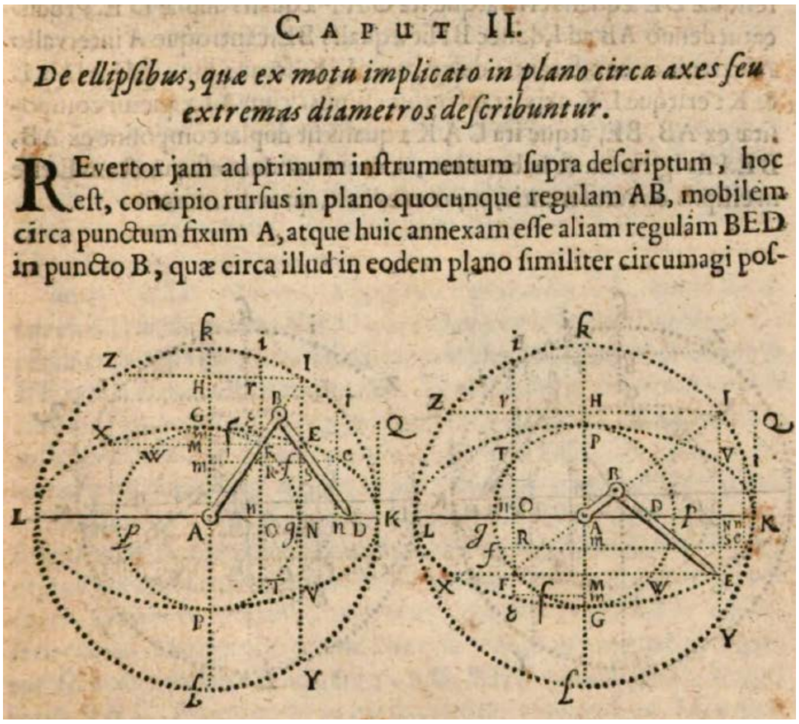
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2020 年第 9 卷第 1 期



CAPUT II.

De ellipſibus, quæ ex motu implicato in plano circa axes ſeu extremas diametros deſcribuntur.

REvertor jam ad primum inſtrumentum ſupra deſcriptum, hoc eſt, concipio rurſus in plano quocunque regulam AB, mobilem circa punctum fixum A, atque huic annexam eſſe aliam regulam BED in puncto B, quæ circa illud in eodem plano ſimiliter circumagi poſ-

舒腾（F. van Shooten, 1615-1660）《数学练习题》（1657）书影

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

第七届 HPM 高级研修班的顺利召开，不禁让我们回忆起张奠宙先生所主持的“数学教育高级研讨班”（以下简称“高研班”）。从 1992 年到 2007 年的 16 年，每年举行一次，来自全国各地的著名数学教育研究专家齐聚一堂，针对研讨班设定的主题，展开深入研讨，畅所欲言，集思广益，取得丰硕的成果，在我国数学教育学科发展的青葱岁月中发挥了十分重要的引领作用。正因为如此，张先生视高研班为自己学术生涯中的得意之作。今天，我国的数学教育研究已今非昔比，但回顾高研班的历程，对于我们今天的“HPM 高级研修班”的规划和设计仍有重要借鉴意义。高研班有以下特点。

• 聚焦研讨主题。张先生站在数学教育的学术高地，为一年一度的高研班设定主题，使得会议的研讨聚焦而高效。如：1992 年（宁波）的主题是“数学素质教育设计”；1993 年（扬州）的主题是“数学学习心理学与数学教育哲学”、“数学问题解决教学”、“形式化与非形式化的关系”以及“数学学习后进生问题”；1996 年（金华）的主题是“数学教学中如何贯彻德育目标”和“数学教育基本理论探讨”；2000 年（南京）聚焦“高中课程标准”；2001 年（成都）聚焦“数学学习心理学”，2002 年（苏州）聚焦“中国实现教育的双基教学”。这些主题的设立，也引领了当时的研究方向。今天，我们再回头看这些主题，更能深刻地认识先生的学术眼光、理解先生的良苦用心、钦佩先生的责任担当。我们今天说“数学核心素养”、“数学学科德育”等，早已是高研班研讨的主题了。

• 发表研讨成果。从第一次高研班开始，张先生关于研讨的成果始终都有详尽的总结和提炼，在《数学教学》、《数学教育学报》、《中学数学教学参考》等刊物上发表“高研班纪要”。这些“纪要”记录了与会专家的思想、观点、重要研究成果，成为中国当代数学教育的重要史料。同时，张先生十分注重相应学术专著或论文集的出版，如《数学教育国际透视》（1995）、《数学素质教育设计》（1996）、《中学数学问题集》（1996）、《中国数学双基教学》（2006）等，都是围绕高研班研讨主题所开展的研究的成果集，而《交流与合作》（2009）则是对十五年高研班的总结。

• 倡导实证研究。在首届高研班上，张先生就提出“遵循心理学研究实验方法，开展群众性的实验研究”的建议，并指出：“心理学是实验科学，必须到课堂上、学生中进行调查研究。数学的教和学是数学学习理论的出发点和归宿。”[1]针对数学学习的研究，2001 年的高研班倡导改进研究方法：“提高我国学习研究的水平，当前一个关键方面是学习和掌握科

学的数学教育的研究方法，其中主要是强调树立实证的研究理念，以事实做立论的论据，加强论点的可靠性，并妥善处理好定量研究和定性分析的关系。”[2]2003 年的高研班提出“数学教育研究的学术规范”：

（1）选定前人尚未解决、需要研究的问题；

（2）收集完备的文献进行分析；

（3）设计研究方法，论证这一研究方法可以达到的目标；

（4）通过实证，包括收集和分析数据和事实，建立论据；

（5）运用相应的理论和自己的创见来表述研究结果。

张先生指出：“这是国际上通用的学术规范，如果研究工作不与之接轨，博士论文就通不过，学术杂志也不接受。中国加入 WTO 过程启示我们，遵守国际规则对于我们的发展是多么重要。”[3]

• 重视国际交流。建立中国数学教育理论，在国际数学教育界拥有中国的话语权，是张先生毕生的追求。在 1992 年的首届高研班上，关于数学教育心理学研究，张先生为中国落后于国际水平而忧虑。他提出：“走向世界，多和国际上有关研究工作者接触，研究他们的著作，尽可能参加每年一度的数学教育心理学（PME）会议。”[1]在 2001 年的高研班上，针对学习研究的选题方向，张先生提出：“做好基础性工作，静下心读一点书。有少数人能够真正弄清国内外已有观点，学习国际通用的心理学语言，在国际平台上与国外学者进行平等的交流，逐步打进国际学术圈。这也许要坐一段时间的冷板凳，有志气的年轻人应当做这样的工作。学好英文，参加国际数学教育心理学组织（PME）的活动。只有‘打出去’，才能‘树起来’。”[2]

在我们看来，高研班不仅硕果累累、厥功甚伟，而且还是一种学术精神的象征——肩负使命、筑梦教育，拒绝平庸、追求卓越，攻坚克难、永不言弃，兼容并蓄、海纳百川。这种学术精神，必将激励 HPM 专业学习共同体砥砺前行，去创造新的辉煌。

参考文献

[1] 数学教育研究小组. 数学素质教育的热点透视[J]. 数学教学, 1994, (02): 1-4.

[2] 李士錡, 张奠宙. 数学教育高级研讨班纪要[J]. 数学教育学报, 2002, 11(01): 60-63.

[3] 张奠宙等. 倡导学术规范，提高研究水平——2003 年数学教育高级研讨班纪要[J]. 数学教育学报, 2004, 13(01): 94-98.

目 录

CONTENT

理论探讨

美英早期代数教科书的代数价值观探析 *

邵爱娣 刘思璐 汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

理想的教学要求教师不仅要知道“教什么”、“如何教”，还要知道“为何教”[1]，而教师只有深刻理解数学的价值，才能知道“为何教”。关于数学的价值，《普通高中数学课程标准》（2017 年版）指出：“数学是自然科学的重要基础，在形成人的理性思维、科学精神和智力发展中发挥着不可替代的作用，它还是表达与交流的语言，其应用渗透在人们日常生活的各个方面。”《标准》还在课程目标中提出“让学生认识数学的科学价值、应用价值、文化价值、审美价值”的要求。[2]

调查表明，学生在初等教育时期，受以功利性和实用性为主的升学考试的影响，随着年段的升高，其数学观各维度的水平逐步下降，高中最低。[3-4]有鉴于此，一些学者大力提倡在数学教学中凸显数学的价值，改变学生消极的数学观。[5-7]

代数是数学的一个分支，在中小学数学教育中占有重要地位。要在代数教学中体现数学的价值，首先需要深入探讨代数学所特有的价值。虽然有许多学者在这方面做过研究[8-10]，但很少见到基于历史视角的文献研究。事实上，对于代数学价值的探讨可以上溯至 17 世纪，法国数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）称“一切问题均可转化为代数问题，一切代数问题均可转化为方程问题”。19 世纪以降，部分西方代数教科书中或多或少都对代数学教育价值作过探讨，对于这些代数教科书的价值观进行考察，一方面能帮助今天的教师更深刻、全面地够理解代数的教育价值，另一方面也能够为今日代数教学和教科书编写带来一定的启示。

本文对 1800-1959 年间出版的美英早期代数教科书进行考察，试图回答以下问题：早期代数教科书提出了代数学的哪些教育价值？这些价值在教科书中是如何体现的？对今日中学代数教学和教科书编写有何启示？

---

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地（A8）项目“数学课程与教学中落实立德树人研究”系列论文之一。

2 研究方法

2.1 对象选取

研究者详细阅读有关数据库中两百余种出版于 1800-1959 年间的美国和英国代数教科书的前言和正文引言部分，从中筛选出论及代数学价值的教科书作为研究对象。关于代数价值的表述有以下四类：

第 1 类：直接描述代数学的价值；

第 2 类：描述数学的价值，因其出现在代数教科书的前言部分，将其归为代数的价值；

第 3 类：描述该教科书或教科书的某一部分（如例题）所要达成的教育价值，因其出现在代数教科书的前言部分，将其归为代数学的价值；

第 4 类：描述代数学中某一个知识点的价值。

对于同一作者再版的教科书，若书名不一致或书名虽同但内容不一致，则视为不同的教科书，否则视为同一种。最终确定 155 种，其中 112 种在前言中论及代数学的价值，25 种在正文引言部分论及代数学的价值，18 种在前言和正文引言部分同时论及代数学的价值。若以 20 年为一段，则 155 种代数教科书的分布情况如图 1 所示。

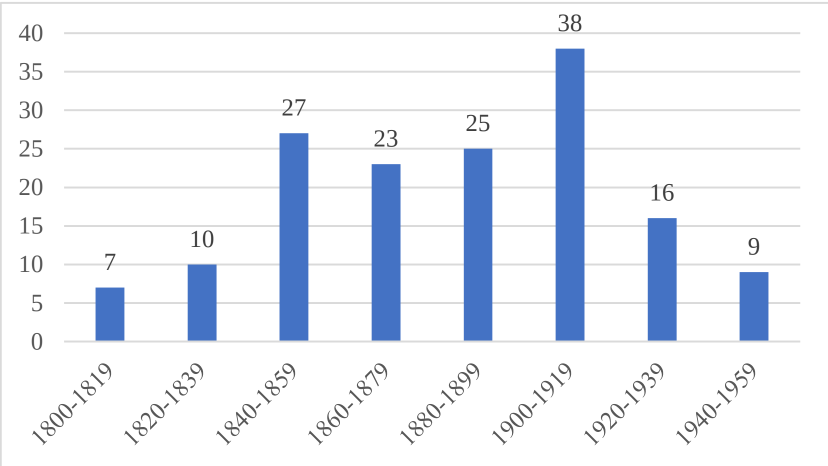


图 1 155 种教科书的时间分布

2.2 分类框架的建立

早在 1920 年，Kelley 在哥伦比亚大学《教师学院院刊》发表了一项关于中学代数价值的调查研究。[11]为了回答“中学代数的价值是什么”这个问题，作者对数学家以及从事各行各业的人们进行了一项调查。本文对 Kelley 的调查结果进行分析和归类，据此形成初步的代数价值分类框架。运用该框架对早期代数教科书的代数价值观进行统计时，根据统计情况，

反过来又对分类框架进行适当修正，最终形成正式的代数价值分类框架，见表 1。

表 1 代数学价值的分类框架

类别	具体内涵
学科基础	数学学科基础；其他学科基础
思维训练	推理能力；分析能力；概括能力；抽象能力
品质培养	自主性；专注力；坚韧性；进取和探索精神
实际应用	科学发展；职业需要；日常生活；问题解决
数学交流	语言；表达；陈述
情感信念	鉴赏数学；培养兴趣
学科优势	代数的一般性；代数的便捷性

2.3 分类统计

确定统计框架后，由两位研究者运用文本分析法对 155 种教科书的前言及正文引言部分进行研究，提炼出其中关于代数价值观的统计单位，根据分类框架对统计单位进行分类。对于分类有争议的地方，两位研究者进行再讨论，直至全部一致。

统计结果显示，共有 81 种教科书论及 1 类价值，47 种教科书论及 2 类价值，19 种教科书论及 3 类价值，4 种教科书论及 4 类价值，2 种教科书论及 5 类价值，2 种教科书论及 6 类价值。七类价值共出现 270 次，具体分布情况如图 2 所示。

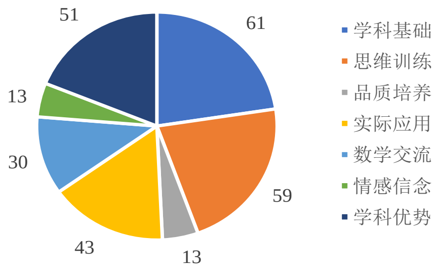


图 2 代数教育价值观的分布

3 代数价值观具体分类

3.1 学科基础

共有 61 种教科书（占 39.4%）提及代数作为学科基础的价值，这也是代数价值观中占比最多的一类。数学上，除了算术和初等几何以外，没有什么学科离得开代数学。三角学、解析几何、微积分，没有代数学可谓寸步难行。作为跨学科基础，代数知识是学习诸如物理、

化学、工程、商业等其他学科所需要的必备知识。表 2 给出了代表性的具体观点。

表 2 关于学科基础的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
数学学科基础	代数被认为是整个数学科学所依赖的重要支柱。[12]	Williams（1840）
	代数被认为是所有数学知识的主要基础之一。每一个人要想对高等数学有全面的了解，就必须从学习和充分掌握代数原理开始。[13]	Alsop（1846）
	除了一些初等几何和最简单的算术知识外，倘若没有代数知识，其他数学分支就不可能存在。抛开代数去学数学，就如同不用双脚去走路一样。[14]	Myers & Atwood（1916）
其他学科基础	本书的目的是让年轻的学生学习代数，特别是代数中那些对学习几何、测量、物理和化学不可或缺的部分。[15]	Hopkins（1912）
	本书以各种方式介绍了来自其他研究分支的关键和永恒的数字事实和定律。这使代数与地理、历史和其他学科相联系。通过使用这些分支中一些最重要的公式，以及让学生熟悉它们的基本概念和数字事实，可以进一步与物理和工程联系起来。[16]	Durell（1914）

3.2 思维训练

共有 59 种教科书（占 38.1%）提到代数的思维训练价值。通过学习代数，学生能够提高智力，增强逻辑推理能力，发展抽象概括能力，并且能够缜密地思考问题等等。总之，这里的思维训练是指跟脑力活动相联系的教育价值。表 3 给出了代表性的具体观点。

表 3 关于思维训练的代表性观点

类 别	具体观点	作者（年份）
推理能力	毫无疑问，学习代数应该培养和训练学生的推理能力。[17]	Clarke（1881）
分析能力	通过对整本书的梳理，希望能锻炼学生的分析能力。[18]	Lawrence（1853）
概括能力	将一个有限的数值问题以更一般的形式提出，以便培养学生的概括能力。[19]	Loomis（1876）
抽象能力	代数运算在很大程度上要求学生进行抽象练习。[20]	Green（1839）

3.3 品质培养

共有 13 种教科书（占 8.4%）提到代数在培养学生品质方面的价值。这里的品质指的是学生的行为和作风显示出来的品性、认识等。无论是锻炼坚韧的意志、培养良好的习惯，还是培育探索精神、增加卓识远见，学习代数都带来了很大的帮助。表 4 给出了代表性的具体观点。

表 4 关于品质培养的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
自主性	教科书能帮助学生避免灰心，引导他们自力更生，从而接近理想。[21]	Gilbert（1903）
专注力	学生从这些练习中获得了极大的益处，通过练习可以集中注意力。[22]	Tower（1855）
坚韧性	所有数学科学，特别是代数，其特征都是耐心而稳步地前进。很明显，学生必须把每一件事都彻底地弄明白，即在学习下一个内容之前，必须先完全理解前面学习过的每一个规则和问题。要让学生记住，坚持不懈的毅力可以完成几乎所有的事情。[12]	Williams（1840）
进取和探索精神	在所有激发进取精神和探索精神的科学中，没有一门比数学更有用的了。[23]	Bonnycastle（1806）

3.4 实际应用

共有 43 种教科书（占 27.7%）提到了代数的实用价值。代数渗透于日常生活的许多方面，是从事多种行业的人员必需掌握的一门学科。表 5 给出了代表性的具体观点。

表 5 关于实际应用的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
科学发展	代数的实用性理应得到重视，要做到这一点，教科书就必须引入简单的几何和物理公式，并将代数应用于易于学生理解的现代工业、商业和科学问题。[24]	Young (1910)
	试图借鉴几何学、物理学、投资理论以及纯科学和应用科学的其他分支来举例说明，从而强调代数的直接实用性。[25]	Skinner (1917)

职业需求	就数学研究而言，总是有两类学生：那些在以后的生活中将数学作为其职业工具之一的学生——工程师、建筑师、会计师、教师和科学家；那些不愿意这么做的人。[26]	Jones (1892)
	代数语言在商业期刊、工匠手册和商业手册中有如此明确的地位的时代已经到来，以至于商店里的工人和办公室里的商人都有各自的实际需要。[27]	Wentworth (1911)
	今日的领导者并非昔日伟大的演讲家和富有魅力的说话者，而是数学化的思想家。正是后者获得了这个商业和工业时代的各项大奖。[14]	Myers & Atwood (1916)
日常生活	选择的问题一般是在数学和科学的研究中出现的实际问题。它希望用代数在世界生活中的重要性和价值来打动学生。[28]	Comstock (1907)
	大量的应用问题，使学生了解数学在日常生活中的许多应用。[29]	Rothrock(1932)
问题解决	正确的生活不过是解决一连串的问题，每一个想要成功的人都必须与生活中的问题作斗争。生活中的问题要比代数问题难，但是获得解决难题能力的最好方法是先掌握一些处理简单问题的技巧。就特殊意义而言，代数教授的就是解决问题的策略和技巧。不懂代数，就等于被剥夺了最有效的问题解决工具。[14]	Myers & Atwood (1916)

3.5 数学交流

共有 30 种教科书（占 19.4%）给出了代数在数学交流上的价值。代数语言是人们精确表达思想的强有力的工具，同时，代数也能锻炼学生的表达能力。表 6 给出了代表性的具体观点。

表 6 关于数学交流的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
语言	代数是一种用符号书写的无声语言。[30]	Dupuis（1900）
	今天，每一个文明的民族都在使用这种语言。在世界上现存的所有语言中，它最应该被称为人类的通用语言。[14]	Myers & Atwood（1916）
表达	教师和教材的基本任务都应该是训练学生表达的准确性和简洁性，数学本身在很大程度上是实现这一目标的媒介。[31]	Ford（1922）
陈述	精确的陈述是学习代数所追求的目标。[21]	Gilbert（1903）

3.6 情感信念

共有 13 种教科书（占 8.4%）认为，学习代数有助于促进学生对该学科的情感和信念的一种变化。这里的情感信念指的是学生对于数学学科或数学学习的一种态度的感受和认识。表 7 给出了代表性的具体观点。

表 7 关于情感信念的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
鉴赏数学	本书的目的是引导年轻人欣赏数学推理。[32]	Olney（1874）
	一个通晓算术的人会发现学习代数是一件非常愉快的事，而且一般说来，也不是什么难事。[33]	Greenleaf（1852）
培养兴趣	本书包括提高学生代数水平所必需的一切，以一种有意引起他们兴趣的方式安排和举例，培养他们对分析研究的兴趣。[34]	Docharty（1867）
	代数的学习从来都是有趣和有益的。[35]	Hull（1904）

3.7 学科优势

共有 51 种教科书（占 32.9%）指出，与算术相比，代数有其独特的优势。代数是算术的一种延续，它能解决用算术和几何方法难以解决或不可能解决的问题。表 8 给出了代表性的具体观点。

表 8 关于学科优势的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
代数的一般性	算术的对象是有限的，应用是片面的，但代数，或者说分析的艺术，是普遍的、全面的，可以成功地应用于一切需要真理和正确数据的场合。[23]	Bonnycastle（1806）
	算术是数的艺术或科学，它处理数的本质和性质，但仅限于通常使用的某些计算方法。代数更加全面，被牛顿称为通用算术。[36]	Loomis（1846）
代数的便捷性	代数使我们能够进行比算术更容易、更迅速的推理，并得出问题的答案，而这些问题单靠算术是很难解决的，甚至是不可能解决的。[37]	Sherwin（1841）
	日常生活中的许多问题常用算术来解决，但若用代数来处理，则会简单得多。为什么锋利、便捷的工具如此容易得到，还要使用钝的、笨拙的工具呢？现代农场主对于用镰刀而不用自动割麦机来收割麦子的想法嗤之以鼻。[14]	Myers & Atwood（1916）

4 代数价值观的分布

由于每个年段的书本数量有差别，因而对上述七类代数价值观在其年段所占比率进行统计，并绘制图表。图 3 给出了各类价值分布的变化情况。

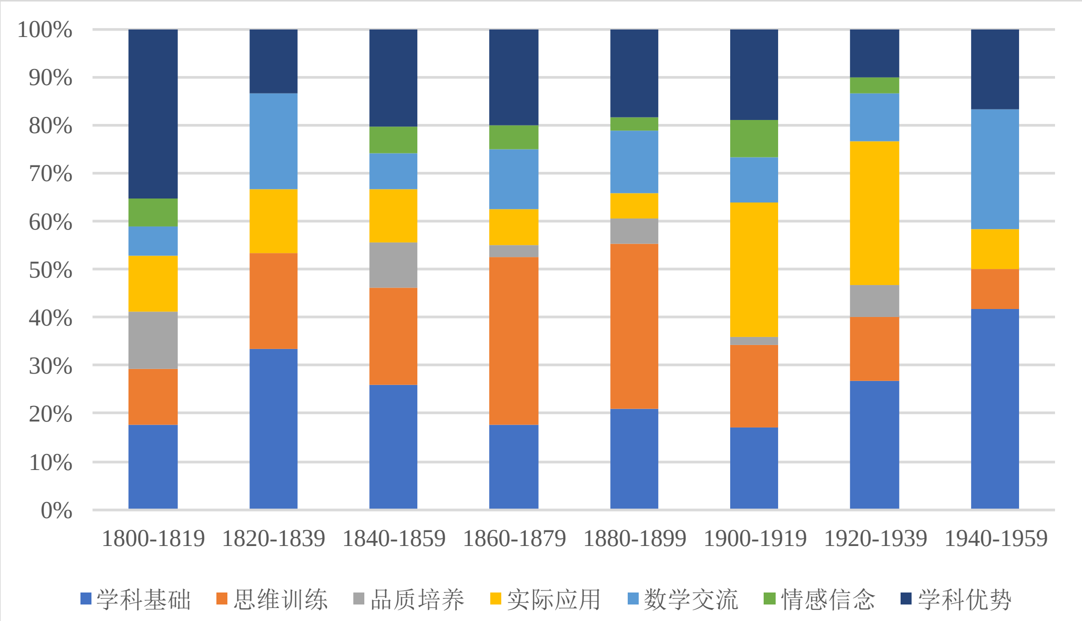


图 3 各类价值分布的变化情况

从图 3 可见，以 20 年为一个时间段，则 160 年分成了 8 个时间段。其中品质培养和情感信念出现在其中的 6 个时间段，其余五种价值出现在所有时间段。由此，19 世纪到 20 世纪上半叶，代数教科书的编写者对代数的七种教育价值都有所关注。总的来说，早期代数教科书呈现出了代数教育价值的多样性。就单个价值而言，学科基础和思维训练两种价值占比最高。而变化比较明显的是思维训练和实际应用，19 世纪末，思维训练占比较高，进入 20 世纪之后，实际应用占比迅速上升，这与 20 世纪初西方的数学教育改革运动息息相关。

5 代数价值观在教科书中的体现

在对早期代数教与学的研究中发现，Hotz（1918）从加法和减法、乘法和除法、方程和公式、问题、图像五个方面制定了代数测试量表 [38]；Durell（1921）从口头和书面问题、图像、公式、新颖的例子等方面给出了代数教学的建议[39]；而 Thorndike（1923）从公式、方程、问题、图像四个方面阐述了学习代数需要具备的能力。[40]因此，早期教科书编写者比较注重学生对于代数运算、公式、方程、图像和问题五个方面的学习。本文将从这五个方面来分析代数价值观在教科书中的体现。

5.1 代数运算

相比于算术，代数运算代表了更一般化的数字运算，因而早期代数教科书通过代数运算来培养学生的抽象和概括能力。如 Lyman & Darnell（1917）在讲解多项式乘以多项式时类比两位数竖式乘法的方式[41]，如图 4，要把 32 乘以 24，可以先把$30+2$乘以 4，然后再乘以 20，最后把部分乘积相加。要把$2a+3b$乘以$3a+b$，先把$2a+3b$乘以$3a$，然后再乘以b，最后把部分乘积相加。该过程让学生体会从特殊的例子当中抽象出一般的代数乘法的运算过程，从而达到锻炼学生思维的目的。

$$
\begin{array}{rcr}
32 & = & 30+2 \\
24 & = & 20+4 \\
\hline
128 & = & 120+8 \\
\underline{640} & = & \underline{600+40\quad} \\
768 & = & 600+160+8
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l}
2a + 3b \\
\underline{3a + b} \\
6a^2+9ab \\
\underline{\qquad 2ab + 3b^2} \\
6a^2+11ab+3b^2
\end{array}
$$

图 4　Lyman（1917）多项式乘法运算

此外，Gillet（1896）认为反复练习代数运算有助于加强记忆、加快理解，培养精确的习惯。[42]可见，早期代数教科书通过代数运算来训练学生的思维、培养学生良好的品质。

5.2 公式

早期代数教科书给出许多物理、工程、商业等学科中的公式以及运算。Wentworth & Schlauch（1917）写道："今天任何一种商业活动中，公式都是非常有用的。没有公式的知识、价值和帮助，一个人不可能成为商业领域的真正主人。"[43]可见公式对于商业领域的重要性。Schorling & Clark（1924）也在其教材中突出强调公式的结构、意义和使用，认为公式作为简洁的语言、计算的简写规则、问题的通解、表示一个量对另一个量的依赖关系的方法。[44]

部分教科书会设置专门的章节来阐述公式以及应用。如 Stone & Millis（1911）列出了不同学科领域中的 19 个公式，涉及电流强度、子弹发射后枪的反冲速度、风力、自由落体运动的距离、摄氏温标与华氏温标之间的关系、蒸汽发动机的马力、横梁的挠度、海拔、烟囱通风压力、并联电阻、石拱的张力、水泵的排水量、物体的比重等，并称："各种公式的使用是基于这样一种信念：如果学生们知道这类事情必须由从事社会工作的人来做，他们就会对求解过程产生更大的兴趣。"[45]一个例子是："如果一根 L 英尺长的梁两端都有支撑，并且在整个长度上均匀受力，每英尺受力 W 磅，根据所用材料 E 和 I 的特定值，可算出中点处

最大挠度 D（单位为英寸）为 $D=\dfrac{5WL}{384EI}$。”建筑师在建筑设计中离不开这个公式。

总之，早期代数教科书利用公式来彰显代数的实际应用价值和数学的交流价值。

5.3 方程

方程刻画了现实世界中某些事件所遵循或近似遵循的规则或定律，是初等代数的中心问题。Myers & Atwood（1916）认为，“使用方程的能力是精确思考者的主要装备，代数实质上是方程的科学与艺术”[14]。Kent（1913）明确表示“代数的主要目的之一是解决用算术方法难以解决或不可能解决的问题，而方程是获得这些解的手段，事实上，方程是这门课的中心思想”[46]。Young & Jackson（1910）通过突出方程在教科书中的地位来体现代数的应用价值[24]。一些教科书专门用整章的篇幅来呈现方程的应用，如 Taylor（1900）分别用一章的篇幅介绍一元一次方程（含 6 道例题、57 道习题）和一元二次方程（含 6 道例题、53 道习题）的应用 [47]。

因此，方程是早期代数教科书训练学生思维能力、凸显代数学科优势以及实际应用价值的重要工具之一。

5.4 图像

通过图像能够直观地表示出两个变量之间的关系。早期教科书运用函数图像或方程曲线，一方面让学生通过观察图像了解事物的变化规律，从而推断出其中隐含的信息；另一方面让学生动手操作，绘制图像并能根据图像回答问题。

Schorling & Clark（1924）认为数学关系的图像表示，利用了更广泛的感官体验。在其他条件相同的情况下，附带图像的问题容易被更多的学生理解和欣赏。[44]Schultze & Breckenridge（1925）认为图解法不仅有很大的实用价值，而且毫无疑问地提供了一种非常好的方法，以防止“学校代数退化为一种机械地应用记忆规则的倾向”。[48]Slaught & Lennes（1915）、Rietz & Taylor（1915）等列专章介绍图像表示法[49][50]，其中主要涉及函数或方程的图像或图形。Cajori & Odell（1916）用图像来表示午后 12 小时之内的温度变化情况以及 1860-1914 年之间美国无烟煤价格的变化情况[51]。Hawkes & Touton（1917）在其图像表示法一章中称：“商业世界的科学数据和数字统计经常以图像的形式清晰而简洁地表示出来。”[52]

易知，图像的运用可用来训练学生的思维能力，激发学生的学习兴趣，并解释代数在现实世界的广泛应用。

5.5 问题

这里的问题主要指的是文字题，大部分问题通常具有一定的学科背景或实际背景。Lawrence（1853）提到："在代数教学方面的经验证明，只有把这些原理应用到实际问题的解决中，才能使学生熟悉这些原理。因此，教材中包含大量的实际例子和问题。在选择这些例子时，一个突出的目标是选择那些最有可能使学生感兴趣的，同时这些例子的解决方案又将加强学生的分析能力。"[18]有大量的早期代数教科书会用专门的章节来呈现问题。例如 Day & Thomson（1844）和 Lawrence（1853）等通过专门的章节来阐述了代数在几何中的应用，[53][18] 如题"给定了平面三角形的三条边，求它的面积；一个人要高出地球表面多高才能看到地球表面的三分之一？"等等。Wentworth（1881）第十章一共给出了 76 道练习题，涉及年龄问题、钟表问题、行程问题、工程问题、图形面积问题、动物比赛问题、军事问题、经济问题等等[54]，可谓丰富多彩。

Durell & Arnold（1920）认为代数的其他任何部分都不如语言问题那样发展思想力量和培养对代数精神的欣赏。[55] Seaver & Walton（1882）指出教材中精心安排了问题集，其推理可以很容易地在头脑中进行并通过口头表达出来。这种口头使用代数语言被认为是一种非常有效的教学方法。[56]

可见，早期代数教科书在问题选择时关注了代数的学科基础、思维训练、实际应用、数学交流和情感信念等价值。

6 结论与启示

综上，1800-1959 年间 155 种美英早期代数教科书呈现了七类代数教育价值观，即学科基础、思维训练、品质培养、实际应用、数学交流、情感信念和学科优势。在 160 年间，七类价值并没有呈现出明显的大起大落现象。由此可见，早期代数教科书编写者对于代数学的价值有着比较全面和客观的认识。早期教科书的代数价值观对今日中学代数教学和教科书编写具有一定的启示。

（1）注重代数的思维训练价值。早期教科书中思维训练价值占了很高的比例，说明代数的学习有助于学生的思维能力发展。在实际教学和教科书编写时，要以该价值的实现为目标，从代数运算、方程求解、问题解答等方面出发，促进学生的积极思考与实践，让学生的思维真正得到锻炼。

（2）促进代数与其他学科的融合。代数作为学科基础这一价值普遍受到了早期教科书

编写者的关注，一切需要抽象原理的学科都离不开代数知识。在实际教学中要让学生体会到代数这门学科的优势所在，加强与其他学科的交流，如从公式应用、问题设计等方面着手，让学生体会到代数在其他学科发展中的重要性。

（3）重视代数学习对学生的品质以及情感信念的影响。学生一开始从算术思维进入代数思维必定会遇到一定的困难，教师要注意对学生进行适当的引导便于他们能顺利渡过这个时期。鼓励学生遇到困难不要退缩，要努力地战胜困难。在代数运算中培养学生的专注力、耐力，在问题解答中培养学生独立思考、积极进取、勇于探索的精神。让学生真正体验到学习代数的乐趣。

（4）加强学生代数表达的训练。代数语言是一种通用语言，其在训练学生表达的精确性和简洁性方面起到了决定性的作用。教学中重视代数语言的学习、加强代数表达的训练，一方面能够有益于学生逻辑思维的培养，另一方面也便于其他相关学科的学习。

（5）坚持课堂教学与实践相结合。代数的实用价值告诉我们，数学源于生活，又服务于生活。很多学生因为缺乏生活实践，因而对书本上的内容一知半解。代数教学既要挖掘生活素材，又要让学生走出课堂，进入生活。从公式应用、图像辅助、问题设计等方面让学生感知代数的实用价值，消除代数无用的疑虑。这就要求教师从改变课堂教学方法入手，让学生成为课堂的主人，通过自身的体验感知，从而真正理解数学知识。

参考文献

[1] Young, J. W. A. *The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School* [M]. New York: Longmans, Green & Co., 1907.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 1-8.

[3] 周琰, 谭顶良. 学生数学观发展状况的调查研究[J]. 数学教育学报, 2010,19(04): 27-30.

[4] 谢明初. 数学教育的人文追求[J]. 数学教育学报, 2015, 24(01): 6-8.

[5] 周立栋. 学生数学意识养成教育——数学教育应有的价值取向[J]. 上海教育科研, 2010, (04): 93-94.

[6] 吴维煊. 勿让“分数场”遮蔽数学教育的核心价值[J]. 教育理论与实践, 2011, 31(32): 18-20.

[7] 朱立明, 马云鹏. 基于新课标的学生数学价值感悟研究[J]. 数学教育学报, 2014, 23(05): 33-35+55.

[8] 李忠. 数学的意义与数学教育的价值[J]. 课程・教材・教法, 2012, 32(01): 58-62.

[9] 王尚志, 胡凤娟. 数学教育的育人价值[J]. 人民教育, 2018(Z2): 40-44.

[10] 刘鹏飞, 孟建伟. 论数学的人文价值[J]. 自然辩证法研究, 2019,35(06): 113-117.

[11] Kelley, T. L. *Values in High School Algebra & Their Measurement* [J]. Teachers College Record, 1920, 21(03): 246-290.

[12] Williams, J. D. *An Elementary Treatise on Algebra* [M]. Boston: Hilliard, Gray, & Co., 1840: iii-v.

[13] Alsop, S. *An Elementary Treatise on Algebra* [M]. Philadelphia: E. C. & J. Biddle, 1846: 3-11.

[14] Myers, G. W., Atwood, G. E. *Elementary Algebra* [M]. Chicago: Scott, Foresman & Company,1916: 1-6.

[15] Hopkins, J. W., Underwood, P. H. *Elementary Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company, 1912: vii-viii.

[16] Durell, F. *Durell's Algebra* [M]. New York: Charles E. Merrill Company, 1914: 3-4.

[17] Clarke, J. B. *Algebra for the Use of High Schools, Academies and Colleges* [M]. San Francisco: A. L. Bancroft and Company, 1881: iii-v.

[18] Lawrence, C. D. *Elements of Algebra* [M]. New York: Alden, Beardsley & Co., 1853: iii-iv.

[19] Loomis, E. *Elements of Algebra* [M]. New York: Harper, 1876.

[20] Green, R. W. *Gradiations in Algebra* [M]. Philadelphia: I. Ashmead, 1839: v-vii.

[21] Gilbert, J. H., Sullivan, E. *Practical Lessons in Algebra* [M]. New York: Richardson, Smith & Company, 1903: iii-iv.

[22] Tower, D. B. *Intellectual Algebra* [M]. New York: Daniel Burgess, 1855: 3-6.

[23] Bonnycastle, J. *An Introduction to Algebra* [M]. Philadelphia: Joseph Crukshank, 1806: iii-vii.

[24] Young, J. W. A., Jackson, L. L. *A Second Course in Elementary Algebra* [M]. New York: D. Appleton and Company, 1910: iii-iv.

[25] Skinner, E. B. *College Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company, 1917: v-vi.

[26] Jones, G. W. *A Drill-Book in Algebra* [M]. Ithaca: George W. Jones, 1892: iii-iv.

[27] Wentworth, G., Smith, D. E. *Vocational Algebra* [M]. Boston: Ginn and Company, 1911: iii-iv.

[28] Comstock, C. E. *Elementary Algebra* [M]. Peoria, Ill., C. E. Comstock, 1907: 5-7.

[29] Rothrock, D. A., Whitacre, M. A. *First Year Algebra* [M]. New York: C. Scribner's Sons, 1932: v-vi.

[30] Dupuis, N. F. *The Principles of Elementary Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company, 1900: iii-v.

[31] Ford, W. B. *A Brief Course in College Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company, 1922: v-vi.

[32] Olney, E. *Introduction to Algebra* [M]. New York: Sheldon, 1874: 3-4.

[33] Greenleaf, B. *A Practical Treatise on Algebra* [M]. Boston: R.S. Davis and Company, 1852: iii-iv.

[34] Docharty, G. B. *The Institutes of Algebra* [M]. New York: Harper & Brothers., 1867: v-vi.

[35] Hull, G. W. *Elements of Algebra for Beginners* [M]. New York: American Book Company, 1904: 3.

[36] Loomis, E. *A Treatise on Algebra* [M]. New York: Harper & Brothers, 1846: 10.

[37] Sherwin, T. *An Elementary Treatise on Algebra* [M]. Boston: Sanborn, Carter, Bazin, 1841: 1.

[38] Hotz, H. G. *First Year Algebra Scales* [M]. New York: Teachers College, Columbia University, 1918.

[39] Durell, F. *Suggestions on the Teaching of Algebra* [M]. New York: Charles E. Merrill Company, 1921.

[40] Thorndike, E. L. Woodyard, E., etal.. *The Psychology of Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company, 1923: 100-120.

[41] Lyman, E. A., Darnell, A. *Elementary Algebra* [M]. New York: American Book Company, 1917: 74.

[42] Gillet, J. A. *Elementary Algebra* [M]. New York: H. Holt and company, 1896: iii-v.

[43] Wentworth, G., Schlauch, W. S., Smith, D. E. *Commercial Algebra: book I-II* [M]. Boston: Ginn, 1917-1918: iii-iv.

[44] Schorling, R., Clark, J. R. *Modern Algebra: Ninth School Year* [M]. Yonkers-on-Hudson, N.Y.: World Book Company, 1924: iii-viii.

[45] Stone, J. C., Millis, J. F. *Elementary Algebra: First Course* [M]. Boston: B. H. Sanborn & Company, 1911: 1-18.

[46] Kent, F. C. *A First Course in Algebra* [M]. New York, Longmans, Green, and Co., 1913: iii-iv.

[47] Taylor, J. M. *Elements of Algebra* [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1900: 99-106, 291-299.

[48] Schultze, A., Breckenridge, W. E. *Elementary and Intermediate Algebra* [M]. New York: The

Macmillan Company, 1925: v-vi.

[49] Slaught, H. E., Lennes, N. J. *Elementary Algebra* [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1915: 230-239.

[50] Rietz, H. L., Taylor, E. H., Orathorne, A. R. *School Algebra: First Course* [M]. New York: H. Holt and Company, 1915: 180-191.

[51] Cajori, F., Odell, L. R. *Elementary Algebra* [M]. New York: The Macmillan Company, 1915-16: 63-76.

[52] Hawkes, H. E., Touton, F. C., Luby, W. A. *First Course in Algebra* [M]. Boston: Ginn and Company, 1917: 200-210.

[53] Day, J., Thomson, J. B. *Elements of Algebra* [M]. New Haven: Durrie & Peck, 1844: 232-245.

[54] Wentworth, G. A. *Elements of Algebra* [M]. Boston: Ginn & Heath, 1881: 137-150.

[55] Durell, F., Arnold, E. E. *A Second Book in Algebra* [M]. New York: C.E. Merrill, 1920: iii-iv..

[56] Seaver, E. P., Walton, G. A. *The Franklin Elementary Algebra* [M]. Philadelphia: J.H. Butler; 1882: iii-vi.

历史研究

17 世纪的圆锥曲线规 *

秦语真 汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

HPM 视角下的数学教学以其多元的教育价值而日益受到一线教师的关注，但影响一线教师运用数学史的主要因素是素材的缺乏。可用于数学课堂的数学史素材包括人物与事件、概念与术语、公式与定理、问题与求解、思想与方法、符号与工具等，其中，工具指的就是历史上的几何作图工具。

2015 年湖北省高考数学压轴题将 17 世纪荷兰数学家舒腾（F. van Shooten, 1615-1660）设计的一种椭圆规呈现于学生面前，引起了人们对于圆锥曲线规的浓厚兴趣[1]。荷兰学者冯马南（J. van Maanen）曾撰文介绍舒腾在其《数学练习题》中所设计的部分圆锥曲线规[2]，据此，徐章韬等（2016）利用超级画板，将其设计成“电子圆锥曲线规”[3]。该文成了数学教师了解历史上圆锥曲线规的主要参考文献。然而，冯马南在文中并未系统介绍舒腾的所有圆锥曲线规。为此，我们需要对舒腾的原著进行深入考察，了解其中更多的圆锥曲线规。

另一方面，从 17 世纪的圆锥曲线规出发编制数学问题，仅仅是历史材料的一种顺应式运用[4]。在已有的 HPM 视角下的圆锥曲线教学案例中，教师尚未用到圆锥曲线规[5][6]。圆锥曲线规在概念教学中的应用与价值还有待于深入研究；圆锥曲线规也为技术与 HPM 关系甚至 STEM 与 HPM 关系的研究提供了理想的素材。

有鉴于此，本文对舒腾的圆锥曲线规进行系统的介绍，并借助几何画板，对其工作原理加以分析，为 HPM 视角下的圆锥曲线教学提供参考。

2 椭圆规

2.1 基于第一定义的椭圆规

舒腾首先给出我们今天十分熟悉的“园艺师”作图法：将一根定长的绳子的两端固定，

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地（A8）项目“数学课程与教学中落实立德树人研究”系列论文之一。

用笔紧绷绳子，则笔尖所画出的曲线即为椭圆，如图1所示。这种作图法可以上溯到6世纪拜占庭数学家安提缪斯（Anthemius）。17世纪法国数学家拉希尔（P. de Lahire, 1640-1719）在《圆锥曲线新基础》（1679）中据此给出椭圆的定义[7]：已知线段*LK*，在其上取点 *H* 和 *I*，使得$LH = KI$，在 *LK* 上任取一点 *C*，以 *H* 为圆心，*LC* 为半径作圆，又以 *I* 为圆心，*CK* 为半径作圆，拉希尔将两圆交点 *E* 的轨迹称为椭圆。这个定义实际上与我们今天的第一定义是一致的。利用几何画板易于作出椭圆，如图2所示。

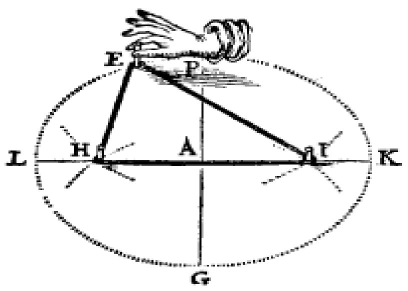


图 1 园艺师作图法

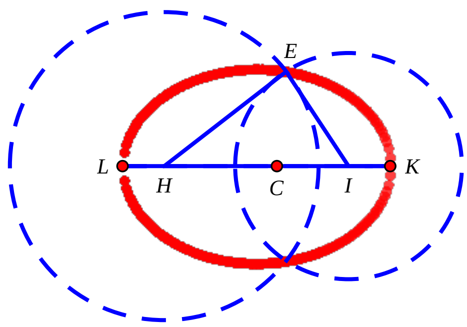


图 2 用几何画板实现园艺师作图法

为了实现园艺师作图法，舒腾设计了两种椭圆规。其中第一种如图 3 所示，两根等长的带槽的直杆 *HG* 和 *IF* 的一端各用钉子固定在点 *H* 和 *I* 上（但分别可以绕钉子转动），另一端用铰链与杆 *GF* 联结，$FG = HI$。*HG* 和 *IF* 的交点为 *E*。转动整个工具，由于始终有 $HE = FE$，故 $HE + IE = IF$ 点为定长，点 *E* 所形成的轨迹即为椭圆。

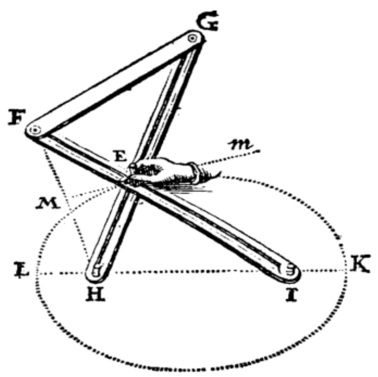


图 3 舒腾的第一种椭圆规

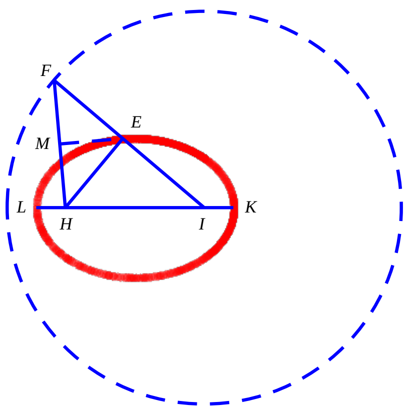


图 4 用几何画板实现第一种椭圆规的作图

这种椭圆规的作图过程可用几何画板来实现。如图 4，已知线段 *LK*，在其上取点 *H* 和 *I*，使得 $LH = IK$，以 *I* 为圆心，以线段 *LK* 为半径作圆，在圆上任取一点 *F*，联结 *HF*，作 *HF* 的垂直平分线，交 *IF* 于点 *E*，则当点 *F* 在圆上运动时，点 *E* 的轨迹即为椭圆。

舒腾的第二种椭圆规如图 5 所示。四根等长的杆用铰链首尾联结，构成菱形 *OIPG*。带

槽的杆 OQ 一端固定在点 O 处，并经过点 P。另一根定长且带槽的杆 HG 一端固定在点 H 处（可绕 H 旋转），另一端是固定在 G 处。HG 与 OP 交于点 E。则转动杆 HG 时，因始终有 $GE = EI$，故 $EH + EI = GH$ 为定长，于是，点 E 的轨迹为椭圆。

第二种椭圆规的作图过程可用几何画板来实现。如图 6 所示，已知线段 LK，在其上取点 H 和 I，使得 $LH=KI$，以 H 为圆心，以线段 LK 为半径作圆，在圆上任取一点 G，以 G 和 I 为相对的两个顶点作菱形 $GOIP$（边长大于 LI），对角线 OP 与 HG 的交点为 E，则当点 G 在圆上运动时，点 E 的轨迹即为椭圆。

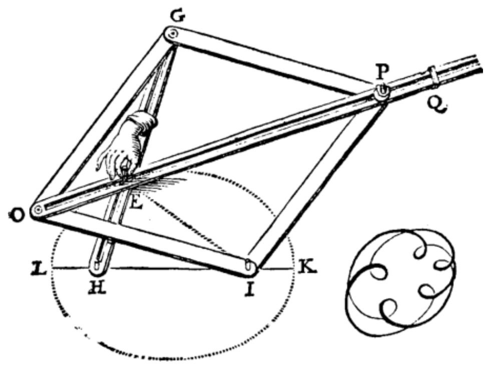


图 5 舒腾的第二种椭圆规

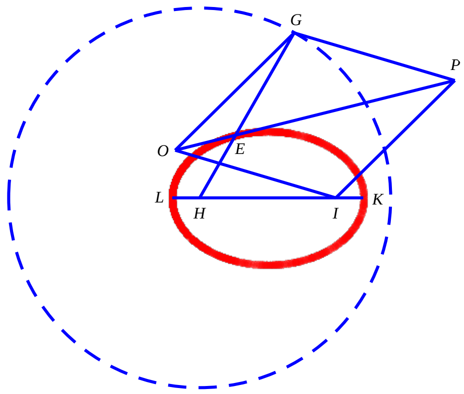


图 6 用几何画板实现舒腾第二种椭圆规的作图

2.2 基于压缩变换定义的椭圆规

舒腾的第三种椭圆规如图 7 所示。第一根直杆的一端固定在横杆 LK 上的点 A 处（可绕 A 转动）另一端 B 与第二根等长直杆的一端用铰链连接。在第二根直杆上固定一个钉子 E。当第二根直杆的另一端 D 沿横杆滑动时，钉子 E 的轨迹为一个椭圆。

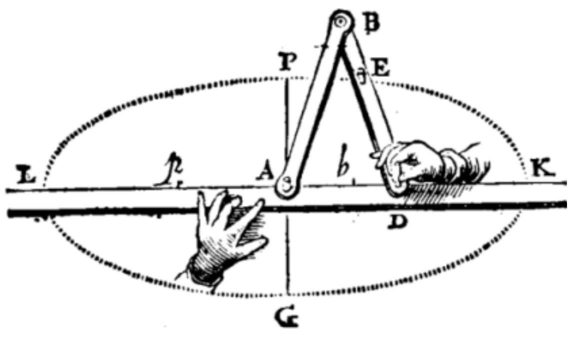


图 7 舒腾的第三种椭圆规

如图 8，在直线 LK 上取一固定点 A 和一动点 D，分别以 A 和 D 为圆心，以等长线段为半径作圆，交于点 B，在 DB 上取一点 E（DE 为定长），拖动点 D，点 E 的轨迹即为椭圆。如图 9，设 $AB = DB = m$， $BE = n$ （$m > n > 0$），以 A 为原点、LK 为横轴建立坐标系，延长 AB 至 Q，使得 $BQ = BE = n$，则点 $Q(x_0, y_0)$ 的坐标满足方程 $x_0^2 + y_0^2 = (m+n)^2$。联结 QE

并延长，交 LK 于 R，易证 $QR\perp LK$。过 E 作 LK 的平行线，交 AQ 与 S，过 S 作 LK 的垂线，垂足为 T。设点 E 的坐标为 (x,y)，则 $x=x_0, y=\dfrac{m-n}{m+n}y_0$，故得点 E 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{(m+n)^2}+\frac{y^2}{(m-n)^2}=1。$$

可见，第三种椭圆规的工作原理是通过对圆施以压缩变换来得到椭圆。

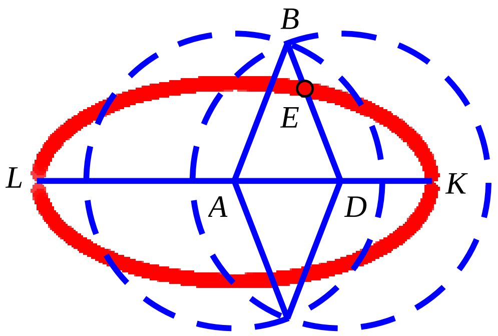


图 8 用几何画板实现舒腾第三种椭圆规的作图

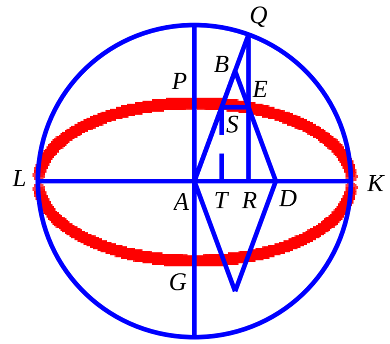


图 9 第三种椭圆规圆的工作原理

舒腾的第四种椭圆规与第三种类似，所不同的是钉子 E 不在 BD 上，而在其延长线上，如图 10 所示。如图 11，分别以点 A 和 D 为圆心作圆交于点 B，固定点 A，点 D 在 LK 上运动，则 BD 延长线上的点 E（DE 为定长）的轨迹为椭圆。因 $ER : QR = DE : AQ = (BE\text{-}AB) : (BE + AB)$，故上述椭圆是由以 A 为圆心、($AB+BE$)的长为半径的圆经过压缩变换后得到的。

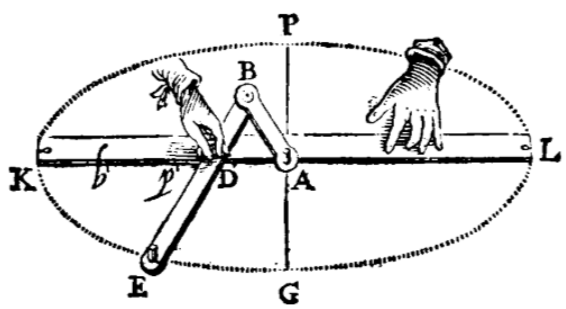


图 10 舒腾的第四种椭圆规

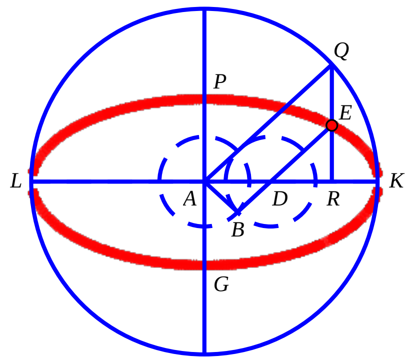


图 11 第四种椭圆规的工作原理

舒腾的第五种椭圆规如图 12 所示。直杆 CD 的一端 D 可以在矩尺的一边上滑动，另一端 C 可以在矩尺的另一边上滑动。E 为直杆上的固定钉子。滑动点 D，则 E 的轨迹为椭圆。

如图 13，已知相互垂直的两条直线 LK 和 MN，在 LK 上任取一点 D，以 D 为圆心，定长线段为半径作圆，交 MN 于 C，联结 CD。在 CD 上取点 E（$CE=a$，$ED=b$ 为定长），当点 D 在 LK 上运动时，点 E 的轨迹即为椭圆。若以 A 为心，$CE = a$ 为半径作圆，过点 E 作 LK 的垂线，垂足为 R，交圆 A 于 Q，则点 $Q(x_0,y_0)$ 的坐标满足方程 $x_0^2+y_0^2=a^2$。设点 E 的

坐标为$\left(x,y\right)$，因 $ER:QR=ER:ES=ED:CE=b:a$，故 $x=x_0, y=\frac{b}{a}y_0$，于是得 E 的轨迹方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。因此，第五种椭圆规的工作原理也是圆的压缩变换。

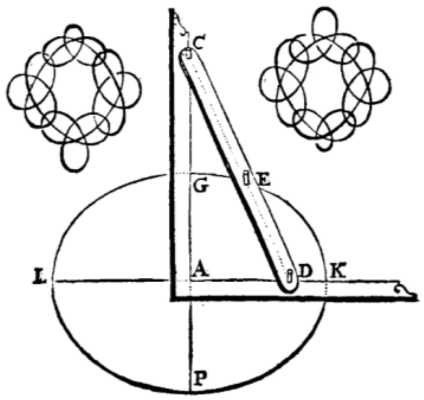


图 12 舒腾的第五种椭圆规

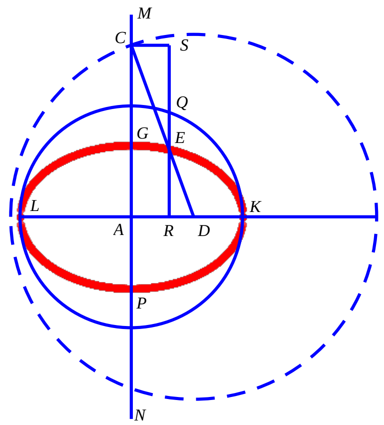


图 13 舒腾第五种椭圆规的工作原理

舒腾的第六种椭圆规与第五种类似，所不同的是钉子 E 在 CD 的延长线上，如图 14 所示。如图 15，以 A 为圆心、CE 为半径作圆，过 E 作 LK 的垂线，垂足为 R，交圆于 Q，因 $ER:QR=DE:AQ=DE:CE$，故点 E 的轨迹是由圆 A 经过压缩变换得到的。

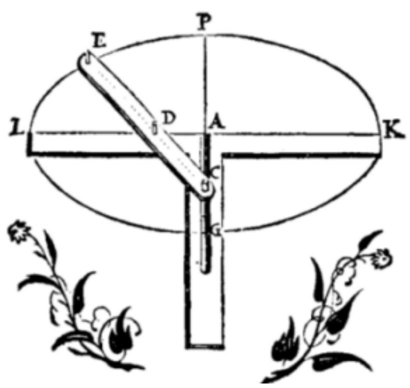


图 14 舒腾的第六种椭圆规

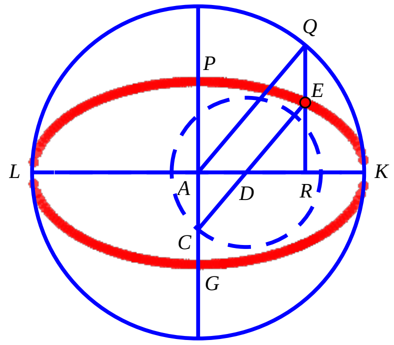


图 15 第六种椭圆规的工作原理

3 双曲线规

根据双曲线的第一定义，舒腾设计了两种双曲线规。第一种如图 16 所示，直杆 FG 的一端固定于点 F 处（可绕 F 转动），直杆 DC 固定于点 C（可绕 C 转动），直杆 DG 的两端分别用铰链固定于点 D 和 G，$DG=CF$，$FG=DC$，FG 和 DC 的延长线上带有滑槽。于是，在 FG 和 DC 相交处用笔带动二杆，笔尖所画出的轨迹即为双曲线的左支。类似地可画出双曲线的右支。

我们可用几何画板来实现第一种双曲线规的作图法。如图 17，已知线段 CF，以 F 为

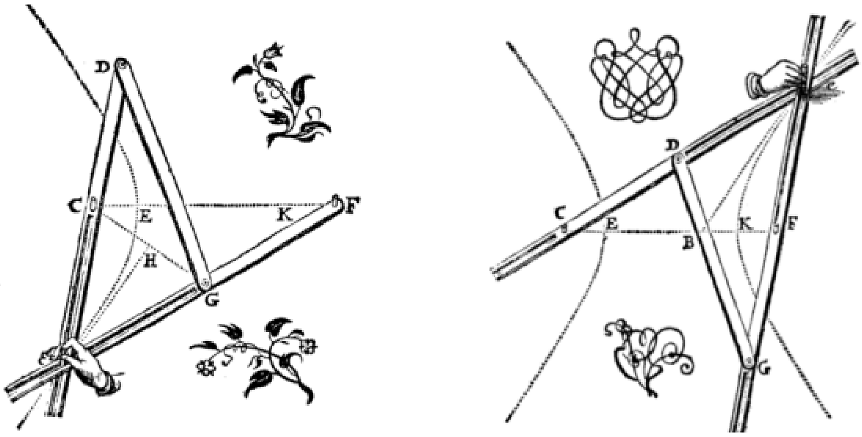


图 16 舒腾的第一种双曲线规

心，定长为半径作圆。在圆上任取一点 G，联结 CG，作 CG 的垂直平分线，交 FG 延长线于点 P，当点 G 在圆上运动时，点 P 的轨迹即为双曲线。

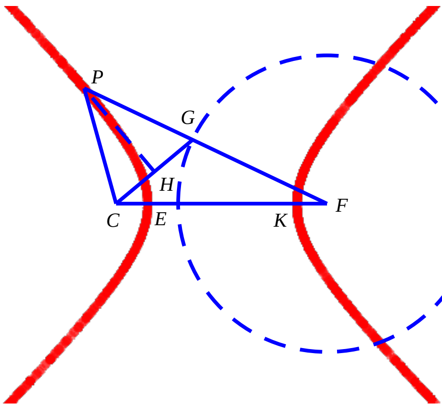


图 17 用几何画板实现舒腾第一种双曲线规的作图法

舒腾的第二种双曲线规如图 18 所示：四根等长的直杆用铰链首尾相连，构成菱形 $MDLF$，固定点 F（可绕 F 转动），直杆 CD 固定于点 C（可绕 C 转动），并与菱形连于 D。DC 延长线部分带有滑槽。另一根带有滑槽的直杆 NO 过菱形的顶点 M 和 L。在直杆 DC 与 NO 相交处用笔带动二杆，则笔尖画出的曲线即为双曲线。

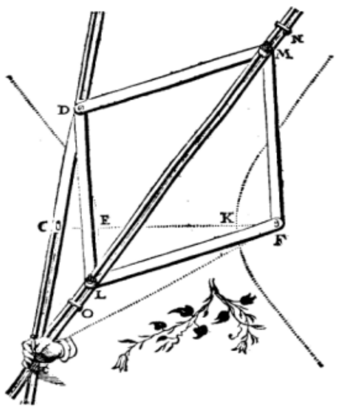


图 18 舒腾的第二种双曲线规

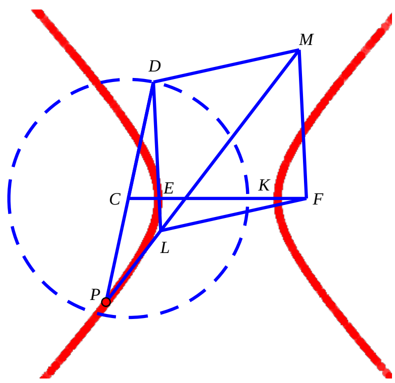


图 19 用几何画板实现舒腾第二种双曲线规的作图法

几何画板作图如图 19 所示，在线段 CF 上，以 C 为圆心，定长（小于 CF）为半径画圆，在圆上任取一点 D，以 F 和 D 为相对顶点作菱形 $DLFM$，对角线 ML 与 DC 的延长线交于点 P.。则当 M 在圆上运动时，点 P 的轨迹即为双曲线。

4 抛物线规

舒腾首先演示了抛物线的一种画法。如图 20，直杆 GI 垂直于横杆 EG，且可沿 EG 滑动。细绳的一端固定于点 B。当竖杆 GI 沿横杆滑动时，拉紧细绳，保持 $DG = DB$，于是，点 D 的轨迹即为抛物线。用几何画板作图时，联结 BG，作 BG 的垂直平分线，与 GI 交于 D。当点 G 在横线上运动时，点 D 的轨迹即为抛物线，如图 21 所示。

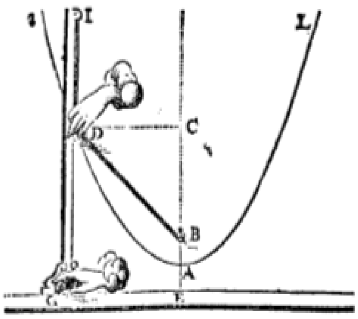


图 20 抛物线的画法

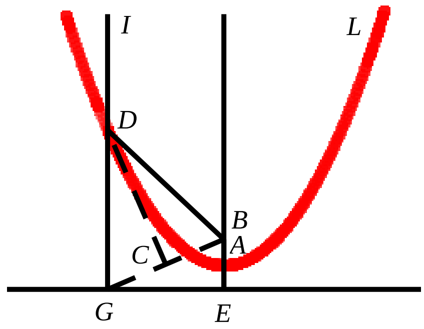


图 21 用几何画板作抛物线

为了实现上述画法，舒腾设计了一种抛物线规，如图 22 所示。带有滑槽的纵杆 GI 与横杆 EG 垂直，且端点 G 可沿横杆 EG 滑动。四根等长的杆用铰链首尾相连，构成菱形 $FBHG$，其中点 B 为固定点（可绕 B 转动）。带有滑槽的直杆 FK 一端固定于点 F 处（可绕 F 转动），一端经过点 H。FK 与 GI 交于点 D，则 GI 沿横杆 EG 运动时，点 D 的轨迹即为抛物线。利用几何画板作图如图 23 所示，以定点 B 和动点 G 为相对顶点作菱形 $FBHG$，作对角线 FH 并延长交 EG 的垂线 GI 于点 D，拖动点 G，则直线 FH 和 GI 的交点 D 的轨迹为抛物线。

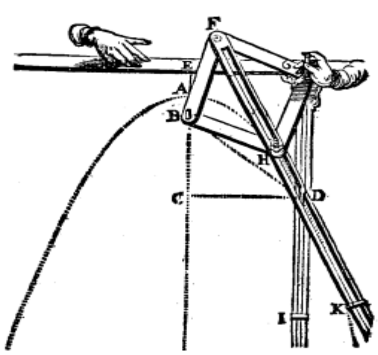


图 22 舒腾的抛物线规

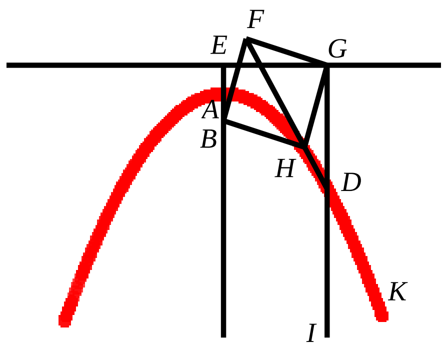


图 23 用几何画板实现舒腾抛物线规的作法

5 若干启示

在数学文化的教育价值日益受到重视的今天，我们可以将舒腾的圆锥曲线规用于圆锥曲线概念与方程的教学。

首先，可以让学生复制舒腾的圆锥曲线规，加深对圆锥曲线定义的理解。

其次，可以以舒腾的圆锥曲线规为素材，编制一些数学问题。冯马南已做过尝试[2]，为我们带来了很多启示。例如，给出舒腾的第三、四、五、六种椭圆规，让学生解决以下问题：（1）建立椭圆的参数方程；（2）用解析几何的方法建立椭圆的标准方程；（3）求出椭圆的焦距，并用几何作图法找出焦点；（4）可以让学生给椭圆下一个新的定义。

再次，教师在课堂上利用几何画板去展示舒腾圆锥曲线规的作图法，培养学生直观想象素养。

最后，教师可以制作微视频，介绍舒腾的各种椭圆规及历史背景，在课堂上播放微视频，并让学生讨论：为什么古代数学家会不遗余力地去制作圆锥曲线规？让学生了解圆锥曲线知识在解析几何中的地位[8]，并走进古代数学家的心灵之中，感受他们的聪明才智，体会数学背后的人文精神，感悟数学的文化价值。

参考文献

[1] van Schooten, F. *Exercitationum Mathematicarum* [M]. Lvgd Batav: Johannis Elsevirii, 1657, 321-361.

[2] van Maanen, J. Seventeenth instruments for drawing conic sections [J]. *The Mathematical Gazette*, 1992, 76 (476): 222-230

[3] 徐章韬, 汪晓勤. 从机械圆锥曲线规到电子圆锥曲线规[J]. 数学通报, 2016, 55(03): 54-57; 59.

[4] 吴骏, 汪晓勤. 数学史融入数学教学的实践:他山之石 [J]. 数学通报, 2014, 53(02):13-16, 20.

[5] 汪晓勤, 王苗, 邹佳晨. HPM 视角下的数学教学设计:以椭圆为例[J]. 数学教育学报, 2011, 20(05): 20-23.

[6] 陈锋, 王芳. 基于旦德林双球模型的椭圆定义教学[J]. 数学教学, 2012, (04): 5-8

[7] 汪晓勤. 椭圆第一定义是如何诞生的[J]. 中学数学月刊, 2017, (06): 28-31.

[8] 汪晓勤. 平面解析几何的产生(四)[J]. 中学数学教学参考, 2008, (11): 56-59.

美英早期平面几何教科书中的垂径定理 *

王娟　汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

垂径定理是初中平面几何最重要的定理之一。学生在小学阶段已经掌握了圆的周长与面积公式，到了初中阶段，垂径定理是研究圆的性质的重要工具。《义务教育数学课程标准》（2011 年版）要求学生能“探索并证明垂径定理”，并通过尺规作图完成“过不在同一直线的三点作圆，作三角形的外接圆、内切圆”等操作[1]。

目前，沪教版、人教版、浙教版、苏教版、北师大版初中数学教科书对垂径定理的处理方式为：在引入上，前四种教科书设计了翻折圆形纸片的探究活动，而北师大版教科书通过寻找几何图形的等量关系来引导学生发现圆的对称性，然后进一步引出垂径定理；在应用上，除苏教版外的四种教科书均设计了“求赵州桥桥拱半径”的问题，其中北师大版还将《九章算术》中的“圆材埋壁”问题设置为习题。已有教学设计大都采用与现行教科书相似的方式来引入新课，在练习与应用上除了赵州桥等个别例子，很少涉及数学史[2-5]。迄今为止，人们几乎没有看到过有关垂径定理的历史研究，更不必说 HPM 视角下垂径定理的教学案例了。

为了开展垂径定理的 HPM 课例研究，我们需要深入了解该定理的历史，从中获取教学素材，启迪教学设计思路。为此，我们聚焦该定理，对早期美英平面几何教科书进行了详细的考察，试图回答以下问题：关于垂径定理，美英早期平面几何教科书中给出了哪些表述形式以及证明方法？定理及其推论在数学和生活中各有哪些应用？历史研究对垂径定理的教学有何启示？

2 研究对象

从有关数据库中选取 1700-1959 年间出版的 102 种美英平面几何教科书作为研究对象。102 种教科书中，80 种教科书出版于美国，22 种出版于英国。具体年代分布信息见表 1。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同教科书。

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地（A8）项目“数学课程与教学中落实立德树人研究”系列论文之一。

表 1 102 种教科书的具体信息

出版年代	英国	美国	小计
1700-1799	8	1	9
1800-1899	13	41	54
1900-1959	1	38	39
合 计	22	80	102

我们从形式和内容两个方面来考察平面几何教科书关于垂径定理的呈现方式。形式上，考察教科书如何表述垂径定理，是否将其作为一条定理，与现行教科书中垂径定理的表述有何不同。内容上，考察垂径定理的证明与应用，从中分析教科书对该定理的认识。

3 垂径定理的表述形式

早期平面几何教科书中，垂径定理主要以四种方式呈现：作为一个定理（87 种，占 85%）、作为其他定理的推论（6 种，占 6%）、作为问题探究的结论（4 种，占 4%）、作为隐含的定理（5 种，占 5%，即只有垂径定理的推论和应用，但并未涉及垂径定理本身）。

在国内五种现行教科书（人教版、苏科版、沪教版、北师大版、浙教版）中，垂径定理的具体内容是：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的两条弧。定理包含两个部分：

- 第一部分：垂直于弦的直径平分弦；
- 第二部分：垂直于弦的直径平分弦所对的两条弧。

在 87 种将垂径定理视为定理的教科书中，23 种只给出垂径定理的第一部分，64 种给出垂径定理的完整部分。

另外，关于垂径定理中的“垂径”，早期教科书中有 4 种不同的称谓：“垂直于弦的直径”、“垂直于弦的半径”、“垂直于弦且过圆心的直线”、“圆心到弦的垂线段（即弦心距）”。

4 垂径定理的证明

为便于阅读，在梳理早期教科书中垂径定理的证明方法时，将定理第一部分（弦被平分）和第二部分（弧被平分）的证明分开整理统计。

4.1 “弦被平分”的证明

考察发现，102 种教科书中，有 69 种给出了垂径定理第一部分的证明，所用方法可分

成 4 类：全等三角形法（42 种，占 61%）、等腰三角形法（19 种，占 27%）、相似三角形法（4 种，占 6%）和实验操作法（4 种，占 6%）。

4.1.1 全等三角形法

“弦被平分”主要通过全等三角形来证明。如图 1，在圆 C 中，由$\Delta ADC\cong\Delta BDC$，得 $AD=BD$。而关于$\Delta ADC\cong\Delta BDC$ 的证明，29 种教科书利用了 HL 定理，9 种教科书利用了 AAS 定理，3 种教科书利用了 SAS 定理，1 种教科书利用了特殊的 SSA 定理（两个三角形的两边和其中一边的对角对应相等，且它们同为直角三角形、锐角三角形或钝角三角形），具体证明见表 2。

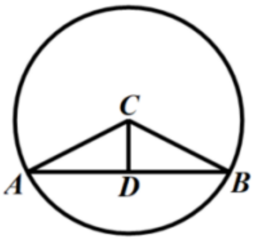


图 1 全等三角形法

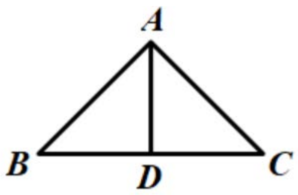


图 2 等腰对等角

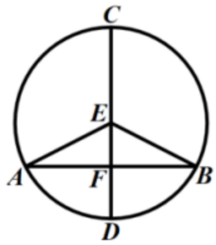


图 3 等腰三角形法

表 2 $\Delta ADC\cong\Delta BDC$ 的证明

依据的定理	证明过程
HL	$AC=BC$，DC 为公共边，故$\Delta ADC\cong\Delta BDC$[6]。
AAS	$\angle ADC=\angle BDC=90°$，$\angle CAB=\angle CBA$，$CD$ 为公共边，故$\Delta ADC\cong\Delta BDC$[7]。
SAS	$\angle ADC=\angle BDC=90°$，$\angle CAB=\angle CBA$，故$\angle ACD=\angle BCD$。又因 $CA=CB$，CD 为公共边，故$\Delta ADC\cong\triangle BDC$[8]。
特殊的 SSA	$CA=CB$，$\angle CAD=\angle CBD$，CD 为公共边，所以$\Delta ADC\cong\Delta BDC$[9]。

值得说明的是，上述证明过程用到等腰三角形的“等腰对等角”这一性质，早期教科书给出了两种证明方法：一种沿用欧几里得《几何原本》中的证明[7]，另一种如图 2 所示，已知等腰ΔABC，$AB=AC$。过点 A 作$\angle BAC$ 的角平分线，交 BC 于点 D，则根据 SAS 定理可证$\Delta ABD\cong\Delta ACD$，所以$\angle ABD=\angle ACD$[8]。

4.1.2 等腰三角形法

如图 3 所示，在圆 E 中，直径 CD 垂直于弦 AB，半径 $EA=EB$，ΔAEB 为等腰三角形。因 EF 为底边 AB 的高，故 EF 是底边 AB 的中线、顶角$\angle AEB$ 的平分线，故 $AF=FB$[10]。上

述证明直接运用了等腰三角形“三线合一”的性质。

4.1.3 相似三角形法

早期教科书把三个角分别对应相等的两个三角形称为等角三角形，也就是今日教科书所称的相似三角形。这种证明利用了等角三角形的性质：若等角三角形有两边对应相等，则这两个三角形第三边也对应相等。

先用反证法证明该性质：如图 4，ΔABC 和ΔDEF 是等角三角形，并且 $AB = DE$，$BC = EF$，假设 $AC \neq DF$，不妨设 $AC > DF$，在 AC 上取一点 G，使 $AG=DF$，此时$\angle ABG < \angle ABC$。联结 BG，在ΔABG 和ΔDFE 中，$AG=DF$，$AB=DE$，$\angle GAB=\angle FDE$，根据 SAS 定理，$\Delta ABG \cong \Delta DEF$，所以$\angle ABG =\angle DEF$，又因为$\angle ABC=\angle DEF$，可得$\angle ABG=\angle ABC$，矛盾。说明假设不成立，同理可证 $AC < DF$ 也不成立，因此 $AC = DF$。

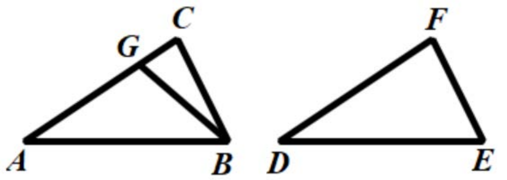


图 4 等角三角形的性质

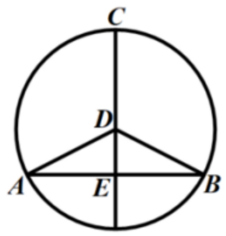


图 5 等角三角形法

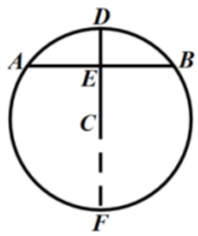


图 6 翻折法

再用以上结论来证明“弦被平分”。如图 5，在圆 D 内，直径 CE 垂直于弦 AB，易知ΔAED 和ΔBED 是等角三角形，因 $AD = DB$，且 DE 为公共边，故 $AE = BE$[11]。

4.1.4 实验操作法

有 4 种教科书通过实验操作（沿直径翻折圆形）的方式来证明“弦被平分”。如图 6 所示，在圆 C 中，半径 $CD \perp AB$，延长 DC 交圆周于点 F。将圆 C 沿直径 DF 进行翻折，半圆 DBF 与半圆 DAF 将会重合。又因 $CD \perp AB$，所以翻折之后直线 EB 与直线 EA 也将重合。

关于 $EB=EA$，4 种教科书的证明互有不同，见表 3。从表中可见，4 种教科书的证明或

表 3　4 种教科书用实验操作法证明“弦被平分”

编者（年份）	教科书	关于 ***EB=EA*** 的证明
Perkins (1855)	《平面与立体几何》[12]	无叙述，直接得到 $EB=EA$
Tappan (1877)	《平面与立体几何专论》[13]	因点 B 落在点 A 处，故 $EB=EA$
Olney (1877)	《初等几何专论》[14]	因半径 CA 与 CB 重合，故线段 EB 与 EA 重合，即 $EB=EA$
Wormell (1822)	《现代几何》[15]	无叙述，直接得到点 B 与 A 重合

多或少都存在瑕疵。Perkins 和 Wormell 由线段所在直线重合直接推出线段相等，逻辑不通。Tappan 的证明似乎有逻辑循环之嫌。实际上“点 *B* 落在点 *A* 处”是弦 *AB* 被点 *E* 平分的结论，不能把它作为证明 *EA*=*EB* 的已知条件。Olney 由半径 *CA*=*CB* 得出 *EB*=*EA*，可以合理猜测编者利用了 HL 定理、SAS 定理或勾股定理中的某一个，但并未指明。

4.2 “弧被平分”的证明

46 种教科书证明了垂径定理的第二部分。其中 37 种利用定理“在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等”；3 种利用定理“在同圆或等圆中，等弦所对的弧相等”；6 种采用了实验操作（翻折圆形）的方式。

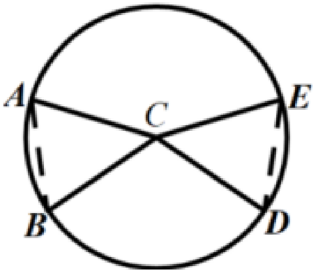


图 7“等角对等弧”的证明

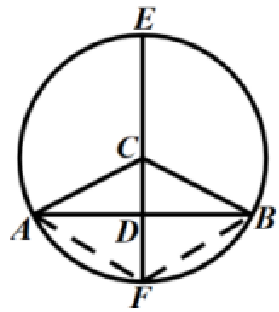


图 8“弧被平分”的证明

4.2.1 等角对等弧

如图 7，在Δ*ACB* 和Δ*DCE* 中，*AC*=*DC*，*BC*=*EC*，∠*ACB*=∠*DCE*，根据 SAS 定理，Δ*ACB*≌Δ*DCE*。如果将扇形 *ACB* 放置于扇形 *DCE* 之上，则点 *A* 与点 *D* 重合，点 *B* 和点 *E* 重合，即 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{DE}$ 的两个端点重合。因为 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{DE}$ 上所有的点到圆心 *C* 的距离相等，所以 $\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{DE}$ 上所有的点都将重合，可得 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DE}$。因此，如图 8，由∠*ACD*=∠*BCD* 和“等角对等弧”，可得 $\overset{\frown}{AB}$ 或 $\overset{\frown}{AEB}$ 被直径 *EF* 平分。

4.2.2 等弦对等弧

如图 7，在Δ*ACB* 和Δ*DCE* 中，*AC*=*DC*，*BC*=*EC*，*AB*=*DE*，根据 SSS 定理，Δ*ACB*≌Δ*DCE*，同上，可得 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DE}$。在图 8 中，联结 *AF*、*BF*，通过证明Δ*ADF*≌Δ*BDF* 或由勾股定理知 *AF*=*BF*,然后由“等弦对等弧”知，$\overset{\frown}{AB}$ 和 $\overset{\frown}{AEB}$ 被直径 *EF* 平分。

4.2.3 沿直径翻折

如图 8 右图，将圆 C 沿直径 EF 翻折，表 3 给出了 6 种教科书在进行翻折操作之后的主要推导过程。由表 4 可知，前三种给出的推导过程较为严谨，而 Perkins、Tappan、Olney 的证明过程不够清晰，并未给出使“弧被平分”的根本原因。

表 4　6 种教科书实验操作法证明“弧被平分”

编者（年份）	教科书	主要证明过程
Robinson (1851) Brooks (1865) Hunter (1872)	《几何基础》[6] 《标准初等几何》[9] 《平面几何基础》[16]	$\overset{\frown}{AF}$ 与 $\overset{\frown}{BF}$ 的端点重合，因 $\overset{\frown}{AF}$ 和 $\overset{\frown}{BF}$ 的任意一点到圆心 C 的距离相等，故 $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BF}$
Perkins (1855)	《平面与立体几何》[12]	无叙述，直接得到 $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BF}$
Tappan (1877)	《平面与立体几何专论》[13]	因点 B 落在点 A 处，故 $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BF}$
Olney (1877)	《初等几何专论》[14]	因半径 CA 与 CB 重合，故线段 DA 和 DB 重合，于是得 $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{BF}$

5 垂径定理的应用

垂径定理及其推论是证明线段相等、角相等、垂直关系的重要依据，同时也为进行圆的有关计算和作图提供了方法和依据。不管在数学内部还是外部，垂径定理都有广泛的应用，下面介绍早期教科书中的一些典型例题。

5.1 数学上的应用

5.1.1 尺规作图

垂径定理在数学上的第一类应用是尺规作图。

例 1：过不共线三点 A、B 和 C，作圆[17]。

根据命题“垂直平分弦的直线过圆心”，分别作线段 AB 和 BC 的垂直平分线，其交点 O 即所作圆的圆心。

例 2：平分给定的一段弧 $\overset{\frown}{AB}$ [17]。

根据命题“垂直平分弦的直线平分弦所对的弧”，作线段 AB 的垂直平分线，与弧 AB 交于点 E，则点 E 平分 $\overset{\frown}{AB}$。

例 3：平分给定角$\angle AOB$[17]。

以 O 为圆心，以任意半径作弧，与$\angle AOB$ 的两边分别交于点 A、B，联结 AB，根据命题“垂直于弦且过圆心的直线平分弦所对的圆心角”，过 O 向 AB 所引垂线即为$\angle AOB$ 的平分线。

5.1.2 几何证明

垂径定理在数学上的第二类应用为几何证明。

例 4：在圆 O 内，弦 AB 与直径 CD 相交，过点 D、C 分别做 AB 的垂线，垂足分别为点 E、F，证明 $AE = BF$[18]。

如图 9，延长 DE 与圆 O 交于点 G，联结 CG，过圆心 O 作 CG 的垂线，垂足为 M，与弦 AB 交于 N，则四边形 $GEFC$ 为矩形。因 $MG=MC$，$AN=NB$，故 $AE=BF$。

例 5：BP 为圆 O 的直径，A 为圆 O 上任一点，联结 AP，过 O 作 $OR//AP$，交圆周于点 R，证明 R 平分 $\overset{\frown}{AB}$[19]。

如图 10，因$\angle BAP=90°$，$OR//AP$，故 $OR\perp AB$，因此 OR 平分 AB 和 $\overset{\frown}{AB}$。

例 6：证明垂直平分弦的直线过圆心[20]。

如图 11，CE 为弦 AB 的垂直平分线，证明圆心在 CE 上。假设圆心不在 CE 上，则取 CE 外一点 F 为圆心。联结 EF、FA、FB，易知$\Delta FAE\cong\Delta FBE$，从而 $EF\perp AB$，故 EF 与 CE 重合，假设不成立。

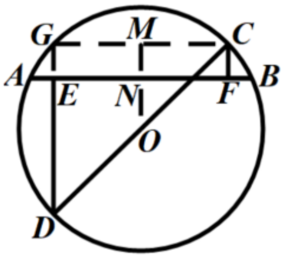


图 9 例 4 图

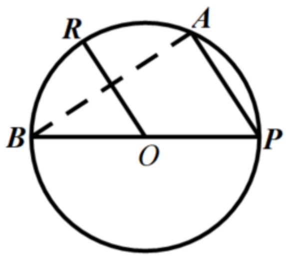


图 10 例 5 图

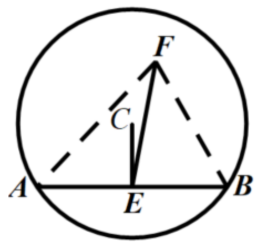


图 11 例 6 图

5.1.3 轨迹确定

垂径定理的第三类应用是轨迹问题的求解。

例 7：确定圆内任意一组平行弦的中点形成的轨迹[21]。

如图 12，任取其中一条弦 AB，其中点为 C，联结 OC 并向两端延长，与圆周交于点 E、F，则 $EF \perp AB$，故 EF 垂直于这组平行弦，由垂径定理知，EF 平分这组平行弦。所以，满足该条件的轨迹是垂直于这组平行弦的直径。

例 8：确定过两定点 A、B 的圆的圆心形成的轨迹[21]。

如图 13，任意取一过点 A 和 B 的圆 O_1，则点 O_1 在线段 AB 的垂直平分线 l 上。任取 AB 垂直平分线上的一点 O_2，因 $O_2A= O_2B$，故以 O_2 为圆心、O_2A 为半径的圆过定点 A、B。所以，满足该条件的轨迹是两定点所确定线段的垂直平分线。

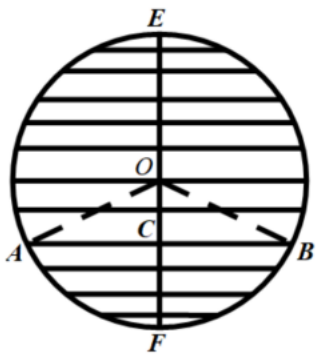


图 12 例 7 图

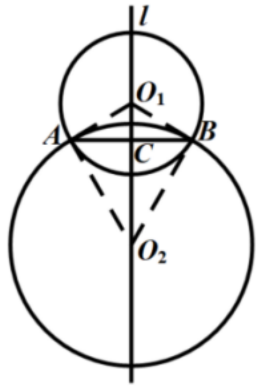


图 13 例 8 图

5.2 在现实生活中的应用

5.2.1 建筑工程上的应用

例 9：确定圆心的仪器

木匠或建筑师在作业时经常需要确定某些圆形物体的圆心，Strader（1927）给出了一种用来确定圆心的仪器[19]。如图 14，长杆 OC 平分$\angle AOB$，且 $OA=OB$。将该仪器平置于需要测量的圆形物体之上，当点 A 和 B 恰好与圆周接触时，长杆 OC 过圆心，标记长杆所在直线 OC，转换任意角度，重新放置仪器，再次标记长杆所在直线 O_1C_1，则两直线的交点即为圆形物体圆心。

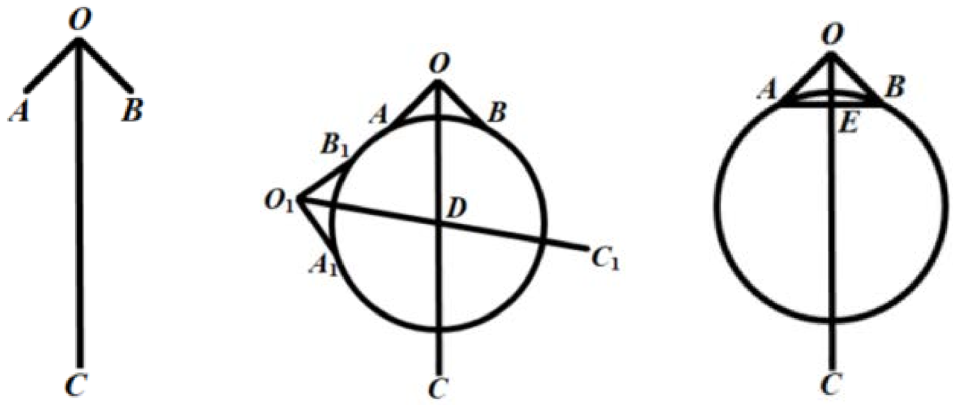


图 14 确定圆心的仪器

事实上，联结 AB，与 OC 交于点 E，易知 $AE=EB$，$\angle AEO=\angle BEO=90°$。根据垂径定理的推论（垂直平分弦的直线过圆心），可知圆心 D 在直线 OC 上。二次测量之后，直线 OC 和 O_1C_1 交于点 D。

例 10：设计窗子

一位建筑师计划设计一扇窗子，底部是矩形，上部是弓形，并且弓形的弦长等于矩形的宽。如果矩形长 AD 为 10 英尺，宽 AB 为 5 英尺，窗高 MF 为 11.8 英尺，求窗子弓形部分弧长所在圆的半径[20]。

如图 15，弓形 AMB 为圆 O 的一部分，在圆 O 中，由垂径定理可知，OM 平分弦 AB，在 $Rt\Delta AOF$ 中，根据勾股定理，$OA^2=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(OM-MF\right)^2$，计算得半径 $OA\approx 2.64$ 英尺。

例 11：确定弧形铁轨半径

一位铁路测量员想确定一段弧形铁轨所在圆的半径，他先测量了铁轨上两点 A 和 B 之间的距离，然后测量了弦 AB 中点 M 到弧 AB 中点 C 之间的距离 CM，假如 AB 为 100 英尺，CM 为 2 英尺，请计算这段弧形铁轨所在圆的半径[22]。

如图 16，联结 CM 并延长，在延长线上取一点 O 为圆心，联结 OA、OB，则有 $OA=OB$，$CO\perp AB$，$MA=MB$，设圆 O 半径为 r，在 $\mathrm{Rt}\Delta AMO$ 中，由勾股定理得 $r^2=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(r-CM\right)^2$，计算得半径 $r=626$ 英尺。本题涉及垂径定理的推论：过弦的中点及其所对弧的中点的直线过圆心，并且垂直于弦。

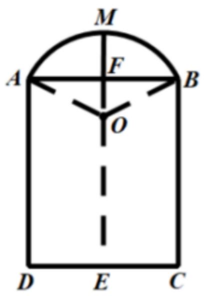


图 15 设计窗子

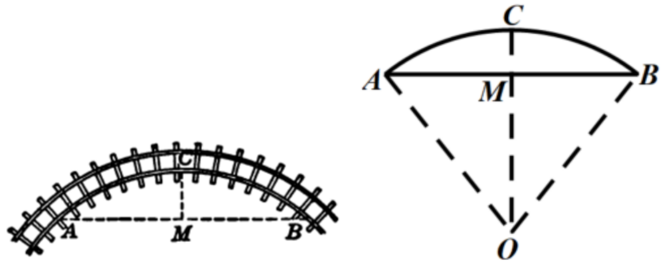


图 16 确定弧形铁轨半径

5.2.2 测量上的应用

例 12：测量地球半径

Farnsworth（1933）给出了一个简单且有趣的测量地球半径的方法：取三根长度均为 h 的木杆，在沙滩上等间距插放，使三根木杆处在同一条直线上，由于地球表面是一个曲面，所以中间的一根木杆会比两边的木杆略高一点[20]。

如图 17 所示，三根杆的顶端分别是点 A、B、C，测量员站在 A 杆处水平测望 C 杆，视线为 AC，记录视线 AC 落在 B 杆上的位置 D，测量 BD 的距离为 h_1，AD 的距离为 d。显然，点 D 平分线段 AC，且 $BD \perp AC$，根据垂径定理的推论（垂直平分弦的直线过圆心）可知，球心 O 位于 BD 的延长线上。

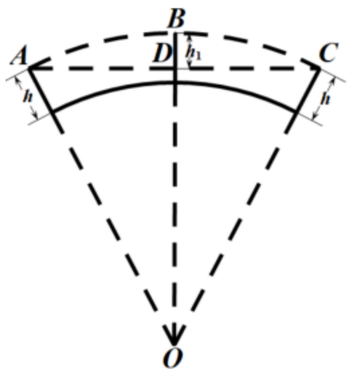


图 17 测量地球半径

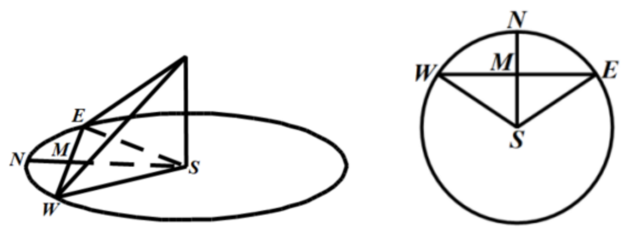


图 18 确定子午线

设地球半径为 R，则 $OA = OC = R + h$，$AD = \frac{1}{2}AC$，$OD = R + h - h_1$，在 RtΔAOD 中，$AO^2 = AD^2 + OD^2$，再代入具体数值，可求出半径 R 的值。

例 13：确定子午线

Stone（1916）提出一种通过太阳的等距投影确定子午线的方法。如图 18 所示，一根铅垂线悬挂在点 S，随着一天中太阳的移动，铅垂线的影子从 SW 移动到 SE。观察者在正午前后的等间隔时间点（如上午 10:30 和下午 1:30）分别进行两次观测，同时记下铅垂线影子所在直线 SW 和 SE，然后在地面上确定以点 S 为圆心的圆，直线 SW 和 SE 与圆 S 交于点 W 和

点 E。在冬至或夏至这天，WE 正好是一条东西方向的直线。此时，如果取线段 WE 的中点 M，则有 SM 垂直于 WE，SM 所在的直线即为子午线[23]。这里应用了垂径定理的推论：平分弦（非直径）的直径垂直于弦。

6 结论与启示

以上我们看到，与今天的教科书相比，早期教科书呈现的垂径定理在形式和内容上都更为丰富。但由于受《几何原本》的影响，18 到 19 世纪上半叶的教科书大多只对垂径定理进行严格的演绎证明，几乎不涉及定理的应用。Perkins（1855）首次采用实验操作的方法证明垂径定理[12]，尽管证明过程有瑕疵，但说明这个时期的部分教科书编写者已经开始重视实验几何了。到了 20 世纪初，受培利运动的影响，数学教育开始摆脱欧几里得的束缚，关注几何的实际应用，大部分的教科书都开始提供与垂径定理有关的应用和练习。美英早期平面几何教科书为 HPM 视角下的垂径定理教学提供了丰富的教学素材和教学启示。

（1）构建知识之谐。在垂径定理的教学过程中，需要学生综合运用轴对称、勾股定理、全等三角形、相似三角形、等腰三角形、轨迹、尺规作图等知识和技能，各知识点内容联系紧密，有利于帮助学生构建和谐完整的平面几何的知识系统。

（2）彰显方法之美。从“弦被平分”到“弧被平分”，早期教科书呈现了丰富多样的证明方法，在教学过程中教师可以让学生分组讨论，自主探究垂径定理的证明方法，以圆这一几何图形为载体，让学生感受数学证明的方法之美。

（3）实现能力之助。在定理的证明方面，无论是演绎推理还是实验，都对逻辑推理素养的培养有一定的价值。在定理的应用方面，例 12 从“球”到“圆”的转化，例 13 从立体几何到平面几何的过渡，不仅有利于学生建立平面与立体之间的联系，而且有利于学生直观想象素养的发展。

（4）展示文化之魅。在建筑、工程、测量等领域，垂径定理发挥着不可或缺的作用。例 9-13 等体现了垂径定理在现实生活中的应用价值，有利于学生感受数学与现实生活之间的密切联系，感悟数学文化的多元性。

（5）达成德育之效。由“垂直”到“平分”显而易见，但几何学习不能仅仅满足于直观。早期教科书对垂径定理的探求和证明体现了数学家一丝不苟、实事求是、追求完美的治学态度，有利于学生养成有条不紊、严谨有据、由因及果的思维习惯，向学生传递了数学背后的理性精神。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2011 年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社, 2011.

[2] 黄延林. 关注推理还要关注推理的阶段性——议“垂径定理”的教与学[J]. 数学通报, 2016, 55(02): 30-33.

[3] 孙芳. 过程比结果更重要——“垂径定理”教学过程及其设计反思[J]. 数学教学通讯, 2014, (25): 9-11.

[4] 杨昌兰. 基于素养立意的初中数学课堂教学设计——以“垂直于弦的直径”(第 1 课时)为例[J]. 中学数学教学参考, 2017, (30): 12-14.

[5] 陶然. 优选“数学现实”，注重变式教学——以“垂径定理”教学为例[J]. 中学数学, 2015, (20): 29-30.

[6] Robinson, H. N. *Elements of Geometry, Plane and Spherical Trigonometry, and Conic Sections*[M]. Cincinnati: Jacob Ernst, 1851: 62.

[7] Playfair, J. *Elements of Geometry*[M]. New York: E. Duyckinck, and George Long, 1824: 68-69.

[8] Rossignol, A. *Elements of Geometry*[M]. London: J. Johnson, 1787: 50.

[9] Leslie, J. S. *Elements of Geometry, Geometrical Analysis, And Plane Trigonometry*[M]. Edinburgh: J. Ballantyne and co., 1811.

[10] Brooks, E. *The Normal Elementary Geometry*[M]. Philadelphia: Sower, Barnes & Potts, 1865: 76-77.

[11] Bonnycastle, J. *Elements of Geometry*[M]. London: J. Johnson, 1789: 28-29, 77-78.

[12] Perkins, G. R. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: D. Appleton & Co., 1855: 43.

[13] Tappan, E. T. *Treatise on Plane And Solid Geometry*[M]. Cincinnati: Van Antwerp, Bragg & Co, 1877: 60-61.

[14] Olney, E. *A Treatise on Special or Elementary Geometry*[M]. New York: Sheldon & Co., 1877: 78.

[15] Wormell, R. *Modern Geometry: a New Elementary Course of Plane Geometry*[M]. London: T. Murby, 1882: 93.

[16] Hunter, T. *Elements of Plane Geometry*[M]. New York: Harper & brothers, 1872: 72-73.

[18] Thomson, J. B. *Elements of Geometry*[M]. New Haven: Durrie and Peck, 1844: 65, 69.

[19] Sykes, M. *Plane Geometry*[M]. Chicago: Rand McNally & Co., 1918: 112.

[20] Strader, W. W. *Plane Geometry*[M]. Philadelphia: The John C. Winston company, 1927: 134.

[21] Farnsworth, R. D. *Plane Geometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Co., 1933: 114, 246-247.

[22] Smith, E. R. *Plane Geometry Developed by the Syllabus Method*[M]. New York: American Book Company, 1909: 103.

[23] Mallory, V. S., Stone, J. C. *New Plane Geometry*[M]. Chicago: B. H. Sanborn & co, 1943: 334.

[24] Stone, J. C. *Plane Geometry*[M]. Chicago: B. H. Sanborn & Co., 1916: 153.

教学实践

从基本不等式到“勾股容方”*

——HPM 视角下的高三“基本不等式”复习课教学

王剑[1,2]

（1. 江苏省无锡市第一女子中学，无锡 214001; 2. 华东师大教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

复习课是高中数学教学的重要课型之一，高三复习课更是整个数学教学活动中一个重要环节[1]。高三复习课不是已学知识的简单重复和再现，而是把平时相对孤立、独立存在、带有某种规律的知识，以复述、整理、归纳等精细加工的方法串联起来，加深学生的理解[2]。由于高三复习时间紧、任务重，教师的教学模式仍然以讲授法为主，忽略了知识发生的自然过程，忽视了学生主观能动性的发挥和主体地位的体现。因此，在高三复习课中，如何处理知识的 “源”与“流”，帮助学生串联基础知识、帮助其掌握基本技能、渗透数学基本思想成了亟待解决的问题[3]。

Jankvist 认为，数学史是数学教学的指南，不仅可以帮助学生梳理知识发展脉络，加深学生的数学理解，而且可以帮助学生对比古今思想方法，拓宽学生的数学思维[4]。讲述知识的产生，将数学课堂中散落（尤其是不同领域）的知识、问题串联起来，让学生系统地理解、掌握和应用，进一步体会其背后蕴含的数学思想，让数学复习课富有德育价值，焕发勃勃生机[5]。

“基本不等式”是中学数学的重要内容，其运算基本、结构简单、关系深刻，在不等式的知识体系中具有基础性地位[6]。在高考中，对于基本不等式的考查，往往以具有实际情境的应用题出现，在高三复习中，学生所面对的有关应用题层出不穷。但是，教师很少使用数学史材料，究其原因，一方面，教师缺乏恰当的数学史料，另一方面，教师已经习惯于常规例题的讲解，很少有运用数学史、创新复习课教学方式、丰富复习课教育价值的意识。

鉴于此，本文拟从 HPM 的视角来实施高三“基本不等式”复习课教学，希望为高三复习课教学以及 HPM 课例研究提供参考。

* HPM 工作室系列课例之一。

2 史料分析

2.1 等周问题

借鉴有关文献[8]，发现古人用过周长来推断城市的大小，公元前 5 世纪著名历史学家修昔底德（Thucydides）通过绕岛航行一周所需时间来估算西西里岛大小。由此引入，可以在课堂伊始便引发学生思考，在解决古人疑惑的同时，让学生了解数学的演进。

等周问题的提出与证明，最早见于古希腊数学家芝诺多鲁斯（Zenodorous）的《论等周图形》（公元前 2 世纪）一书，书中证明了如下命题：在边数相同的等周多边形中，等边且等角的多边形面积最大。通过基本不等式解决这一问题，既回顾了知识，也解决了实际问题。

2.2 均值不等式

公元前 3 世纪，欧几里得在《几何原本》卷二中提出相当于如下恒等式的命题[9]：

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=ab+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad（a>0，\ b>0），$$

由此可得不等式

$$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad（a>0，\ b>0）$$

或

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2} \quad（a>0，\ b>0），$$

但该不等式并未见于《几何原本》。

《几何原本》卷六命题 13 给出了两条线段之间几何中项的作图法。如图 1，以线段 AB 为直径作半圆 ADB，$CD\perp AB$，OD 为半径。设 $BC=a$，$AC=b$（$a<b$），则 $CD=\sqrt{ab}$。很多教师利用图 1 来解释基本不等式：在 Rt$\triangle OCD$ 中，因 $CD<OD$，故 $\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$。当点 O

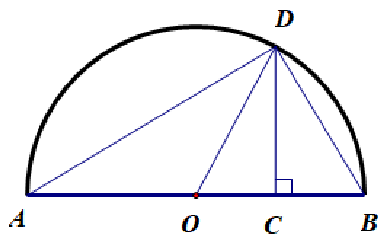


图 1 基本不等式的几何模型

与 C 重合时，$\sqrt{ab}=\dfrac{a+b}{2}$。

公元 3 世纪末，古希腊数学家帕普斯（Pappus）在欧几里得的基础上给出了更多中项的几何作图法。[10]

2.3 勾股容方

汉代数学名著《九章算术》勾股章中设题：“今有勾五步，股十二步，问勾中容方几何。”解法是：“并勾股为法，勾股相乘为实，实如法而一，得方一步。”[11]若设直角三角形的直角边分别为 a 和 b，则上述解法相当于说，与直角三角形具有公共直角的内接正方形边长为

$$d=\frac{ab}{a+b}$$

该题解法有很多[12]，有关文献[13]从勾股容方问题出发，引出了一系列均值不等式，笔者便尝试将之引入高三基本不等式复习课，探讨不等式的一般解法及基本不等式在这一问题中的应用，从而进一步联想，若正方形一边恰在直角三角形斜边（弦上容方），则正方形面积如何计算？与原问题所求正方形面积相比，哪一个较大？

3 教学设计与实施

3.1 创设情境，追本溯源

上课开始，教师展示网上拍卖岛屿的图片，吸引学生的注意。

师：我在网上看到了不少有意思的图片，比如 1 元拍海外小岛，淘宝助你做岛主！现在，假如你有 1 元钱，这两座小岛，你会拍哪一座呢？说说你的看法。

生 1：第二座，因为看上去面积比较大。（还有学生坐在下面说，她会拍第一张，因为海滩比较漂亮）（传来笑声）。

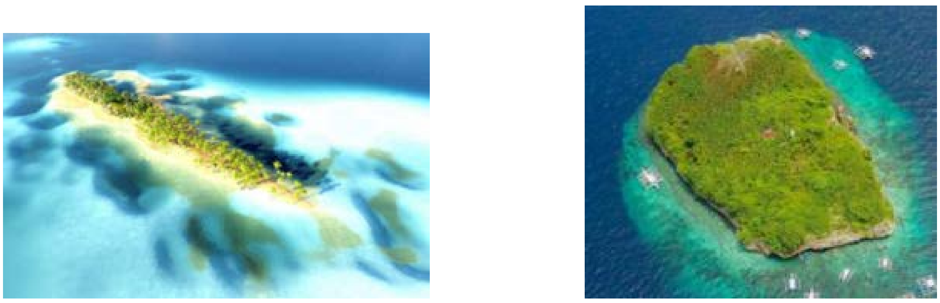


图 2 两座不同的海岛

师：看来大家非常善于发现身边的美。海岛很大，古人既没有航拍图，也无法测算精确

的岛屿面积，他们是怎么确定面积的呢？（停顿片刻）公元前 5 世纪，雅典人修昔底德测量西西里岛大小的时候，乘船绕海岸线一周，记录航行时间。在修昔底德看来，绕岛一周所花费时间越长，海岸线越长，也就说明了该岛的面积越大，同学们，你们觉得这个方法有数学依据吗？

生 2：有数学依据，海岸线的长度可以通过航行时间乘以船的速度估算出来，时间越长，说明海岸线越长，也就意味着岛的周长越长。

师：那么古人的判断方法是，周长越长的岛屿，其面积也越大。正确吗？

众生：不一定正确。

师：测量的时候还碰到一个问题，有两座岛周长相等，那么哪个面积大呢？聪明的你怎么帮他解决这个问题？

生 3：我们可以观察上面的图形，如果想象成矩形，就可以做了。

师：很好的思路，为了让这个问题更有利于我们现在解决，可以简化假设两个图形都是矩形。

问题 1：你能证明"在周长为定值的所有矩形中，面积最大的是正方形"吗？

生 4（教师板书）：设矩形长与宽分别为 a 和 b，半周长为 p，则 $p=a+b$，因为 $a>0$，$b>0$，所以 $S=ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，当且仅当 a=b 时，取得等号。也就证明了周长为定值的矩形中，面积最大的是正方形。

3.2 横纵串联，多元表征

师：不等式 $ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ 展现的是一种不等关系，那么 ab 具体比 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ 小了多少呢？

生 5：（经过半分钟思考）可以通过作差的方式来比较未知两个式子的大小，不难发现 $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-ab=\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$。

师：用作差法来比较大小，非常好。由这个等式，我们也很容易发现原不等式在 a=b 时，取得等号。这个等式也与欧几里得《几何原本》卷二命题 5 等价，在课堂中我们能与先哲的方法遥相呼应，也是极有意思的事。在教科书中还有一种几何表征（如图 3），你能回忆起

基本不等式$\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$($a$>0，$b$>0)的几何解释吗？

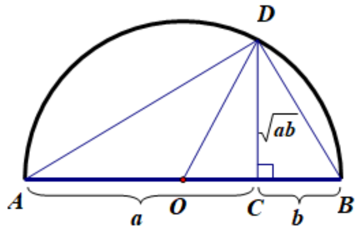


图 3 课件中展示的几何模型

生 6： $\dfrac{a+b}{2}$是圆的半径，也就是线段 OD 的长度，由射影定理不难发现线段 CD 的长为$\sqrt{ab}$，在 RtΔOCD 中，$\sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2}$，当点 D 为$\overset{\frown}{AB}$中点时，$\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$。

师： 这里我们从形的角度对基本不等式加以表征，在高二学习“推理与证明”时，我们进一步通过分析法和综合法，从不等式出发证明了基本不等式，一起来回顾一下。（PPT 展示）

表 1 两种证法的对比

分析法	综合法
要证$\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$， 只要证 $2\sqrt{ab} \le a+b$， 只要证 $0 \le a-2\sqrt{ab}+b$， 只要证 $0 \le \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$， 因为最后一个不等式成立，所以$\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$成立。	对于正数 a 和 b，有 $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0$， 即$a-2\sqrt{ab}+b \ge 0$， $\dfrac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$。

问题 2： 如果你成了某座岛的岛主，上岛之后，要建一座房子，凭海听涛，临风沐雨。要求地基为矩形，占地面积为 S，如何设计能使该矩形周长最小？

生 7： 设矩形边长分别为 x 和$\dfrac{S}{x}$，（$x>0$，$\dfrac{S}{x}>0$），周长 $p = x+\dfrac{S}{x} \ge 2\sqrt{x \cdot \dfrac{S}{x}} = 2\sqrt{S}$，当且仅当$x=\dfrac{S}{x}$时，取得等号。也不难发现矩形面积一定时，正方形周长最小。

师：（小结）运用基本不等式需注意“一正二定三相等”，往往看到和为定值或者积为定值时，想到使用基本不等式，有“和定积最大，积定和最小”。

3.3 勾股容方，古题新探

问题 3：假设在建好的房子附近，有一直角三角形区域，其直角边分别为 5m 和 12m，为了美化环境，你要在其中开辟一个内接正方形区域种植花草，求该正方形的面积。据此提出一个不等式问题，先试着在小组中讨论解决。

教师已在课前发放的问卷中，让学生解决《九章算术》中的“勾股容方”问题（问题 3 即由该问题改编而成），并对该问题进行改编，提出新的数学问题。让学生课前完成，目的有二：一是通过作答情况了解学生对于基础知识的储备，便于调整例题难度；二是能够了解学生对问题的洞察力，培养问题提出的能力。在实际教学中，遵循从特殊到一般的思路进行探索，选择学生提出的问题作为例题，更能激发她们的学习欲望。

师：我们一起来听一听，这位同学是怎么解决课前问题的？

生 8：要求正方形面积，就是先求边长，对于图 4，四边形 $DEGF$ 为正方形，边长为 x，$AF=12-x$，$BE=5-x$，因为△ADF∽△DBE，所以有 $\frac{AF}{DE}=\frac{DF}{BE}$，即

$$\frac{12-x}{x}=\frac{x}{5-x},$$

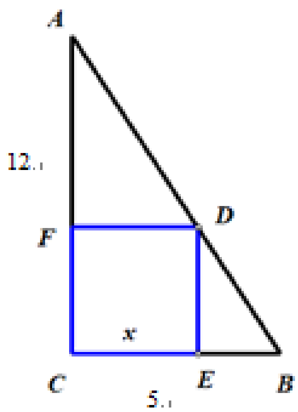


图 4 学生作出的勾股容方图

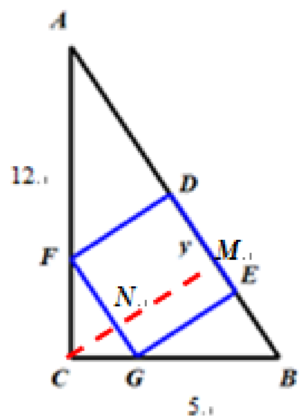


图 5 学生对弦上容方的解法

解得 $x=\frac{60}{17}$。对于图 5，也可以通过类似方法作 $CM\perp AB$ 交 AB 于点 M，交 FG 于点 N，由 $AC\times BC=CM\times AB$，得 $CM=\frac{60}{13}$，又△CFG∽△CAB，得 $\frac{CN}{CM}=\frac{FG}{AB}$，即

$$\frac{\frac{60}{13}-y}{\frac{60}{13}}=\frac{y}{13},$$

解得 $y=\frac{780}{229}$，x 和 y 的平方即分别为两个正方形的面积。

师：推导和计算非常缜密，叙述也很有条理。当然也有同学是通过三角的方法进行运算的，在图 4 中，$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{DF}{AF}=\frac{BE}{DE}=\frac{5}{12}$，可得 $AF=\frac{12}{5}x$，$FC=12-\frac{12}{5}x=x$，解得 $x=\frac{60}{17}$。在直角三角形中，运用边与角的关系往往能简化运算。接下来我们再来看一看大家都提出了哪些问题？

新问题 1：如图 4，两条直角边分别为 5 和 12 的直角三角形 ABC 中，点 D 在线段 AB 上运动，矩形 $DECF$ 的面积最大值为多少？

解：设 $CF=y$，$DF=x$，因为 $AC=12$，所以 $AF=12-y$。由△ADF∽△DBE，得 $\frac{AF}{AC}=\frac{DF}{CB}$，即

$$\frac{12-y}{12}=\frac{x}{5},$$

于是得

$$12x+5y=60\text{。}$$

因 $x>0$，$y>0$，故有

$$12x+5y\geq 2\sqrt{12x\cdot 5y}=2\sqrt{60xy},$$

当且仅当 $12x=5y$ 时取等号，此时矩形 $DECF$ 的面积最大，最大值为 15。

注：80%的学生提出这一问题并给予了解答，相信学生已在课前讨论交流，所以课堂中仅予以展示，简单介绍解题思路，并未让学生详答。

新问题 2：如图 4，正方形边长为 a，若点 A 在 CF 延长线上运动，直线 AD 交 CE 延长线于点 B，是否存在 $S_{\triangle ABC}$ 的最值，是最大值还是最小值？

生 9：建立以 C 为原点，CE、CA 所在直线分别为 x，y 轴的直角坐标系，易知 $k<0$，设斜边 AB 所在直线的方程为 $y=k(x-a)+a$，则 $A(0,-ka+a)$，$B\left(a-\frac{a}{k},0\right)$，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC$$

$$=\frac{1}{2}(-ka+a)\left(a-\frac{a}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left(2-k-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}a^2\left[2+(-k)+\left(-\frac{1}{k}\right)\right]$$

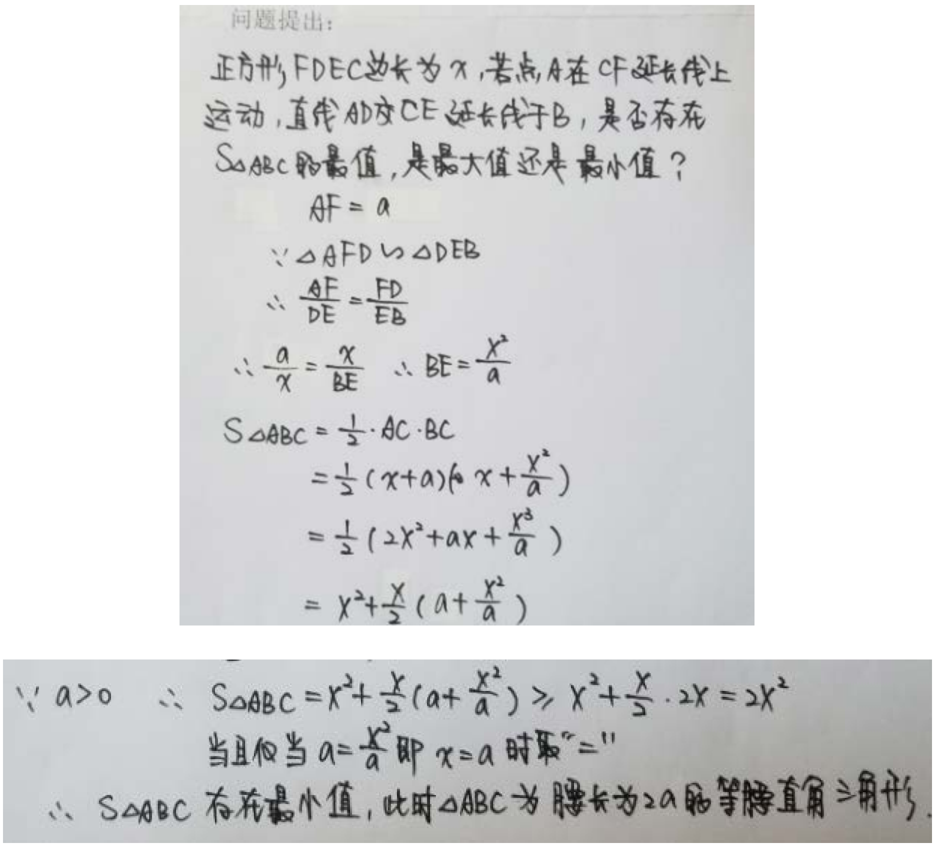
$$\geq\frac{1}{2}a^2\left(2+2\sqrt{(-k)\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)}\right)$$

$$=2a^2,$$

当且仅当 $-k=-\frac{1}{k}$，即 $k=-1$ 时，取得等号。即 $S_{\Delta ABC}$ 存在最小值为 $2a^2$。

师：运用建系的方法解决图形问题，和大数学家笛卡儿颇为相似，也注意到 k 的取值范围和取等的条件，思路非常清晰。不过这个方法和提出这一问题的同学的做法并不一样，大家想不想“领略”一下？（教师展示该同学的做法，见图 6，部分学生惊叹）

师：这两种方法都是非常精妙的，从题目出发，经过分析、得到关系式，计算化简、运用基本不等式得到最值，并研究了等号取得的条件。尤其是这个问题的提出，更是难能可贵，体现了同学们良好的数学素养和问题意识，此时应有掌声。（学生洋溢笑容，热烈鼓掌）


问题提出：

正方形FDEC边长为x，若点A在CF延长线上运动，直线AD交CE延长线于B，是否存在S△ABC的最值，是最大值还是最小值？

$AF=a$

$\because \triangle AFD \backsim \triangle DEB$

$\therefore \frac{AF}{DE}=\frac{FD}{EB}$

$\therefore \frac{a}{x}=\frac{x}{BE}$ $\therefore BE=\frac{x^2}{a}$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC$

$=\frac{1}{2}(x+a)(x+\frac{x^2}{a})$

$=\frac{1}{2}(2x^2+ax+\frac{x^3}{a})$

$=x^2+\frac{x}{2}(a+\frac{x^2}{a})$

$\because a>0$ $\therefore S_{\triangle ABC}=x^2+\frac{x}{2}(a+\frac{x^2}{a})\geqslant x^2+\frac{x}{2}\cdot 2x=2x^2$

当且仅当 $a=\frac{x^2}{a}$ 即 $x=a$ 时取"="

$\therefore S_{\triangle ABC}$ 存在最小值，此时△ABC为腰长为2a的等腰直角三角形.

图 6　学生提出的问题与给出的解答

新问题 3：直角三角形的哪一种内接正方形面积最大？是不是对任意直角三角形都有这个结论呢？

师：我也有这样的疑惑，所以假设 $AC=b$，$BC=a$，图 7 中正方形边长为 x，图 8 中正方形边长为 y，通过大家给出的方法，不难得到

$$x=\frac{ab}{a+b},$$

$$y=\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+ab},$$

那么如何比较这两数的大小呢？

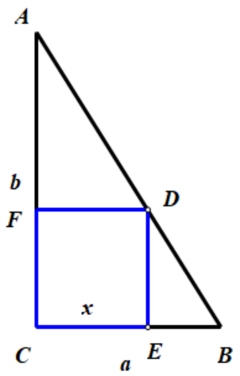


图 7 勾股容方问题的一般化

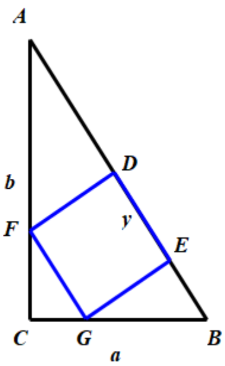


图 8 弦上容方问题的一般化

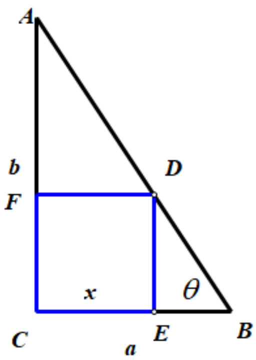


图 9 学生对解法的优化

生 10：（经过 1 分钟思考）根据前面的学习，一般方法是作差，但是我尝试了一下，计算非常复杂，所以尝试三角换元。图 9 中，可以假设 $AB=c$，$\angle B=\theta$，可得

$$a=c\cdot\cos\theta,$$

$$b=c\cdot\sin\theta,$$

代入得到

$$x=\frac{c\cdot\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta},$$
$$y=\frac{c\cdot\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta+1},$$
$$\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta},$$

此时可以令

$$t=\sin\theta+\cos\theta,t\in\left(1,\sqrt{2}\right],$$

则

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}&=\frac{\frac{t^2-1}{2}+1}{t}\\&=\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}\\&\geq 2\sqrt{\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2t}}=1。\end{aligned}$$

师：什么时候等号成立呢？

生 10：当且仅当 $\frac{t}{2}=\frac{1}{2t}$ 时，即 $t=1$ 时取得等号。（该生面露难色，其他同学窃窃私语）

生 10：（补充）好像取不到等号。那也就得到 $x>y$。

师：非常好，在用基本不等式处理函数类问题的时候，一定要注意函数的定义域，也就是注意基本不等式使用的条件。

3.4 总结提炼，开源引流

师：勾股容方问题起源于古人生产和测量的需要，有勾股容方便有勾股容圆，感兴趣的同学可以课后继续探究，“方圆”也是古人常提的二字，“方”为持身中正，“圆”乃上善若水，希望大家带着数学的眼光观察事物、分析问题、感悟原理，在高三复习中回顾旧知、探究新知。本节课到此结束。（掌声）

4 讨 论

以下我们利用数学史教育价值的分类框架[14]对本节课中数学史所体现的教育价值进行初步总结。

（1）知识之谐

一方面，基于海岛测量和等周问题的历史相似性引导学生发现和解决问题，解释了基本不等式引入的必要性，使得学生在进一步学习和理解知识的过程变得自然而然；另一方面，从恒等式、几何图形、代数证明等多种方式表征基本不等式，则体现知识之间的横纵联系，亲身经历知识的不断补充、发展的过程，构建良好的知识结构，体现了“知识之谐”。

（2）方法之美

利用数学史料，展现基本不等式的多元表征，拓宽学生的思维。在探索“勾股容方”问题时，学生能够充分利用数学家的方法，结合所学知识，从几何、代数两种不同的角度思考问题，用代数方法解决几何问题：坐标法、作商法、三角换元法等方法精彩纷呈，彰显了数学的“方法之美”。

课后对全班 45 名学生做了问卷调查，关于本节课中印象最深的内容，67%的学生认为“勾股容方”问题及其解决给她们留下了深刻印象，其中还有学生写道：“同学们提出的问题和解答的方法非常丰富，让我印象深刻”；“代数几何相结合处理勾股容方问题，最后的三角换元法更是精妙”。

（3）探究之乐

对历史问题的探索有助于课堂“四基”的达成。从本节课中不难看出，对于学生基础知识和基本技能的训练是比较到位的，由半圆模型到基本不等式体现了数形结合的思想，对于勾股容方的探究则体现从一般到特殊、转化与化归等基本数学思想，在真实情境中引导学生像数学家一样深入思考和分析问题，积累了基本活动经验。随着提出的问题愈加复杂，“探究之乐”也愈发浓烈。

（4）能力之助

融入数学史的高三复习课有助于培养学生的核心素养。本课例从小岛测量问题出发，通过简化，引出等周问题，是数学建模的过程；用《几何原本》中的几何模型表征基本不等式，蕴含了数学抽象和直观想象的素养；综合法和分析法的回顾，体现了逻辑推理素养；对“勾股容方”问题的求解则体现了数学运算素养。图 10 给出了本节课的设计框架。

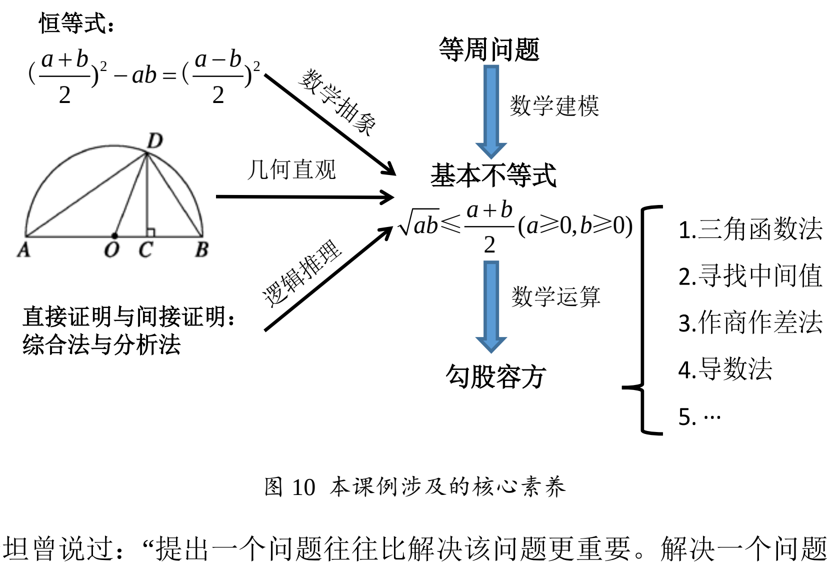


图 10 本课例涉及的核心素养

爱因斯坦曾说过：“提出一个问题往往比解决该问题更重要。解决一个问题，可能只不

过是一种数学或实验技能；但要提出新的问题、新的可能性，从新视角看旧问题，需要创造性的想象力，这标志着科学的真正进步。”[15]。基于“勾股容方”的问题提出是本节课的前置任务，部分学生从中找到了均值不等式的精彩应用。表 2 给出了学生所提的典型问题及所用的相应策略。

据统计，80%的学生通过目标操作提出问题，其他三种策略各仅有 1 名学生，尚有部分学生无法提出问题，这一结果值得深思。

（5）文化之魅

本节课让学生看到基本不等式之源，体会到数学在现实生活中的应用；感受到数学背后的多元文化。数学史的融入，营造了有“文化味”的高三课堂。

表 2 基于“勾股容方”的问题提出策略[16]

策略	描述	具体问题	问题类别
条件操作	对原问题的条件进行改编而保持目标不变	两条直角边分别为 a 和 b 的直角三角形 *ABC* 中，内接矩形 *DECF* 的面积为多少？	条件式
目标操作	对原问题的目标（所求项或所证明的结论）进行改编而保持已知条件不变	两条直角边分别为 5 和 12 的直角三角形 *ABC* 中，点 *D* 在线段 *AB* 上运动，矩形 *DECF* 的面积最大值为多少？	目标式
新旧链接	将原问题的目标作为新的已知条件提出新问题	若正方形边长为 *a*，点 *A* 在 *CF* 延长线上运动，直线 *AD* 交 *CE* 延长线于点 *B*，是否存在 $S_{\triangle ABC}$ 的最值，是最大值还是最小值？	链接式
自由设问	不符合上述三种策略的任何一种	两种不同方法得到的三角形面积孰大孰小？	自由式

（6）德育之效

表 3 给出了本节课所体现的基于数学史的数学学科德育要素以及相应的课堂活动。

课后调查表明，89%的学生认为融入数学史知识的高三复习课能够激发其学习兴趣；对于本节课的德育元素，73%的学生选择了科学素养、理性精神、美学价值。

表 3　基于数学史的数学学科德育的落实

德育要素	部分内涵	课堂活动	史料运用
理性	不能仅凭经验、直觉、观察、操作得出结论	探究古人对海岛测量的合理性	附加式；顺应式
信念	数学源于生活；数学是一门人性化、演进的学科	根据等周问题创设真实情境；辨析历史上表征基本不等式的部分方法	附加式；顺应式
情感	数学学习动机、兴趣、自信心	改编勾股容方问题；对照学生的方法和古代数学家的方法	顺应式；重构式
品质	倾听、交流、爱国主义	解决同伴提出的问题；表达自己的解法；学习中国古代数学家的思想方法	顺应式

5 结 语

本课例依托等周问题创设情境，解决了基本不等式的必要性问题；基于“勾股容方”问题设计问题串，达到了“四基”与“四能”的要求，培育了学生的数学核心素养；最后，基于数学史的课堂活动渗透了数学学科德育。总之，数学史的融入造就了精彩的高三课堂。

当然，在本次教学实践中还存在一些不足之处。首先，依托等周问题，以真实情境引入问题一、二，连贯性紧密，但与勾股容方相结合，在衔接处稍显生硬；其次，关于直角三角形两种内接正方形边长的比较，还有一些巧妙的方法，由于时间关系，课上未及展示，留下了些许遗憾。

参考文献

[1] 杜朝阳. 高中数学复习课的教学设计[D]. 华中师范大学, 2018.

[2] 姜世学. HPM 视角下高三数学复习课教学研究[D].华东师范大学, 2018.

[3] 唐逸泉. 思维导图在高三数学复习中的应用设计与实践[D]. 华东师范大学, 2018.

[4] Jankvist, U T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2009, 71(03): 235-261.

[5] 袁芳, 马艳荣. HPM 视角下的“和差术应用”专题复习课[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018, (08): 52-57.

[6] 罗增儒. 同课异构“基本不等式”的互动点评[J]. 中学数学教学参考, 2016, (16): 16-24.

[7] 渠东剑. 素养视角下的高考数学试卷分析——以 2018 年高考数学江苏卷I为例[J]. 中学数学教学参考, 2019, (13): 54-59.

[8] 汪晓勤, 郭锦融. 古希腊数学中的均值不等式[J]. 中学数学月刊, 2015, (02): 54-56.

[9] 欧几里得. 几何原本（兰纪正, 朱恩宽译）[M]. 西安: 陕西科技出版社, 2003.

[10] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 210-214.

[11] 郭书春. 九章算术新校[M]. 北京: 中国科学技术大学出版社, 2014.

[12] 汪晓勤. 均值不等式: 从历史到课堂[J]. 数学传播, 2014, (04): 53-67.

[13] 汪晓勤. 从"勾股容方"到均值不等式[J]. 数学通报, 2015, (02):7-9.

[14] Wang X Q, Qi C Y, Wang K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics[J]. *Science & Education*, 2017, 26(07-09): 1029-1052.

[15] Einstein, A., Infeld, L. *The Evolution of Physics*. Cambridge[M]. The Cambridge University Press, 1938: 99-100

[16] 丁倩文, 汪晓勤. 基于数学史的初中数学问题提出课例分析[J]. 中学数学月刊, 2018, (03): 44-48.

HPM 视角下的“和、差角公式”教学 *

马艳荣

（北京师范大学银川学校，银川 750011）

1 引 言

两角和与差的正、余弦公式常常被称为平面三角学基本公式，用其中任何一个公式都能推导出其他公式。在数学史上，和、差角公式源于编制弦表的需要，因此，它们几乎伴随着三角学的诞生而诞生。在西方早期三角学教科书中，这些公式的几何推导方法精彩纷呈[1]。

现行各版高中数学教科书大多以两角差的余弦公式作为出发点，所采用的引入方式和证明方法互有不同。初学者面对形式对称的两角和与差的余弦公式，常常会产生如下疑问：为何不按照三角函数的学习顺序，先讲两角和与差的正弦，再讲两角和与差的余弦？这样一个优美的公式一开始究竟是如何想到的？为何要引进两角和与差的三角公式？

对高中生和教师的调查表明，学生在学习和、差角公式时，存在以下困难：（1）难以想到用向量法或两点之间距离公式来推导两角差的余弦公式；（2）在用两点间距离公式进行推导时，难以想到差角的构造；（3）利用帕普斯模型进行公式推导时，线段度量角度、角的转化与表示、添加辅助线构造等量关系等方面存在一定的困难；（4）在复合角的度量、利用复合三角函数度量线段的长度（如$\sin\alpha\cos\beta$）时存在困难。

已有的 HPM 视角下的教学设计（如[2]和[3]）尚未很好地解决上述疑难问题。鉴于此，我们希望设置层层递进的问题串，引导学生经历和、差角公式的发现和推导过程，从而以重构式将数学史融入数学教学之中。拟定的教学目标如下：

（1）能够对两角和与差的余弦公式进行简单且正确的应用（主要是化简、求值），能够进行简单三角恒等变换；

（2）经历两角和与差的余弦公式的推导证明过程，体验探究之乐，理解公式的多种证明方法，进一步感受方法之美；

（3）领会数形结合思想以及转化思想，培养学生直观想象素养和逻辑推理素养。

（4）感受数学文化的魅力，感悟数学背后的人文精神。

* HPM 工作室系列课例之一。

2 数学史料

西方早期三角学教科书中，关于和差角公式的最典型、最受青睐的几何推导方法是“帕普斯模型”的利用，该几何模型源于古希腊数学教学帕普斯（Pappus）《数学汇编》中提出的一个命题[1]。如图 1，已知$\angle AOB = \alpha$，$\angle BOC = \beta$（$0 < \beta < \alpha < \pi$，$0 < \alpha + \beta < \pi$），$OA = OB = OC = 1$，过点 C 作 $CH \perp OB$，垂足为 H，交半圆于点 E。过点 H 作 OA、CD 的垂线，垂足分别为 G 和 M。再过点 E 作 OA、HG 的垂线，垂足为 F 和 N。因此可得

$$OH = \cos\beta,\ HG = \sin\alpha\cos\beta,\ OG = \cos\alpha\cos\beta,\ CH = HE = \sin\beta,$$

$$CM = HN = \cos\alpha\sin\beta,\ MH = DG = GF = \sin\alpha\sin\beta,$$

因 $CD = MD + CM = HG + CM$，$OD = OG - DG$，$EF = HG - HN$，$OF = OG + GF$，便可以得到两角和与差的正、余弦公式。

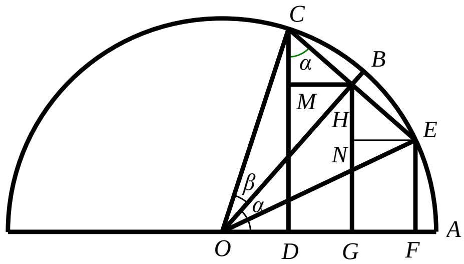


图 1 和角公式的帕普斯模型

围绕帕普斯模型，笔者设计了由 11 个问题组成的问题串[4][5]。

3 教学设计与实施

3.1 课题引入

问题 1： 如何求得 30º 和 45º 这些特殊角的正、余弦值？

生： 用计算器。

生： 通过测量。

生： 利用勾股定理。

生： 画出一个斜边为 1 的直角三角形，根据三角形的特殊性质，利用勾股定理得出各个边的长度，然后用对边比斜边可得 $\sin 30° = \frac{1}{2}$，$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$，邻边比斜边可得 $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$。

问题 2：能否利用 45º 和 30º 的正余弦值来求得 $\cos 15°$ 呢？

生：根据计算器可以得出如下结果：$\cos\left(45°-30°\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$。

师：如何用 45º 和 30º 的正弦、余弦值来求 $\cos 15°$ 呢？若用锐角α和β分别代替 45º 和 30º，那如何用α和β的正弦、余弦值来表示 $\cos\left(\alpha-\beta\right)$呢？

生：$\cos 45°-\cos 30°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，显然 $\cos 15°=\cos\left(45°-30°\right)\neq\cos 45°-\cos 30°$，因此，对任意角$\alpha$和$\beta$，等式 $\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha-\cos\beta$ 一般不成立。

师：那究竟如何用α和β的正弦和余弦值来表示 $\cos\left(\alpha-\beta\right)$呢？带着这样一个问题，我们一起走进今天的课题——两角和与差的余弦公式。

3.2 公式探究

问题 3：如图，给定斜边均为 1、一个内角分别为α和β的两个直角三角形 AOC 和 $DO'F$，如何构造出角 $\alpha-\beta$？

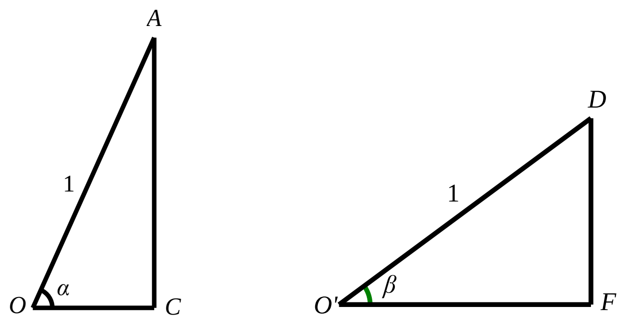


图 1 两个斜边等长的直角三角形

生：将两个直角三角形拼在一起，使顶点 O 和 O'重合。

师：如何得到 $\alpha-\beta$？

生：顶点 O 和 O'重合，OC 和 OD 部分重合，则 $\angle AOB=\alpha-\beta$（PPT 展示，图 2）。

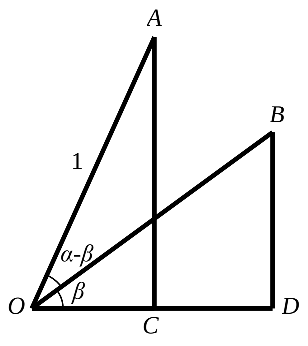


图 2 $\alpha-\beta$ 的构造方法之一

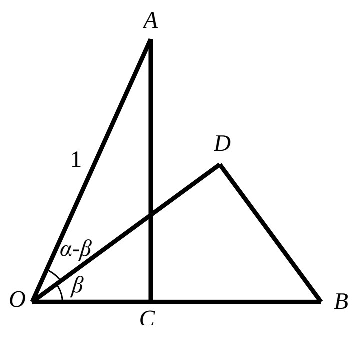


图 3 $\alpha-\beta$ 的构造方法之二

生：顶点 O 和 O' 重合，OC 和 OB 部分重合，则 $\angle AOD=\alpha-\beta$（PPT 展示，图 3）。

生：顶点 O 和 O' 重合，OA 和 OD 部分重合，则 $\angle BOC=\alpha-\beta$（PPT 展示，图 4）。

生：顶点 O 和 O' 重合，OA 和 OB 重合，则 $\angle DOC=\alpha-\beta$（PPT 展示，图 5）。

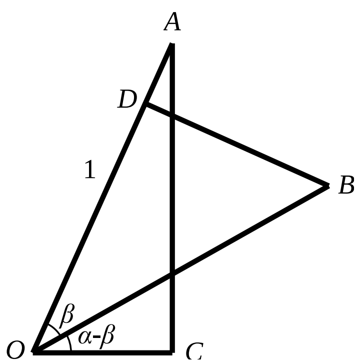


图 4 $\alpha-\beta$ 的构造方法之三

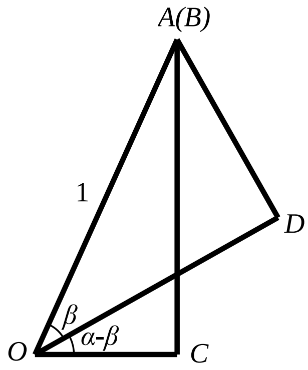


图 5 $\alpha-\beta$ 的构造方法之四

师：由于时间关系，我们只选择其中的方法一（图 2）和方法三（图 4）展开研究。

问题 4：能否利用角 α 和 β 尽可能将图中的线段长度表示出来？（将学生分成两组，一组根据图 2 展开研究，一组根据图 4 展开研究。）

生：$AC=\sin\alpha$，$OC=\cos\alpha$，$BD=\sin\beta$，$OD=\cos\beta$。

问题 5：通过添加辅助线，能否找一条线段，使其长度等于 $\cos(\alpha-\beta)$？

生：在方法一的图形中，过点 A 作 OB 的垂线，垂足为 N，则 $ON=\cos(\alpha-\beta)$。（图 6）

生：在方法二的图形中，过点 B 作 OC 的垂线，垂足为 N，则 $ON=\cos(\alpha-\beta)$。（图 7）

师：很好（PPT 展示），要研究 $\cos(\alpha-\beta)$，就需要研究线段 ON 的长度。

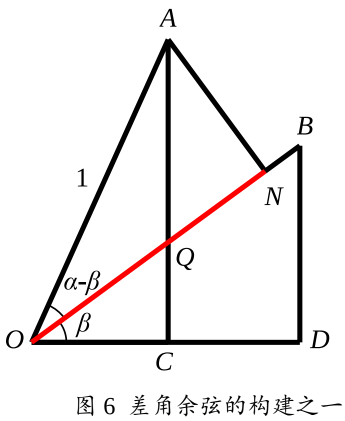


图 6 差角余弦的构建之一

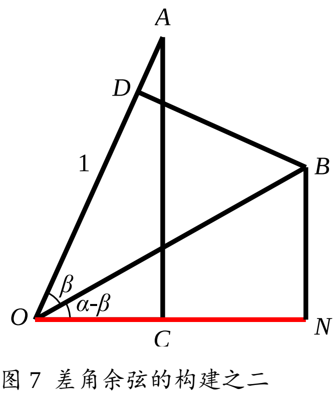


图 7 差角余弦的构建之二

问题 6：那如何用 α，β 的正、余弦来表示 ON 呢？请同学们拿出纸笔尝试一下。（学生探究，教师巡视。在图 6 中，学生试图分别求 OQ 和 QN，在图 7 中，学生试图求 OC 和 CN，但都遇到了困难。）

师：同学们遇到了困难，看来还需要添加新的辅助线，对 ON 进行分割。

生：过点 C 作 OB 的垂线，垂足为 E，则 $OE=OC\cos\beta=\cos\alpha\cos\beta$，$ON=OE+EN$。（图 8）

生：过点 D 作 ON 的垂线，垂足为 E，则 $OE=OD\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta$，$ON=OE+EN$。（图 9）

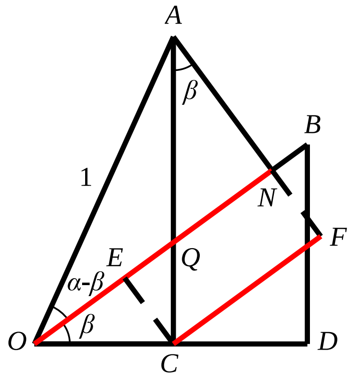


图 8 线段 EN 的求法之一

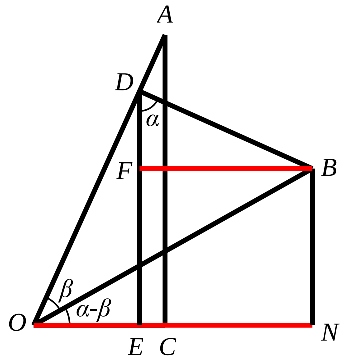


图 9 线段 EN 的求法之二

问题 7：如何利用已知的三角比来表示 EN 的长度？

生：过点 C 作 AN 的垂线，垂足为 F，在 $\mathrm{Rt}\ \Delta AFC$ 中，$CF=AC\sin\beta=\sin\alpha\sin\beta$。（图 8）

生：过点 B 作 DE 的垂线，垂足为 F，在 $\mathrm{Rt}\ \Delta DFB$ 中，$BF=BD\sin\alpha=\sin\alpha\sin\beta$。（图 9）

问题 8：能否利用已表示出的线段长度建立 $\cos(\alpha-\beta)$ 与 α 和 β 的正、余弦之间的关系？

生：$ON=OE+EN=OE+CF$，即 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。（图 8）

生：$ON=OE+EN=OE+BF$，即 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。（图 9）

问题 9：以上推导是建立在 α 和 β 为锐角的前提之下的。如果 α 和 β 为任意角，结论是否成立？

生：当 α 和 β 在其它范围内时，可以利用诱导公式，证明公式也成立。

教师板书：$C_{(\alpha-\beta)}:\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$（$\alpha$，$\beta$ 为任意角）。

问题 10：除了刚才的几何推导方法，推导两角差的余弦公式，还有其他简便方法吗？

师：回忆刚才锐角情形下的帕普斯模型和任意角的定义，能否找到一种更简便的几何模型，让我们直接得到任意角情形下的差角公式呢？（播放微视频 I，并板书展示两点间距离公式这一推导方法。）

微视频 I

帕普斯模型为我们带来了直观感知，但古代数学家仅仅满足于锐角的情形。随着角的推广，数学家开始关心两角差的余弦公式是否适用于任意角的情形。利用帕普斯模型得出的公式，还需借助诱导公式加以推广，比较繁琐。有没有更简便的方法可以直接得到任意角的差角公式呢？1941 年，美国数学家麦克沙恩（E. J. McShane, 1904-1989）在《美国数学月刊》上发表论文，对两角差的余弦公式重新进行了推导。如图 10 所示，在单位圆中，α和β为任意角，它们的终边与单位圆交于点 B 和 C，其坐标分别为 $B(\cos\alpha,\sin\alpha),C(\cos\beta,\sin\beta)$。将 ΔBOC 沿顺时针方向旋转，使得 OC 与 OA 重合，OB 与 OD 重合，此时$\angle AOD$ 就是与$\alpha-\beta$终边相同的角。点 D 点的坐标为$(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta))$，由 $AD = CB$，利用两点之间距离公式即得两角差的余弦公式。这也是课本上所提供的证明方法。同样由形到数，但这种推导方法适用于任意角的情形。

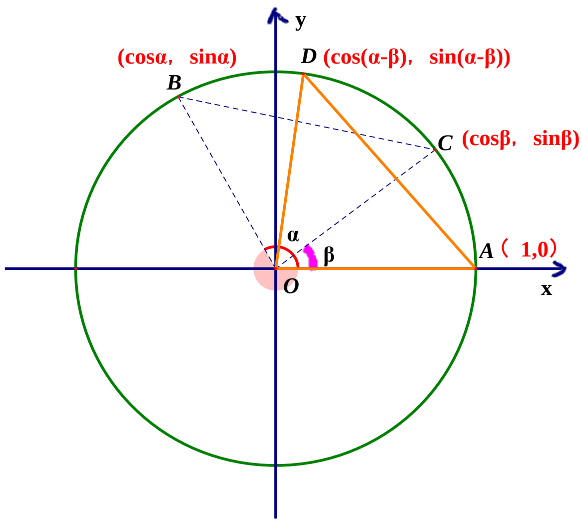


图 10 利用两点间距离公式推导差角公式

问题 11：知道两角差的余弦公式，你能直接得出两角和的余弦公式吗？

生： $\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$。

教师板书： $C_{(\alpha+\beta)}:\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$（$\alpha$，$\beta$为任意角）。

3.3 历史回眸

播放微视频 II（时长 1 分钟）：

打开 20 世纪以前的任何一部西方三角学著作，我们都能看到这些公式中至少有一个是用几何方法推导证明的，各种方法汇总起来可谓是精彩纷呈，蔚为大观。公元 2 世纪，古希腊著名数学家托勒密在编制弦表的过程中，发现并提出了以其名字命名的托勒密定理：圆内

接四边形两条对角线乘积等于两组对边乘积之和。利用该定理可推导出两角和与差的正、余弦公式。公元 3 世纪末，古希腊数学家帕普斯在《数学汇编》中为我们提供了许多三角公式的几何模型，20 世纪中叶以前，绝大多数三角学教科书都采用了帕普斯模型来证明锐角情形下的和差角公式，然后利用诱导公式，证明任意角的情形。我们刚才课堂上带领大家探索的差角公式的几何模型正是帕普斯模型为我们带来的灵感。此外，阿拉伯天文学家阿布·韦发利用单位圆向我们展示了两角和与差正弦公式的推导过程。而今天，我们对和差角公式证明方法的探索仍未止步，不少学者竟利用出入相补原理，给出了面积视角下的和差角公式。如果小小和角公式对你的吸引，丝毫未减，那就行动起来吧！也许下一种证法就来自于你的灵感！

3.4 公式应用

例 1：利用两角差或和的余弦公式求 $\cos 15°$ 和 $\cos 75°$ 的值。

例 2：化简 $\cos\alpha\cos\left(60°-\alpha\right)-\sin\alpha\sin\left(60°-\alpha\right)$。

例 3：求证下列恒等式：（1）$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$；（2）$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$。

设计意图：请学生起来作答，让学生熟练运用公式，并体会三角代换的思想，为下节课两角和与差正弦公式的讲解作铺垫。

3.5 小结延伸

让学生谈谈本节课学习后的收获。教师进一步以用三、二、一来总结本节课的内容。

- 三种方法：基于帕普斯模型的两种方法的核心思想是通过构造直角三角形，找出相应的三角函数线段，直观性比较强；而麦克沙恩的旋转法的优点在于简洁方便，直接可以得出任意角的差角公式，克服了帕普斯模型从锐角到钝角的局限性。

- 两类素养：通过两种几何模型推导差角余弦公式，体现了逻辑推理素养和直观想象素养。

- 一个专题：微视频 II 呈现了“两角和与差的三角公式”这一专题的历史，拓宽学生的视野，感悟数学背后的人文精神。

最后教师让学生课后解决以下问题：

（1）利用公式 $\cos\left(\alpha\mp\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta\pm\sin\alpha\sin\beta$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ 和 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$，推导关于 $\sin\left(\alpha\pm\beta\right)$ 的公式。

（2）利用差角构造方法二和方法四，能否推导差角的余弦公式？

4 学生反馈

4.1 视频分析结果

弗兰德斯互动分析系统的结果显示[6]：教师多以问题驱动的形式来加强师生间的互动，对于学生的回答，教师能及时作出回应、并及时加以追问。课堂气氛较活跃，在教师的引导下学生积极探究讨论，课堂参与度较高。

4.2 问卷调查结果

在两轮教学的实施过程中，大部分学生认为教师在公式推导过程中所设置的层层递进的问题系列可以引导他们步步深入的分析问题、解决问题、建构知识，帮助他们深入理解推导过程，形成较为完整清晰的知识体系，同时可以引领他们突破难点，扫清学习障碍[7]。在学生的后测问卷第 6 题中，利用几何模型进行 $\sin(\alpha+\beta)$ 的推导，学生能够给出 4 种精彩的解决方法，且第二轮教学中 68.57%的学生能给出其完整的证明过程，其中有关线段度量角度、角的转化与表示、添加辅助线构造等量关系等方面，这些大部分学生的困惑已经得到解决。

4.3 学生访谈结果

课后分别对 5 名学生进行了访谈。主要想进一步真实了解学生对两角和与差余弦公式推导过程的理解与掌握情况，以及对 HPM 问题串教学的反馈情况。从学生的反馈可以看出，HPM 问题串在一定程度上能够激发学生的思考，帮助学生克服学习难点，促进学生的理解。在访谈中大部分学生也表示，教师在公式推导过程中所设置的层层递进的系列问题可以引导他们步步深入的分析问题、解决问题、建构知识，帮助他们深入理解推导过程，形成较为完整清晰的知识体系，同时可以引领他们突破难点，扫清学习障碍。学生访谈结果表明：以微视频衔接两种证明方法，进一步促进学生理解两点间距离公式的推导过程。从特殊到一般，加深了学生对公式推导过程的理解。与此同时可以看出，学生的回答与 FIAS 互动分析的结果基本吻合，足以表明，FIAS 量化数据存在一定的真实有效性。

5 结语

课堂从学生已有的认知基础出发，以相关数学史料为主线，通过问题串的层层递进，由易到难，逐渐探究两角和与差的余弦公式，可学性较强，学生接受起来也比较容易。从趣味性方面来看，几何的味道较浓，学生兴趣较高。此外，有关和差角公式历史的微视频，在一

定程度上激发了学生学习数学的热情与兴趣。从有效性方面来看，学生自行探究 3 分钟，为学生留下了充分思考的空间，能较好发挥学生的主观能动性，让学生自己探究出历史上的几何模型，体验知识的发生发展过程。

因此，要想让数学史自然融入课堂教学，数学问题串的设计不可或缺，问题串的设计是 HPM 视角下数学教学的需要，问题串的使用将更完整地为我们再现概念、公式、定理和思想的发生和发展历史，使数学史的教育价值得以最大化，因而使数学课堂变得流畅而精彩。问题 1 到问题 11，一线贯穿，构成了一个完整的问题串，紧扣教学目标，坚持以学生为主体，关注学生的最近发展区，以帕普斯模型为主线贯穿始终，让学生在历史的长河中享受探究之乐，体会方法之美，感悟文化之魅[8]。每一个问题的设计都具有一定的指向性，保证了问题之间的连贯性。但问题串设计的自然性还有待改善，尤其问题 10 的衔接过于生硬，若没有微视频的辅助，更是让学生琢磨不透。

利用帕普斯模型进行两角差余弦公式进行推导时，学生主要在利用线段度量角度、角的转化与表示、添加辅助线构造等量关系三个方面存在困难，数学史的融入能够引导学生深入理解公式推导。学生之所以对公式中的符号变换混淆不清，并且陷入“死记硬背”的误区，主要在于不理解公式背后所揭示的单角和复合角之间的关系，而数学史的融入能够帮助学生走出公式记忆误区。数学史的融入在促进学生公式运用方面效果不明显，尽管大部分学生在后测卷中能够运用公式解决一些简单问题，能够发现简单问题中所隐藏的两角差余弦公式。但是访谈表明学生明显在公式运用过程中还存在困惑。要想解决公式运用过程中的困难，一节课的效果并不会很明显，需要后续的不断练习作为辅助，在更深入理解其背后的代换思想后，学生才会慢慢有所体会，公式运用起来才会得心应手。

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[2] 张小明. 两角和差的三角公式推导——数学史融入数学教学的案例研究[J]. 数学教学, 2007, (02): 42-44.

[3] 张益明, 丁倩文. “两角和与差的余弦公式”从历史中找价值、看证明[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018, (06): 33-38.

[4] 马艳荣, 汪晓勤. 基于数学史的高中数学问题串初探 [J]. 中学数学教学参考（上旬）, 2018, (04): 7-10.

[5] Silver, E. A. et al. Posing mathematical problems: an exploratory study [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1996, 27(03): 293-309.

[6] 武小鹏, 张怡. 基于 FIAS 的高中数学课堂教学比较研究—以 2014 年全国数学教育研究会两节观摩研讨课为例[J]. 数学教育学报, 2015, 24(05): 87-91.

[7] 戴经纬, 唐恒钧. 基于数学方法论的问题链——学生有脉络地探索[J]. 中国数学教育, 2018, (10): 21-23.

[8] Wang, X., Qi, C. & Wang, K. A categorization model for educational values of the history of mathematics: An empirical study. *Science & Education*., 2017, 26(07-09):1029-1052.

学术资讯

第七届 HPM 高级研修班综述

纪妍琳 张佳淳 李怡泉

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

一年一度的 HPM 研讨会旨在为高校研究者和中小学一线数学教师搭建学术思想交流、实践经验分享的平台，是国内 HPM 领域的重要学术活动之一[1]，自 2013 年至今，已成功举行七届。近年来，HPM 以其多元的教育价值和独特的学术魅力而受到越来越广泛的关注，有鉴于此，2019 年 12 月 30-31 日在华东师范大学举行的第七届 HPM 研讨会更名为“第七届 HPM 高级研修班”。来自浙江、内蒙古、江苏、云南、安徽、福建、上海等全国 21 个省市区的 139 家单位，共计 200 余位高校学者、硕博研究生、教研员和一线中小学数学教师参加了会议。

本次 HPM 高级研修班设有大会报告、分组报告、青年学者论坛，共安排了 56 个报告，涉及 HPM 理论探讨、教育取向的数学史研究、数学史融入数学教学的实践、教师专业发展、数学教育史等主题，另外还安排了 2 节 HPM 展示课。本文对会议内容进行综述，并对 HPM 研究的特点进行分析。

1 报告内容

1.1 理论探讨

华东师范大学汪晓勤教授作了题为“HPM 研究中的若干问题”的大会报告，报告总结了 HPM 领域的研究现状，分析了在六个主题的研究中所存在的一些问题。在理论探讨方面，目前 HPM 专业学习共同体已经初步构建了图 1 所示的理论框架，用以指导实践研究。

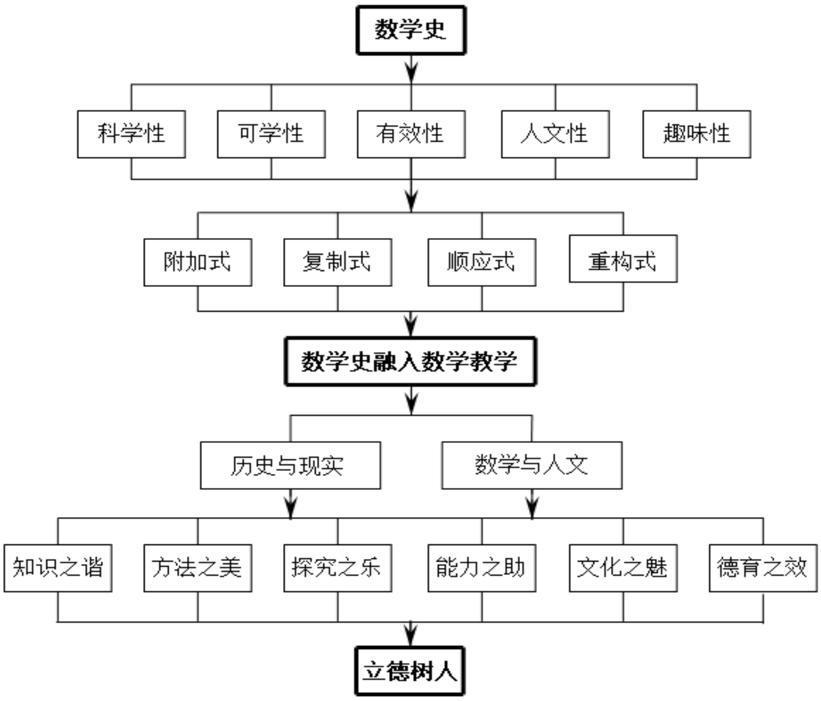


图 1 指导 HPM 实践研究的理论框架

上述框架留下了广阔的研究空间。例如，关于数学史运用方式中的重构式，人们知之甚少，针对具体的数学概念，如何设计问题串，重构概念的自然发生和发展过程，是未来极有意义的课题。又如，关于数学史六类教育价值中的某几类（如探究之乐、能力之助等），还缺乏科学合理的实证研究。教育取向的数学史研究是 HPM 领域各项研究的基础，但中小学数学课程中许多知识点背后的数学史都几乎是盲点，都有待于深入研究。数学理解的历史相似性对于数学教学具有重要意义，如果历史相似性存在，那么历史是一面镜子，教师可以通过知识的历史序来预测学生的心理序，从而有针对性地制订教学策略。但目前相关研究很少，还缺乏有效的研究工具，研究方法也有待于改进。在 HPM 视角下的课例研究方面，尽管目前已经开发了大量的课例，但缺乏科学的评价方法，编制有效的测评工具是未来的重要课题之一。在教师专业发展方面，目前的研究大多关注 HPM 课例研究对教师面向教学的数学知识（MKT）的影响，而对于 HPM 在教师信念和能力上的影响尚需做大量的实证研究。总之，HPM 是一个富有魅力、前景广阔的学术领域，未来青年学者在该领域是大有可为的。

“德育之效”是数学史六类价值之一，但人们对于数学学科德育的内涵尚缺乏深入的理解。华东师范大学栗小妮博士作了题为“数学学科德育内涵分类框架的构建”的大会报告。报告呈现了数学学科德育内涵分类框架的构建、调查研究和信效度检验的过程，所得出的内涵框架为数学学科德育的实施与实证研究提供了参考。

正高级特级教师、苏州吴江盛泽中学孙四周老师作了题为“现象教学与 HPM”的大会

报告。报告结合“二面角的平面角”、“数学归纳法”等教学案例，从现象教学的内涵出发，探讨了现象教学与 HPM 之间的密切联系，既丰富了 HPM 的内涵，也进一步夯实了现象教学的理论基础。

为了纪念我国著名数学教育家张奠宙先生，新青年数学教师工作室主持人、华东师范大学出版社刘祖希老师引领工作室部分成员对张先生的数学教育名言进行系统的研究[2]。在本次研修班上，刘老师作了题为“张奠宙先生数学教育名言的生成条件与理论走向”的大会报告，报告分析了张先生数学教育名言的生成条件，并指出，张先生的许多名言已经或者正在形成数学教育理论形态，丰富了中国特色数学教育理论体系。张先生的许多名言，如“教师的任务是把知识的学术形态转化为教育形态”，对于 HPM 视角下的数学课例研究同样具有重要的指导意义。

1.2 教育取向的数学史研究

教育取向的数学史研究是为教育而进行的数学史研究，其目的在于为数学课堂教学提供相关材料以及获取相关知识点（概念、公式、定理等）的教学启示[3]。该主题共有 1 个大会报告和 9 个分组报告。

上海交通大学纪志刚教授作了题为“数学史从经典走进课堂：勾股定理及其应用”的大会报告。报告以勾股定理为例，介绍了中国古代数学文献中勾股定理的提出、证明和应用，共分五个部分：“商高与周公的对话：勾股定理的提出”、“‘环而共盘’：勾股定理的证明”、“‘句实之矩’与‘股实之矩’：平方差公式的东方特色”、“课本中‘勾股定理’应用题的文献来源”和“‘二人同所立’：走出来的‘整勾股数’”。未来，我们期待有更多数学史家关注 HPM，开展教育取向的数学史研究，提升大陆 HPM 领域的学术水平。

内蒙古师范大学的李春兰教授在报告中围绕民国时期著名数学教育家刘薰宇（1896-1967）对春晖中学教育的贡献、发表出版的论著、编辑出版的数学教科书等，阐述这位教材编辑家对我国教育事业的发展所做出的贡献，从中领略其教育情怀并予以传承。

在本次研修班，来自华东师范大学和内蒙师范大学的研究生们带来他们的最新文献研究成果。彭思维考察了美英早期三角学教科书中有关弧度制的内容，梳理了关于引入弧度制合理性的解释，总结了弧度制的相关应用，为弧度制的教学提供丰富的素材。王娟考察了美英早期平面几何教科书中有关垂径定理的内容，梳理了垂径定理的各种证明，总结了定理在数学内部和外部的各种典型应用，为 HPM 课例研究打下了坚实的基础。秦语真对 17 世纪荷兰数学家舒腾（F. van Schooten, 1581-1645）的圆锥曲线规进行系统的介绍，借助几何画板，

对各种机械规的作图原理进行了分析和演示，为 HPM 视角下的圆锥曲线教学提供了理想的史料。王海雯考察了美英早期平面几何教科书中有关平行线判定的内容，梳理了平行线判定定理的各种证明以及相应的逻辑体系，并展示了平行线的各种作图方法，为初中平行线的教学提供了丰富的素材。

王彬和王占考察了刘熏宇《数学趣味》中推导一次、二次和三次幂和所用的面积法，据此提出，在教学中可以通过“堆罗汉”游戏，运用“面积法”来推导数列求和公式。陶兰概述了数学家余介石（1901-1968）主编的《数之意义》、《数学诡论集解》和《算学通论》的内容，并得出三部著作对今日数学教育的启示。李金玉对数学家王峻岑（1910-1982）的《数学列车》作了考察，从中得出对今日数学科普著作的编写以及微积分教学的启示。侯晓婷从历史名题、趣味故事、数学游戏和数学认识四个方面对刘熏宇的《数学趣味》进行考察，总结了这部科普著作的一些特点，并提出若干教学启示。

1.3 数学史融入数学教学的实践

数学史融入数学教学的实践是本次研修班的热点之一，共有 28 个口头报告涉及该主题，涵盖了小学、初中、高中不同学段。许多中小学一线教师在其报告中分享了数学史融入数学教学的经验。

刘爱东老师在报告中介绍了“竖式乘法”的相关史料，分享了在“竖式乘法”教学中融入中国古代算筹、古埃及文化中的算法等数学史的经验。曾文洁老师在报告中介绍了 HPM 视角下的圆面积公式教学，呈现了六年级学生在课堂上给出的探究圆面积公式的 10 种方法，并进行古今对照，展现了 HPM 教学中的“方法之美”。孙洲老师在报告中分享了他的圆周长课例，教学中，孙老师利用教具，引导学生通过圆内接多边形的周长来逐渐逼近圆周长，再现了古代数学家刘徽的思想；并通过 HPM 微视频，呈现了圆周率的历史。李卓忱老师通过“圆的认识”、“字母表示数”等案例，呈现了 HPM 微视频在小学数学教学中的应用，并总结了 HPM 微视频的设计模式。陈金飞老师在报告中介绍了“分数的初步认识”HPM 课例，陈老师遵循分数产生的历史设计“造数”的活动，引导学生构建分数模型。张伟明老师分享了 HPM 视角下的“年月日”教学案例。教学中，张老师重构式地融入数学史，引领学生以古人的视角构造日历。李建良老师在报告中展示了“圆的认识”的 HPM 课例，李老师借鉴古人认识圆的特性的两种途径，引导学生通过画圆体会圆的特点，并让学生在解决实际问题的过程中进一步理解圆的特征。

牛德军老师分享了“变量与函数”的初中 HPM 课例。教学中，牛老师以“函数博物馆”

的形式引领学生经历函数概念的发生和演进过程，渗透数学文化。王进敬老师的报告呈现了“三角形一边平行线性质”的 HPM 课例。教学中，王老师引导学生从古希腊《几何原本》的面积法和中国古代“出入相补原理”两个角度出发，证明三角形一边平行线的性质，该课例体现了数学史的多元教育价值。贾彬老师展示了基于翻转课堂的“十字相乘法”课例。教学中，贾老师借助吉雷特（J. A. Gillet, 1837-1908）交叉线进行因式分解的方法，实现了从横式分解到竖式分解，再从二次三项式到二次四项式因式分解的过渡。张佳淳老师在题为“HPM 视角下的轨迹课例研究”的报告中，从“选题与准备”、“研讨与设计”、“实施与反馈”、“整理与写作”四个环节，展示了“轨迹”课例的形成过程，为一线教师开展 HPM 课例研究提供了方法上的指导。汤雪川老师展示了 HPM 视角下的“平面向量的加法”教学。汤老师基于数学史设计问题情境，并借助物理情境引导学生进行平行四边形法则和三角形法则的探究，揭示了学习向量加法的必要性，深化了学生对于知识的理解。徐颖老师的报告将“鸡兔同笼”问题与“一元一次方程”的教学联系在一起，使课堂充满数学文化的芬芳。刘兴华老师分享了由她负责开发的初中数学校本课程的一次专题教学。教学中，刘老师将毕达哥拉斯学派的“形数”理论和中国古代的“垛积术”等数学史素材与教科书中的习题进行整合，形成了富有特色的课程内容——“形中之数”。

分组报告所呈现高中学段的课例同样精彩纷呈。戴泽莉老师分享了 HPM 视角下椭圆第一定义的教学；安英老师在报告中分享了“两角差的余弦公式”教学；向荣老师展示了数学史融入复数序言课的教学；李传峰老师的报告呈现了函数奇偶性的概念教学；樊惟媛老师介绍了 HPM 视角下的“排列组合与二项式定理”的单元教学；刘志峰老师报告了 HPM 视角下的三角函数概念复习课教学。胡佳婧老师在“基本不等式”教学中，借助等周问题设计问题情境，引导学生利用《几何原本》中的几何方法证明基本不等式，并通过微视频呈现基本不等式的多种证明。钟萍老师将古希腊毕达哥拉斯学派的形数理论和中国古代的“垛积术”融入高三数列复习课中；王剑老师将数学史融入高三“基本不等式”复习课，从等周问题引入基本不等式，通过对“勾股容方”问题的研究，揭示了基本不等式的精彩应用。两位老师通过数学史的融入，创新了高三复习课的教学，丰富了 HPM 领域的实践研究。

沈金兴老师和他的 HPM 小组展示了“HPM 与数学核心素养”的工作坊。工作坊上，沈老师通过“一次幂和公式”、“基本不等式”等教学案例探讨 HPM 与直观想象素养的联系；饶彬老师将古代数学家的“图说一体”思想融入高三数列复习课中；孙冲老师将赵爽的“弦图”和帕普斯的半圆模型等数学史料融入高三不等式复习课教学；王华老师将古希

腊数学家阿基米德（Archimedes，前 287-前 212）解决数学问题时所运用的物理模型融入基本不等式、一次幂和等公式的教学中。四位老师通过各自的教学实践，探讨了 HPM 视角下的直观想象素养的培养策略，为 HPM 课例研究提供了新视角。

此外，在青年学者论坛上，方国青老师代表浙江省义乌市王芳数学工作室，分享了 HPM 视角下“概率”序言课的教学。

1.4 HPM 与教师专业发展

HPM 与教师专业发展是关于数学史对数学教师专业发展影响的研究，在该主题上共有 1 个大会报告和 7 个口头报告，涉及职前教师与在职教师。

岳增成老师作了题为“HPM 与数学教师专业发展——以小学 HPM 短期研修项目为例”的大会报告。报告涵盖项目的研究背景、研究方法、研究设计、研究结果、结论与讨论五个方面。同时，岳老师以杭州市小学教师 HPM 研修项目为例分析 HPM 对数学教师专业发展的影响。文萍老师采用个案研究的方法对云南省少数民族地区某小学数学教师进行研究，通过收集和分析个案教师的教学设计、教学反思、学生反馈等材料，对个案教师在 HPM 课例应用的过程中知识、能力和信念方面的变化进行分析，从而揭示 HPM 课例应用对少数民族地区专业发展的促进作用。

沈中宇采用叙事探究的方法对上海市某数学教师进行研究，通过课堂录像、访谈等材料分析研究对象在三次 HPM 课例研究中面向教学的数学知识（MKT）的变化，揭示数学教师在 HPM 学习共同体中的 MKT 发展。姜浩哲采用质性研究法对 5 位职前教师在参与融入了数学史的教师专业发展项目过程中的表现及反馈进行研究，探讨教师教学效能感的来源及 HPM 与教学效能感的关系。刘思璐在报告中介绍了首期“初中 HPM 网络研修班”的开展情况，提供了 HPM 促进教师专业发展的新路径。邵爱娣以“有理数乘法”为例，通过反思单、网络研讨记录等材料分析初中数学教师在参与 HPM 网络研修过程中知识、信念等方面的变化，具体地呈现了 HPM 网络研修对初中数学教师专业发展的影响。

在青年学者论坛上，余庆纯报告了一项针对 HPM 工作室 8 位初中数学教师实施的研究，研究通过问卷调查与访谈等方法，揭示了 HPM 微视频对初中数学教师的影响；丁倩文通过对 190 名在职中学数学教师进行测试，发现职初教师基于数学史料提出问题的策略比较单一，绝大多数为自由式，建议职初教师需掌握更多问题提出策略，加强问题提出的相关训练。

1.5 数学文化

内蒙古师范大学代钦教授作了题为“可视的数学文化史——黄泉下的数学文化”的大会报告。报告中，代教授结合古埃及陵墓中的数学记数法、张家山中国古代墓室的中《算数书》等实例，分析陵墓、祠堂中艺术作品背后的深层次的数学文化意义。

在青年学者论坛上，硕士生丁晓宇和黄佩报告了从经典科普著作《数学趣味》中感悟到的数学学科德育内容，具体包括传承中华优秀传统文化、心理健康教育和科学精神。博士生雷沛瑶对中国大陆和中国台湾高中数学教材中的数学文化进行整体比较与案例分析，并基于比较研究的结果提出对数学教材编写的建议。博士生丁子星通过对我国不同年代的课程标准、教科书和具有代表性的教学设计进行数学文化角度的比较分析，呈现自 1978 年以来我国初中数学“勾股定理”的课堂表现，得出若干教学启示。

2 教学展示

华东师大二附中附属初中青年骨干教师陈慧和华东师大二附中紫竹校区数学教研组长赵玉梅执教观摩展示课，主题分别为“有理数的乘法”和“高一函数复习课”。

陈慧老师通过负债模型引入教学主题，并介绍 19 世纪法国作家司汤达对于“负负得正”的疑惑：负债乘以负债为何能等于收入，引发学生对如何解释“负负得正”的讨论。在充分交流讨论的基础上，学生们利用了连减法、物理模型、生活模型等方法表达了自己对“负负得正”的理解。教师通过 HPM 微视频呈现了历史上出现的 7 种方法，进行古今对照。练习巩固与小结后，陈老师布置数学写作作业：如果有能穿越时空的邮差，请你给司汤达写信，向他解释“负负得正”的原因。

赵玉梅老师在课中首先带领学生回顾函数的性质，并通过 HPM 微视频呈现函数概念的发展史。接着，基于历史上著名的狄利克雷函数进行函数概念与函数性质的复习。更进一步地，赵老师让学生发散思维，自主构造一个函数，并围绕构造的函数编制数学问题。有学生以取整函数为例，具体阐述函数的性质，并且对函数奇偶性的概念进行推广，与历史上数学家研究函数性质的路径一脉相承。课堂尾声，一名学生说：“狄利克雷函数的每个局部放大都相当于整体。这是局部即整体，刹那即永恒”，引得现场掌声连连。

现场观摩后的研讨环节中，评课专家指出，陈慧老师将数学史融入“有理数的乘法”教学，充分体现了数学知识的逻辑性和法则规定的合理性，通过充分的课堂讨论和学生表达展现了数学的人文内涵，彰显了数学学科的德育价值；赵玉梅老师利用 HPM 微视频充分展现

了函数概念的“变量说”、“对应说”和“关系说”等，体现了数学复习课的知识融合和目标提升，课中由学生构造函数并自己编制数学问题，培养了学生的批判性思维和创新性思维。

3 若干特点

根据本届 HPM 高级研修班的所有报告，可以总结出当前国内 HPM 研究的若干特点。

（1）聚焦教学实践

HPM 视角下的数学教学实践是本次会议的焦点，有关报告涵盖高中、初中和小学各个学段。大多数报告紧密围绕数学史的六类价值与史料运用的四种方式，具有一定的理论支撑，为 HPM 研究提供了丰富的一线教学实践经验。HPM 课例的课型从常规的概念课、原理课等拓广到了复习课、序言课等等，反映当下国内 HPM 课例开发的多样化。部分数学史融入数学教学的实践以翻转课堂的形式进行，HPM 视角下教学实践正涌现出越来越丰富的教学形式。

（2）注重史料挖掘

本次会议的报告中，涉及三角学、几何学等不同主题的史料研究体现了当下数学史研究对课堂教学问题的关注以及研究对象的多样化。史料研究中，既有针对西方历史文献的史料挖掘，又有基于中国历史文献的深入研究，体现了教育取向的数学史研究的多元化。

（3）融入信息技术

几何画板、微视频等教育信息技术在 HPM 视角下的数学教学中的作用受到关注。从一些报告内容来看，许多教师在教学实践中灵活地运用微视频等信息技术手段，实现数学史的可视化，沟通历史与现实的桥梁。有报告探讨了 HPM 微视频的开发模式与应用案例。同时，有报告探讨运用 HPM 微视频对初中教师 TPACK 的影响。可见，在“互联网+教育”的时代背景下，HPM 与信息技术的结合不仅丰富了 HPM 视角下的教学实践形式和教学资源，还成为了 HPM 促进教师专业发展的有效途径。

（4）关注专业发展

本次研修班上，HPM 与教师专业发展的有关报告涉及职前教师与在职中小学数学教师。从一些报告的内容可见，在信息时代下， HPM 网络研修成为教师专业发展的新形式。面向教学的数学知识（MKT）、教师效能感等研究热点被众多 HPM 研究者所关注，HPM 课例研究、HPM 课例应用成为 HPM 研究促进教师专业发展的主要载体。HPM 对教师专业发展影响的实证研究成为 HPM 研究领域的一大热点。

4 启示

第七届 HPM 高级研修班高朋满座，气氛热烈，内容聚焦、成果丰硕。根据会议的特点，我们得到如下启示。

（1）关注教育热点，拓展研究视角。从本次会议的众多报告中可以看出，目前国内的 HPM 研究紧跟国际主流趋势，立足本土发展动态。本次会议许多报告关注 HPM 与数学学科核心素养、教师专业发展等研究热点的结合，体现 HPM 研究者对教育热点的关注。HPM 与数学学科德育、数学阅读、数学交流等教育热点的结合将为 HPM 研究提供具有创新性的视角与方向。

（2）加强理论探讨，规范研究方法。在国内，HPM 领域大多沿着从实践到理论的方向开展，许多研究者从实践结果中思辨性地归纳凝练理论，但还需要运用科学规范的研究方法从实践经验中建构合理有效的 HPM 理论框架。同时，加强国际交流，完善“自上而下”的探索模式，提升 HPM 的研究水平。

（3）整合信息技术，助力学生理解。随着“互联网+教育”给教育体系带来的变革，信息技术推动了教学资源、学习方式、课堂形式的创新发展。HPM 微课、几何画板、Geogebra 软件等技术手段融入课堂教学，有助于学术形态的数学史转变为教育形态的数学史，帮助学生走近历史。未来，HPM 视角下的教学实践必将顺应时代潮流，借助信息技术让数学史在课堂上焕发出新的活力。基于信息技术的 HPM 教学资源开发、信息技术支持下的 HPM 教学实践模式等有关问题值得关注与探讨。

（4）优化教学实践，完善评价体系。本次会议中，众多一线教师分享了精彩纷呈的 HPM 教学实践案例。实践证明，数学史融入数学教学可以构建知识之谐，营造探究之乐，彰显方法之美，实现能力之助，展示文化之魅，达成德育之效。然而，HPM 教学实际上还存在着所用数学史料范围有限、史料融入不自然等困境。HPM 教学实践需要从“用历史”向“用好历史”转变。因此，HPM 课例评价指标的确定、HPM 教学实践评价体系的构建对于 HPM 教学实践的优化至关重要。

2002 年，张奠宙先生高瞻远瞩，在《数学教学》上开辟“数学史与数学教育”栏目，在国内率先倡导 HPM 研究。第七届 HPM 高级研修班召开之际，先生已经离开我们一年了。HPM 领域的蓬勃发展，或可告慰先生的在天之灵；而先生生前对“海派数学史研究”的殷殷期望，必将继续激励 HPM 专业学习共同体砥砺前行，一起去开创美好的未来，为中国数学教育做出应有的贡献。

图 2 第七届 HPM 高级研修班合照留念

参考文献

[1] 余庆纯, 姜浩哲, 沈中宇. 第三届华人数学教育大会 HPM 分论坛综述[J]. 数学教学, 2019, (04): 1-5.

[2] 刘祖希. 数学的学术形态与教育形态——张奠宙先生数学教育名言解读[J]. 数学教学, 2019, (10):47-50.

[3] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006, (01): 16-18.

[4] 沈中宇, 邹佳晨, 汪晓勤. ICME-13 之 HPM 专题研究综述[J]. 数学教育学报, 2017, 26(05): 71-76.

[5] 汪晓勤, 欧阳跃. HPM 的历史渊源[J]. 数学教育学报, 2003, 12(03): 24-27.

数学教师专业发展模式的新探索

——初中数学教师 HPM 网络研修班阶段总结视频会议纪要

孙丹丹[1] 邵爱娣[2] 刘思璐[2]

（1.华东师大数学科学学院，上海 200041； 2.华东师大教师教育学院，上海 200062）

2019 年 8 月，华东师范大学 HPM 工作室首届初中数学教师数学史与数学教育（HPM）网络研修班正式开班。研修班致力于在新时代的信息背景下，以网络平台为载体，以 HPM 为抓手，助力一线初中教师专业发展。在连续五个月的时间里，研修班学员围绕初中数学的 9 个主题，开展文献研读、教学研讨、设计分享等活动，研修氛围浓厚，学习成效显著。

2020 年 1 月 21 日上午，HPM 网络研修班第一阶段总结会借助 QQ 视频平台召开。会议旨在总结过去 5 个月的研修经验，分享研修心得体会，反思研修中出现的问题，以期为未来的教师专业发展提供思想启迪。来自 14 个省、直辖市共 48 个单位的 64 位一线数学教师和高校数学教育方向研究生，以及华东师范大学汪晓勤教授及其部分硕士和博士研究生参加了会议，共同总结 HPM 对初中数学教师专业发展的影响，探讨数学史与数学教学结合的相关问题，规划进一步的网络研修活动。

会议分为 6 个环节，分别是研修班阶段总结、学员研修收获与感悟分享、学员阶段考核情况、第二阶段研修计划介绍、互动交流和总结点评。

在阶段总结首先，研修班主持人、华东师范大学数学科学学院的孙丹丹博士从研修概览、素材学习、小组展示、集体研讨、反思分享、史料应用六个部分总结了过去五个月的研修情况，并结合研修班学员反馈的意见或建议，归纳了若干可以进一步优化和完善的研修事项。通过该环节的介绍，一方面，学员们可以根据研修班整体学习情况评估自己的研修投入情况，另一方面，若干有待进一步完善的研修事项为第二阶段研修及未来网络研修班的发展提供了很有价值的参考。

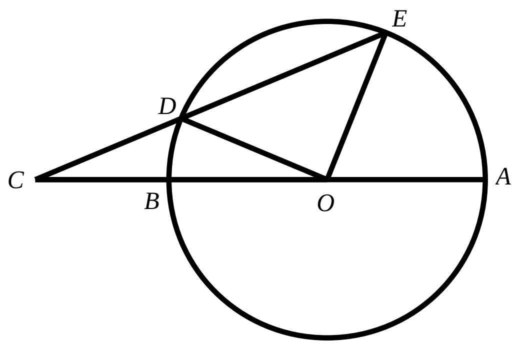
在研修收获与感悟分享环节，7 位学员分享了他们的研修心得和感悟，这些学员的教学经验从 0-24 年不等，他们展示了 HPM 与不同教学经验教师所碰撞出的不同的思想火花。

江西科技师范大学的陶醉老师和深圳大学的刘志峰老师从在读硕士研究生的视角分享了自己的体会。他们简要介绍了自己设计并实施的 HPM 视角下三角函数复习课，表示通过在 HPM 网络研修班的学习和教学实践的尝试，自己在理解数学、理解学生、理解教学、理解教材方面都有了一定的成长与提升，最后展示了 HPM 网络研修带给他们的学术收获。陶老师认为研修班不仅仅是带给他们知识上的成长，更是对知识“锱铢必较”的精神，这种精

神将会是他们一生的财富，这样的研讨过程与学习经历值得永久铭记与怀念。

华东师范大学第二附属中学国际部的肖文娟老师表示很荣幸加入HPM网络研修班这个学术共同体，能和许多有经验的老师一起学习和交流，自己觉得特别幸运和幸福。她从三个方面和大家分享了她的感悟，第一，经过一个学期的学习后，最大的感受就是自己作为教师需要积蓄的知识还很多；第二，对于数学史与数学教育的联系有了更加深入的理解；第三，分享了自己将数学史融入数学教学的两个课例，一个是加入研修班之前实施的“三角形内角和”课例，另一个是研修班学习之际实施的“相似三角形”课例。

广东省韶关市仁化县第一中学的莫辉老师以一道几何题为例分享了自己的心得。如图，已知 AB 是圆 O 的直径，C 为 AB 延长线上的一点，CE 交圆 O 于点 D，且 $CD = OA$。求证 $\angle C = \frac{1}{3}\angle AOE$。莫老师表示，以前给学生讲这道几何题的时候，一般讲完即止，从未想过这道



题和三等分角之间的联系。事实上，这道几何题展示了古希腊数学家阿基米德（Archimedes, 公元前 287 年-公元前 212 年）三等分角的“斜向”法：假设$\angle AOE$ 是待三等分的角，以角的顶点 O 为圆心、以 OA 为半径作圆，延长 AO 交圆于 B。现在，将与半径 OA 等长的线段 CD 的一端置于 AB 的延长线上，调整其位置，使得 CD 的另一端点 D 位于圆 O 上，且延长线经过点 E。这样，过圆心 O，作 CD 的平行线，即得$\angle AOE$ 的三等分线。参加了 HPM 网络研修班后，莫老师认为，如果在以后的数学课堂上能够给学生交待一下某些数学题的历史背景，就可以让学生从不同层次、不同角度去感受学数学和做数学的过程。

上海市浦东模范中学东校的左培培老师分享了自己实施“圆的面积”课例的感受。在这节课上，她给予了学生充分的机会来尝试探究圆的面积公式，左老师惊叹学生推导圆面积方法之多样性，这些方法与古代数学家都有惊人的相似之处，学生和数学家似乎达成了跨越时空的思想交流，她看到了在课本上看不到的多元化思维的精彩呈现。左老师表示希望通过这样的尝试，在学生心中播下数学探究、数学发展的种子，让学生从公式的推导过程中汲取更

多的养料，启迪更灵活的思维。

湛江市第二中学的吴秀燕老师从研修前、研修中、研修后三个部分分享了她对数学史认识的转变。吴老师讲到初次了解数学史融入数学教育时就非常感兴趣，也很想去实践，但存在很多困惑，如怎样获取相关的数学史资料，如何发挥数学史真正的内在价值等。参加网络研修班之后，吴老师认真学习相关历史素材，把学习到的数学史及时运用到教学中，通过不断反思，逐渐形成自己的教学理念。吴老师表示，通过研修班的学习，她收获颇丰，也申报了课题，想把它做得更专业、更有高度，同时希望在研修班第二阶段的课例开发过程中，把自己对数学史的理解和自己的教学理念相结合，争取能做到最好。

苏州市阳山实验初级中学校的胡永强老师首先跟大家分享了他走进并慢慢喜欢上 HPM 的历程，接着胡老师详细介绍了半年来 HPM 网络研修对他个人及其学生的影响。首先，从阅读推送的学习资料中，他学到了许多以前未曾学到的知识，弥补了个人知识结构中的一些缺陷。其次，相关知识的丰富对他的教学设计理念产生了非常大的影响。胡老师指出，教师要从知识发展的角度去审视知识点，给学生充足的机会去发现知识、思考知识、发展与建构知识。再次，学生因为老师的改变而改变，适时地引入数学史提高了学生学习数学的兴趣，按照知识点的发展轨迹进行的教学设计，能让学生亲身体会到数学的自洽与美。

江苏省无锡市河埒中学的姜鸿雁老师从三个方面分享了她加入研修班的体会。首先，姜老师认为数学史融入课堂可以激发学生的学习兴趣，提升品格。自从加入研修班，她了解到了更多的故事，适时引入课堂，带来很好的效果。其次，姜老师认为，教师学习数学史有助于培养教师对教学的敬畏之心，她用一个具体的例子说明：教师需要学习，教学是一件圣神的事情，如果教师自己没有足够的底气站在三尺讲台上，可能会扼杀掉一个孩子。第三，教师学习数学史，有助于加深对数学知识的理解，例如，研修完全平方公式后，她对教材的思考和数学的认识更加深刻，通过三角形内角和定理的证明的学习，了解到了丰富多彩的证明方法。

教师代表分享结束后，研修班指导教师之一，上海建平远翔学校的贾彬老师表示，教师们的很多分享让自己也很有感触，贾老师提到一句流行语，“贫穷限制了我的想象”，她指出：“如果一线教师的专业知识比较贫乏，肯定也会限制我们对教学的理解，对教学的想象。但是在 HPM 这块宝藏面前，我们汲取的养分会更多，我们的思考也会更多。”贾老师还与参会老师简要分享了她开设的 HPM 视角下轨迹课例及体会。

在学员阶段考核阶段，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师为大家公布了有效阅读及反思分享均达 80%的学员名单，并表彰了 HPM 网络研修班第一阶段优秀学员，包括综合最

优（积分前十）的学员、阅读认真（学习时长前十）的学员、分享积极（讨论积分前十）的学员，最后邹老师公布了可进入 HPM 网络研修班第二阶段的 44 位学员的名单。邹老师希望研修班学员们能依托网络研修的平台多思考、多交流、多分享、多实践，因为数学教育的知识和数学知识不一样，数学教育的知识是在人与人的互动中产生的，是在实践的智慧中增长的，希望老师们投入多一份努力，收获也就会更大，数学教学就会更加精彩。

接着，孙丹丹博士介绍了 HPM 网络研修班第二阶段研修计划，分为初步形成设计、拟定教学设计、实施与改进、反思与分享四个阶段。首先，由个人设计初稿，再经过小组讨论和集体讨论进行完善，该阶段旨在集教师个体与共同体内一线教师之力，初步形成教学设计。然后，高校专家参与研讨，教师修改教学设计，并将修改后的设计分享至研修群，该阶段旨在集一线教师及高校研究者之力，拟定教学设计。在实施与改进阶段，将经过研讨拟定的课例付诸于实践，收集学生的反馈信息，基于教学体验及学生反馈改进设计，为将来的课例实施提供参考。在反思与分享阶段，教师反思整个设计及实施过程，将经验提升，凝聚成可供分享的文字。最后孙丹丹博士介绍了一线教师课例写作的选题类型，鼓励老师们尝试以写作以促进思考。

在互动交流环节，研修班的老师可以自由提问。广东省韶关市仁化县第一中学的莫辉老师提出了自己的疑惑："我想按照现在初中数学教材编排的目录汇编一套跟数学教材相关的数学史料，希望汪老师给点建议，如何收集汇编整理？"汪晓勤教授就该问题与莫老师进行了交流，首先肯定了做资料的汇编是一件非常有意义的事情，HPM 的实践研究的基础就在于 H，即历史的研究，没有 H，就不会有 HPM。接着提供了几个收集历史素材的渠道：第一、已出版的书和发表的 HPM 课例文章，现在很多中学老师写文章也会引用这些史料。第二、经典二手文献或一手原始文献。例如卡茨主编的《东方数学文献选粹》，又如中国汉代的《九章算术》，12 世纪世纪印度数学家婆什迦罗的《莉拉沃蒂》，13 世纪意大利数学家斐波那契的《计算之书》等，这里面都有大量好的问题。汪老师提醒大家，不能寄希望于一夜之间就能把所有想要的资料都找全，需要大家慢慢搜集，这也是 HPM 的魅力之所在。最后，汪老师指出，一线教师搜集原始文献，其实条件并不好，因为教师平时忙于教学，啃原始文献很不容易。但拥有学术优势的 HPM 专业学习共同体实现资料共享，解决了"巧妇难为无米之炊"的困境。

在最后的总结点评中，汪老师表示，听了各位老师的分享非常有感触，HPM 初中网络研修班效果超乎预想，并用"五个一"总结了研修班过去已经做的和将来可以做的，既是回顾，也是展望。

• 一个团队。来自五湖四海的老师们集中在一起成为了一个有学术含量、有共同目标的团队，一个专业学习共同体。专业学习共同体的第一个基本特点是大家志趣相同，要有共同的目标——做更优秀的自己，让自己的专业发展上一个台阶，最终能够成长为专家型教师；第二个特点是愿意分享，如果不分享、不交流，又怎么能实现自己的专业发展呢？纵观半年以来 HPM 网络研修班实施的情况，这个目标我们确实是达成了，我们已经形成了一个非常有特色的、可以说在世界上独一无二的专业学习共同体。

• 一种模式。通过网络研修来实现专业发展，这是一种新的对专业发展途径的探索。一般老师都会加入当地的一些名师工作室，或参加国家级培训、省级培训、地级培训以及学校组织的各种培训，这些培训也是不可或缺的，但是其效果是打折扣的，因为这些培训往往并不聚焦，有的培训也不符合教师专业发展的特定需求。而 HPM 网络研修班是聚焦的，每一次研讨聚焦一个主题，所有的主题是学员们在教学实践中遇到的，围绕该主题，学员们学习、交流、分享、反思，这样一种模式对我们的专业发展非常有效，未来值得进一步推广。

• 一组资料。要实施初中 HPM 课例研究，就需要搜集初中数学课堂各种知识点背后的数学史资料。研修班中，针对九个主题，大家共同研究并分享了很多的数学史素材，这些素材是“教育取向的数学史研究”成果，它们是为教育服务的，而不是仅仅局限于书斋中的“为历史而历史”。九个主题背后的数学史料其实是非常丰富的，如果把它汇集成册，也大概可以写一本书了。当然，这些素材也并不完善，还是值得进一步去做历史研究。研修班分享的这组资料里面还包括教学案例，因为纯粹的数学史料是冷冰冰的、没有生命力的，只有经过裁剪、加工成为教学材料，它们才能焕发出勃勃的生机。希望在未来的研修班实施过程中，能够产生更多的资料，也希望这些资料未来能集结成书，分享给更多的人学习和应用。

• 一批课例。研修第一阶段各个组分享的教学设计都非常精彩，但很少真正在课堂上实施。研修第二阶段有四十多位老师可能会在自己的课堂上开展 HPM 视角下的教学实践，希望这些老师每人能够为研修班提供一个成功、精彩、典型的 HPM 课例，这非常有价值。所以，非常期待每一位老师把自己的课例开发出来。课例可以借鉴已开发的，也可以创新。已经发表的任何一个课例都是在特定的学校、特定的班级、特定的学生群体中实施的，不同学校之间往往有很大的差异，百分之百照搬是不现实的，老师们可以其基础上有所创新。

• 一群名师。这是 HPM 网络研修班的最终目标。初中数学教学名师有怎样的特点呢？“奇葩说”第六季有一个辩题：“终其一生，发现自己只是一个平凡的人，你为此而后悔吗？”其中有一个辩手傅首尔在辩论中说得好：她查了《说文解字》，“凡”有“模具”之意。什么是模具呢？就是千篇一律、千人一面。所以，所谓“平凡”，就是没有自己的风格。我们要

做一个名师，要做一个不平凡的教师，就需要有自己独特的教学风格。那么，我们的风格如何炼就？我们的思想如何形成？我们的品味如何建立？HPM 就是一个有效的抓手，可以帮助我们成为有理想、有思想、有品位、有风格的教师，这“四有”，就是名师的基本特征。

最后，汪老师希望未来研修班的学员们都能成长为初中数学教学的名师，期待这一天的到来！

猪年岁末，学术盛典。HPM 网络学习共同体以视频会议的形式一起盘点了过去 5 个月的研修收获，分享体会，总结经验，展望未来，为为期 5 个月的第一届初中教师网络研修班第一阶段画上了句点。这个句点给我们带来了什么？相信每一个参与者都有一份属于自己的答案，这是一种结束，更是一种开始。HPM 网络研修班是新时代关于教师专业发展模式的新尝试，在一定程度上打破了时间和空间的限制，使得全国各地的教师都能够在同一个平台上一起学习，共同进步。愿 HPM 网络研修班为数学教师的专业发展打开一扇新窗。

2019 年 HPM 研究成果

一、HPM 理论探讨

[1] 汪晓勤. 鲁迅科学史观对数学学科德育的启示[J].教育研究与评论, 2019(02): 4-11.

[2] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019(02): 37-43.

[3] 岳增成. 中国 HPM 发展之路[J]. 教学月刊小学版(数学), 2019(11): 6-9.

[4] 栗小妮. 数学学科德育价值内涵探析[J]. 教学月刊小学版(数学), 2019(11): 14-17.

[5] 文萍, 岳增成. 基于数学史的探究式教学研究[J]. 教学月刊小学版(数学), 2019(11): 23-26.

[6] 李卓忱, 韩嘉业. 融合信息技术 传播数学文化——小学 HPM 微视频的设计与使用案例[J]. 教学月刊小学版(数学), 2019(11): 27-30.

[7] 姜浩哲, 汪晓勤. 基于数学史的初中数学新知引入课例分析[J]. 中小学课堂教学研究, 201 (01):9-14+20.

[8] 汪晓勤, 陈君煜. HPM 视角下数列教学中的直观想象素养初探[J]. 中小学数学(高中版), 2019(04): 57-60.

[9] 姜浩哲, 汪晓勤. HPM视角下的人口增长问题学习进阶设计[J]. 数学教学, 2019(03): 1-6.

[10] 沈中宇, 姜浩哲. HPM 与小学数学核心素养的培养[J]. 云南教育(小学教师), 2019(04): 4-6.

[11] 林庄燕, 汪晓勤. 出入相补原理在初中数学教学中的应用[J]. 中学数学教学参考, 2019, (26): 9-11.

[12] 卢成娴, 姜浩哲, 汪晓勤. 数学史对批判性思维培养的作用——以《三角形一边平行线性质定理及推论》一课为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2019(04): 11-17.

二、教育取向的历史研究

[13] 汪晓勤. 算术三角形的历史及其文化价值[J]. 中学数学月刊, 2019(04): 52-55.

[14] 卢成娴, 汪晓勤. 20 世纪上、中叶美英教科书中的锐角三角函数引入方式[J]. 中学数学月刊, 2019(02):45-48.

[15] 周天婷, 汪晓勤, 沈中宇. 美英早期三角学教科书中有关高度测量的问题[J]. 中学数学月刊, 2019(05): 45-49.

[16] 齐春燕, 汪晓勤.《九章算术》勾股章及其刘徽注中的变式思想[J]. 数学通报, 2019, 58 (05): 5-9.

[17] 姜浩哲，沈中宇，汪晓勤. 新中国成立 70 年数学学科德育的回顾与展望[J]. 课程·教材·教法，2019，39(12).

[18] 秦语真，汪晓勤. 美英早期解析几何教科书中的圆与椭圆关系. 中小学数学(高中版)，2019，(10)：46-49.

三、教学实践与案例开发

[19] 胡佳婧，张亚琦. HPM 视角下的线面垂直判定定理教学设计与实施[J]. 中小学课堂教学研究，2019(01):15-20.

[20] 瞿鑫婷，汪晓勤，贾彬. 基于数学史的三角形内角和探究活动的设计与实施[J]. 中小学课堂教学研究，2019(02)：12-15+46.

[21] 王进敬，栗小妮. HPM 视角下“有理数的乘法”教学研究[J]. 中小学课堂教学研究，2019(03)：10-14.

[22] 刘欣雨，沈中宇. 数学史的德育价值初探——以“角的和、差、倍”的教学为例[J]. 数学教学，2019(01):42-46.

[23] 林庄燕，汪晓勤. HPM 视角下的分式概念教学——同课异构课例分析[J]. 中小学课堂教学研究，2019(04):7-12.

[24] 邵爱娣，余庆纯，汪晓勤. HPM 视角下的“十字相乘法”课例研究[J]. 中小学课堂教学研究,2019(05)：10-15.

[25] 蔡东山，陈晏蓉，沈中宇. HPM 视角下的两角和与差的余弦公式教学[J]. 数学教学，2019(03):7-12+34.

[26] 栗小妮，贾彬. HPM 视角下“可化为一元一次方程的分式方程”的教学[J]. 数学教学，2019(03)：13-17.

[27] 林庄燕，汪晓勤. 初中 HPM 课例中的数学文化内涵分析[J]. 教育研究与评论(中学教育教学)，2019(01):57-63.

[28] 刘志霞，刘思璐，沈中宇. “向量的坐标表示及其运算”：以重构式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学)，2019(05)：44-51.

[29] 刘思璐，汪晓勤，沈中宇. HPM 视角下的高中函数概念课例研究[J]. 中小学数学(高中版)，2019(Z1):37-41.

[30] 蔡东山，瞿鑫婷，沈中宇. HPM视角下的等比数列求和公式教学[J]. 数学教学，2019(09):8-13.

[31] 李德虎, 余庆纯. HPM 视角下“十字相乘法”的教学[J]. 数学教学, 2019(08): 36-41.

[32] 王进敬. HPM 视角下的一般的一元二次方程的解法(配方法)[J]. 中小学数学(初中版), 2019(Z1): 33-36.

[33] 张益明, 李卓忱. “旋转体的概念”: 基于相似性, 重构数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2019(08): 37-42.

[34] 卢成娴, 汪晓勤, 沈中宇. HPM 视角下复数概念教学的反馈研究[J]. 中小学数学(高中版), 2019(Z2):8-11.

[35] 黄蓓, 周天婷. HPM 视角下的平面向量概念教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2019(10): 23-28.

[36] 王雅琪, 瞿鑫婷. HPM 视角下圆的面积公式教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(06): 9-14.

[37] 杜金金, 陈莎莎, 沈中宇. 周期函数的概念: 从历史到课堂[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(07): 9-14+19.

[38] 张冰, 卢成娴, 沈中宇. HPM 视角下的复数概念教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(08): 12-18.

[39] 贾彬, 孙丹丹. HPM 视角下“素数与合数”的教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(09): 12-17.

[40] 杜金金. HPM 视角下的棱柱概念教学[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(10): 16-21.

[41] 李莹, 韩嘉业, 沈中宇. HPM 视角下的贾宪三角探究[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(11): 14-19.

[42] 张翼翔, 余庆纯. 培育问题解决能力，浸润数学学科德育——以 HPM 视角下“平面直角坐标系”教学为例[J]. 中小学课堂教学研究, 2019(12): 6-11.

[43] 黄深洵, 刘思璐, 沈中宇. HPM 视角下的函数概念教学[J]. 中学数学月刊, 2019(09): 53-56.

[44] 李玲, 汪晓勤. 基于数学史的等比数列前 n 项和公式教学. 中学数学月刊, 2019(11): 36-39.

四、数学史融入教材研究

[45] 姜浩哲, 汪晓勤. 美国《线性代数及其应用》教材中的数学文化研究[J]. 高等理科教育, 2019(03): 74-80.

五、会议综述

[46] 邹佳晨，姜浩哲，沈中宇. 新时代华人数学教育研究的特点与展望——“第三届华人数学教育大会”综述[J]. 数学教育学报，2019，28(02)：99-102.

[47] 余庆纯，姜浩哲，沈中宇. 第三届华人数学教育大会 HPM 分论坛综述[J]. 数学教学，2019(04)：1-5.

[48] 刘思璐，邵爱娣. 第三届华人数学教育大会之小学数学教育分论坛综述[J]. 数学教学，2019(08)：13-16.

[49] 林庄燕，陈君煜. 第三届华人数学教育大会“中学数学课堂教学”分论坛综述[J]. 数学教学，2019(08)：9-13.

[50] 周天婷，姜浩哲. 第三届华人数学教育大会“数学教师教育与专业发展”分论坛综述[J]. 数学教学，2019(09)：4-7+13.

[51] 邵爱娣，刘思璐. 第三届华人数学教育大会之“认知科学与数学教育”分论坛综述[J]. 数学教学，2019(09)：1-3+48.

[52] 瞿鑫婷，叶慧妍. 第三届华人数学教育大会“数学课程与教材”分论坛综述[J]. 数学教学，2019(11)：17-20.

（姜浩哲、沈中宇整理）