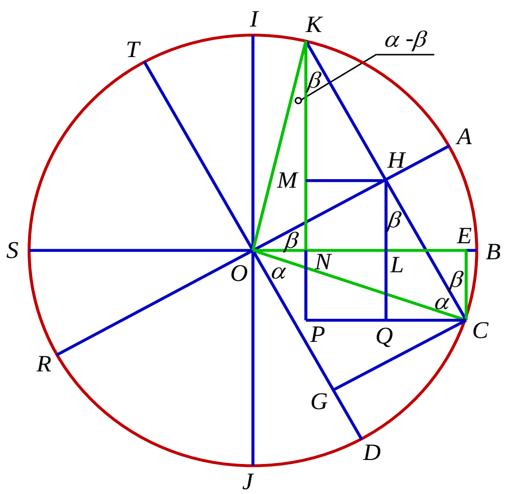


图 9 克拉维斯的单位圆方法（$0<\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{2}$）

类似可证$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$的情形，如图 10 所示。在单位圆 O 中，$\angle AOB=\beta$，$\angle COD=\alpha$，

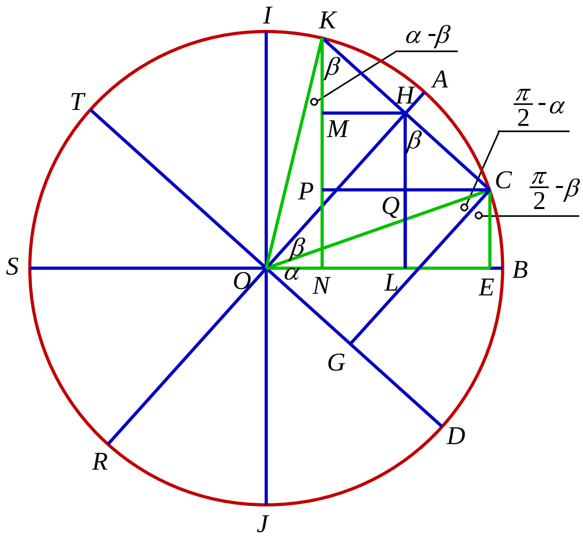


图 10 克拉维斯的单位圆方法（$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$）

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$，$OA\perp OD$。此时$\angle OCE=\pi-(\alpha+\beta)$，$\angle OKN=\alpha-\beta$。类似可得公式(3)–(6)。

5 两点之间距离公式

19 世纪法国数学家萨吕斯（P. F. Sarrus, 1798～1866）在《纯粹与应用数学年刊》上发表论文，根据两点之间的距离公式来推导公式（6），进而导出其他公式（Sarrus, 1821）。如图 11，在单位圆内构造$\angle AOB=\alpha$，$\angle AOC=\beta$，则

$$BC^2=\mathrm{Chord}^2(\alpha-\beta)=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$

故有

$$\mathrm{Chord}^2(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\tag{9}$$

令$\beta=0$，得

$$\mathrm{Chord}^2\alpha=2-2\cos\alpha\tag{10}$$

在（10）中用$\alpha-\beta$代替α，得

$$\mathrm{Chord}^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta)\tag{11}$$

比较（9）和（11），即得公式（6）。

实际上，在ΔOBC中直接利用余弦定理或勾股定理也可以导出（11）。在（6）中用$\alpha-\beta$代替β，得

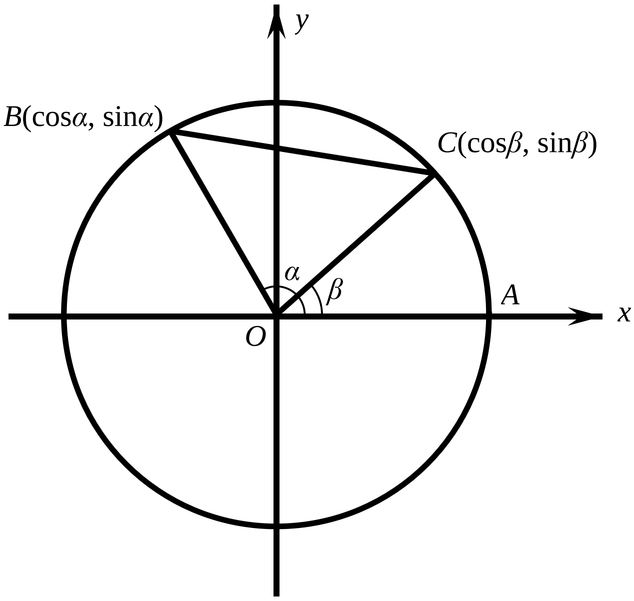


图 11 萨吕斯的方法

$$\cos\beta=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$$

$$=\cos^2\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$$

由此得公式（5）。在（5）和（6）中用$\alpha+\beta$代替α，则得

$$\cos\alpha=\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta \quad （12）$$

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta \quad （13）$$

由（12）$\times\sin\beta$ +（13）$\times\cos\beta$，得公式（3），由（12）$\times\cos\beta$ -（13）$\times\sin\beta$，得公式（4）。

Young（1833）沿用了萨吕斯的方法。Le Cointe（1858）则在图 11 中用$\frac{\pi}{2}-\beta$代替β来证明公式（3），进而导出其他公式。

1941 年，美国数学家麦克肖恩（E. J. McShane, 1904～1989）在《美国数学月刊》上发表论文，避开弦长公式，重新对公式（6）进行推导（Mcshane, 1941）。如图 12，在单位圆O中构造$\angle AOB=\alpha$，$\angle AOC=\beta$，将ΔBOC沿顺时针旋转，使得OC与OA重合，OB与OD重合，由$AD=CB$，利用两点之间距离公式即得公式（6）。其他公式根据诱导公式导出。Perlin（1955）、Sharp（1958）等均沿用此法。Holmes（1951）则以OC所在直线为横轴建立新坐标系，从而得到BC的另一种表达式。

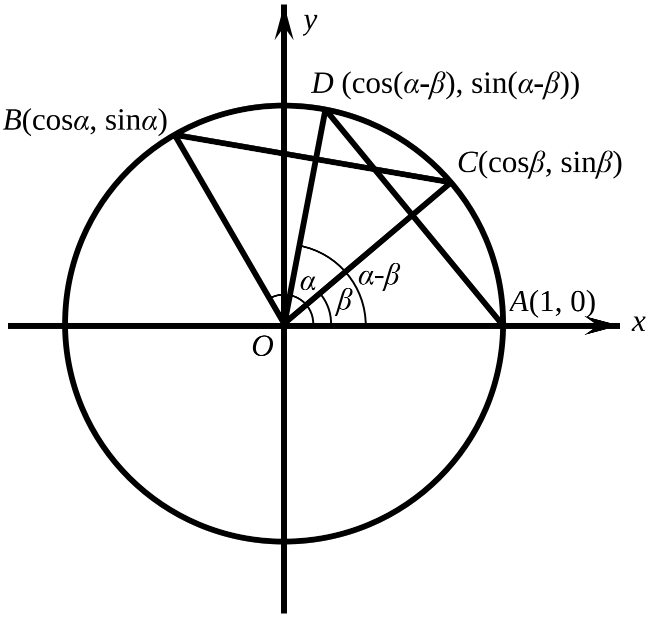


图 12 萨吕斯方法的改进之一

类似地，Wylie（1955）则构造图 13，利用 $AB = CD$ 得出公式（4），再利用诱导公式导出其他公式。

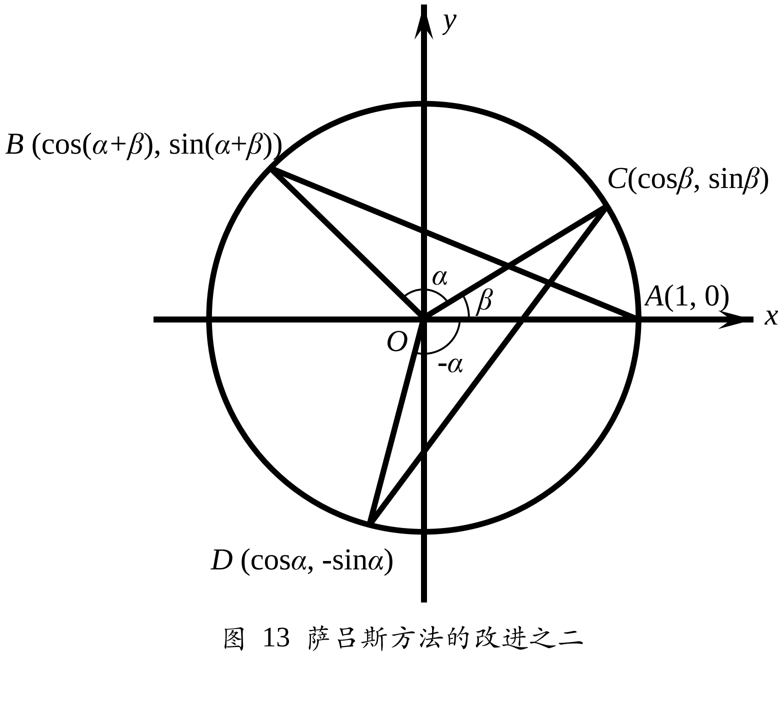


图 13 萨吕斯方法的改进之二

6 正弦定理

意大利数学家卡诺里（A. Cagnoli, 1743～1816）在其《平面与球面三角学》中利用正弦定理来推导和角公式（Cagnoli, 1786, 17-19）。如图 14，在ΔABC 中，CD 为 BC 边上的高，

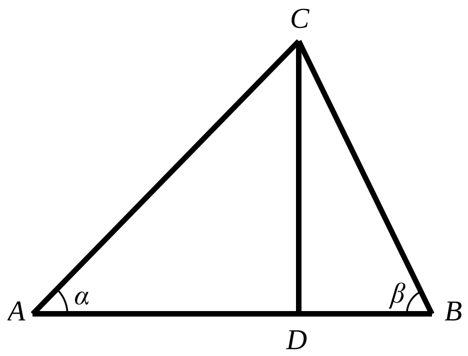


图 14 正弦定理推导法

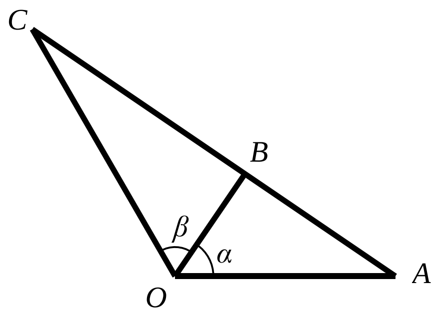


图 15 余弦定理推导法

$\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$0<\alpha+\beta<\pi$。因 $AB=AD+DB=AC\cos\alpha+BC\cos\beta$，故有

$$1=AD+DB=\frac{AC}{AB}\cos\alpha+\frac{BC}{AB}\cos\beta$$

但根据正弦定理，$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$，$\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$，故有

$$1=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cos\beta$$

由此得公式（3）。Gregory（1816）、Thomson（1825）、Wilson（1831）、Scholfield（1845）、Docharty（1867）、Rothrock（1910）、McCarty（1920）、Dickson（1922）等均采用此法。

7 余弦定理

英国数学家伍德豪斯（R. Woodhouse, 1773～1827）在其《平面与球面三角学》中分别用托勒密定理和余弦定理来推导和角正弦公式（Woodhouse, 1819, 24-31）。在ΔABC 中，仍设 $\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$0<\alpha+\beta<\pi$。由

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad \cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

得

$$\sin\alpha=\frac{N}{bc},\quad \sin\beta=\frac{N}{ac},\quad \sin(\alpha+\beta)=\frac{N}{ab}$$

其中 $N=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$。于是，

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{N}{bc}\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{N}{ac}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{N}{ab}=\sin(\alpha+\beta)$$

然后利用诱导公式证明公式（3）适用于任意角，并导出其他公式。

伍德豪斯的方法由于计算量太大而无人问津。美国数学家罗森巴赫（J. B. Rosenbach, 1897～1951）在其《平面三角学》中设计了更简单的方法（Rosenbach *et al*, 1937, 111-118），直接推导公式（4）。如图 15，$\angle AOB=\alpha$，$\angle COB=\beta$（$0<\alpha+\beta<\pi$），$AC\perp OB$，$OA=a$，$OB=b$，$OC=c$，$AB=m$，$BC=n$，$OB=h$，由余弦定理得

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2+c^2-(m+n)^2}{2ac}=\frac{2h^2-2mn}{2ac}=\frac{h}{a}\times\frac{h}{c}-\frac{m}{a}\times\frac{n}{c}$$

由此即得公式（4）。

8 相似三角形

瑞士一美国数学家哈斯勒（F. R. Hassler, 1770～1843）在其《解析平面与球面三角学》中利用相似三角形来推导和角公式（Hassler, 1826, 27-29）。如图 16，构造$\angle AOB=\alpha$，$\angle COB=\beta$，$AC\perp OB$，$AE\perp OC$，则$\sin(\alpha\pm\beta)=\frac{AE}{OA}$，$\cos(\alpha\pm\beta)=\frac{OE}{OA}$，

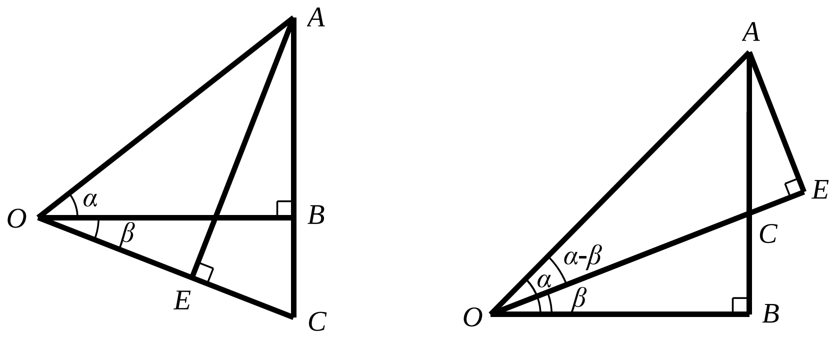


图 16 哈斯勒的相似三角形法

$\sin\alpha=\frac{AB}{OA}$，$\cos\alpha=\frac{OB}{OA}$，$\sin\beta=\frac{BC}{OC}$，$\cos\beta=\frac{OB}{OC}$。因ΔAEC 与ΔOBC 相似，故

$\frac{AE}{AC}=\frac{OB}{OC}$，即$AE=\frac{AC\times OB}{OC}$，于是有

$$\frac{AE}{OA}=\frac{AC\times OB}{OA\times OC}=\frac{AB\times OB\pm BC\times OB}{OA\times OC}=\frac{AB}{OA}\times\frac{OB}{OC}\pm\frac{OB}{OA}\times\frac{BC}{OC}$$

这就是公式（3）和（5）。

又$\frac{EC}{AC}=\frac{BC}{OC}$，即$EC=\frac{AC\times BC}{OC}=\frac{AB\times BC\pm BC\times BC}{OC}$，于是有

$$\frac{OE}{OA}=\frac{OC\mp EC}{OA}=\frac{OB^2\mp AB\times BC}{OA\times OC}=\frac{OB}{OA}\times\frac{OB}{OC}\mp\frac{AB}{OA}\times\frac{BC}{OC}$$

这就是公式（4）和（6）。

Peirce（1835）亦采用此法。

9 面积法

罗森巴赫在《平面三角学》中还利用三角形面积公式来推导公式（3）。如图 15，因 $S_{\Delta AOC}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}$，故有

$$\frac{1}{2}ac\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ab\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\beta$$

即

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{b}{c}\sin\alpha+\frac{b}{a}\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

我们还可以构造其他几何模型，借助有关图形的面积来推导和角或差角公式。例如，Blakslee（1888）在练习中给出过和差化积公式的一种模型，我们将其补成矩形，如图 17（1）所示。该矩形由一对小长方形、两对直角三角形以及一个菱形组成，其中两对直角三角形的一个内角分别为α 和 β，斜边均为 1。将同类直角三角形拼成小矩形，得到图 17（2）。比较图（1）和图（2），易知图（1）中的菱形与图（2）中的矩尺形面积相等，故得公式（5）。这与图 18 所示的关于公式（3）的无字证明可谓异曲同工，令人拍案称绝。

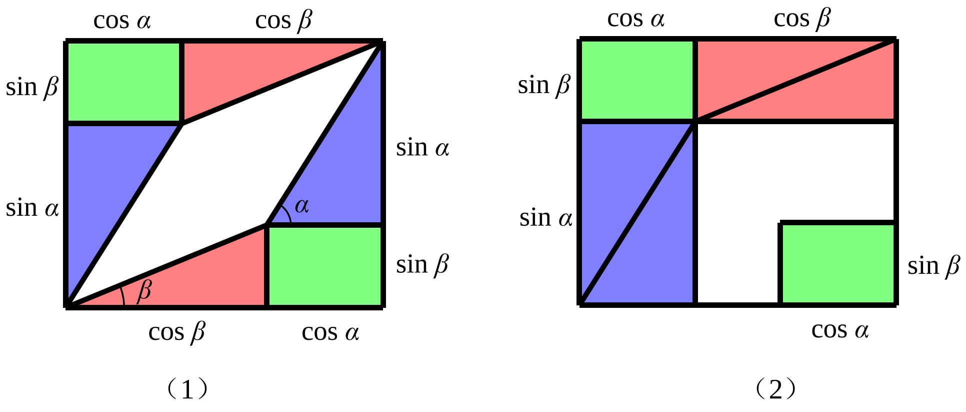


图 17 差角正弦公式的无字证明

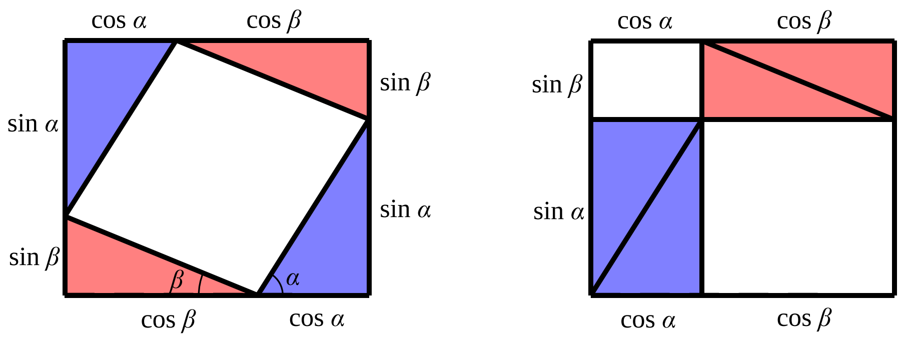


图 18 和角正弦公式的无字证明

10 投影法

投影法出现于 19 世纪后期。如图 19，$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$（$0<\alpha+\beta<\pi$），$AC\perp OB$。根据命题：“两个向量之和的投影等于这两个向量的投影之和”，我们有

$$\mathrm{Proj}_{oy}\overrightarrow{OC}=\mathrm{Proj}_{oy}\overrightarrow{OB}+\mathrm{Proj}_{oy}\overrightarrow{BC},$$

$$\mathrm{Proj}_{ox}\overrightarrow{OC}=\mathrm{Proj}_{ox}\overrightarrow{OB}+\mathrm{Proj}_{ox}\overrightarrow{BC},$$

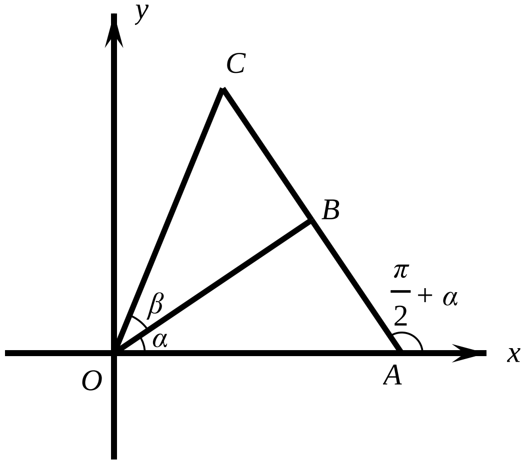


图 19 投影法

此即

$$OC\sin(\alpha+\beta)=OB\sin\alpha+BC\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),$$

$$OC\cos(\alpha+\beta)=OB\cos\alpha+BC\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),$$

但 $OB=OC\cos\beta$，$BC=OC\sin\beta$，故得公式（3）和（4）。

Seaver（1889）、Hobson（1896）、Durfee（1900）、Ashton & Marsh（1902）、Bohannan（1904）、Hun & MacInnes（1911）、Kenyon & Ingold（1913）、Bocher & Gaylord（1914）、Young & Morgan（1919）、Sprague（1942）等都采用了投影法。

11 结语

和角公式的历史再一次告诉我们，数学历史是一座巨大的宝藏，为我们提供了取之不尽、用之不竭的教学资源和思想养料。如果历史是沧海，我们所知便只是其中之一粟；如果历史是天空，我们所见便只是其中之一角。HPM 视角下的高水平数学教学的实施，离不开

深入的历史文献研究。

在两角和与差的正、余弦公式的不同证明或推导方法中，除了距离公式法外，其他方法大多局限于锐角或钝角的情形，需要借助诱导公式进一步讨论任意角的情形。正因为如此，20 世纪 50 年代之后，距离公式法逐渐受到作者们的青睐，那些只适用于锐角或钝角的方法逐渐被人们遗忘。但是，帕普斯模型、克雷斯维尔的单位圆方 法、面积方法等简单直观，即使在今天也仍然适于教学。各种方法不仅能够拓宽学生的思维，为他们提供了探究机会，而且也揭示了不同知识之间的密切联系，有助于他们对公式的理解、记忆和运用。我们有理由相信，HPM 视角下的三角公式教学，必将使学生不再将三角公式视为畏途。

参考文献

[1] Ashton, C. H. & Marsh, W. R. (1902). *Plane & Spherical Trigonometry*. New York: Charles Scribner’s Sons.

[2] Audierne, J. (1756). *Traité Complet de Trigonométrie*. Paris: Claude Herissant.

[3] Blakslee, T. M. (1888). *Academic Trigonometry*, *Plane & Spherical*. Boston: Ginn & Company.

[4] Bocher, M. & Gaylord, H. D. (1914). *Trigonometry*. New York: Henry Holt & Company.

[5] Bohannan, R. D. (1904). *Plane Trigonometry*. Boston: Allyn & Bacon.

[6] Cagnoli, M. (1786). *Traité de Trigonométrie Rectiligne & Sphérique*. Paris: Didot.

[7] Cirodde, P. L. (1847). *Eléments de Trigonométrie Rectiligne & Sphérique*. Paris: Librairie De L. Hachette et C^ie.

[8] Cresswell, D. (1816). *A Treatise on Spherics*. Cambridge: J. Mawman, 1816.

[9] De Morgan, A. (1837). *Elements of Trigonometry & Trigonometry Analysis*. London: Taylor & Walton.

[10] Dickson, L. E. (1922). *Plane Trigonometry with Practical Applications*. Chicago: Benj H. Sanborn & Company.

[11] Docharty, G. B. (1867). *Elements of Plane and Solid Geometry and of Plane and Spherical Trigonometry*. New York: Harper & Brothers. 145-147.

[12] Durfee, W. P. (1900). *The Elements of Plane Trigonometry*. Boston: Ginn & Company.

[13] Emerson, E. (1749). *The Elements of Trigonometry*. London: W. Innys.

[14] Gay H. J. (1935). *Plane & Spherical Trigonometry*. Ann Arbor: Edwards Brothers.

[15] Gregory, O. (1816). *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. London: Baldwin,

Cradock & Joy.

[16] Hassler, F. R. (1826). *Elements of Analytic Trigonometry, Plane & Spherical*. New York: James Bloomfield.

[17] Hearley, M. J. G. (1942). *Modern Trigonometry*. New York: The Ronald Press Company.

[18] Hobson, E. W. & Jessop, C. M. (1896). *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*. Cambridge: The University Press.

[19] Holmes, C. T. (1951). *Trigonometry*. New York: McGraw-Hill Book Company.

[20] Hun, J. G. & MacInnes, C. R. (1911). *The Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. New York: The Macmillan Company.

[21] Keil, J. (1726). *The Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. Dublin: W. Wilmot.

[22] Kenyon, A. M. & Ingold, L. (1913). *Trigonometry*. New York: The Macmillan Company.

[23] Lacroix, S. F. (1803). *Traité Elémentaire de Trigonométrie*. Paris: Courcier.

[24] Le Cointe, I. L. A. (1858). *Leçons sur la théorie des fonctions circulaires et la trigonométrie*. Paris: Mallet-Bachelier.

[25] Legendre, A. M. (1830). *Elements of Geometry & Trigonometry*. New York: N. & J. White, Collins & Hannay, Coillins & Company. & James Ryan

[26] Loney, S. L. (1893). *Plane Trigonometry*. Cambridge: The University Press.

[27] Maseres, F. (1760). *Elements of Plane Trigonometry*. London: T. Parker.

[28] McCarty, R. J. (1920). *Elements of Plane Trigonometry*. Chicago: American Technical Society.

[29] Mcshane, E. J. (1941). The addition formula for the sine and cosine. *American Mathematical Monthly*. 48: 688-689.

[30] Oliver, J. E., Wait, L. A. & Jones, G. W. (1881). *A Treatise on Trigonometry*. Ithaca: Finch & Apgar.

[31] Peirce, B. (1835). *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*. Cambridge & Boston: James Munroe & Company.

[32] Perlin, I. E. (1955). *Trigonometry*. Scranton: International Textbook Company.

[33] Rosenbach, J. B., Whitman, E. A. & Moskovitz, D. (1937). *Plane Trigonometry*. Boston: Ginn & Company.

[34] Rothrock, D. A. (1910). *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. New York: The Macmillan Company.

[35] Sarrus, F. (1821). Exposition des principes fondamentaux de la théorie des fonctions

circulaires. *Annales de Mathématiques Pures et Appliqueés*. 11: 323-325

[36] Sarton, G. (1927). *Introduction to History of Science* (Vol.I), Baltimore: Williams and Wilkins, Company.

[37] Scholfield, N. (1845). *Higher Geometry & Trigonometry*. New York: Collins, Brother & Company.

[38] Seaver, E. P. (1889). *Elementary Trigonometry*, *Plane & Spherical*. New York & Chicago: Taintor Brothers & Company.

[39] Sharp, H. (1958). *Elements of Plane Trigonometry*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc.

[40] Smail, L. L. (1952). *Trigonometry*, Plane & Spherical. New York: McGraw-Hill Book Company.

[41] Sprague, A. H. (1942). *Essentials of Plane & Spherical Trigonometry*. New York: Prentice-Hall.

[42] Thomson, J. (1825). *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. Belfast: Joseph Smyth.

[43] Todhunter, I. (1866). *Trigonometry for Beginners*. London & Cambridge: Macmillan & Company.

[44] Wentworth, G. A. (1902). *Plane Trigonometry*. Boston: Ginn & Company.

[45] Wentworth, G. A. & Smith D. E. (1915). *Plane and Spherical Trigonometry*. Boston: Ginn & Company.

[46] Wilson, R. (1831). *A System of Plane & Spherical Trigonometry*. Cambridge: J. & J. J. Deighton, T. Stevenson & R. Newby

[47] Woodhouse, R. (1819). *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*. Cambridge: J. Deighton & Sons.

[48] Wylie, C. R. (1955). *Plane Trigonometry*. New York: McGraw-Hill Book Company.

[49] Young, J. R. (1833). *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. London: John Souter.

[50] Young, J. W. & Morgan, F. M. (1919). *Plane Trigonometry & Numerical Computation*. New York: The Macmillan Company.

教学实践

函数概念：从历史到课堂*

钟萍[1] 汪晓勤[2]

（1. 上海交通大学附属中学嘉定分校，上海，201821;

2. 华东师范大学数学系，上海, 200241）

函数是中学数学的核心概念，其教学历来受到数学教师的高度重视。关于该概念的定义，初中数学教科书采用了“变量说”，但不同版本的教科书给出的定义互有不同。沪教版初中数学教科书采用了“变量的依赖关系”（y 随 x 的变化而变化），而人教版则采用了“变量的对应关系”（对于 x 的每一个值，y 有唯一的值与之对应）。高中数学教科书则采用了“对应说”。为什么高中数学要采用新的函数定义？如何在学生已有的认知基础上，激发他们学习新定义的动机，从而实现从旧定义到新定义的自然过渡？这是高中函数概念教学中需要解决的问题。

美国数学家 M 克莱因（M. Kline, 1908～1992）曾经指出：数学史是教学的指南[1]。相关实证研究也表明，中学生对函数概念的理解表现出一定的历史相似性[2]。函数概念的演进历史为我们解决上述教学问题提供了重要参考。有鉴于此，我们从 HPM 视角，借助有关史料来组织函数概念的教学。

我们设定的教学目标是：（1）在已有基础上理解新的函数概念，能用集合与对应的语言刻画函数概念；（2）经历函数概念的演进过程，感受数学背后的理性精神，认识数学活动的本质；（3）激发学生的学习兴趣，培养学生的数学人文情怀。

1 函数概念的历史及其重构

17 世纪，莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646～1716）用“函数”一词来表达与曲线相关的几何量（纵坐标、次切距等），后来将 x 的幂称为 x 的函数。到了 1718 年，约翰 • 伯努利（J. J. Bernoulli, 1667～1748）首次对函数概念进行了明确定义：“一个变量的函数是由该变量和常数以任何方式组成的量。”伯努利所说的“任何方式”仅仅局限于通常的代数运算。

* 人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）系列教学案例之一。

之后，欧拉（L. Euler, 1707～1783）在《无穷分析引论》（1748）中首次将函数明确定义为解析式：“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式。”但不久，欧拉在《微分学原理》（1755）中再次对函数的定义进行修正，将函数看作“具有依赖关系的变量”：“如果某些量依赖于另些个量，当后面这些量变化时，前面这些量也随之变化，则前面这些量称为后面这些量的函数。”欧拉的两种定义统治了相当长的历史时期。19 世纪 30 年代以前，人们普遍采用欧拉的“解析式”定义，19 世纪 40 年代之后，“依赖关系”定义逐渐占据上风[3]。

1837 年，狄利克雷（L. Dirichlet, 1805～1859）对欧拉“依赖关系”定义中的依赖关系进行了修正，给出了新的定义：“设 a、b 是两个确定的值，x 是可取 a、b 之间一切值的变量。如果对于每一个 x，有惟一有限的 y 值与它对应，使得当 x 从 a 到 b 连续变化时，y 也逐渐变化，那么 y 就称为该区间上 x 的一个连续函数。在整个区间上，y 无需按照同一种规律依赖于 x，也无需单单考虑能用数学运算来表示的关系。”[1]这个定义常常被称为函数的现代定义，它突破了欧拉定义的局限性，用变量的“对应关系”取代了“依赖关系”。

从“解析式”到“具有依赖关系的变量”，再到“具有对应关系的变量”，函数的定义逐渐完善。但这些定义都将函数视为一个变量，故都属于“变量说”。集合论诞生之后，函数定义得到了进一步的抽象，数学家关注的不再是变量本身，而变量之间的“关系”。1939 年，布尔巴基学派在《集合论》中给出了全新的定义：“设 E 和 F 是两个集合，它们可以不同，也可以相同。E 中的一个变元 x 和 F 中的变元 y 之间的一个关系称为一个函数关系，如果对每一个 $x \in E$，都存在惟一的 $y \in F$，它满足与 x 的给定关系。我们将联系每一个元素 $x \in E$ 和 $y \in F$ 的运算称为函数；y 称为 x 处的函数值，函数是由给定的关系决定的。两个等价的函数关系确定了同一个函数。”[4]这个定义就是我们通常所谓的“对应说”。

图 1 总结了函数概念的演进过程。

我们采用了多种方式来运用历史材料。首先，整体设计上，采用重构式，即借鉴函数概念的“解析式-变量依赖关系-变量对应关系-集合对应关系”演进历史，呈现概念的自然发展过程，激发学生的学习动机，促进学生对函数概念本质更深入地理解和应用；其次，在教学过程中，复制式地呈现欧拉的解析式定义与依赖关系定义、德摩根《代数学》英文版和中文版中的解析式定义以及狄利克雷的变量对应关系定义；再次，顺应式地将著名的狄利克雷函数作为概念辨析的例子；最后，为了在教学中融入更多的数学文化元素，附加式地呈现了笛卡儿、欧拉、德摩根、狄利克雷等科学家的画像以及《代数学》书影。

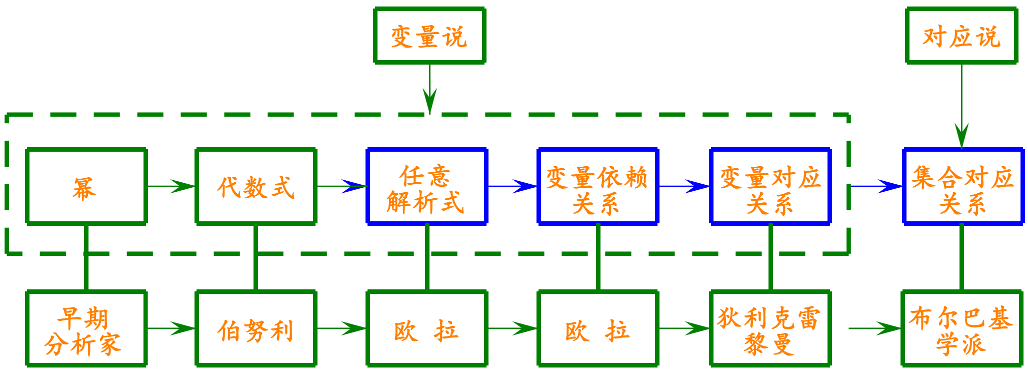


图 1 函数概念的演进过程

2 教学设计与实施

2.1 引 入

为充分了解学生对函数概念的理解状况，我们在课前做了问卷调查和访谈，从函数定义、图像、表达式、变量对应关系等角度了解学生对函数的理解现状，并以此作为教学的起点。

师：关于函数概念，同学们并不陌生。现在，请大家回忆一下，初中数学中的函数是怎么定义的？

生 1：一个变量随着自变量的改变而改变，即变量 x 一旦改变，则 y 也随之发生改变。

师：这是你理解的函数概念，要原原本本地叙述出函数的定义，对你来说可能还有些困难。在课前的问卷调查中，同学们都根据自己的理解，对函数的概念作了描述，其中不乏真知灼见：

描述 1：函数是一种描述因变量随自变量改变的数学概念，到目前为止，主要学习了常值函数、反比例函数、一次函数和二次函数，函数可以用图像表示。

描述 2：函数分为一次函数和多次函数，每个自变量都有自己相对应的因变量。

描述 3：形如 $y=ax$，$y=x+a$，$y=x^2+a$，$y=ax^2+bx+c$，$y=x^a$，…，总之有自变量和因变量、且对于一个 x 有且仅有一个 y 的值与其对应的式子。

描述 4：一个变量用另外一个变量的代数式表示。

……

同学们普遍认为函数是一个代数式，这样的认识实际上与历史上数学家的认识是十分相似的。瑞士著名数学家欧拉在《无穷分析引论》中给出的函数定义是：“一个变量的函数是

由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式。”欧拉的这个定义影响深远，近百年之后，英国数学家德摩根在他的《代数学基础》中还给出如下定义：“Any expression which contains x in any way is called a function of x.”清代数学家李善兰在翻译德摩根的这本书时，将上述定义译为：“凡式中含天，为天之函数。”这便是中文“函数”名称的由来。可见，历史上函数的“解析式”定义是非常深入人心且广为流传的。

2.2 概念生成

2.2.1 从“解析式”到“变量依赖关系”

接下来，通过现实生活中的实例，凸显函数解析式定义的局限性，创造学生的认知冲突，让学生体会完善函数概念的必要性。

师：然而，随着时代的发展，生活的需要，人类又会面对方方面面的新问题，比如我们遇到这样一个问题，

问题 1：下面请同学们一起看课本第 55 页的男子一百米栏项目的世界纪录创立的时间和成就：

表 1 男子 100 米栏世界纪录统计表

年份	1900	1908	1920	1936	1959	1973	1993	2006
成绩	15.4	15	14.8	14.2	13.2	13.1	12.91	12.88

思考以下问题：

（1）统计表中有变量吗？有几个变量？是什么？

（2）当时间年份确定时，相应的世界纪录成绩是否确定？能否用一个关系式写出成绩随时间变化关系吗？

生 2：统计表中有两个变量，其中自变量是年份，因变量是成绩。

生 3：当年份确定时，相应的世界纪录成绩是确定的，但很难找出成绩随时间变化的关系式。

师：同学们还能举出实际生活中类似的例子吗？

生 4：每天的最低温度和日期的关系也很难用一个解析式表示。

生 5：每一次考试的成绩和学号的关系。

师：很好。生活中这样的例子很多，比如，一天的沪深 300 指数随时刻的变化，以时刻为自变量，以指数为因变量，这个图像体现了两个变量之间的关系，那么这两个变量之间的

关系能否用一个解析式来刻画呢?

生 6：很难用解析式进行描述。

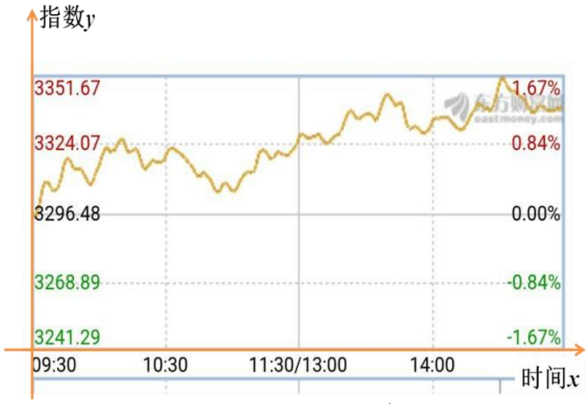


图 2　沪深 300 指数图

师:反过来,如果能用解析式来表示指数和时刻之间的关系,那炒股票赚钱就太容易了。那么，函数的解析式定义适用于这两个变量之间的关系吗?

生 7：不适用。

师：那我们要描述这两个变量之间的关系，该怎么办呢?

生 8：我们可以重新对函数概念进行定义。

师：我们该如何重新定义函数呢？实际上，历史上欧拉学也遇到了类似的问题，这样的问题促使他重新思考函数的定义。1755 年，他在《微分学原理》序言中给出："如果某个量依赖于另一个量，当后面这个量变化时，前面这个量也随之变化，则前面这个量称为后面这个量的函数。"看到这个定义，同学们是否有似曾相识的感觉?

生 9：初中我们学的函数就是"两个变量之间存在依赖关系"。

师：很好！初中阶段我们学习了具体的一次、二次函数等，在这些函数中，变量 y 与 x 之间就有明确的依赖关系。但是，利用"依赖关系"来刻画函数，是否尽善尽美了呢?

2.2.2 从"变量依赖关系"到"变量对应关系"

教师进一步提出新的问题,引导学生思考,变量之间的关系是否一定要有"依赖关系",进而提出更完善的定义。

师：现在请同学们回忆一下问卷调查中的一个问题。问题 2： $y=0$（$x \in R$）是否为函数？并说明理由。

师：调查结果表明，161 人中有 65 人认为它不是函数，占比 40.37%。这部分同学给出的理由有："y 不随 x 的变化而变化"、"没有 y 与 x 的关系式"、"x 与 y 之间没有关系"等。这表明，初中的函数定义"变量 y 随着 x 的变化而变化，它们之间存在确定的依赖关系"，虽然描述比较形象生动，但比较模糊，给许多同学带来很大的困惑。同学们可以再看一个例

子$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=\pi \\ f(3)=-\sqrt{5} \end{cases}$：在这个例子中，一个变量的值 2，$\pi$，$-\sqrt{5}$ 和另一个变量的值 1，2，3 之间没有确定的依赖关系，那我们该怎样描述这两个变量之间的关系呢？重新审视函数 $y=0, x\in \mathrm{R}$，无论 x 怎样变化，y 的值都是以不变应万变，此处的关键词“应”即为“对应”之意，也就是对每一个 x 的值，都有 y 的值 0 与之对应。我们能否从这样一个新的视角来理解前面遇到的例子呢?

生 10：男子 100 米栏世界纪录表中，对于每一个出现的年份，都能找到一个世界纪录与之对应；而在沪深指数图像中，每一个时刻都有一个确定的股票指数与之对应。

师：理解得很到位，那么对于我们熟悉的函数 $y=2x^2$ 呢?

生 11：对每一个 x 的值，都有 y 的值与之对应。

师：我们还发现，对于变量 x 的每一个值，y 都有唯一的值与之对应，说明我们同样可以从对应的角度来理解曾经学习过的函数。通过以上实例的分析，同学们能否提炼并概括一下这些关系的共同特征?

生 12：以上函数关系中，对变量 x 的每一个值，变量 y 都有唯一确定的值与之对应。

师：那么，能不能用集合的语言和对应关系来描述初中所学的函数概念呢?

生 13：如果在某个变化的过程中有两个变量 x 和 y，对于某个实数集合 D 内的每一个确定的 x，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，x 叫做自变量，x 的取值范围叫做函数的定义域，和 x 对应的 y 的值叫做函数值。

师：非常好！这正是德国数学家狄利克雷于 1837 年提出的函数定义。他大致是这样说的：“对于某区间上的每一个确定的 x 值，y 都有唯一确定的值与它对应，当 x 连续变化时，y 也随之变化那么 y 叫做 x 的函数。”狄利克雷的函数定义，成功地避免了以往函数定义中关于依赖关系的描述，简明精确，因而被人们普遍接受，成了函数的现代定义。

2.2.3 从“变量说”到“对应说”

在得出“对应关系”变量说定义之后，教师引导学生从对于“变量”的关注转向对于“对应关系”的关注，并对之前遇到的各个函数的对应关系进行描述。

师：反观刚才分析过的这些函数，其对应关系可以用一个图表、一个图像或者一个解析式来呈现，我们把它统称为“对应法则”。例如表 1 中，14.2 与 1936 对应，1973 有唯一的 13.1 与之对应，这个图表就是一个对应法则。那么同学们能否从这个角度来分析其他例子的对应

关系呢?

生 14：图 2 的沪指变化曲线图就是一种对应法则。

生 15：函数 $y=2x^2$，这个解析式就是一种对应法则。

师：非常好！同学们想想 $\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=\pi \\ f(3)=-\sqrt{5} \end{cases}$ 是否是一种对应法则?

生 16：每一个变量 1,2,3 都有唯一的因变量与之对应，故是一种对应法则。

师：$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(2)=\pi \\ f(3)=-\sqrt{5} \end{cases}$ 与 $\begin{cases} f(1)=\pi \\ f(2)=-\sqrt{5} \\ f(3)=2 \end{cases}$ 有何相同点和不同点?

生 17：它们的自变量和因变量都相同，但对应关系不同，比如前者中 π 对应自变量 2，后者中 $-\sqrt{5}$ 与变量 2 对应，因此它们是不同的对应法则。

师：相信通过以上的探讨，大家对“对应法则”有了较为清晰的认识。同学们能否在此基础上更精确概括函数的概念?

生 18：在某个对应法则下，某个实数集合 D 内的每一个确定的 x，y 都有唯一确定的值和它对应。

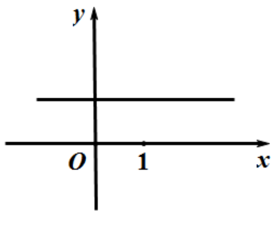
师：概括得非常精辟！请同学们一起来分析课本上函数概念完整的叙述。（此处略）

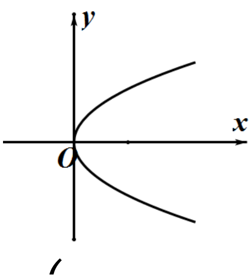
2.3 理解与应用

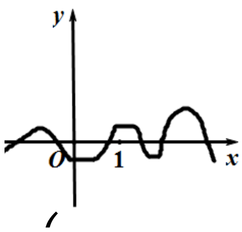
在该环节，通过分析具体的实例和图像，让学生理解函数的定义域、对应法则和值域；并通过辨析函数的异同，加深他们对“对应关系”的理解，实现从“变量说”到“对应说”的跨越。

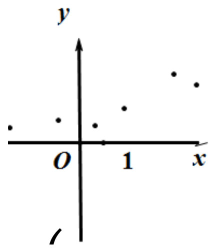
问题 3：某校有一个班级，设变量 x 是该班同学的姓名，变量 y 是该班同学的学号，变量 z 是该班同学的身高，变量 w 是该班同学某一门课程的考试成绩，则下列选择中正确的是：A. y 是 x 的函数；B. z 是 y 的函数；C. w 是 z 的函数。

问题 4：指出下列图像或表达式中，y 是否 x 的函数，说明理由。









；

$y=\sqrt{x}+\sqrt{-x-3}$； $y=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in C_R Q\end{cases}$。

问题 5：在函数概念的发展过程中，19 世纪德国数学家狄利克雷功不可没。狄利克雷定义了一个“奇怪的函数”：$f(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in \complement_R Q\end{cases}$。（1）写出该函数的定义域、值域，并分析其对应法则；（2）求 $f(2), f(-\sqrt{2}), f[f(\sqrt{2})]$。

问题 6：下列几组函数中，哪一组中的两个函数是相同的？

(1) $f(x)=1, x\in Q, g(x)=1, x\in R$；

(2) $f(x)=|x|, x\in R, g(t)=\sqrt{t^2}, t\in R$；

(3) $f(x)=|x|, x\in[-1,1], g(x)=x^2, x\in[-1,1]$；

(4) $f(x)=|x|, x\in\{-1,0,1\}, g(x)=x^2, x\in\{-1,0,1\}$。

限于篇幅，我们略去学生的解答过程。

2.4 课堂小结

小结中，教师引导学生回顾函数概念从“解析式说”、“依赖关系变量说”、“对应关系变量说”到“集合对应说”的演进过程；启发学生思考函数概念历史所带来的启示。

师：谁来小结一下本节课的收获?

生 14：我们了解了函数概念的发展历史，学习了函数对应关系，学习了如何判别变量关系为函数关系以及如何区分两个函数的异同。

生 15：认识一个函数应从其定义域、对应法则和值域几个方面着手，要深入其本质即函数的对应关系。

师：函数概念的发展历久弥新，函数概念的发展过程给你什么启示?

生 16：欧拉仅在函数概念的拓广上就做了不朽的贡献，他钻研的精神、质疑的品质是值得我们学习的。

生 17：函数概念的每一次拓广都融入了大量数学家的研究热情，人类的好奇心和钻研精神正是推动科学发展的原动力，随着生活和生产的发展数学的发展也是永无止境的!

师：我们今天一起经历了函数概念的演进过程：解析说、依赖关系变量说、对应关系变量说、集合对应关系说（用 PPT 呈现图表）。我们看到，函数概念是不断发展的，我们有理由相信，其发展远不止于此。（PPT 的图表上闪烁着班级某位同学的名字，引发一阵轰动。）我更相信，数学这座宝塔上的明珠你们会勇敢地去采摘，数学进一步的发展离不开你们未来

的努力！

3 学生反馈

课后的问卷调查结果显示：

（1）在概念的理解上，课前有 40.37%的学生认为 $y=0, x \in R$ 不是函数，课后问卷则全部认为其是一个函数，且能用对应关系来描述他们之间的函数关系。

（2）全班有 87.5%的学生喜欢老师“用融入数学史的方式”来讲授函数的概念，同时，80.62%的学生认为了解函数概念的发展史是非常有用且有趣的，希望以后的数学课也用这种方式上课，拓宽他们的数学知识视野。

（3）95.1%的学生喜欢“在数学课中穿插数学家的故事和言行”，所有学生都一致认为数学史能激发学习数学的兴趣，拓宽知识面，加深对数学的理解。

访谈中，学生普遍喜欢有生动丰富的数学史背景的数学课堂，他们认为，本节课既能理解函数的概念及其发展史，还能通过数学家的故事、科学精神触动他们思考人生的意义等。

4 结语

本节课中，学生经历了函数概念从“解析式”到“具有依赖关系的变量”、再到“具有对应关系的变量”、最后到“集合对应关系”的整个发展过程，产生了强烈的学习动机，获得了函数概念的深刻理解，同时，积累了数学探究的经验，感受到数学的演进性特征。整节课中，学生仿佛穿越时空，与历史上的数学家携手前行，一起去揭示现实世界各种变化过程背后的数学规律，一起体验成功的快乐；学生成了数学的研究者，数学家似乎也成了课堂上的一名学生。无疑，函数概念的历史发挥了它应有的教育价值。

参考文献

[1] 汪晓勤, 韩祥临(2002). 中学数学中的数学史[M]. 北京: 科学出版社.

[2] 任明俊, 汪晓勤(2007). 高中生对函数概念的理解: 历史相似性初探[J]. 数学教育学报. 16(4): 84-87.

[3] 汪晓勤(2015). 19 世纪中期以前的函数解析式定义[J]. 数学通报. (5): 1-7.

[4] Rüthing, D. (1984). Some definitions of the concept of function from J. Bernoulli to N. Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer.* 6(4): 72-77.

HPM 视角下的“曲线与方程”教学*

石和飞

（浙江省宁波市第三中学，宁波, 315040）

“曲线与方程”是人教版高中数学选修 2-1 的一节内容。此前，学生已经学习了直线和圆的方程，对曲线的方程有一定的感性认识。教材以角平分线和圆的方程为例，引入“曲线和方程”之间的关系：（1）曲线上任一点的坐标都满足方程；（2）坐标满足方程的点都在曲线上。以往的教学实践表明，多数学生觉得本节内容很突兀，不知教材用意，甚至认为这一节内容上过与没上过一个样；学生的学习坐标法的动机也有待于加强。为了呈现解析几何的自然诞生过程，激发学生的学习动机，让学生体会其中的思想方法，深刻理解曲线和方程之间的关系，我们借鉴历史进行教学设计，试图构建“和美课堂”，呈现知识之谐，揭示方法之美，营造师生之和，促进情感之悦。

1 历史背景

17 世纪法国数学家费马（P. de Fermat, 1601～1665）和笛卡儿（R. Descartes, 1596～1650）都是以研究古希腊轨迹问题为目的，以韦达的符号代数为工具，通过建立坐标系（一条轴），将二元代数方程与几何曲线对应起来，从而成了解析几何的发明者[2][3]。费马的侧重点是研究方程的曲线，而笛卡儿的侧重点则是研究曲线的方程，两者分别是解析几何的两个基本方面。

古希腊数学家亚里斯塔欧（Aristaeus）、欧几里得（Euclid）和阿波罗尼斯（Apollonius）研究过大量的轨迹问题。如，阿波罗尼斯在其《平面轨迹》中，研究过各种各样的平面轨迹（直线或圆）问题，如[1][4]：

- 到两定点距离的平方差等于已知数的动点轨迹为直线；
- 到两定点距离之比等于已知数的动点轨迹为直线或圆；
- 到一条定直线的距离等于定长的动点轨迹为直线；
- 到两定直线（平行或相交）的距离之比等于已知数的动点轨迹为直线，

等等。

在研究平面轨迹的基础上，古希腊数学家进一步对更难的一类轨迹——“立体轨迹”（即圆锥曲线）进行研究。有关这类轨迹的问题中，最典型的莫过于“三线轨迹”和“四线轨迹”

---

* 本文是课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”（课题批准号：KC2014—010）教学案例之一。

问题。所谓“三线轨迹”指的是：给定三条直线，若动点到其中两条直线的距离乘积与到第三条直线距离的平方之比等于已知常数，则该点的轨迹为圆锥曲线；“四线轨迹”指的是：给定四条直线，若动点到其中两条直线的距离乘积与到另两条直线的距离乘积之比等于已知常数，则该点的轨迹亦为圆锥曲线。[1]阿波罗尼斯用几何方法解决了这两类轨迹问题，但是过程很长，难度很大，费时费力。而面对五线及五线以上的轨迹问题，以他为代表的古希腊数学家们完全束手无策，只能退避三舍。然而，笛卡儿的解析几何方法却能够轻易解决这些复杂的轨迹问题。

我们对解析几何的历史进行重构，按照从“二线”轨迹问题，到“三线”轨迹问题，再到“四线”轨迹问题的历史顺序进行教学设计；同时，对古希腊的轨迹问题进行特殊化的处理，使之适合于课堂教学。

2 教学设计与实施

2.1 “二线”轨迹

教师首先通过阿波罗尼斯的“二线”轨迹问题来引入课题，为了与教科书中的问题保持一致，采用了其中的特殊情形。

师：本节课中，让我们一起追随古希腊数学家的足迹，来探求动点的轨迹。阿波罗尼斯是公元前 3 世纪的古希腊著名数学家，他曾提出过这样的一个问题：到两条定直线的距离相等的点的轨迹是什么？他用几何方法解决了这一问题。现在大家能否用学过的知识来解决这一问题？

生 1：是两条直线，分别是两定直线的角平分线。

师：为什么？

生 1：根据角平分线的性质。

师：既然是两条直线，能否用方程来表示点的轨迹？

生 2：可以，通过建立坐标系。

师：若这两条直线互相垂直呢？

生 2：就以这两条直线为坐标轴建立坐标系，这时点的轨迹方程为 $y=\pm x$。

师：你是先通过平面几何的性质分析出其动点的轨迹为两条直线，然后由轨迹得其对应的方程，是吗？

生 2：是。

师：动点的轨迹一定是这个方程吗？为什么？

生 2：是，由方程画出的曲线与动点的轨迹是一样的。

师：满足方程 $y=\pm x$ 的解为坐标的点都在这两条直线上，那么动点轨迹中有没有不符合方程的点?

生：没有，所有点的坐标都是方程的解。

师：到两条定直线距离相等的点的轨迹是两条直线，这两条直线对应的方程 $y=\pm x$.前者是用形来表示，后者是用数来表示，什么时候形（即曲线）和数（即方程）对应统一了呢？这就是我们今天研究的课题——曲线与方程。

2.2 “三线”轨迹

在“二线”轨迹问题的基础上，进一步提出“三线”轨迹问题，引起学生的认知冲突，激发他们的探究欲望，在问题解决过程中，认识到学习“曲线与方程”的必要性，加深对定义的理解。

师：古希腊数学家阿波罗尼斯轻而易举地解决了上述问题。实际上，他研究的是更一般的情形：到两定直线（平行或相交）的距离之比等于常数的动点轨迹，即“二线轨迹”。若给定的二线互相垂直，距离之比为常数k，则所求轨迹的方程时什么?

生3: $y=\pm kx$ 。

师：很好。古希腊数学家并不满足于此，他们又提出了“三线轨迹”问题，即给定三条直线，若动点到其中两条直线的距离乘积与到第三条直线距离的平方之比等于已知数，则该点的轨迹又是什么呢？古希腊数学家遇到了很大的困难。虽然阿波罗尼斯解决了该问题，但由于纯粹采用几何方法，解决的过程十分复杂。我们是否能超越先人，用学过的知识得出其轨迹呢？为方便大家计算，我们不妨从特殊情况着手。如图，设$l_1\perp l_3$，$l_2\perp l_3$，l_1和l_2之间的距离为a，动点P到l_1和l_2的距离乘积与到另一线l_3的距离平方相等，则夹在两平行线间的动点的轨迹是什么？（图1）请大家分小组讨论，讨论后请学生给出解答。

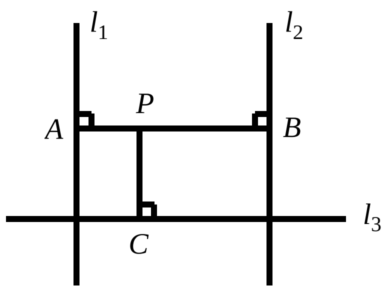


图 1

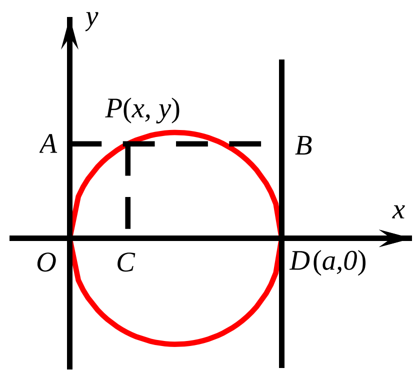


图 2

生4：我们小组讨论后觉得应该建立直角坐标系。如图2，设动点P的坐标$P(x,y)$，满足$PA\cdot PB=PC^2$，即$x(a-x)=y^2$，整理得，$y^2+x^2-ax=0$，即$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$。

师：非常好，同学采用坐标法，为什么想到用坐标法解?

生 5：用几何法没能看出轨迹到底是什么曲线，所以想到了建系。

师：通过建系设动点的坐标，探索动点坐标满足的关系，然后得其轨迹，非常棒。当时的数学家亚里斯塔欧和欧几里得未能完全解决这个轨迹问题，阿波罗尼斯虽然解决了该问题，但他所用的几何方法实在太难。究其原因，是他们都未能通过建系，进而采用代数方法。实际上，当时根本没有这种想法。那么是哪一位伟大的数学家提出了这个具有划时代意义的想法?

教师介绍解析几何的创始人笛卡儿以及他发明解析几何的数学背景，强调，有了解析几何这一新的工具，古代的轨迹难题就能迎刃而解了。

2.3 概念建构

借助前面得到的“三线”轨迹的方程，提出“曲线与方程”概念，借助集合语言，刻画曲线与方程的关系。

师：在上面的例子中，三线轨迹的方程是$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$，这个方程所对应的曲线（圆）是否就是所求的曲线?

生：是的。

师：你们是如何判断的呢?

生：从方程中看出来的。

师：实际上，你们只是凭感觉而已。究竟如何判断用坐标法得到的方程所对应的曲线与所求的曲线是否同一曲线?

生：……

师：大家都熟知，曲线 C 可以看作是由点组成的集合，记作 S；一个二元方程的解可以作为点的坐标，因此二元方程的解集也描述了一个点集，记作 M。请大家思考：集合 S 和 M 之间有何关系?

生：集合 S 和集合 M 相等，即集合 S 中的每一个元素都是集合 M 的元素，反之，集合 M 中的每一个元素也都是集合 S 的元素。

师：用符号语言表示，$S=\{(x,y)|(x,y)\in C\}$，$M=\{(x,y)|f(x,y)=0\}$，$S\subseteq M$ 且 $M\subseteq S\Leftrightarrow S=M$。那么回到方程与曲线应该怎么说呢?

生：满足条件的点的坐标都是方程的解，反之，以方程的解为坐标的点都在曲线上。

师：这时，曲线上所有点的集合与方程的解的集合之间建立了一一对应关系。曲线称为方程的曲线，方程称为曲线的方程。一般地，在直角坐标系中，如果在某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解之间建立了如下的关系：(1) 曲线上的点的坐标都是这个方程的解；(2) 以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点，那么，这个方程叫做曲线的方程；这条曲线叫做方程的曲线。(PPT 投影给出)

教师以前面得到的三线轨迹方程为例，对上述定义加以解释。

师：曲线与方程是同一事物的两种表现形式，前者是形（几何形式），后者是数（代数形式），他们可以相互转化。曲线和方程之间一一对应的确立，进一步把“曲线”与“方程”统一了起来，在此基础上，我们就可以更多地用代数的方法来研究几何问题。

2.4 概念巩固

在该环节，就是通过具体的例子，让学生理解“曲线与方程”的定义，体会定义中两个条件缺一不可。

例 1 用下列方程表示如图（图 3）所示的曲线 C，对吗？为什么？

（1）$\sqrt{x}-\sqrt{y}=0$　　（2）$x^2-y^2=0$　　（3）$|x|-y=0$

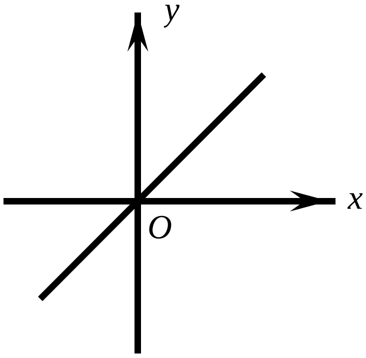


图 3

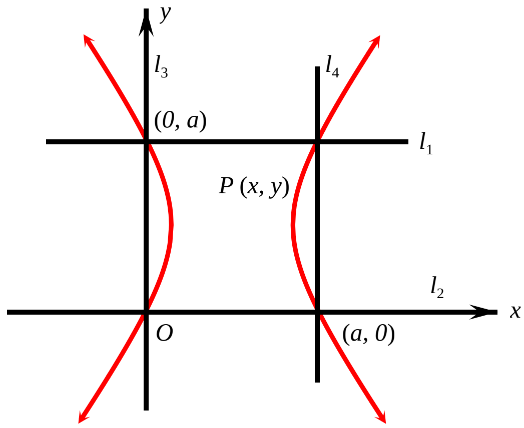


图 4

接下来，教师提出特殊的“四线”问题，让学生进一步体会解析几何方法的优越性，理解曲线与方程之间的关系，并感受古希腊数学家们锲而不舍、打破沙锅问到底的钻研精神。

例 2：如图 4 所示，设直线 $l_1//l_2$，$l_3\perp l_1$，$l_4\perp l_1$ ，l_1 与 l_2、l_3 与 l_4 之间的距离均为 a，

动点 P 到 l_1 和 l_2 的距离乘积与到 l_3 和 l_4 的距离乘积之比等于 2，求夹在这四条线之间的动点的轨迹？

引导学生建立直角坐标系，如图 4 所示。设动点 P 的坐标为 $\left(x, y\right)$，根据已知条件，得到所求轨迹的方程为 $2x^2-y^2-2ax+ay=0$。教师用几何画板可以作出该曲线，并用 PPT 展示给学生。

教师强调，因所求的轨迹夹在四线之间，而二元二次方程 $2x^2-y^2-2ax+ay=0$ 所对应的是完整的双曲线，因此，前者只是后者的一部分。也就是说，满足已知条件的轨迹上的点的坐标都满足上述二元二次方程，但坐标满足该方程的点不一定在满足已知条件的轨迹上。只有在限制条件 $0\le x\le a$，$0\le y\le a$ 之下，上述二元二次方程才是满足已知条件的轨迹方程。

2.5 课堂总结

让学生回顾二线、三线和四线轨迹问题的研究历程，引导学生思考解析几何的意义以及“曲线与方程”概念在解析几何中的意义。教师指出：通过轨迹问题的研究，同学们经历了坐标法产生的过程，体会到坐标法的意义：将含有两个未知数的代数方程和平面上的一条曲线对应起来，从而将几何与代数密切联系起来。自此，几何问题可以借助代数方法来研究。17 世纪，费马和笛卡儿创立解析几何，实现了几何与代数的联姻，从而开启了数学的新时代。18 世纪法国著名数学家拉格朗日（J. L. Lagrange, 1736～1813）曾说：“只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄。但是，当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从那以后，就以快速的步伐走向完善。”

教师最后指出，利用坐标法，我们课后就可以去研究二线、三线、四线的一般情形，甚至一般的 n 线情形。

3 学生反馈

上完本节课，为及时了解学生对知识的掌握情况，笔者设计了一份调查问卷。内容包括：（1）对于整堂课你印象最深的是哪个环节？为什么？（2）解析几何的本质是什么？（3）你觉得通过建立方程来研究曲线是否有必要？怎么认识？

全班 43 人，回收有效答卷 40 份。对于问题 1，78%的学生都认为最深印象的是概念引入的方式，从古希腊的几个数学问题为线索，阐释曲线与方程，大家都感到很新奇，很吸引

人。对于问题 2，95%的学生能够都理解解析几何的本质。对于问题 3，90%的学生给予肯定的回答，70%的学生非常清晰地表达了自己的认识，认为用坐标法从思维上讲比原来的综合几何法简单多了，45%的学生表达了对数学家笛卡儿的崇拜。此外，问卷中还设置了三道题，要求学生求满足条件的动点轨迹方程，大多数学生完成情况都比较理想。

4 结语

从本节课中可见，数学史发挥了如下作用。

首先，解析几何的历史成了设计本节课的“指南”。解析几何的诞生源于费马和笛卡儿对古希腊轨迹问题的探求，虽然“三线”和“四线”轨迹问题能够用几何方法解决，但毕竟很复杂，而笛卡儿在《几何学》中正是用坐标法来解决“四线”轨迹问题的。经历从“二线”轨迹问题到“三线”轨迹问题，再到“四线”轨迹问题的探究过程，学生比较自然地接受了“曲线与方程”概念，同时，也对解析几何的本质和意义有较为深刻的认识。

其次，古希腊的轨迹问题为学生提供了探究的机会。“二线”、“三线”和“四线”轨迹涵盖了中学数学中的直线、圆和圆锥曲线，内涵丰富，千变万化，确实是非常的理想的教学素材。

再次，轨迹问题的背后，蕴含着数学家的理性精神，让学生经历轨迹问题的探究过程，也就让他们感受这种精神。

参考文献

[1] 汪晓勤(2007). 解析几何的诞生(I)：古希腊数学上的轨迹问题[J]. 中学数学教学参考(高中). (9): 58-59.

[2] 汪晓勤(2008). 解析几何的诞生(II)：费马与解析几何[J]. 中学数学教学参考(高中). (1/2): 122-123.

[3] 汪晓勤(2008). 解析几何的诞生(III)：笛卡儿与解析几何[J]. 中学数学教学参考(高中). (5): 61-62.

[4] 汪晓勤(2008). 解析几何的诞生(IV)：教学设计[J]. 中学数学教学参考(高中). (6): 57-59.

HPM 视角下的“平面直角坐标系”教学*

杨懿荔[1]，龚凯敏[2]

（1. 华东师范大学数学系，上海, 200241； 2. 刘行新华实验学校，上海, 2019071）

平面直角坐标系是沪教版初中数学教材七年级下最后一章。平面直角坐标系的建立实现了~~由~~一维向二维空间的转变，是几何与代数沟通的桥梁。几何图形直观易懂，却不便于计算；而代数方法容易操作，却很抽象，通过建立平面直角坐标系能完美地将两者结合起来，化繁为简。因此，平面直角坐标系的教学就变得尤为重要。笔者基于历史发生教学法的视角，引领学生经历数学家笛卡儿发明平面直角坐标系的过程，并制定了如下教学目标：

（1）理解有序实数对、平面直角坐标系的概念，知道坐标平面内的点和有序实数对是一一对应的；

（2）学会构建平面直角坐标系，能够根据直角坐标系内点的位置写出其坐标，体会数形结合思想；

（3）经历古代数学家平面直角坐标系的发现过程，培养学生的探索精神，领悟数形结合的美妙，并体会数学与现实生活的联系。

1 历史溯源

德国科学史家冈特（S. Gunther, 1848～1923）曾将解析几何的历史分成三个阶段：第一阶段是两条坐标轴的引入，第二阶段是基于横、纵坐标的曲线作图，第三阶段是关于横、纵坐标的方程的建立[1]。

阿波罗尼斯的工作已经达到了第一阶段。在讨论圆锥曲线的某些性质时，阿波罗尼斯往往选择圆锥曲线的直径作为一条参照线，以圆锥曲线在直径的一个端点处的切线作为另一条参照线，两条参照线即相当于今天所说的“坐标轴”（不一定互相垂直）。

14 世纪法国数学家奥雷姆（N. Oresme, 1323～1382）的工作则达到了解析几何历史上的第二阶段。奥雷姆首次采用几何图形来表示运动：取一横线（奥雷姆称之为“经线”），其上的点表示时刻，一端在横线上的竖直线段（奥雷姆称之为“纬线”）表示每一时刻的速度，随着时间的变化，竖直线段的另一端点形成一条直线或曲线（奥雷姆称之为“顶点线”），直线或曲线下的面积表示运动物体所经过的距离。

---

* 华东师范大学基础教育办公室与宝山区教育局合作项目“HPM 与初中数学教师专业发展”系列教学案例之一。

解析几何第三阶段的工作乃是近三个世纪之后由法国数学家费马（P. de Fermat, 1601～1665）和笛卡儿（R. Descartes, 1596～1650）完成的。他们以研究古希腊轨迹问题为目的，以韦达的符号代数为工具，通过建立坐标系（一条轴），将二元代数方程与几何曲线对应起来。费马的侧重点是研究方程的曲线，而笛卡儿的侧重点则是研究曲线的方程，两者分别是解析几何的两个基本方面[2]。

解析几何的出现改变了自古希腊以来代数和几何分离的趋势，实现了两者的联姻，从而开启了数学的新时代。

2 教学过程

2.1 复习旧知

平面直角坐标系的引入是由一维向二维空间发展的源头。因此将一维空间的代表元——数轴的概念梳理清楚，对平面直角坐标系的要素的引入有帮助。在复习部分，由教师带领学生回顾组成数轴的三要素：点、正方向和单位长度，并着重强调实数与数轴上的点是一一对应的。

接下来，老师引导学生进一步观察，平面上有无数多条直线，形成无数多条数轴，进而提问：某条直线上的点可以用一个实数来表示，那么每条直线上的点都能只用一个实数表示吗？以此引发学生的认知冲突，激发学生学习的积极性。

2.2 讲授新知

2.2.1 教学引入一

家长会是许多学生听到会害怕的一个话题，由家长会引入自然能引起学生的兴趣。

师：同学们喜欢开家长会吗?

生（全体）：不~喜~欢!

师：假如学校明天要开家长会了，让你们回去把你们现在的位置告诉爸爸妈妈，因为你们明天不来，如何能够准确的描述出你们现在的位置呢?

生 1：从左向右数第三列第二个

师：如果把整个教室看做是一个平面，而每一个同学都看做是这个平面上的点，你们观察下刚才同学的回答，我现在要描述这个点的位置，需要几个数?

生（全体）：两个!

师：这两个数的位置能否交换？第三列第二个变成第二列第三个，这两者一不一样?

生 2：不一样，意思不同，因此不能交换位置。

由此可以让学生对平面上的点有所认知，明白确定平面上的一个点需要两个实数，并且这两个实数是有顺序的，不能进行交换。这对后面引入“有序实数对”这一概念有所帮助。

2.2.2 教学引入二

在家长会问题之后，为进一步激发学生的探索欲望，老师又讲了如下故事： 1620 年深秋。莱茵河畔的马尔姆小镇扎下一排军用帐篷，此时一个年轻士兵翻来覆去，怎么也睡不着，原因是这几天一直有一个问题困扰着他：最近他一直随军到处奔波，前几天还在莱茵河右岸，今晚又到了左岸；时而在上游，时而在下游，该怎么给上级报告部队所在的位置呢？

图 1

2.2.3 教学引入三

接下来，老师向学生说明，在历史上，伟人也曾经被类似的问题困扰，那么伟人是如何解决自己的烦恼的呢？

在数学史上，流传着这样一个小故事：有一天，笛卡儿生病了，他躺在床上，他的脑子里一直思考这一个问题：如何将平面上的点和我们的数联系在一起，这时他抬头一看，天花板上有一只苍蝇，这只苍蝇在天花板上不停地拉丝结网。将苍蝇看做一个点，如果可以用数来描述出苍蝇在天花板上的位置，就能够建立起数与点的联系；这时笛卡儿又发现了天花板的两个边框，如果把天花板的边缘看做是两条直线，这两条直线上就能够画出两根数轴，这样的话，这个苍蝇的位置可以在每一条数轴上找到一个点和它对应，从而可以用数确定苍蝇的位置。笛卡尔受到了苍蝇的启示，发明了一种工具，这种工具随着历史的发展，演变成了我们今天所要学习的平面直角坐标系。

通过此种附加式的教学方法，可以拉近学生与数学家之间的距离，让学生感受到数学文化的魅力。

而后采用数学史融入数学教学的另一种方式——重构式，类比笛卡尔描述苍蝇位置的方法，定义“平面直角坐标系”。

在对平面直角坐标系的概念下定义后，反过来解决笛卡尔面临的“苍蝇谜题”，此做法可以提升学生的成就感，让学生觉得自己可以帮助伟人解决数学问题，数学离自己不再那么遥远。任意给定苍蝇所在的位置，让学生探索苍蝇在坐标系内对应的点是什么。而后统一方法。针对任何在平面直角坐标系内的点，教导学生应该如何在坐标系中进行读数。

师：对于平面上的任意点P，都可以用类似的方式，过点P作x轴的垂线，与x轴有一个交点，能够读数a；再过点P作y轴的垂线，与y轴有一个交点能够读数b，这两个数组成的有序数对(a,b)就可以表示这个点，将此有序数对称为点的坐标。同学们是否理解呢?

生：（有点不理解）。

师：接下来，请同学们思考一个问题，老师在大屏幕上已经建立好了平面直角坐标系，现在要用一组有序数对描述这个点，这样的有序数对能有多少个？唯不唯一？会不会一个点的坐标既可以用（1,1）来表示，又可以用（2,2）来表示?

生：不可能。

师：为什么不会呢？我们是怎么来确定描述这个点的数的？过已知点，分别作x轴和y轴的垂线，试想：过直线外一点作已知直线的垂线，能作几条?

生：一条。

师：有且只有一条，这就意味着，这里的垂线与坐标轴的交点是唯一的，我所读出的数也是唯一的，用来描述这个点的有序数对也是?

生（有所停顿）：唯一的！

2.3 小试牛刀

练习 1：写出下列点的坐标。

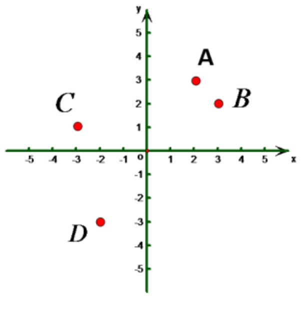


图 2a

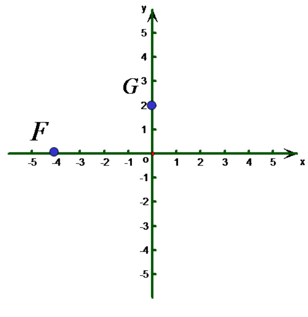


图 2b

老师先引导学生写出 A 点坐标，并强调横纵坐标的位置不可互换。而 F,G 两点在坐标轴上，位置较为特殊，但求坐标的方法仍然不变。然后让学生板演 BCD 各点的坐标。最后总结坐标轴上的点的坐标的特殊性。

练习 2：正方形 $ABCD$ 的边长为 4，放在如图的平面直角坐标系中，O 是 AB 的中点。求：A,B,C,D 的坐标。

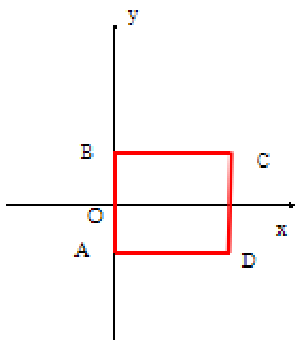


图 3

此题由师生共同讨论完成。此题是一道数形结合的典型例题，将学生熟知的正方形这个几何图形与点的坐标——数对联系起来，旨在初步培养学生数形结合的思想。

在做完练习题之后，教师对课堂进行总结，再次利用附加式引入名人名言：

（1）只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄。但是，当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力。从那以后，就以快速的步伐走向完善。

——拉格朗日

（2）数与形，本是相互倚依，焉能分作两边飞。数缺形时少直观，形少数时难入微。形数结合百般好，隔裂分家万事悲。切莫忘，几何代数统一体，永远联系，切莫分离。

——华罗庚

通过数学文化，再次强调数形结合的魅力，灌输给学生引入平面直角坐标系的必要性与重要性。

2.4 教学活动

游戏环节是本堂课最后的亮点，分为两个部分。旨在将所学内容在轻松愉悦的环境下学以致用，让学生在实际生活中再次体验“平面直角坐标系”的美妙之处，调动每一位学生的学习积极性。

师：我们可以将整个教室看做是一个平面，而每个学生都是平面内的点，现在我们在这样一个平面内建立平面直角坐标系，你能否说出自己的坐标呢?

教师先规定好坐标原点，以及横轴纵轴的正方向。第一个环节，老师任意指定学生，让其说出自己所在位置的坐标；第二个环节，教师任意报出坐标即一个有序实数对，对应位置的学生要站起来说“到”。这样一个一来一回的环节进一步说明了平面上的对和有序实数对是一一对应的。而后，老师继续更换坐标原点的位置以及横轴纵轴的方向，此时学生对应的坐标也会发生转变。这说明，坐标原点以及横轴纵轴共同组成了平面直角坐标系。

3 学生反馈

在课堂结束后，我们对 40 名学生进行了问卷调查，问卷均真实有效。

首先对学生希望数学史在课堂上以何种形式出现作了调查统计（多选题）。调查结果表明：有 16 位（40%）学生希望老师在课堂上讲相关的数学史故事；25 位（62.5%）学生希望教师能够在课堂上播放相关的微视频；7 位（17.5%）学生期待教师在课上发材料，通过大家一起阅读的方式来体会数学史；14 位（35%）学生希望能够在 PPT 中显示数学史资料。没有学生愿意在课前或课后单独阅读数学史史料。

其次调查了学生对本堂课印象最深刻的环节是什么，主要得到如下两类答案：

1．老师讲故事的环节，阐述笛卡尔是如何发现坐标系的。有 13 位（32.5%）同学认为讲故事的环节印象最深刻。理由如下：

（1）令我印象最深刻的是笛卡儿的故事，因为是他们为我们创造了平面直角坐标系，供我们学习；

（2）令我印象最深刻的是老师所讲的关于数学名人的故事，因为故事形象生动；

（3）印象最深的是笛卡儿利用坐标系确定苍蝇所在的位置，因为这一步很重要。

2．最后的互动环节。有 16 位（40%）同学认为最后的游戏环节最有意思，7 年级正值富于青春活力的年华，因此游戏环节最能调动学生学习的积极性，具体理由如下：

（1）最好玩的是最后喊名字读坐标的小游戏，因为这个环节比较有趣，可以缓解课堂上严肃的气氛；

（2）印象最深的是给定教室里的坐标系找出自己所在的位置。因为这样能帮助我更好地了解这个知识点；

（3）我印象最深的是最有一个游戏环节，因为这让我们亲身体验了什么是坐标。

其余的答案主要集中在“老师上课很幽默”、“老师有亲和力”、“整节课都很好玩”上。说明将数学史融入数学课堂的确可以促进学生学习数学的积极主动性，激发学生对于数学的兴趣，拉近学生与数学之间的距离。

4 结语

平面直角坐标系的引入是有历史渊源的，并不是凭空出世的。平面直角坐标系由刚开始的没有坐标轴，到两条斜交的坐标轴，发展至我们现在所熟知的两条相交并且互相垂直的轴，是经历历史长河的洗礼的。因此，如何引入这一概念、将教学设计地自然明确是我们的目标所在。

首先，旧知的复习可以帮助学生回顾数轴三要素，以及实数与数轴上一一对应的事实，这对于达成教学目标（1）有极大的帮助；

其次，本堂课最精彩的地方莫过于新课教授的三大引入。引入一可以帮助学生了解到平面坐标是有序的实数对，两个数字不能任意交换位置；引入二提出了一个新问题，呼应了复习旧知中老师最后留下的悬念；而引入三则是呼应了引入二中的问题，说明不仅仅初中生会有类似的疑问，古人、乃至伟人都曾经面临着同样的困惑。但伟人是如何开动脑筋解决难题的呢？我们不仅仅要学习伟人解决问题的方法，更要学习伟人探索的精神，面对难题，要知难而上，不抛弃、不放弃。这部分帮助学生体会到“数学概念”并不是凭空捏造出来的，而是有一个历史发展过程，以此达成教学目标（3）。

最后，教学重构部分以及教学活动环节都是为了教学目标（2）所设计的，有了数学史融入数学教育这一环节，平面直角坐标系的定义也变得更为自然、顺畅。

最后的游戏互动环节也是本堂课的一大高潮。七年级的初中生正值活力四射的年纪，学生不喜欢死气沉沉的课堂，喜欢在课堂上有与老师、与同学互动的游戏环节，通过老师点同学答坐标、以及报坐标找同学这两个游戏环节，不仅可以让学生加深对平面直角坐标系的印象，学以致用，更加可以让学生感悟到数学就在生活中，体悟到数学文化之美。

参考文献

[1] 汪晓勤(2008). 解析几何的诞生(II)：费马与解析几何[J]. 中学数学教学参考(高中). (1/2): 122-123.

[2] 汪晓勤(2008). 解析几何的诞生(III)：笛卡儿与解析几何[J]. 中学数学教学参考(高中). (5): 61-62.

RME 视角下“函数的概念”教学*

沈中宇[1] 杨琼[2]

（1. 华东师范大学数学系，上海，200241； 2. 上海市罗泾中学，上海，200000）

1 引言

函数的概念是沪教版八年级数学（上）中的重要内容。在现代中学教育中，函数的地位已经非常重要，它是中学数学的核心知识，函数概念是中学数学中最为重要的概念[1]。但由于函数概念的复杂性，学生对函数概念的理解并不理想，学生在函数的概念定义与函数的概念表象之间具有不一致性[2]。同时，函数是从现实世界中抽象出来的，是从数量关系的角度刻画事物运动规律的工具，函数与现实生活的联系密切，在初中的课程中特别强调函数概念生活背景，教师要提供多样的实际问题，鼓励学生进行探索和研究，在解决问题的过程中，加深对函数知识的理解。因此这就对初中的函数概念教学提出了要求，一方面，要让学生充分理解函数的概念，另一方面，要强调函数的生活背景，鼓励学生进行探索。如何在教学实践中解决这两方面的问题，也许现实数学教学（RME）能给我们提供一些启示。

RME（Realistic Mathematics education），即现实数学教育，是荷兰的一个开创性的数学教育改革途径，荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905～1990）提出数学化的思想，认为数学应该被看成是人类的一种活动。基于弗赖登塔尔对数学的认识，现实数学教育的思想就成为了一个成功数学教育取向[3]。RME 的基本观点是，从学生经验上看来，真实的数学活动是可以促进学生有意义学习的[4]。RME 中有两个核心的概念：现实和数学化。因此，RME 的思想对我们如何平衡函数的概念教学中对函数概念的理解和生活化提供了一定的背景与指导。

有鉴于此，我们希望在 RME 视角下实施“函数的概念”教学，拟定的教学目标如下：

（1）通过具体情境的分析，了解现实生活中存在大量的数量，认识并能分清变量与常量；

（2）通过对变化过程中，变量之间是否存在联系以及存在怎样的联系等问题的分析和讨论，理解确定的依赖关系的含义，从而理解函数的概念，知道函数的自变量以及函数解析式；

* 华东师范大学基础教育办公室与上海市宝山区教育局合作项目“HPM 与初中数学教师专业发展”系列教学案例之一。

（3）在函数概念的逐步提炼过程中，体会用运动、变化和相互联系的观点看待事物。

2 RME 的教学原则与所用的生活素材

RME 的主要特点是运用情境问题；采用模式进行教学；学生自己得出的结论和再创造活动是教学内容的一部分；学习过程注重交流；不同的数学内容是相互交织在一起的[3]。因此，在需要选取合适的生活素材，并结合 RME 的基本教学原则进行教学。

2.1 RME 的教学原则

RME 的教学原则有以下六条[3]：

（1）活动原则：要提供给学生面对各种情境问题的机会；

（2）现实原则：数学学习必须要从数学现实开始；

（3）层次原则：学生要经过几种不同的理解水平；

（4）缠绕原则：从现实世界的同一情境中可以发现不同的概念和方法；

（5）互动原则：在教师引导下,通过学生自己的独立思考及师生之间、生生之间的相互探讨而得到结论和知识；

（6）指导原则：应该给学生提供一个可以得到指导的机会，对数学进行再创造。

2.2 所用的生活素材

本节课选取的生活素材有出租车上的计价器、商店买笔、银行存款与利息、考试成绩与体重、行驶速度与身高、一天的温度与时间。其中主要应用的是出租车的计价器和买笔这两个生活素材。

图 1

图 2

如图 1 所示，乘坐出租车是学生比较熟悉的情境，出租车计价器中的金额和乘坐的里程数可以看做一个函数的模型，在教学中可以利用几何画板表现出金额随着时间跳动的场景，

从而加深学生对函数变量与常量的认识。其次，在一定里程内，金额始终稳定在起步价之内，可以为下一步常数函数的引入以及高中的函数定义做铺垫。综上所述，选择出租车计价器作为函数的现实情境具有一定的优越性。

如果计价器可以作为连续的函数模型，如图 2 所示，买笔的情境则可以作为离散的函数模型，买笔也是学生熟悉的现实情境，买笔的枝数与价格是一个函数模型，但买的笔数只能是正整数，因此利用此现实情境可以一定程度的渗透函数自变量范围，其次由于此函数模型的解析式相对比较容易写出，所以可以利用引出函数解析式的概念。

此外，考试成绩与体重，行驶速度与身高这些学生熟悉的情境可以作为不是函数概念的反例让学生辨析。一天的温度与时间可以作为不能写出解析式的模型引出函数的表征方式。

3 教学设计与实施

3.1 情景引入

图 3

向学生展示图 3，这是一个模拟的出租车的计价器，出租车价格它是这样的，在三公里以内，一直都是 14 块，这是起步价，超过三千米的时候是每千米 2.4 元，我们现在给大家看到的是三千米以后的情况，然后按下开车按钮，里程数和金额一直在变动。然后利用问答的形式自然的变量、常量以及函数概念的定义。教学片断如下：

师：你在这个模拟的出租车计价器上能发现些什么？有什么最直观的感受？

生：一直在上升。

师：一直在跳是不是？是不是所有的数字都在跳？

生：不是。

师：有些数字是不变的，有些是不断的在跳，也就是说在我们日常生活中，有的时候它的数值是保持不变的，我们把这样的量称为常量（板书）。有的时候它可以去不同的数值，

我们把这样的量称为变量（板书），路程和金额都是变量，这两个变量都在变化，它们两个之间有什么关系吗?

生：有规律的变化。

师：什么关系呢? 那先考虑一个问题，是哪个量的变化引起了另一个量的变化?

生：路程的变化引起了金额的变化。

师生一起：那是不是可以说金额是随着路程的变化而变化。

师：其次，如果我的路程一旦确定下来，金额确定吗?

生：确定。

接下来引入第二个情境：买笔，让学生通过买笔这一情境进一步熟悉变量、常量以及函数的概念，并渗透一定的自变量范围思想。教学片断如下：

师：是不是可以随意取，但哪些数不可以取?

生：小数、分数、负数

师：也就是这个变量数量有一定的取值范围，这边我们只要了解一下，需要是正整数。

3.2 学习新知

通过两个情境的铺垫，函数的概念已经呼之欲出了，由教师和学生一起抽象出函数概念的定义，并利用买笔这一情境引出函数的解析式这一概念，教学片断如下：

师：这就是我们这章要学习的函数（板书），其实函数就是两个变量的关系，更确切的说是确定的依赖关系。我们看看函数的定义是什么? 首先函数是针对两个变量，一个变量为 x, 一个叫 y, 现在规定 x 是引起变化的量, 那么刚刚说过了在现实问题中 x 都会有取值范围，满足怎样的关系，才叫确定的依赖关系。

生：y 随 x 的变化而变化，当 x 取一个确定的值时，y 的值也随之确定，就是说 x 和 y 之间存在确定的依赖关系（板书），把 y 叫做 x 的函数，x 称为自变量。

接下来教师通过现实生活中的例子让学生辨析刚刚学过的函数概念，其中考试成绩与体重提供了一个不是函数关系的反例，教学片断如下：

师：考试成绩和体重?

生：是变量，不是依赖关系，数学考试中，中学生的成绩不随体重的变化而变化。

师：不会说胖一点，考试成绩就好一点，不会瘦了就考不好，所以成绩和体重之间没有确定的依赖关系，但和平时的努力有关系。

在此同时可以加强学生的德育。气温与时间关系的辨析提供了不能写出解析式的函数模型。教学片断如下：

师：我们的气象家绘制了这样的表格，充分说明了时间一旦确定，温度随之确定，在这个问题中我们就不是用解析式来表达的，是用什么来表达的?

生：图像。

最后让学生自己举出生活中函数的例子，学生举出的例子如下：

生 1：比如说我们每天早上出操，然后班级的人数是确定的，是常数，出勤的人数是变量，算出的出勤率随出勤的人数变化而变化。

生 2：我的体重随着我吃饭的多少变化而变化。

生 3：身高随着年龄的变化而变化。

生 4：时钟里面的分针和时针的角度随时间的变化而变化。

生 5：温度随着海拔的身高而变化。

接着，让学生找出圆上半径与直径、周长和面积的函数关系，引出自变量可以互换，并将之前学到的函数概念进一步数学化。

3.3 小结与课后拓展

在小结的部分让学生自己谈谈本节课的收获与感悟，顺便对前面所学的知识进行了复习。

在课后拓展部分回到之前出租车的问题，让学生思考起步价时的情况，为常值函数和函数概念的拓展做下铺垫。教学片断如下：

师：现在我们回到一开始的出租车计价器，其中我们有个限定条件就是 3 公里以外，3 公里以内是不是没给你们看，想象一下 3 公里以内还存在确定的依赖关系吗?

生：不存在。

师：不存在？讨论一下。

生：（激烈讨论）

生：因为路程改变了，金额也会变化。

师：那是因为我们先走所学的有限，到了高中和大学时，我们称其为函数，称为常值函数，其实它们是有关系的，我们了解一下，到了高中和大学会继续学习。

4 学生反馈

课后，对本节课的 29 名学生的掌握情况以及对本堂课中融入生活情境的接受程度进行了调查。

绝大部分同学表示听懂了本节课的教学内容，79.3%的同学非常喜欢老师利用生活中的例子来引入函数概念，89.6%的同学表示这样做没有浪费时间。还有大部分同学希望能够了解函数概念发展的历史，在课堂中了解数学概念的发生、发展的历史，这对我们提供启示，也可以采用历史情境进行教学上的尝试。

接下来，让学生写出这节课印象最深的是什么,除了有 4 名学生没有作答之外，其余学生的回答可分成四类。

（1）对函数概念的理解（41.4%）。典型回答：“函数的定义与解析式”、“确定的依赖关系”、“y 随 x 的变化而变化”“比例”。

（2）函数与生活联系的感悟（27.6%）。典型回答：“计程车的计价方式”、“函数也和生活有关”、“生活例子”。

（3）对这种上课形式的评述（13.8%）。典型回答：“老师讲了许多生活实例说明函数、十分有趣”、“老师教的我能听懂”、“从生活中来证明说明函数的重要性”。

（4）综合回答（3.4%）。典型回答：“函数在生活中也很多，学到了变量常量，还有它们之间确定的依赖关系”。

5 结语

从课堂的情况以及课后反馈中可以看到，本节课基本完成了课前设定的教学目标，学生较好的理解了变量、常量、函数等概念，同时也让学生对函数与日常生活的联系印象深刻。让人欣喜的是，这是在提供一定的生活背景后，学生利用自己的探究完成的。本节课也符合 RME 的 6 条教学原则，从活动原则的角度，利用了出租车、买笔等情境，让学生面对各个现实情境中的问题；从现实原则的角度，本节课概念的引入都从数学现实出发，通过出租车引入变量常量，买笔引入解析式等；从层次原则的角度，从写的出解析式的函数过渡到没有解析式的函数再到常值函数；从缠绕原则的角度，同一出租车的情境可以反复思考发现不同的概念；从互动原则的角度，每次活动都争取让学生在老师的引导下独立思考，让学生自己举出例子，并多次小组讨论；从指导原则的角度，充分利用“再创造”的思想，在引出常量、

变量以及函数概念时通过连续的短暂问答，采用苏格拉底式方法。此外本节课还牢牢抓住RME 教学的另一个核心：数学化，在每次情境引入之后，采用数学的语言对概念进行概括，如将行程数与金额代换成一般的 x 和 y，从现实中的函数问题到圆中的函数问题。

RME 教学发端于弗赖登塔尔，源于对传统课堂中忽视思维的连续建构、学生的自主意识被压抑、表征方式割裂、数学交流深度不够、前后知识跨度大[5]等问题，这些问题在今天的课堂中还是可是不时见到，过渡的强调建构固然不妥，但利用情境的适度建构不失为一种在数学基本知识、技能、思想与基本活动经验之间相对平衡的一点。同时数学情境也可以在历史中找，历史发生原理是“再创造”的主要理论依据[6]，因此 HPM 教学与 RME 教学之间的联系值得再深入的探讨。

夸美纽斯（J. A. Comenius, 1592～1670）说：“教一个活动的最好方法是演示”，弗赖登塔尔发展为“学一个活动最好方法是做[7]。”数学教育大师的教诲仍在耳畔，吾辈只有不断奋斗与反思才能将数学教育的明天变得更好。

参考文献

[1] 濮安山(2011). 初中生函数概念发展研究[D]. 东北师范大学博士学位论文.

[2] Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function [J]. *Journal for Research in Mathematics Education*. (20): 356-366.

[3] 陈艳斌(2006). RME 教育思想与教学模式的研究[D]. 云南师范大学硕士学位论文.

[4] 张国祥(2005). 数学化与数学现实思想[J]. 数学教育学报. (2): 35-37.

[5] 陈坚(2015). 弗赖登塔尔数学教育思想应用研究[J]. 教育评论. (5): 135-137.

[6] 蒲淑萍, 汪晓勤(2011). 弗赖登塔尔的 HPM 思想及其教学启示[J]. 数学教育学报. (12): 20-24.

[7] 弗赖登塔尔(1995). 作为教育任务的数学[M]. 上海: 上海教育出版社.

第三届 HPM 教学研讨会

沈中宇　邹佳晨

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

第三届 HPM 教学研讨会于 2016 年 1 月 15 日在华师大数学系举行，来自江、浙、沪的师范院校、中小学数学教师和教研员、研究生、访问学者共 60 余人参加了会议。研讨教会的目的是传播 HPM 的理念、交流 HPM 理论和实践研究成果、扩大 HPM 研究队伍、加强大学和中小学教师的联系、让 HPM 走进更多的中小学数学课堂。会议有三个主题：

（1）HPM 理论研究之进展；

（2）HPM 视角下的数学教学实践研究；

（3）早期西方数学教科书研究。

部分代表合影

会议报告分为三段进行。首先，浙江义乌中学的王芳老师做了题为《HPM 课例开发的实践与反思》的报告，在报告中展示了其研究团队的 HPM 研究成果。华东师大刘攀老师做了题为《话剧“数学往事”浅析》的报告，在报告中回顾了哥廷根的伟大数学传统，介绍了以此为题材的最新数学话剧《哥廷根数学往事》，回顾了其剧本创作和当下哲思。上海进才中学的吴晨昊老师做了题为《HPM 视角下的对数概念及运算教学》的报告，在报告中对 HPM 视角下对数概念及运算课例的教学目标与设计思路进行了呈现，并作出了一定的教学反思。

上海罗店中学的沈志兴老师做了题为《HPM 视角下的圆的面积教学》的报告。在报告中对HPM 视角下圆的面积教学的设计思路、教学实施、教学反馈和个人反思等进行了详细展示与演说。江苏启东中小学教师研修中心蔡宏圣老师《历史视野、当下智慧》的报告，对 HPM 教学在小学数学中的作用进行了讲述。

午后，报告继续。华东师大硕士生杨懿荔做了题为《美国早期数学教科书中的曲线与方程、直线方程》的报告，报告中对考察的 48 本外国早期教科书中的曲线与方程和直线方程内容进行了梳理并作出了总结，从而对相应的教学提出建议。华东师大硕士生沈中宇做了题为《西方早期立体几何教科书中的线面垂直和面面平行判定定理》的报告，报告中重点对 20 世纪以前的 97 种西方立体几何教科书中线面垂直判定定理进行了梳理和总结，并总体上展望了立体几何的 HPM 课例开发。浙江桐乡凤鸣高级中学的沈金兴老师做了题为《HPM 教学实践中的困惑与思考——以一位硕士生在中学的 HPM 教学为例》的报告，在报告中以一位硕士生在中学的 HPM 教学为引讲述了自己对课堂上融入数学史存在的困惑、体会和思考。上海建平远翔学校的贾彬老师做了题为《HPM 视角下的翻转课堂教学——可化为一元一次方程的分式方程》的报告，在报告中介绍了利用翻转课堂的方式进行的 HPM 课堂教学过程，课堂共分五个环节，其中利用微视频的方式介绍了增根的历史。绍兴文理学院的陆有海老师做了题为《HPM 视域下小学数学的诠释建构与教学案例》报告，在报告中对 HPM 视域下的小学数学内容进行了精彩的诠释。孔凌老师做了《HPM 视角下的微课设计》的报告，在报告中介绍了春晖中学及其设计的微课“椭圆的定义及其标准方程”。

在一定的歇息后迎来了最后的四个报告。华东师大洪燕君博士做了题为《初等代数学的教育价值》的报告，在报告中从什么是代数学、代数学的发展阶段、方程与代数学、教学价值等四个方面对初等代数学的教育价值进行了阐述。华东师大齐春燕博士做了题为《HPM 教学案例中的“问题提出”分析》的报告，在报告中重点简述了对 30 个 HPM 案例中的问题进行的分析。分析了其在案例中的作用，得出一定的启示。浙江诸暨中学的张小明老师做了题为《基于历史名题的数学探究》的报告，在报告中重点讲述了自己尝试的几个 HPM 课例：余弦定理、阿基米德折弦定理与和角公式和基于数学历史名题编拟的几道数学题。

最后，华东师大的汪晓勤教授做了总结报告《2015 年 HPM 研究回眸》，在报告中对 2015 年 HPM 各方面的进展进行了总结，对未来的研究作出了展望，并提出了“领悟、协作、勤奋、高效”的 HPM 精神。