上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2013 年第 2 卷第 6 期

约翰内斯 · 开普勒

（**J. Kepler ,1571～1630**）

《上海 HPM 通讯》第 2 卷第 6 期编委会名单

目 录

刊首语

本期的封面人物是德国著名数学家、天文学家、物理学家开普勒。

开普勒生于魏尔（Weil），卒于雷根斯堡（Regensburg）。开普勒自幼体弱多病，但聪明好学，智力超群。1584 年入教会学校读书，1587 年就学于蒂宾根大学，次年获得文学学士学位，1591 年又获得硕士学位，并开始深造神学。1594 年因格拉茨（Graz）一所教会学校的一名数学教师去世，开普勒被推荐就任这一教职，从此走上了科学研究之路。1600 年到布拉格与天文学家第谷（Tycho B.）合作研究天文学。第二年第谷去世后开普勒继承了他的未竟事业，被任命为皇家数学家。此后虽又历经坎坷，但他潜心学术，新作叠出，成为了著名的科学家。

开普勒是在数学理论应用方面卓有成就的学者。最突出的贡献是发现了行星运动三大定律：

1. 行星的轨道是椭圆，太阳居其焦点之一。
2. 在相等的时间内，行星与太阳的连线所扫过的面积相等。
3. 行星公转周期的平方同轨道半长轴的立方成正比。

开普勒定律消除了以往人们对太阳的偏见，支持了哥白尼（Kopernik, M.）的学说，为牛顿万有引力定律的发现铺平了道路。他的有关名著《新天文学》（1609），《宇宙的和谐》（1619）等在一定程度上左右了人们对整个世界的认识。

他还是微积分学的先驱者之一，在《测量酒桶的新立体几何》（1615）中，用通俗语言引入了无穷大和无穷小的概念，指出“圆是由无数个顶点在圆心的三角形形成，圆周是由这些三角形的无穷小底边构成”。他用同样的思路阐明了构成圆锥和棱锥的学说，扩展了阿基米德（Archimedes）求曲边形面积的穷竭法。他还研究了各种旋转体的性质。把无限小的弧看成直线，把无限窄的面看成直线，把无限薄的体看成面，讨论了多种各类体积问题。他的朴素的积分思想是卡瓦列里（Cavalieri, B.）不可分原理的先导。此外，该书还研究了等周问题，即用尽可能少的材料建造容积尽可能大的容器。他还提出判别一个变量极值的方法，即在一个极值近邻，该变量的值实际上保持不变。

他的《光学天文》（1604）是几何光学的基础，其中研究了二次曲线的相互转化问题，提出了平行线的无穷远点概念。他还提出了与蜂房结构有关的数学问题，引入了“轨迹”术语，讨论过黄金分割，他的宇宙结构说、日心说、星辰编制、眼镜助视原理等均是各领域的经典之作。

开普勒一生命运多舛，却始终百折不挠，矢志不渝，他为我们留下了宝贵的的精神财富！

文献研究

斐波纳契与无理方程

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海, 200062）

考察中学数学的每一个知识点，我们会发现：一些知识点的历史知识在课本上已有所介绍，如无理数、一元一次方程、二元一次方程组、勾股定理等；另一些知识点的历史，尽管课本上可能并没有介绍，但数学教师却对其有一定了解，如一元二次方程、全等三角形等。然而，还有许多知识点，其背后的历史知识却是课堂教学中的盲点。

无理方程就是这样的盲点之一。考察数学的历史，我们发现：尽管直到 19 世纪 60 年代，西方作者才开始普遍关注这类方程 [1]，但 13 世纪初意大利数学家斐波纳契（L. Fibonacci, 1170?～1250?）的《计算之书》[2]却是迄今我们所见到的含有这类方程的最早的数学文献。那么，斐波纳契是如何表达无理方程的？他怎样求解无理方程？他是否知道通过验根来识别增根？他如何对待零根和负根？本文拟通过对《计算之书》中无理方程的考察来回答上述问题，为初中 HPM 教学积累素材，并获得若干教学启示。

1 《计算之书》中的无理方程及其解法

《计算之书》的最后一章（即第 15 章）专门讨论各种一元二次方程的解法。实际上，与 9 世纪阿拉伯数学家花拉子米一样，斐波纳契讨论了以下六类方程：

（1）$ax=b$；

（2）$ax^2=b$；

（3）$ax^2=bx$；

（4）$ax^2+bx=c$；

（5）$ax^2=bx+c$；

（6）$ax^2+c=bx$，

其中，$a>0$，$b>0$，$c>0$。斐波纳契给出的部分问题属于无理方程问题，可化为上述各类方程来解。

（1）一个数乘以其根的 4 倍，等于该数的 7 倍。设所求数为 x，则由题设得方程

$$x \cdot 4\sqrt{x} = 7x \tag{1}$$

斐波纳契将原方程化为$4\sqrt{x} = 7$，于是得$\sqrt{x} = 1\frac{3}{4}$，$x = 3\frac{1}{16}$。

（2）一个数减去它的四分之一，所得差乘以它的根的 4 倍，等于它的 6 倍。设所求数为 x，由题设得方程

$$\left(x - \frac{1}{4}x\right) \cdot 4\sqrt{x} = 6x \tag{2}$$

斐波纳契将原方程化成$\frac{3}{4}x \cdot 4\sqrt{x} = 6x$，两边取三分之一，得$\frac{1}{4}x \cdot 4\sqrt{x} = 2x$，将两个方程相加，得$x \cdot 4\sqrt{x} = 8x$，从而得$4\sqrt{x} = 8$，$\sqrt{x} = 2$，$x = 4$。

方程两边同取若干分之一，再与原方程相加，从而去掉分数，这是斐波纳契经常使用的方法。他在另一部数学著作《花朵》中也用这一方法来解有关方程。

以上两个无理方程可化为第一类方程（$ax = b$）来求解。

（3）一个数减去 4 根，所余数的四分之一等于 4 根。设所求数为 x，由题设得方程

$$\frac{1}{4}\left(x - 4\sqrt{x}\right) = 4\sqrt{x} \tag{3}$$

斐波纳契的解法是：

$$x - 4\sqrt{x} = 16\sqrt{x} \Rightarrow x = 20\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 20 \Rightarrow x = 400。$$

（4）一个数减去 3 根，所余之数等于该数 4 倍的根。设所求数为 x，由题设得方程

$$x - 3\sqrt{x} = \sqrt{4x} \tag{4}$$

解法同上题。

以上两个方程可化为第三类方程（$ax^2 = bx$）来求解。

（5）有一平方，从中减去其根的三倍，将所得差的根的 4 倍与该平方的根的 3 倍相加，得 20。设所求根为 x，则得方程

$$4\sqrt{x^2 - 3x} + 3x = 20 \tag{5}$$

斐波纳契的解法是：

$$\sqrt{x^2 - 3x} = 5 - \frac{3}{4}x \Rightarrow x^2 - 3x = 25 - 7\frac{1}{2}x + \frac{9}{16}x^2 \Rightarrow \frac{7}{16}x^2 + 4\frac{1}{2}x = 25 \Rightarrow$$

$$x^2 + 10\frac{2}{7}x = 57\frac{1}{7} \Rightarrow x = 4。$$

本题化为第四类方程（$ax^2 + bx = c$）来求解。

（6）一个数加上 10 第纳尔，和乘以根 5，所得乘积的根等于该数。设所求数为 x，由

题设得方程

$$\sqrt{\sqrt{5}\left(x+10\right)}=x \tag{6}$$

两边平方得 $x^2=\sqrt{5}\left(x+10\right)$，解得 $x=\sqrt{\sqrt{500}+1\frac{1}{4}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}$。

本题化为第五类方程（$ax^2=bx+c$）来求解。

（7）有一数，减去它的$\frac{1}{4}\frac{1}{3}$和 4 第纳尔，等于它的根。设所求数为 x，由题设得方程

$$x-\left(\frac{7}{12}x+4\right)=\sqrt{x} \tag{7}$$

斐波纳契的解法是：

$$\left(\frac{5}{12}x-4\right)^2=x\Rightarrow\frac{25}{144}x^2+16=4\frac{1}{3}x\Rightarrow x^2+92\frac{4}{25}=24\frac{24}{25}x\Rightarrow x=12\frac{12}{25}+\sqrt{63\frac{369}{625}}。$$

（8）有一平方，其根的 3 倍加上平方与 3 根之差的根的 4 倍，等于平方加 4 第纳尔。设所求平方的根为 x，由题设得方程

$$4\sqrt{x^2-3x}+3x=x^2+4 \tag{8}$$

引人注目的是，斐波纳契采用换元法来解上述无理方程：设 $\sqrt{x^2-3x}=y$，则得关于 y 的一元二次方程 $y^2+4=4y$，利用求根公式得 $y=2$。于是得方程 $x^2-3x=4$，解得 $x=4$。

（9）假设有一平方，从中减去 8 根，将所得差的根的 10 倍加上 8 根，结果等于平方加 21 第纳尔。设所求平方的根为 x，由题设得方程

$$10\sqrt{x^2-8x}+8x=x^2+21 \tag{9}$$

与上题类似，斐波纳契亦采用了换元法：设 $\sqrt{x^2-8x}=y$，则得 $y^2+21=10y$，于是得 $y=3$ 或 7。从而得 $x^2-8x=9$ 或 $x^2-8x=49$，解得 $x=9$ 或 $x=4+\sqrt{65}$。

以上三个方程均化为第六类方程（$ax^2+c=bx$）来求解。

2 若干特点

2.1 修辞代数

我们知道，代数学的发展经历了三个阶段：修辞代数、缩略代数和符号代数[3]。以上我们看到，斐波纳契《计算之书》中包括无理方程在内的所有方程及其解法都完全是用文字来表达的，未知数称为“根”（这个名称源于阿拉伯），未知数的平方称为“平方”；如果将“平

方”本身看做未知数，那么未知数的平方根称为“根”。我们今天的“设某某为 x”，斐波纳契说成“设某某为物”，自始至终没有用字母符号来表示未知数或已知数。因此，与阿拉伯人的代数一样，斐波纳契的代数属于修辞代数。

顺便指出，无理方程（1）—（9）都没有任何现实背景。

2.2 负根和零根

斐波纳契对负数已有很好的认识，他在《计算之书》中明确提出“负负得正，正正得正，正负得负”的运算法则 [2]。但是，在解方程的时候，他却始终不考虑负根。下表给出了以上各无理方程的解的情况。

方程	斐波纳契给出的根	斐波纳契舍去的根	舍根的原因
（1）	$x=3\frac{1}{16}$	$x=0$	不考虑零根
（2）	$x=4$	$x=0$	不考虑零根
（3）	$x=400$	$x=0$	不考虑零根
（4）	$x=25$	$x=0$	不考虑零根
（5）	$x=4$	$x=-14\frac{2}{7}$	不考虑负根
（6）	$x=\sqrt{\sqrt{500}+1\frac{1}{4}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}$	$x=-\sqrt{\sqrt{500}+1\frac{1}{4}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}$	不考虑负根，增根
（7）	$x=12\frac{12}{25}+\sqrt{63\frac{369}{625}}$	$x=12\frac{12}{25}-\sqrt{63\frac{369}{625}}$	增根
（8）	$x=4$	$x=-1$	不考虑负根
（9）	$x=9$ 或 $x=4+\sqrt{65}$	$x=-1$， $x=4-\sqrt{65}$	不考虑负根

另外，在化简方程时，斐波纳契总是心安理得地在方程两边同时除以 x，始终不考虑零根。我们可以将这种做法称作“忽略零根”现象，这种现象在早期数学史上是相当普遍的，也出现在分式方程上。

2.3 关于增根

斐波纳契很清楚，第六类方程有两个正根。他在《计算之书》中写道：“若问题归结为平方加一数等于若干根，则当该数等于或小于根数之半的平方时问题可解。若它等于根数之半，则根数之一半即为平方的根。若它小于根数之半，则从根数之半的平方中减去该数，【取所得结果的平方根，】从根数之半中减去这个根；若所得差数并非所求平方的根，则将根数之半与这个根相加，即得所求平方的根。” [2]在方程（7）的两个正根中，斐波纳契选择 $12\frac{12}{25}+\sqrt{63\frac{369}{625}}$ 而舍弃 $12\frac{12}{25}-\sqrt{63\frac{369}{625}}$ ，这显然是验根的结果。

此外，在方程（6）的两个根中，负根恰好是增根，由于不考虑负根，斐波纳契不知不觉中舍去了增根。

2.4 几何语言

斐波纳契是用几何语言来描述换元法的。以方程（8）为例。如图 1，斐波纳契把平方（x^2）看做正方形 $ABCD$ 的面积，把平方的根（x）看做正方形的边长。在 BC 上取点 E，使得 $CE=3$，则矩形 $ABEF$ 的面积为 x^2-3x，将其当做另一个平方（y^2），就得到一个新的方程。解这个新方程，得矩形 $ABEF$ 的面积为 4。

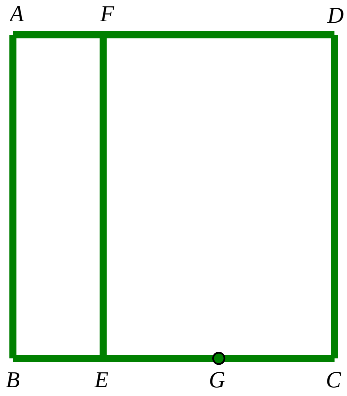


图 1

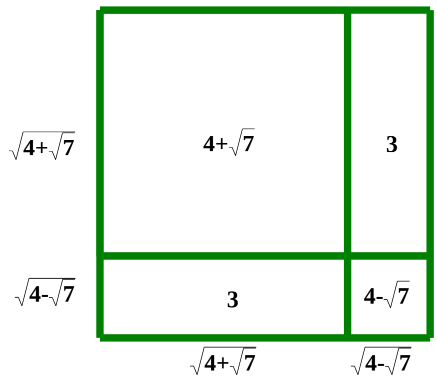


图 2

斐波纳契本可以将方程 $x^2-3x=4$ 转化为 $x^2=3x+4$，再利用求根公式即可求得 x，但他却没有这么做。仍如图 1，因 $BE\cdot EF=BE\cdot BC=4$，取 EC 的中点 G，得

$$BE\cdot BC+EG^2=4+2\frac{1}{4}=6\frac{1}{4},$$

利用《几何原本》卷 2 中命题 6（相当于说 $a(a+b)+\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2$）即得 $BG^2=6\frac{1}{4}$，即 $BG=2\frac{1}{2}$，故得 $x=4$。

这种做法在《计算之书》其他各章中也是屡见不鲜的。例如，在第十四章中，斐波纳契利用《几何原本》卷 2 命题 4（相当于说 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$）求得 $\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{14}$，如图 2 所示。

斐波纳契所受《几何原本》之深刻影响，由此可见一斑。

3 结论与教学启示

通过对《计算之书》中的无理方程的考察，我们至少可以得出以下结论：无理方程的历

史至迟可上溯至 13 世纪初；《计算之书》反映出早期代数史上的“忽略零根”现象；修辞代数并未影响斐波纳契对无理方程的理解，几何语言的使用弥补了修辞代数的不足；斐波纳契已经熟练掌握了换元法，知道验根、识别增根；尽管斐波纳契已较好地认识并接受了负数概念，但在解方程时未能超越古巴比伦人、希腊人和阿拉伯人，依然将方程的负根排除在外。

据此，我们得出如下启示。

（1）“说有易，言无难。”我们在追溯任何一个知识点发生、发展的历史时，很难作出“之前未曾有过”这样的断言，正所谓“莫道君行早，更有早行人。”斐波纳契《计算之书》完全颠覆了我们原先的“无理方程出现于 16 世纪”这样的印象。

（2）《计算之书》中所有的“无理方程”都只不过是六类整式方程的特例而已，“换元法”一开始就与无理方程相依相伴。

（3）今天数学课堂上学生之“忽略零根”现象只不过是早期历史上数学家错误的再现而已，这种历史相似性告诉我们，历史是一面镜子，历史有助于我们更好地理解学生的错误；同时，历史也提醒我们，教师在课堂上应强调，在零根问题上，不要重蹈古人覆辙。

（4）在今天的代数教学中，应让学生学会文字语言、图形语言和符号语言之间的转换，这将有助于学生的数学理解。

（5）尽管没有符号，但斐波纳契在叙述方程和方程的求解过程时，语言清晰、流畅、准确，即使在八百多年之后、符号代数已成为家常便饭的今天，阅读起来依然并无多大困难。这提示我们：尽管修辞代数是代数发展过程中的初级阶段，在今日中学代数课本中已难觅踪迹，但让学生将符号语言转换成文字语言，可以提高学生的表达和交流能力。

（6）数学史上的每一次进步都是缓慢而艰辛的，负数概念的发展也不例外。所以，我们今天在进行概念教学时，不应忘记“欲速则不达”的古训。

参考文献

[1] Manning, K. R.. A history of extraneous solution. *Mathematics Teacher*, 1970, 63 (11): 165-174

[2] Siegler, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer-Verlag, 2002

[3] 张连芳，汪晓勤. 初中生对符号代数的理解：历史相似性初探. 中学数学月刊，2013(4): 34-36

圆锥曲线之起源与发展简史

邹佳晨

（华东师范大学数学系，上海，200241）

摘要：本文从圆锥曲线的起源谈起，梳理了其在各个历史时期的发展脉络，兼谈圆锥曲线在中国的转播。为初学者了解圆锥曲线的历史提供了一个视角。

关键词：圆锥曲线；数学史；解析几何

1 梅内克缪斯和圆锥曲线的起源

关于圆锥曲线的起源，或许连希腊人也很模糊，但可以肯定的是一定与倍立方问题有关。（卡茨，2004）早在公元前 5 世纪，古希腊数学家希波克拉底（Hippocrates, 约公元前 470～公元前 410）已经将倍立方问题归结为求二次比的问题：对一个棱长为 a 的立方体，在 a 和 $2a$ 之间确定 x 和 y，使得 $a:x=x:y=y:2a$，用现在的术语来讲，就是要同时解下面三个方程中的两个：$x^2=ay$、$y^2=2ax$ 和 $xy=2a^2$，前两个是抛物线方程，第三个是双曲线方程。

古希腊时期研究过倍立方问题的学者有：阿尔希塔斯（Archytas, 约公元前 428～公元前 350）、柏拉图（Plato, 公元前 427～公元前 347）、欧多克斯（Eudoxus, 公元前 408～公元前 355）和梅内克缪斯（Menaechmus, 约公元前 380～公元前 320）。（白尚恕，1964）梅内克缪斯是柏拉图和欧多克斯的学生，他第一个研究了满足 $a:x=x:y=y:2a$ 的曲线。他指出，通过这些曲线的交点可以确定 x 和 y，从而解决倍立方问题，他的解法可能是许多希腊学者的汇总。（Coolidge, 1968）

古希腊数学家怎样认识到用来解决倍立方问题的曲线可以通过圆锥的截线来解决的呢？或者说是如何发现圆锥曲线的呢？目前没有具体的史料来说明。通常认为是观察火山喷射、或是削尖的圆木桩，才发现了圆锥曲线。美国科学史家纽格伯尔（O. E. Neugebauer, 1899～1990）还推测，日晷 [1]更有可能是梅内克缪斯等发现圆锥曲线的本源。随着太阳的移

[1] 日晷，已知的最早用来测量时间的装置。其原理是利用太阳投射的影子来测定并划分时刻，如图 1。公元前 2000 年，在古巴比伦就有人使用了日晷。日晷由晷盘（测量面）和晷针（时针）组成。这种利用太阳光的投影来计时的方法是人类在天文计时领域的重大发明。（中文版《世界百科全书》编译委员会，2006）

动，晷盘上晷针影子尖端形成的曲线就是圆锥曲线（调整晷盘倾斜度就可以得到各种圆锥曲线）。（Dolan, 1972）

图 1　日晷

至此，圆锥曲线在公元前 4 世纪闪亮登场了。梅内克缪斯时期，希腊人利用垂直于母线的平面去截顶角分别为直角、钝角和锐角的正圆锥，得直角圆锥曲线（即抛物线）、钝角圆锥曲线（即双曲线）和锐角圆锥曲线（即椭圆）。

2 阿波罗尼斯和圆锥曲线的发展

梅内克缪斯之后，亚里士塔欧（Aristaeus, 约公元前 370～公元前 300）著有《立体轨迹》，对“立体轨迹”（solid loci, 即圆锥曲线），作了深入研究；欧几里得（Euclid, 约公元前 325～公元前 265）著有《圆锥曲线》，对圆锥曲线的研究成果作了系统的总结。可惜，这两本书都失传了。事实上，圆锥曲线的许多性质都可以叙述成轨迹定理，亚里士塔欧和欧几里得已经知道：平面上到定点的距离与到定直线距离之比等于常数的点的轨迹是圆锥曲线。但是，在没有代数工具的古希腊时期，研究这样的轨迹问题并非易事，亚里士塔欧和欧几里得都没有给出完善的证明。（汪晓勤，2007）

在亚里士塔欧和欧几里得之后，阿波罗尼斯所著《圆锥曲线》是古希腊最重要的数学著作之一。书中将同一圆锥被不同位置的平面所截得的曲线定义为圆锥曲线。并且，阿波罗尼斯所用的圆锥并不局限于正圆锥。他推广的圆锥概念如下：

与圆不在同一平面上的一点作与圆周相交的直线，如果该点固定，把所作直线沿圆周旋转一周，则生成的曲面就是**圆锥面**，固定点是**顶点**，顶点到圆心的直线是**轴**，圆称为圆锥的**底**。（卡茨，2004）

阿波罗尼斯所作的圆锥面即现在的对顶斜圆锥，一般情况下，对顶斜圆锥的轴与底圆并不垂直，为简化起见，我们一般只考虑正圆锥的情形，即圆锥的轴与底圆垂直。阿波罗尼斯处理圆锥曲线的方法与前人不同，只用一个圆锥，改变截面的位置就能产生三种曲线（这点欧几里得可能也知道），还注意到截面垂直于轴时是圆。他对圆锥曲线的叙述很接近现代的方式，如以一顶点为原点，长轴为横轴的椭圆表述为：任一点纵坐标组成的正方形小于与之对应的横坐标及通径组成的矩形，表示为现代形式即 $y^2 < px$，其中 p 为通径。根据同样的方法，双曲线和抛物线表示为 $y^2 > px$ 和 $y^2 = px$。（白尚恕，1964）

这时候的希腊人从一个圆锥得到三种圆锥曲线，梅内克缪斯时期圆锥曲线的名称“直角圆锥曲线、钝角圆锥曲线和锐角圆锥曲线”显然已经不适用了。由于阿波罗尼斯把圆锥曲线表述为矩形面积的关系，恰好与毕达哥拉斯学派的面积应用问题相一致，故阿波罗尼斯将毕达哥拉斯学派的面积应用术语 *έλλειψη*（不足）、*υπερβολή*（超出）和 *παραβολή*（相齐）分别来命名三种圆锥曲线：椭圆、双曲线和抛物线。当希腊数学传入欧洲时，这些名称便译为 ellipse、hyperbola 和 parabola，17、18 世纪传入我国时，最初形象地称为“椭圆形”、“陶丘形”和“圭窦形”，后来才改为现在的名称。（朱鼎勋，1962；汪晓勤、韩祥临，2002）

从阿波罗尼斯的方法来看，圆锥曲线的定义已经摆脱了圆锥，表示为一种平面轨迹，但是他没有用焦点和准线给出定义，也没有第一定义（即“到两个定点距离之和为定值的点的轨迹是椭圆”），因为当时的希腊数学家们不知道圆锥曲线有准线，也不知道抛物线有焦点，虽然阿波罗尼斯提到椭圆和双曲线的焦点，却是很偶然的，没有着重研究。（范其鲁，1953）

阿波罗尼斯的《圆锥曲线》共有八卷，只有七卷传了下来，这本著作在某种意义上代表了古希腊数学发展的顶峰。很难想象，在没有代数符号的情况下，阿波罗尼斯是如何发现并证明数百条优美深奥的定理。卡茨（2004）认为其后的希腊数学著作没有一部在难度方面超越《圆锥曲线》。

3 希腊后期圆锥曲线的发展

阿波罗尼斯以后，希腊数学对圆锥曲线贡献不多，直到公元 4 世纪，古希腊时代的最后一位几何学家帕普斯（Pappus，约 290～350）在《数学汇编》（*Mathematical Collections*）中用几何方法证明了欧几里得《面轨迹》（*The Surface-Loci*，后失传）中的一个引理：平面上到定点和定直线的距离之比等于常数的动点轨迹为圆锥曲线，常数大于、等于和小于 1 时，轨迹分别为双曲线、抛物线和椭圆。在解析几何发现以前，这是非常重要的贡献。（Coolidge, 1968）

帕普斯在《数学汇编》还研究了“三线轨迹”和“四线轨迹”问题。“三线轨迹”是指：给定三条直线，若动点到其中两条直线的距离乘积与到第三条直线距离的平方之比等于常数，则该点的轨迹为圆锥曲线。“四点轨迹”是指：给定四条直线，若动点到其中两条直线的距离乘积与到另两条直线的距离乘积之比等于常数，则该点的轨迹也是圆锥曲线。这是亚里士塔欧和欧几里得没有完全解决的轨迹问题。（汪晓勤，2007）对于推广到 n 条直线的情形，帕普斯没有完成，直到 17 世纪法国数学家费马（P. de Fermat, 1601～1665）和笛卡尔（R. Descartes, 1596～1650）等人的研究，促使了解析几何的创立。

4 解析几何与圆锥曲线的发展

帕普斯之后的一千多年，圆锥曲线的研究不像古希腊时期那么辉煌，现有文献也很少发现有关圆锥曲线的新的研究，主要是应用于物理学和天文学中，或是用来解三次方程等问题。德国天文学家开普勒（J. Kepler, 1571～1630）于 1609 年发现天体运行轨道是椭圆，也发现了圆锥曲线的焦点和离心率。（白尚恕，1964）法国数学家帕斯卡（B. Pascal, 1623～1662）年轻时就对圆锥曲线有过研究，主要涉及线段共点的轨迹问题，并出版了《二次曲线论》（*Essay pour les Coniques*），后来得到德国数学家莱布尼茨和法国数学家笛沙格（G. Desargues, 1591～1661）的高度赞扬。（Clarke & Smith, 1928）

17 世纪初期，在研究古希腊“三线轨迹”和“四线轨迹”的基础上，费马和笛卡尔创立了解析几何，圆锥曲线的研究从此进入了一个崭新的时期。这时候的数学家们从代数的视角，运用解析的方法，研究圆锥曲线的定义、方程和各种性质，出现了大量圆锥曲线的著作，有些成为当时的经典教材，为我们提供了丰富的宝库。（汪晓勤，2013）这些著作中呈现了各种各样的椭圆定义方式，椭圆方程的推导也可谓精彩纷呈。（邹佳晨，2012）

19 世纪以来，解析几何受到分析学和各种科学的影响，内容发展得非常丰富，以圆锥曲线来说，不仅在理论上达到了极高峰，实际中也得到了充分的运用。（白尚恕，1964）

5 圆锥曲线在中国的传播

在我国古代很少有人研究过圆锥曲线。后来出现的圆锥曲线都是明末清初随历法传入的，就以椭圆为例，概念也不详尽，名称也不统一，如表 4-1。（李俨，1955）其实在中国古代“椭”这个字就是“长圆形”的意思，如《史记·平准书》中记载：“三曰复小，椭之。”（辞海编辑委员会，1979）

表 1　椭圆相关名称演变表

时 间	出　处	椭圆	长轴	短轴
1631	《测量全义》	椭圆形		
1631	《恒星历指》	椭圆、斜圆		
1632	《交食历指》	长圆形	大径	小径
1633	《测天约说》	长圆形、椭圆、瘦圆界		
1723	《数理精蕴》	椭圆形、鸭蛋形	大径	小径
1742	《历象考成后编》	椭圆	大半径	小半径

第一个带来椭圆知识的人是意大利传教士利玛窦（M. Ricci, 1552～1610），1583 年来中国的时候，带来了一幅在科隆印制的用椭圆投影绘制的椭圆形标准地图，这是当时中国最早的椭圆形地图。（杨泽忠，2004）清康熙 12 年（1673 年），比利时传教士南怀仁（F. Verbiest, 1623～1688）写成《灵台仪象志》（十六卷），其中有应用“到两定点距离之和为常数”这一性质的椭圆拉线作图法。（白尚恕，1964）这正是我们今天教学中画椭圆的常用方法。之后圆锥曲线在中国的传播主要是由于天文历法的需要，并没有系统完整的论述。期间主要涉及椭圆作图法、计算椭圆的周长和面积等。

1856 年，晚清数学家李善兰（1811～1882）与英国传教士艾约瑟（J. Edkins, 1823～1905）翻译了整套关于圆锥曲线的著作《圆锥曲线》（三卷），完整详细地介绍了西方对圆锥曲线的研究，自此，圆锥曲线在我国广泛传播开来。（汪晓勤、韩祥临，2002）

6 结语

追溯历史，圆锥曲线的原始定义与当今教材中普遍采用的第一定义（例如，到两定点的距离之和为定长的点的轨迹为椭圆）大相径庭。事实上，现今教材中的第一定义是阿波罗尼斯《圆锥曲线》中的一个命题。（Apollonius, 1982）了解圆锥曲线的发展历程，学生可以更好地理解和掌握圆锥曲线的相关内容，并且对于高中教师开展圆锥曲线的教学，也是有所裨益的。

参考文献

[1] Clarke, F. M. & Smith, D. E. 1928. “Essay pour les Coniques” of Blaise Pascal. *Isis*, 10(1): 16-20

[2] Coolidge, J. L. 1968. *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. New York: Dover Publications, 1-25

[3] Dolan, W. W. 1972. Early sundials and the discovery of the conic sections. *Mathematics Magazine*, 45(1): 8-12

[4] 白尚恕. 1964. 圆锥曲线小史. 数学通报, 2: 36-41

[5] 辞海编辑委员会. 1979. 辞海（1979 年版, 中）. 上海: 上海辞书出版社, 3013

[6] 范其鲁. 1953. 圆锥曲线两种定义的小史. 数学通报, (1, 2): 54-55

[7] 卡茨. 2004. 数学史通论（第 2 版）（李文林等译）. 北京: 高等教育出版社, 91-105

[8] 李俨. 1955. 中算史论丛（第三集）. 北京: 科学出版社, 519-520

[9] 《世界百科全书》编译委员会. 2006. 世界百科全书（国际中文版）第 13 卷. 海口: 海南出版社, 三环出版社, 346

[10] 汪晓勤, 韩祥临. 2002. 中学数学中的数学史. 北京: 科学出版社

[11] 汪晓勤. 2007. 平面解析几何的产生（一）——古希腊的三线和四线轨迹问题. 中学数学教学参考（高中）, (9): 58-59

[12] 汪晓勤. 2013. 椭圆方程之旅. 数学通报, 52(4): 54-58

[13] 杨泽忠. 2004. 明末清初椭圆知识之东来. 数学教学, (3): 47-49

[14] 朱鼎勋. 1962. 圆锥曲线（续）. 数学通报, (4): 32-34

[15] 邹佳晨. 2012. 椭圆概念与方程推导的教材历史比较. 上海 HPM 通讯, (3): 30-39

调查研究

数学归纳法的历史相似性探究

王 科

（华东师范大学数学系，上海，200241）

摘要：历史相似性研究是HPM领域的主要研究内容之一。本文以数学归纳法为载体，通过梳理其概念的历史演化过程，理清发展脉络，并依此来设计适合高中生的问卷；重点分析学生在解题过程中的历史相似性。研究发现，高中生在解决与正整数有关命题的过程中，其解题思想存在高度的历史相似性，且思维方式之间存在明显的差异。期望能够从历史相似性的分析中获得HPM视角下MI的教学启示，帮助解决当前教学中存在的困境。

关键词：数学归纳法；数学归纳法历史；历史相似性

1 问题的提出

数学归纳法（以下简称MI）内容一直都是高中数学教学中的难点，也是很多教师又爱又恨的知识点，爱在证明方法之精妙，恨在证明原理之难教。

荷兰著名数学教育学家弗赖登塔尔提到MI教学中一些严重问题："常将二项式定理作为MI原理的推论，在数学创造过程中这是一个恶性循环。...如果从皮亚诺公理系这一自然数的形式理论推出MI，那也是教学中一个类似的恶性循环。...可是通常的演绎过程却以皮亚诺公理为基础，推出MI原理作为一个定理，以后再用于各种例子，这是违反教学法的一个显著的颠倒的例子。" [1] Harel（2002）在对标准教材的研究中提到：标准课本中MI的问题很少要求学生理解MI原理，只需他们机械地采用MI的二个步骤去解决。同时Harel也指出了标准教材编写的缺点，首先是标准教材中引入MI原理太突然；其次教材中问题的类型和顺序不当[2]。同时，中外文献研究表明[3-7]：学生在学习MI的过程中会碰到大量的问题，如不理解MI的概念、不理解证明过程中的归纳假设、机械性的运用MI等等。

历史发生原理告诉我们，学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程具有一定的相似性，历史上数学家所遭遇的困难正是学生所经历的障碍[8]。而国内外对历史相似性的实证研究的案例非常少，如[9-13]，迄今尚未有人对MI作实证研究，本研究就是针对这个

问题进行的，即今天高中生对有关正整数命题的证明过程中是否呈现出历史相似性？他们之间解题思维是否存在差异？研究目的是为MI的教学实践研究提供新的视角，同时也为HPM(History and Pedagogy of Mathematics)领域中的历史相似性研究提供新的案例[14]。

2 数学归纳法的历史

MI的发展过程是相当缓慢的，其思想曾在许多数学家的著作中隐约地体现过。笔者通过对其历史的研究发现，它的发展是在代数的发展推动下逐步演化的，现将发展阶段划分如下。

2.1 文字表达之数学归纳法萌芽阶段

早在毕达哥拉斯(Pythagoras，572 BC- 497 BC)时代，先知们就知道连续的奇数相加得到正方形数，他们对这个结果并没有严格的证明，只是不完全归纳的结果。当时没有代数的概念，用的最多的就是图形，并给出了“形数”的简约证明。毕达哥拉斯学派可能用点或小卵石表示数。用小卵石可以很容易地证明一些简单的定理[15]。如图 1 和 2：

图 1 三角形数

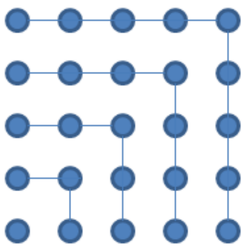


图 2 正方形数

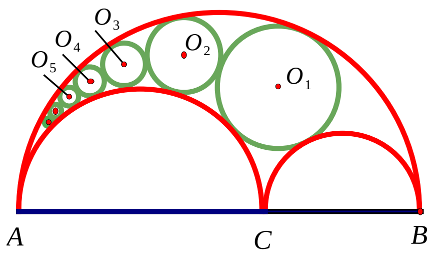


图 3 皮革匠的刀

在希腊数学中，是用文字的形式来表达数学思想和数学运算，其中最突出的著作是欧几里得(Euclid of Alexandria，约 300BC)的《几何原本》，用几何的形式来证明一些命题，包括具有递推思想的第九卷命题 20：预先任意给定多个素数，则有比它们更多的素数。Health 评述到：我们可得到一个重要的命题，即素数有无穷多个，并指出这个证明过程可以无限下去[16]，Paul Ernest (1982)对《几何原本》中这个证明的评述是，这种方法具有一般化，可以用它来证明 n 个素数的存在蕴涵着 n+1 个素数的存在。由于缺乏必要的代数语言来表达更一般化的数学归纳步骤，所以用了特殊例子来代替[17]。

2.2 缩写代数之数学归纳法发展阶段

在希腊后期，丢番图(Diophantus of Alexandria，约 246-330)的《算术》中已开始运用一套缩写的符号，其中使用了特殊的记号来表示未知数。这期间，数学家们也能做到用递推的形式来表达以此类推的想法。在帕普斯著作《数学汇编》第四册中第二部分探讨“皮革匠的刀内的内切圆”问题时（如上图 3），他就反复使用递推关系式，从而得出 $p_n = nd_n$ 的结论。用今天的符号即：定理 若鞋匠刀形的内切圆 O_n 的直径为 d_n ，圆心到直线 ACB 的距离为 p_n，则 $p_n = nd_n$。帕普斯的证明过程就是证明 $n = 1,2,3$ 皆成立，并在证明过程中， 应用了递推思想， 即 n=2 时用到 n=1 时的结论， n=3 时用到 n=2 时的结论，这样的过程可以无止境的下去 [18]。

在 8-13 世纪间，伊斯兰数学产生使用了一种字母系统，用阿拉伯字母来代表数字，并能够熟练运用递推来证明有限项（特别是项数为 10）结论，发展了很多有关数论的结论，并引进了一个重要的思想，即处理某些算术序列时使用递推原理，但由于没有完全地使用形式化的字母，致使递推思想只是停留应用其来表示 10 以内情况的推导，如凯拉吉 (Abu Bakr Al-Karaji， 953-1029) 并未对任意 n 给出一般性的结果，只给出了 n=10 的定理：$1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=(1+2+3+\cdots+10)^2$。像凯拉吉一样，塞毛艾勒(Al-Samaw’al，1125-1174)的推理包含了 MI 的两个基本要素。由已知结果出发，这里是 n=2，然后对给定的整数的结果去推出对下一个数的结果 [15]。但是塞毛艾勒没有任何方法来表达并证明一般的二项式定理，推其原因与代数的发展不无关系。事实上从塞毛艾勒的推理到二项式定理的 MI 证明只不过是小小的一步罢了。

历史上，首次提出递推原理作为证明基础的是数学家莱维・本・吉尔森(Levi Bee Gerson, 1288-1344)，他于 1321 年在所著的《计算技术》中提出 MI 的早期形式，书中讨论了排列组合等问题，对部分命题给出了归纳法的证明，其中使用的归纳法被称为“rising step-by-step”以至无限。他首先证明递推步骤，从关于 k 的命题推出关于 k+1 的命题，然后指出这个过程从 k 的某一较小的值开始，本质上他使用了 MI[19]。吉尔森在证明过程中，仅写出五个数的和，并非用现代的字母 n，五个数是用希伯来文的前五个字母来表示的。像许多前辈一样，他无法写出任意多个整数的和，因而采用一般化地举例的方法。吉尔森在论证中使用准一般化的方式，递推原理(“rising step-by-step”)，定义公式，并证明了命题。他认识到递推原理的特殊应用，形成了证明的结构，由于缺乏代数表示方法以及适当名称的局限，

阻碍了别人使用这个很自然的方法，因此《计算技术》的影响并不大。

2.3 符号代数之数学归纳法成熟阶段

从 16 到 17 世纪，韦达(Francois Viete，1540-1603)和笛卡尔(Rene Descartes，1596-1650)使字母表示数的地位在代数学上确立起来之后，代数符号的发展为数学家们更好的表达数学思想提供了强有力的工具。以递推原理为证明基础的 MI 也得到了发展，从意大利数学家毛罗利科斯(Francisci Maurolycus1494-1575)所著的《算数》书中可以略见一斑，他使用了推理思想证明了正整数的一些性质，如奇数的下个数是前一个数加上 2、每个整数加上前面的整数等于同行的奇数等等 [20]。但是，他的方法与今天的 MI 还有一些差距，因为他没有完全形式化地表达出 MI 的二个步骤，这个过程只是一种描述，笔者称其为“准归纳”的证明方法。他确实影响了 MI 概念的发展——帕斯卡就是受到他影响的数学家之一。

帕斯卡(Blaise Pascal，1623－1662)的著作《论算术三角》中提到的推论 12：“在任意算术三角中，同底上的两个毗邻的格子，上面的格子与下面的格子的比等于从上面格子到此底的顶格的格子数 与从下面的格子到底端的格子数的格子数之比。那两个格子都包含其中。”帕斯卡在其证明中写道：“虽然这一命题有无限多种情况，我将给出一个很短的证明，首先假定两个引理。” 引理 1：在第二底上的此命题显然不证自明，因为ϕ比σ等于 1 比 1。引理 2：如从某一底上有此比例，则在下一底上一定也有此比例。从以上引理可见，此比例在所有的底上都成立：由引理 1 得知在第二底上成立。因此由引理 2，在第三底上也成立，在第四底上也成立，以至无穷 [21]。

帕斯卡证明的两个引理相当于现在 MI 中的基础步骤和递推步骤，与其形式化表示已无差别。因此，帕斯卡应用两个引理的证明标志着 MI 形式化的完成。

2.4 自然数公理体系之数学归纳法逻辑形式化阶段

意大利著名数学家皮亚诺(Peano Giuseppe，1858-1932)在 1889 年发表的《算术原理》中，给出了自然数的公理体系，其中第 5 条公理“若一自然数集 S 包含 1，且若自然数 $x \in S$ 则 $x+1 \in S$，那么 S 包含所有的自然数”通常被称为归纳原理，MI 原理可以看成是归纳公理的一个推论。因此，逻辑符号所提供的公理化体系为数学分支中这个悬而未决的问题：MI 的逻辑基础，提供了解决之道。

正是经历了二千多年缓慢、曲折、艰辛地发展，并在代数发展的推动下，MI 才真正成为被数学界普遍接受的一种演绎推理的证明方法，并在数学发展中贡献自己一份力量。

3 研究方法

本研究对高中333名学生进行了问卷调查和访谈，其中包括149名高一年级四个班的学生和高二年级四个班的184名学生，并对W中学的5个班级进行了抽样访谈。根据学生作答的情况，把结果分成3类，从中各抽出2名进行访谈。访谈主要是为了保证问卷作答情况真实度，信度。

首先，对测试题的编制，在测试题的编制过程中，笔者一开始准备了8-10个题目，通过数学史专家，教学专家，以及数学教育研究者们共同探讨，并确定下来使用4个试题。其次，在一所普通G高中进行预测试来分析试题信度，测试过程中选择3个班级，分别来自各个年级的提高班。通过三次测试与分析，依据测试结果再对试题进行修正。同时，试题也做测试时间进行了论证，确保85%以上的学生能够在40分钟内做完所有试题，限于篇幅，本文只不对预测结果进行分析，只对实证的部分调查结果作统计分析，期望利用这些问题从不同的侧面去透视学生的解题思维。

4 问卷与访谈分析

问题一设计意图是考察学生是否认同，验证几个特例就能够说明等式是成立的。即“对于$1+3+5+7+\cdots=?$有同学这么思考：1+3=4，1+3+5=9，1+3+5+7=16，1+3+5+7+9=25，因此，他认为对于从1开始，所有的奇数之和等于奇数个数的平方。请问：你认同他的想法吗？谈谈你的理由。”

4.1 问题一分析

首先对问卷结果进行编码和分析，笔者把问卷情况分为15中类型，如表1所示，对其中大多数类以及访谈记录，详见表1、2，摘录如下。访谈学生用三位数来编码，首位数为1表示高一学生，首位数为2表示高二学生。

表1 解法编码

一、数列	高一学生	高二学生	共计人数	数学家
		人数（百分比）		
A.认同，验证	78(52.3)	46(25.0)	124(37.0)	毕达哥拉斯
B.认同，用等差求和公式	13(8.7)	78(42.4)	91(27.3)	

C.认同，无	18(12.0)	32(16.9)	50(15.0)	
D.认同，用平均值说明	7(4.7)	5(2.7)	12(3.6)	高斯
E.认同，用字母或等差公式表示，但是错误	8(5.4)	4(2.2)	12(3.6)	
F.认同，无反例	4(2.7)	1(0.5)	5(1.5)	毕达哥拉斯
G.认同，用 $n^2-(n-1)^2=2n-1$ 来证明	3(2.0)	1(0.5)	4(1.2)	帕普斯
H.认同，用毕达哥拉斯图	1(0.7)	0(0)	1(0.3)	毕达哥拉斯
I.认同，物理学中	1(0.7)	1(0.5)	2(0.6)	
J.认同，按 MI 证明由一般到特殊推出结论	1(0.7)	0(0)	1(0.3)	帕斯卡
小计	134(89.9)	168(91.3)	302(90.7)	
K. 不认同，举例片面	4 (2.7)	12(6.5)	16(4.8)	
L. 不认同，奇数不连续就不正确	6(4.0)	3(1.6)	9(2.7)	
M. 不认同，无	3(2.0)	0(0)	3(0.9)	
N.不认同，因为算错	2 (1.3)	1(0.5)	3(0.9)	
小计	15(10.1)	16(8.7)	31(9.3)	
总计	149	184	333	

表2　访谈摘录

教师提问	你认同这位同学的想法吗？
101	认同，因为第二题是这么证明过来的，平均数方法，就可得出，这些仿佛都是对的。
102	不认同，不够严谨，有可能不一定成立。
103	认同，这种模式不赞同，认同结果。
201	认同，自己验证了一下，也是对的。
201	认同，因为等差数列求出。
203	画图是小学奥数学习过，初中也有过。用等差求和没有图表达的清晰。
204	没有普遍性，应该用字母来表示。

由表1可见， A、E、F类解题思维都是出于毕达哥拉斯时代的思想。即毕达哥拉斯学派把点数图的结果推广后得出；几乎所有的有关形数的命题，都是由有限个特殊情况而作出一般结论的这里有明显的推理过程，但这种推理只是简单的枚举而没有碰到矛盾事实的归纳结果。因此是不完全的归纳推理，这里面并不能提供一个确实的根据。严格地说，毕达哥拉斯的这种归纳推理只是一种寻求结论的手段，它只能作为一种猜想或假说，而不是可靠的。 G类解题的思维方式比较类似于帕普斯的思想即反复应用递推关系式去推导内切圆圆心到直线的举例与其半径的关系。B类学生即用等差求和公式来解决问题的，高一有13名学生，高二有78名。虽然不能判断出其具体的相似性，但是从他们的解题过程中可以发现，仍然中有同学的思维仍然处于验证阶段，只是这种思维掩盖在机械的套用等差数列求和公式的外衣下面，如E、N类的学生只是用错了等差求和公式而已。

整体上来说，学生中302名认同题目中的想法，其中124名学生（占37%）完全认同通过验证若干个例子就可以说明结论，103名学生（占30.9%）认为需要用字母来表示，然后利用推理或公式来得出。9.3%的学生共计31名不认同，其中有16名学生认为方法片面，9名学生认识到题目有瑕疵，3名是没有原因，3名学生因计算错误致使答案与猜想不符，认为不正确。

访谈中的重要发现：在认同的学生中，有人是认同猜想的结果，而不是其推理的过程，有些认同的同学也不认同推理的过程，但是在问卷中并没有体现出来（见表3），其中原因可能与学生的做题目的思维定势有关。

表 3　访谈摘录

教师提问	205	206	207	208
你认同这种方法吗？	认同，类比	认同，我自己也是试过几个例子	认同的	认同的
你是认同结果还是认同这样的推理过程？	认同结果，过程也认同	都认同，包括结果和过程。	过程也是对的，但不够严谨。	结果认同，过程推理是片面的。

4.2　问题二分析

问题二的设计意图是探究高一学生在学习与没学习过数列和函数的情况下，是如何说明对于任意多的情况也是成立，是否想过用递推，或是用字母表示任意数。为此，测试了高一

年级3个班共计103名学生（其中一个班没有采用这个试卷），他们的测试卷中没有给出代数表达式，即“你如何说明对于无穷多个奇数之和等于奇数个数的平方？除了多举几个例子，还有什么方法可以说明？”这题中有些问题会造成学生的理解错误，即“奇数一定要是从1开始连续的奇数之和等于奇数的个数的平方，‘无穷多个’应改为‘任意多个’”。高二4个班共计184名学生，他们的测试卷中的试题则是“你如何说明$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$，除了多举几个例子，还有什么方法可以说明？”

表4 解法编码

二、数列	高一学生	高二学生	共计	数学家
		人数（百分比）		
A.找规律，验证	12(11.7)	2(1.1)	14(4.9)	毕达哥拉斯
B.等差求和（高斯法）	9(8.7)	160(87.0)	169(58.9)	
C.无	25(24.3)	15(8.2)	40(13.9)	
D.用平均值来说明	3（2.9）	0（0）	3（1.0）	
E.知道等差求和公式，但是求错的	17(16.5)	1(0.5)	18(6.3)	
F.无反例	1(1.0)	0(0)	1（0.3）	毕达哥拉斯
G.用$n^2-(n-1)^2=2n-1$来证明	1(1.0)	2(1.1)	3（1.0）	帕普斯
H.毕达哥拉斯图	3(2.9)	4(2.2)	7（2.4）	毕达哥拉斯
J.用 MI 证明	1(1.0)	0(0)	1（0.3）	帕斯卡
O.能够写出表达式	5(4.9)	0(0)	5（1.7）	
P.无法用字母表示出关系式或表示错误	26(25.2)	0(0)	26（9.1）	
总计	103	184	287	

注：表2中的分类标准与表1相同。

高一学生中，D、E、Q类共计46名学生，占44.7%，如果加上空白的C类25名学生，共计有71名学生占68.9%，根据问卷结果，推测学生不能很好理解字母代替数的意义。能够用等差求和公式，高斯求和方法来说明的学生共计9名，占8.7%，非常的少，根据其授课教师反馈，他们基本上有学习奥数的经历；对于用MI证明的唯一的一个同学，他已学完所有高中教材的内容。因此，从统计的数据来看，对于没有学习过数列及函数知识的高一学生来说，他们的解题思维有二类，一类是A、F、H类，即通过验证找规律，猜想等路径来解答，思维

方式类似于毕达哥拉斯时代的数学家；二类是E、Q类他们知道代数的思想即可以表达任意数，但是由于对代数的掌握不是很熟练，对字母表示的概念理解不深入，故不能正确地表达出自己的想法。而G类学生解题思维中用到了后一项减去前面一项的这种递推思想，故类似于帕普斯的反复利用递推公式。对于J类的学生，显示了这类学生学习能力很强，能够应用MI去证明，对MI的原理理解的较深入。

对于高二学生来说，B类共计160名学生，占87%，他们应用了等差求和公式来解决问题，表明当学生学习过数列知识之后，可以很好地应用数列求和公式来解决一类简单问题，但是结合表1中的数据，可以发现B类的高二学生分别为78名和160名，有如此大的差别，说明对于高二学生的测试题即明确给出代数表达式，学生会很自然用到用等差求和公式来解决，而对于第一题中的题目即没有给出代数表达式，他们的等差求和的解题方式就少了82名。因此，可以推测等差求和的代数方式并不是很多学生的第一想法或原始想法，只是当题目的形式出现了等差数列的形式之后，题型学生提取习题练习记忆，即用公式解答，而其真实的解题思维不是数据所表现的那样，故值得进一步的深入研究。

5　结论与启示

研究发现：学生对于第一题的解题思维中，有90.7%的学生认同，题目中的解题思路，尽管其中有些同学理解错题目的意思，实际上是认同题目的结论，而不是认同其解题的思维。而由9.3%的学生不认同，并说明正确的理由的只占4.8%。故可推断，对于没有学习过MI证明的学生，他们对于正整数n命题证明的理解水平基本上是处于验证，猜想阶段，与历史上毕达哥拉斯时代的数学家们很相似。

其次，高一和高二学生在处理有关任意多个数相加问题时，他们解题思维是有差异的，高一只有8.7%的学生用了等差求和，而高二则高达87%，究其原因，主要是由于高二学生已经学习过函数知识，以及数列知识之后，对代数的知识的掌握比较熟练，对字母表示数的应用能力比高一学生要强，在解决问题过程中，更倾向于用一些代数的技巧去解决，而高一学生在应用代数表示的时候，碰到较多的问题，甚至不知如何表达自己的想法，类似于MI萌芽阶段，很多数学家们没有代数工具，只能使用文字表达，阻碍了数学的发展。

研究的教学启示：一方面，研究发现，学生对说明或证明与正整数n有关的问题时，理解水平很低，基本上是验证猜测阶段；教师可根据认知层次来安排设计教案，从学生的这个认知层次出发，再通过设置认知冲突，达到激发学生学习动力，进入学习状态。另一方面，

研究发现，学生对证明与正整数n有关问题的错误认识，如验证几个就可得出猜测正确、脱离问题，根据数学特征得出答案等；教师可据此来设计相应反例教学，来刺激学生的定向思维，加深学生理解；可以使用历史素材来帮助教学，即使用HPM视角的教学设计等等都是值得探究的问题。

综上所述，历史相似性的研究为HPM的理论和实践起到举足轻重的作用。HPM研究理论之一历史相似性理论，需要大量的实证研究来支持，本文的研究目的之一就是实证历史相似性理论。同时，在该理论的指导下，期望能够为HPM视角下的MI教学设计提供思路和方向，设计出更加符合实际教学要求的HPM特色教案。

参考文献

[1] Freudenthal, H. *Mathematics as an Educational Task* . Dordrecht: Reidel, 1973, 109-130

[2] Harel, G. *Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-based Instruction*. In S. Campbell & R. Zaskis (Eds.), Learning and Teaching Number Theory: Research in Cognition and Instruction. Praeger , 2001, 185-212

[3] Avital, S. & Libeskind, S. Mathematical induction in the classroom: didactical and mathematical issues. *Educational Studies in Mathematics*, 1978, 9(4): 429−438

[4] Dubinsky, E. On Teaching Mathematical Induction (I). *Journal of Mathematical Behavior*, 1986, 5: 305-317

[5] Dubinsky, E. On Teaching Mathematical Induction (II). *Journal of Mathematical Behavior*, 1989, 8: 285-304

[6] Ernest, P. Mathematical induction: A pedagogical discussion. *Educational Studies in Mathematics*, 1984, 15(2): 173-189

[7] Michaelson, Matthew T. A Literature Review of Pedagogical Research on Mathematical Induction. *Australian Senior Mathematics Journal*, 2008,22(2):57-62

[8] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法. 数学教育学报, 2006, 15(1): 16-18

[9] Juter, K. Limits of Functions as They Developed through Time and as Students Learn Them Today. *Mathematical Thinking & Learning*, 2006, 8(4): 407-431

[10] 汪晓勤, 方匡雕, 王朝和. 从一次测试看关于学生认知的历史发生原理. 数学教育学报, 2005, 14(3):30-33

[11] 任明俊，汪晓勤．中学生对函数概念的理解——历史相似性初探．数学教育学报，2007,16(4): 84-87

[12] 庞雅丽，李士錡．初三学生关于无理数的信念的调查研究．数学教育学报，2009，18(4): 38-41

[13] 朱卫平．大一学生对微积分基本概念的理解．数学教育学报, 2010, 19(4): 37-40

[14] 汪晓勤，欧阳跃. HPM 的历史渊源．数学教育学报, 2003,12(3): 24-27

[15] Katz, Victor J. *A history of Mathematics: An Introduction* (2 edition). New Jersey: Addison Wesley. 1998: 199-242

[16] Heath, T.L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (VOLUME II). translated from the text of Heiberg. Cambridge :Cambridge University Press. 1908: 412-413

[17] Ernest, Paul. Mathematical Induction: A Recurring Theme. *The Mathematical Gazette*,1982, 66(436): 121

[18] Tahir, H. Pappus and Mathematical Induction. *Austral. Math.Soc.Gaz*, 1995, 22 (4): 166-167

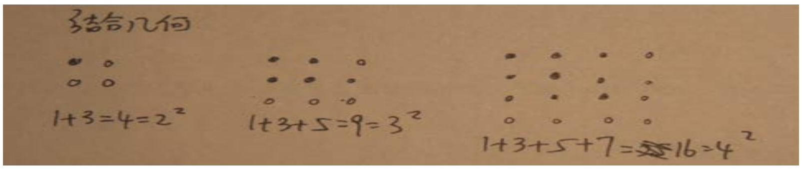
[19] Rabinovitch, Nachum.L. Levi Ben Gersbon and the Origins of Mathematical Induction. *Archive for History of Exact Science*. 1970, (6): 237-248

[20] Bussey, W. H. The Origin of Mathematical Induction. *The American Mathematical Monthly*. 1917, 24(5): 199-207

[21] Edwards, A. W. F. *Pascal's Arithmetical triangle*. London: Charles Griffin & Company Limited. 1987

附录1：学生问卷摘录表

A	认同，因为$1+3=4=2^2,1+3+5=9=3^2,1+3+5+7=16=4^2,\ldots$所以，从1开始，所有奇数之和等于奇数个数的平方。
B	设有n个奇数，$\dfrac{\left[1+(2n-1)\right]\times n}{2}=\dfrac{2n^2}{2}=n^2$。
C	认同，因为一串数，若为奇数个，那么最中间的那个数不动，以它为分界线（左1）+（右1），（左2）+（右2），最后总能得到与奇数个数相同的中间数相加，而偶数个则是中间两个数的平均数为中间数也可以得到偶数个中间数。
E	认同，$1+3+5+7+\cdots+n=1+(1+2)+(2+3)+(4+5)+\cdots+(\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n+1}{2})=(\dfrac{n+1}{2})^2$

F	认同，无法举出反例。
G	认同，$2^2-1^2=(2+1)(2-1)=3, 3^2-2^2=(3+2)(3-2)=5, 4^2-3^2=(4+3)(4-3)=7.$ $n^2-(n-1)^2=(n-n+1)(n+n+1)=2n=1$ 奇数个数=$\frac{(2n-1)+1}{2}=n$，成立。 注：第二题中的设有n个奇数，$n^2-(n-1)^2=(n+n-1)(n-n+1)=2n-1,$ $\because n\geq 1, n\in N^*, \therefore 2n-1$为奇数，且当 n=1时，表示第一个奇数，n=2时，第二个奇数，以此类推，所以，无穷多个奇数之和等于奇数个数的平方。
H	（1） （2）生活中铺地的地板的边数是奇数，则铺满地的地砖的边数总和就可以用此方法计算。作图的方法也可以来说明，通过不同奇数的变形的几何图形不断叠加，得出结论。
I	我认同他的想法，因为物理中，第1秒，第2秒，第3秒，位移之比：1:3:5: ... :2n-1, 1秒内，2秒内，...n秒内位移之比：1:4:9: ... : n^2 , 4=1+3, 9=1+3+5,　所以认同。
K	不认同，只是举例4个例子，该结论存在片面性，若要得出该结论，还需进行证明。
L	不认同，从1开始，所有的奇数之和等于奇数个数的平方。
N	不认同，个数为奇数，如果成立，$(1+n)\times\frac{(n+1)}{2}=(n+1)^2, \frac{(n+1)^2}{2}=(n+1)^2$ 不成立。
O	$1+3+5+\cdots+(2n+1)+(2n+3)+\cdots$
P	（1）可以用数学符号表达，可以用一般的式子来证明它的一般性。 （2）补充中间数与个数相同即 n^n 。

基于 HPM 的教师统计教学知识调查研究

吴 骏[1] 赵 锐[2]

（1.云南曲靖师范学院数学与信息科学学院 655011；2.山西晋中学院数学学院 030600）

近年来，HPM 与教师的专业发展问题引起了人们的广泛关注。已有研究表明，HPM 能够有效提升教师教学需要的数学知识（Mathematics Knowledge for Teaching，简称 MKT）[1-3]。根据 Ball 及其团队的研究，MKT 由两类知识构成，一类是学科知识（Subject Matter Knowledge，简称 SMK），包括一般内容知识(Common Content Knowledge，简称 CCK)、专门内容知识 (Specialized Content Knowledge, 简称 SCK)和横向内容知识（Horizon Content Knowledge，简称 HCK）；另一类是学科教学知识（Pedagogical Content Knowledge,简称 PCK），包括内容与学生的知识 (Knowledge of Content and Student, 简称 KCS)、内容与教学的知识（Knowledge of Content and Teaching, 简称 KCT），以及内容与课程的知识（Knowledge of Content and Curriculum，简称 KCC）。在这个知识分类框架中，CCK、SCK、KCS 和 KCT 已从理论上得到确认并经过实践检验，而 HCK 和 KCC 尚缺乏清晰的界定和深入的研究。[4-5]

一些学者在 MKT 模型的基础上，针对统计教学的特点，进一步发展了教师的统计教学知识（Statistical Knowledge for Teaching，简称 SKT）[6-8]。目前，数学史开始融入统计教学，[9]但很少有人对 HPM 与 SKT 的关系进行研究。本文选取 MKT 中的 CCK、SCK、KCS 和 KCT 作为 SKT 的主要成分，结合数学史融入统计概念教学的案例，考察在课堂教学中教师 SKT 的使用情况。

1 研究方法

1.1 研究对象

某中等城市一所初中学校的两位数学教师参与了本项研究，其中 Y 老师长期从事高中数学教学，两年前到初中部任教；Q 老师则一直从事初中数学教学。两位教师资历较长，但对数学史知识知之不多。他们在大学期间没有修过数学史课程，职后也没有经历过 HPM 培训。

1.2 研究材料

教学内容是八年级下学期“数据的代表”，两位老师的教学课时为 6-7 节。研究者深入挖掘了平均数、中位数和众数概念的历史，与两位教师合作，共同开发了相关概念的教学案

例。[10]这些案例的设计采用以下方法：（1）直接采用历史上的数学问题和解法，如《九章算术》中的平分术问题、货币检查箱试验、城墙砖块层数等；（2）根据历史材料，编制数学问题，如估计数学测验的总分、质点中位数、鞋子的颜色等；（3）在现代情境下，选用体现历史发生思想的数学问题，如帽子平均数问题、身高和体重问题、公共汽车载客量问题、献爱心捐款活动、员工工资问题等。

由于学生缺乏统计概念的历史背景知识，而且他们也拥有前人未知的一些知识，因此，本研究设计的教学案例更多地采用后两种方法，注重把历史现象转化为有意义的教学现象。

1.3 研究过程

教师 SKT 的识别是通过课前讨论、课堂观察和课后访谈的方式得到。考虑到研究者单个对教师的教学行为作出解释是片面的，因此，在每节课后，研究者会挑选出基于数学史设计的教学案例的录像片段，与任课教师一起回顾和讨论，以减少研究者独立作出解释的局限性。

2 结果与分析

2.1 两位教师 SKT 的使用情况

在课堂教学中，教师 SKT 的发生有四种情形。第一，从课堂教学片段或访谈中可以直接识别的教师知识，用灰色表示；第二，教师在教学中间接使用的知识，用深色网格表示；第三，教师在教学中没有要求使用的知识，用空白单元格表示；第四，教师和学生在互动过程中，会发生一些偶发事件，或由于某种原因导致教师知识出现缺失，这种现象称为“错失机会”（Missed Opportunity），用字母 M 表示。[7] 我们利用上述设计的教学案例，分析了两位教师 SKT 的使用情况，[10]见表 1 和表 2 所示。

表 1　Y 老师的统计教学知识

基于数学史的教学案例	统计教学知识（SKT）			
	学科知识（SMK）		学科教学知识（PCK）	
	一般内容知识（CCK）	专门内容知识（SCK）	内容与学生的知识（KCS）	内容与教学的知识（KCT）
估计数学测验的总分				
《九章算术》中的平分术				M
帽子平均数问题				M
身高和体重问题				M
公共汽车载客量				M
货币检查箱试验				
献爱心捐款活动			M	
质点中位数			M	
城墙砖块层数				
鞋子的颜色				
员工工资问题			M	

表 2　Q 老师的统计教学知识

基于数学史的教学案例	统计教学知识（SKT）			
	学科知识（SMK）		学科教学知识（PCK）	
	一般内容知识（CCK）	专门内容知识（SCK）	内容与学生的知识（KCS）	内容与教学的知识（KCT）
估计数学测验的总分				
《九章算术》中的平分术				
帽子平均数问题				M
身高和体重问题				
公共汽车载客量				
货币检查箱试验				
献爱心捐款活动				
质点中位数			M	
城墙砖块层数				
鞋子的颜色			M	
员工工资问题				

表示直接使用的知识　　表示间接使用的知识

表示没有使用的知识　　**M**　表示错失机会

从表 1 和表 2 可以看出，数学史介入教学后，Y 老师和 Q 老师都直接使用了 SKT 的四个主要成分，SCK 是唯一一类需要从其他知识推断出来的知识，Y 老师和 Q 老师间接使用

SCK 的教学案例分别为 3 个和 5 个。在估计数学测验的总分、身高和体重问题、员工工资问题这三个案例的教学中，两位教师采用隐性的方式把数学历史发生的思想融入到教学之中，SCK 可以从教学活动中间接推断出来。在公共汽车载客量和献爱心捐款活动这两个案例的教学中，两位教师存在明显差异：Y 老师直接讲述案例设计的历史背景知识，为这两个案例的学习奠定基础，SCK 呈现明显的证据；而 Q 老师则把历史意蕴悄无声息地融入到教学之中，SCK 呈隐性形式，但可以从教学活动中体现出来。

两位老师没有被识别的知识体现在 SCK 上，其案例为城墙砖块层数和货币检查箱试验。[9] 这是两个来自数学历史上的故事，前者用于引入众数概念，内容相对简单；后者探讨用样本平均数估计总体平均数，涉及到的抽样方法学生在上学期已学过。这两个案例没有识别出教师相应的 SCK，这类知识也可以看作是不需要的。

两位老师的 SKT 存在不同程度的知识缺失，而且集中表现于 PCK。Y 老师的 KCS 和 KCT 分别出现 3 次和 4 次缺失，而 Q 老师的 KCS 和 KCT 分别出现 2 次和 1 次缺失。教师知识缺失可能归因于两个原因：（1）在统计教学中融入数学史，需要掌握一些融入的方法和技巧，这与平时的教学大为不同，教师在短时期内难以适应，因而导致了教师 KCT 的缺失；（2）数学史融入统计教学，丰富了课堂活动，激发了学生思维，而教师对学生的潜力估计不足，导致教师 KCS 的缺失。在调查中发现，两位教师知识缺失的差异可能与他们的教学经历有关。Y 老师长期从事高中数学教学，重视对知识的理解，他的 SMK 更强一些，但对学生的学习情况关注不够；Q 老师初中教学经历的资深，使得她比较熟悉学生的特点，注重教学法的运用，她的 PCK 更有优势。从两位教师的知识缺失可以看出，在数学史融入教学的过程中，教师的 PCK 对 HPM 起到了非常重要的促进作用。

2.2 教学案例分析

根据教学案例的设计方法，下面选择三个案例对教师的 SKT 进行分析。

教学案例 1. 《九章算术》中的平分术

《九章算术》方田章第 6 题：今有三分之一，三分之二，四分之三。问：减多益少，各几何而平？

设计说明：该题采用的方法称为平分术，即当各个分数参差不齐时，为使它们齐等，可减那个分数所多的部分，增益这个分数所少的部分。该案例可以让学生了解平均数的补偿性，领会“减多益少”的思想。

教学实践：Y 老师认为，学生可能会先求平均数，再把多于平均数的数补到少于平均数的数上（KCS），而该问题并不需要求出平均数，因此 Y 老师首先对“减多益少”进行了

解释，再让学生去解决问题，从而得到与《九章算术》一致的方法（KCT）。以下是师生对话：

教师：减多益少就是从大的数中减去一个数加到小的数上，使得三个数都相等（SCK）。这个题目如何做？

学生：先通分，这三个数为：$\frac{4}{12},\frac{8}{12},\frac{9}{12}$。因为后面的两个数较大，所以从$\frac{8}{12}$减去$\frac{1}{12}$，从$\frac{9}{12}$减去$\frac{2}{12}$，加到$\frac{4}{12}$上，使得它们都相等。

Y 老师指出，通过“减多益少”之后，这三个数的平均数为$\frac{7}{12}$（CCK）。在教学中，教师首先讲述了“减多益少”的方法，而错失了让学生在实践中探索这一重要思想的机会，把学生的思维禁锢在已有的模式里（KCT ：M）。

Q 老师认为，学生理解题意的困难可能是“各几何而平”（KCS），其中的关键是“平”，即各减去多少才能达到平均数（CCK）。在 Q 老师的课堂上，学生大多采用通分求出平均数，再把比平均数大的数减去一个数补到小的数上。似乎学生的回答只有这种方法了，于是，教师引导学生不直接求平均数，而是通过观察、比较数据大小（KCT），探索得到“减多益少”的方法（SCK）。

教学案例 2. 献爱心捐款活动

在汶川大地震的捐款活动中，某校八年级（1）班第 3 小组 11 名同学的捐款数如下（单位：元）：1，1，2，2，3，4，1，5，8，10，80。这组数据的平均数能比较客观地反映全班同学捐款的“平均水平”吗？

设计说明：在历史上，中位数几乎是作为平均数的替代品而出现的。埃其渥斯（Edgeworth）发现平均数对极端值的敏感性，而中位数比平均数更稳健（Robustness）（稳健性用于描述对极端值的不敏感性）。该案例的设计正是在现代问题情境之下，拟合了中位数历史起源的思想。

教学实践：Y 老师认为，学生往往不清楚在什么情况下使用平均数和中位数（KCS）。Y 老师首先介绍中位数的历史起源，分析了中位数对极端值的不敏感性（SCK），再讲授献爱心捐款活动的案例（KCT），从而引入中位数的概念（CCK）。由于学生已经了解了中位数的历史知识，因而直接说出了极端值对平均数的影响，这样，教师实际上并未了解学生是如何理解平均数的，让学生错失了探究中位数为什么替代平均数的机会（KCS ：M）。

Q 老师认为，如果先介绍中位数起源的历史，则学生在献爱心捐款活动案例中自然会想到用中位数作为平均水平的代表，这就失去了激发学生学习动机的目的（KCS）。因此，她

把该案例作为教学的出发点，引入中位数概念之后，再让学生阅读中位数的历史材料（KCT）。以下是教学中的一段对话：

教师：你能求出这组数据的平均数吗？

学生：能。（过了一会）平均数为 10.6.

教师：平均数能反映全班同学捐款的“平均水平”吗？

学生：捐款超过 10.6 的人数只有 1 个，因而不能代表全班同学捐款的平均水平。

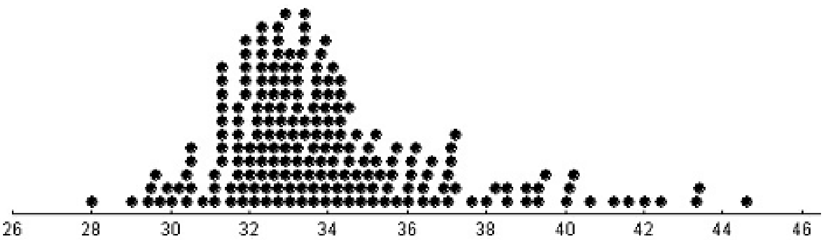
教师：为什么会出现这种情况？

学生：最大值和最小值差异过大，其中的最大值 80 远远大于其余的数据，拉大了这组数据的平均水平。

教师：也就是说，当数据中出现极端值时，平均数不能作为这组数据的代表，这时我们需要学习另外一个集中趋势的量，即中位数，它也是数据的一个代表（CCK）。

从对话中可以看出，Q 老师没有直接讲述平均数对极端值的敏感性，而把中位数的历史起源思想渗透到教学活动之中（SCK），自然引出了中位数的概念。

教学案例 3. 质点中位数



如图，数轴的上方有一些质点，每个质点的取值用数轴上的数据来表示，如何寻找这些质点中位数的位置？[9]

设计说明：数据的分布是决定使用平均数和中位数的关键所在，而大多数学生还没有形成数据呈现偏态分布的意识，因此，当数据呈不规则分布时，他们容易混淆对平均数和中位数的理解。1874 年，高尔顿（Galton）在一次演讲中给出了下面的描述：“一个占据中间位置的物体具有这样的性质，即比它多的物体的数目等于比它少的物体的数目。”该案例改编自历史现象，要求在偏态分布中，学生能够区分平均数和中位数所处的位置。

教学实践：Y 老师指出，该案例是从“形”的角度来理解中位数（SCK），学生会感到困难（KCS）。他首先解释了中位数概念（CCK），再让学生讨论如何寻找质点中位数的位置（KCT）。当一个学生回答质点中位数在数轴上 33.5 处时，教师问学生如何找到的？学生回答含糊不清，声音较小，教师对学生的回答不置可否，既没有肯定也没有否定，而开始

解释如何寻找中位数。此时，教师错失了了解学生思维过程的机会（KCS ：M）。

Q 老师先对质点在数轴上的取值进行了解释，再让学生分组讨论如何寻找质点中位数的位置（KCT）。通过课堂讨论，教师发现，学生的主要错误是把数轴的中点位置当成了质点的中位数位置，但也有学生正确找到质点中位数在数轴上 34 偏左一点（KCS）。教师进一步解释了中位数的概念（CCK），并指出，中位数的位置使得其左右两边质点的个数相等（SCK）。在课堂教学中，气氛非常活跃，教师让学生回答问题之后，忽略了还有其他学生举手想发言，错失了让学生发表自己观点的机会（KCS ：M）。

3 结论

HPM 介入统计教学，对教师的 SKT 产生了影响，其中 SKT 的四个主要成分都呈现出直接使用的情形，间接使用或没有识别的知识出现在 SCK 方面。教师的 PCK 存在知识缺失，可能会让学生错失学习机会。同时也发现，教师一旦掌握了数学史知识后，PCK 就成为决定数学史运用的关键。本研究表明，在数学史融入统计教学的过程中，HPM 与 PCK 的有机结合是教师 SKT 发展的一个重要问题。

参考文献

[1] Jankvist, U. T., Reidar, M., Janne, F., & Arne, J. Mathematical knowledge for teaching in relation to history. In *12th International Congress on Mathematical Education*. 2012: 4210 -4217

[2] Clark, K. M. History of mathematics: Illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 2012, 81: 67-84

[3] 洪万生.PCK vs. HPM：以两位高中数学教师为例.数学教育会议文集.香港：香港教育学院数学系，2005

[4] Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 2008, 59 (5): 389-407

[5] Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. Unpacking ‘‘Pedagogical content knowledge’’: Conceptualizing and measuring teachers’ topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2008, 39 (4): 372-400

[6] Groth, R. E. Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2007, 38: 427-437

[7] Burgess, T. A. *Investigating the nature of teacher knowledge needed and used in teaching statistics*. Unpublished Ed.D. Dissertation, Massey University, Palmerston North, New Zealand. 2007

[8] Noll, J. A. Graduate teaching assistants' statistical content knowledge of sampling. *Statistics Education Research Journal*, 2011, 10(2): 48-74

[9] Bakker, A. *Design research in statistics education—on symbolizing and computer tools*. Ph.D. Thesis, The Freudenthal Inistitute, Utrecht. 2004

[10] 吴骏.基于数学史的统计概念教学研究——以平均数、中位数和众数为例.上海：华东师范大学，2013

职初教师关于数学史课程的观点

汪晓勤[1] 齐春燕[2]

（1.华东师范大学数学系，上海, 200241; 2. 湛江师范学院数学与计算科学学院，湛江, 524048）

1 引言

早在 1891 年，美国著名数学史家和数学教育家史密斯（D. E. Smith, 1860～1944）就在密歇根州立师范学院开设数学史课了。1904 年，在第三届国际数学家大会上，史密斯和其他欧洲学者共同倡导在大学里开设精密科学史课。史密斯在其《数学史》（1923）前言中指出："数学史已被公认为师范教育及大中学校学生博雅教育中的重要学科"[1] 。到 20 世纪 50 年代末，美国超过半数的师范院校开设了数学史课 [2]。在我国，著名数学史家钱宝琮先生（1892～1974）早在浙大任教时即已开设数学史课程。20 世纪 80 年代，我国师范院校开始普遍开设该课程。但迄今为止，这门课程的教育取向并不明确，换言之，数学史内容与数学教育之间的关系在教学中还没有得到应有的体现；已有的多数数学史教材并没有与中学数学教育建立密切关联 [3]。

尽管一些作者都对数学史课程的改革和如何整合数学史与数学教育提出了建议 [4-12]，这些建议并未建立在一线教师的真实需求之上。虽然职前教师知道这门课程对未来的职业有所帮助，但他们并没有真切的感受，因此，他们的课程期望还远远不能作为课程教学的依据。相比之下，在职教师的意见或建议更有参考价值。那么，职初教师是如何看待数学史课程的？这门课对他们的教学究竟有何帮助？基于自己的教学经验，他们最需要从这门课中学到什么？为了回答这些问题，笔者对回母校攻读教育硕士的 100 名 2007 级师范生进行了问卷调查。

100 名师范生来自安徽、重庆、河南、江西、四川、上海等 28 个省市，绝大部分毕业自数学系。经过两载的磨砺，他们已经是一群觉醒者。他们对于昔日修读过的大学课程，应该"别有一番滋味在心头"。由于受课时限制（36 学时），笔者之一所开设的数学史课程重点介绍古代文明（埃及、美索不达米亚、中国、希腊）的数学、中世纪东方（中国、印度、阿拉伯）数学、中世纪欧洲数学以及文艺复兴时期的欧州数学（15-16 世纪数学）和 17 世纪的欧洲数学。我们的调查问题是：

（1）大三选修课“数学史”对你的教学有何帮助？ 你对这门课有何改进意见？

（2）你在教学实践中是如何运用数学史的？效果如何？举例说明。

（3）列举一个你希望通过数学史来解决的教学难题。

（4）数学史与数学教育（HPM）是数学教育方向研究生的专业课，你对这门课有何期望？

调查在笔者为他们讲授数学教育短期特色课程之一——数学史与数学教育之前进行，答卷时间为 20 分钟。笔者告诉学生，回答无对错之分，真实即可；所得分数即为本特色课程的成绩（满分 10 分）。

2 结果

2.1 数学史课程对数学教学的帮助

尽管所任教的学校文化不同，学生各异，但 95%的职初教师对于数学史课程对教学的帮助都给予了积极的评价。表 1 对他们的回答进行了分类统计。由于问的是“对教学有何帮助”，因此关于数学史对学生的帮助，他们说得较少。

从知识目标上看，“丰富了教师的知识储备和教学素材、学到了数学文化与数学史知识”是数学史课程对职初教师最大的帮助。以下是部分教师的回答。

S1：关于“数学史”这门课，当时选的时候并没有想到，会在参加工作第一年的第二个学期就用上了。所在单位开设了系列选修课程，采用了走班制，我被学校安排上“数学选修系列课程”。当时就想到，可以大学里修读过的“数学史”课程为基本架构来上这门课。所幸当时保留了老师的 PPT 文档……对其中的内容作了一些调整和修改（改得更简单一些），给学生讲了数论的发展历史、有关数学大师的生平事迹和主要成就。当时上了两个班，惊讶地发现，文科生的积极性更高！

S2：从数学史课程中，了解了一些教学内容的历史渊源，上课时会穿插部分相关的历史。同时，我开设的选修课大部分内容都与之有关，因此，这门课程为我的教学内容增添了浓厚的历史色彩，也丰富了教学内容。

从过程与方法目标上看，数学史课程对职初教师最大的最大帮助是“用数学史引入新课”。

S3：“数学文化与数学史”最显著的帮助是，可以在引入时结合数学史的相关知识，提高学生的学习兴趣。

S4：采用数学史来引入新课，激发学生对数学产生浓厚的兴趣，课题效率也大幅提高。

表 1 数学史课程对教学的帮助：职初教师的观点

三维目标	教　师	学　生
知识与技能	（1）丰富教师的知识储备与教学素材； （2）了解知识的起源； （3）加深对数学概念的理解； （4）了解古人的思维； （5）提升教师的数学修养； （7）开阔了视野； （8）知道学生数学理解的历史相似性； （9）提升教师的人格魅力。	（1）帮助学生理解数学； （2）拓宽学生的思维； （3）拓宽学生的知识面； （4）培养学生的创新意识； （5）有助于学生对知识的记忆； （6）培养学生的数学文化素养。
过程与方法	（1）用数学史来引入新课； （2）用历史上的方法推导公式； （3）借鉴历史，获得教学策略； （4）采用发生教学法进行教学； （5）通过数学史，把知识讲解得更透彻一些。	（1）让学生经历知识的发生发展过程； （2）通过数学史引发学生的进一步探索。
情感、态度与价值观	（1）增加教师对数学的兴趣； （2）让数学变得更鲜活，更有趣，更精彩，更吸引人，更有生命力； （3）感受数学美，运用数学美； （4）活跃数学课堂； （5）增加教师的自信心； （6）让数学课堂富有人文气息和历史感； （7）改变教学理念，增加运用数学史与数学文化的意识； （8）增加教师反思教材的意识； （9）引导教师从历史视角去思考数学教育。	（1）激发学生的学习兴趣； （2）培养学生脚踏实地、勇于面对挑战的数学精神； （3）提升学生的民族自豪感； （4）对数学有新的认识。

从情感态度价值观目标上看，“数学文化与数学史”课程对职初教师的最大帮助是，数学史让数学变得有趣和有吸引力，能够激发学生兴趣、活跃数学课堂。

S5：在数学课上结合数学史内容，可以调动学生的积极性，活跃数学课堂。

S6：教学过程中，我经常会讲一些概念背后的历史、文化知识，告诉学生这些概念的

形成背景和发展过程。学生都很喜欢学习数学。

由表 1 可见，“数学史”这门课不仅自身能够实现三维目标，而且也帮助职初教师在自己的数学课堂上更好地实现三维目标。但职初教师提的最多的是情感目标。

2.2 数学史课程的不足和对 HPM 的期待

职初教师对数学史课程提出了不同的改进意见，主要分成教学内容、教学方式、教学材料与教学计划四类。

表 2 职初教师对数学史课程的意见或建议

类 别	意见或建议
教学内容	（1）展示数学史融入数学教学的案例或成功实验；
	（2）介绍数学史融入数学教学的方法；
	（3）多讲与中学数学内容密切相关的数学史；
	（4）更多讲述数学家的故事；
	（5）增加与现实生活联系紧密的数学知识；
	（6）增加数学教育史方面的内容；
	（7）补充近代数学史内容。
教学方法	（1）辅以微电影或短片；
	（2）增加小组讨论环节；
	（3）让学生自主研究某个专题，并在课堂上展示；
	（4）让学生编排舞台剧；
	（5）提供更多的师生交流机会。
教学材料	（1）编写一本供本校学生使用的数学史教材；
	（2）介绍更多的文献资料或网络资源。
教学计划	（1）增加教学课时；
	（2）将数学史改为专业必修课。

关于数学史课程的改进意见，职初教师提得最多的是教学内容，希望介绍数学史融入数学教学的案例和数学史融入数学教学的方法，多讲与中学数学内容密切相关的数学史。多数教师觉得课时太少，学到的数学史知识还不够多。这正应验了“书到用时方恨少”的古训。

对于研究生专业课程“数学史与数学教育”，绝大多数教师期望是学习“与中学数学课程紧密联系的数学史”、“将数学史融入数学教学的方法”、“数学史融入数学教学的优秀案例”，与他们对数学史课程的意见或建议完全一致。

2.3 数学史在教学中的运用

数学教学中，数学史的运用方式有附加式、复制式、顺应式和重构式四种。职初教师主要采用了前两种。

（1）附加式

绝大多数教师采用附加式，即在概念、公式、定理、问题解决的教学中，讲述有关数学家的故事。讲得比较多的故事有：希帕索斯与无理数、笛卡儿与坐标系、高斯与数列求和、祖冲之与圆周率、国际象棋的发明。也有教师在教最小二乘法时，讲述谷神星被发现的故事，教集合概念时介绍罗素悖论，教秦九韶算法时介绍秦九韶的生平。少数教师在讲授某个知识点时介绍有关历史（如负数的历史、椭圆概念的历史、贾宪三角的历史、微积分的历史），在讲解例题时介绍历史上的数学难题（如古希腊三大几何难题、四色问题、费马大定理、哥尼斯堡七桥问题、哥德巴赫猜想等）。

（2）复制式

一些职初教师在公式、定理的教学中会运用历史上的证明或推导方法，主要集中于勾股定理的证明（赵爽/刘徽/欧几里得/加菲尔德）。少数教师在验证平方差公式、证明正、余弦定理、推导圆面积公式、和角与差角公式、等比数列求和公式、幂和公式时运用了数学史。此外，还有教师在概念引入和知识应用中，直接利用了历史上的问题，如用巴比伦泥版书上的问题引入分式方程概念，用斐波纳契兔子问题引入数列概念，用历史上的测量问题讲解相似三角形和全等三角形的应用。

（3）顺应式

个别教师用倍立方问题来引入圆锥曲线概念，将惠施命题（一尺之棰、日取其半、万世不竭）和“霍鲁斯眼睛分数”改编成无穷递缩等比数列求和问题。

（4）重构式

很少有人采用重构式，只有个别教师有重构历史的意识。一位教师用三次方程来引入虚数概念，但重构得不理想；一位教师借鉴历史顺序，先讲对数函数，再讲指数函数，也未能收到预想的效果。另一位教师写道：“在历史上，负数从被发现到被接受是一个漫长的过程，学生在学习负数时必也有困难。所以，在教学时，目标的设定和练习的设计都必须循序渐进，不能急于求成。”

总的说来，职初教师在课堂上运用数学史并不多，方式也比较单一。

2.4 用数学史解决的教学问题

职初教师给出各自希望用数学史来解决的教学问题，主要包括具体知识点的教学和一般教学策略两大类。表 3 给出了教师所提到的知识点的学科分类。

表 3 职初教师希望用数学史来教的部分知识点

学科	知识点
代数	因式分解；一元二次方程的解法；二次函数；函数的概念；对数的概念；均值不等式；一元二次不等式；绝对值不等式；数列通项与求和公式；二项式定理；数学归纳法；复数的概念
平面三角	三角函数的概念；三角函数的诱导公式；和角与差角的正、余弦公式
平面与立体几何	平面向量；三等分角问题；空间几何体的体积；球体积和表面积公式；异面直线所成的角；直线和平面所成的角；点到平面的距离；二面角
概率统计	概率论的诞生；线性回归
平面解析几何	圆锥曲线的第一和第二定义；圆锥曲线的准线；椭圆性质的几何证明；椭圆的面积
微积分	极限的概念；导数的定义；导数的应用

一般教学策略问题包括：

- 如何利用数学史来促进学生发现问题、提出问题；
- 如何通过数学史来掌握学生对某知识点的认知规律；
- 如何借助数学史来激发学生主动探究的欲望；
- 如何利用数学史来陶冶情操、启迪智慧、激发兴趣；
- 如何利用数学史改变学生固有的数学观；
- 如何利用数学史来突破教学难点；
- 如何通过数学史来渗透数学思想方法；
- 如何解决学生对数学史的兴趣和解题困难之间的矛盾。

从以上统计结果可以看出，职初教师感到不易教好的知识点相当多，他们希望数学史能成为一种解决教学难点的有效的教学工具，能够帮助他们制定更好的教学策略，能在三维目标上发挥更大的作用。

无论是知识点的教学，还是一般教学策略，职初教师的需求为 HPM 提供了丰富多彩的研究课题。数学史各种知识点的教学数学史融入数学教学的实践研究与案例开发，必将成为

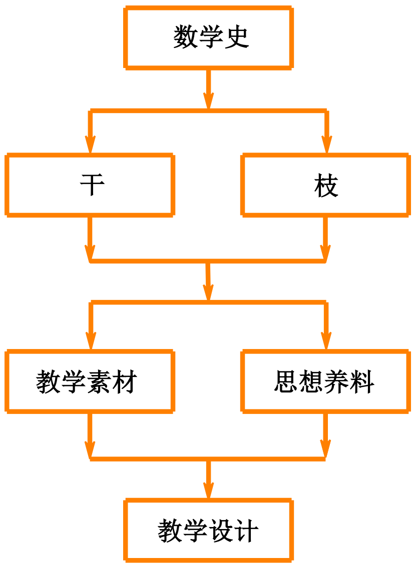
未来 HPM 研究的重要方向之一。

3 结论与启示

对职初教师的调查表明，数学史课程可以帮助他们在数学教学中更好地实现三维目标；与中学数学密切相关的数学史、数学史在数学教学中的运用方法、数学史融入数学教学的案例是他们最需要的课程内容。

基于上述结论，我们认为，针对师范生开设的数学史课程可以数学教育为价值取向，在干枝结合的同时，着重从数学史中提炼教学素材、汲取思想养料，最后，通过成功的 HPM 教学案例来说明数学史融入数学教学的方法。

下图是我们拟订的一种教学思路。



以希腊数学史为例。我们从中可以提炼出丰富的教学素材（见表 4）和思想养料（图 5）。

表 4 希腊数学史中的部分教学素材

时期	数学家	教学素材	对应的部分中学数学知识点
古典时期（公元前 6 世纪-公元前 3 世纪）	泰勒斯	泰勒斯的故事	平面几何起始课
		金字塔高度的测量	相似三角形性质定理
		轮船与海岸距离的测量	角边角定理
	毕达哥拉斯	百牛传说	勾股定理
		多边形数	用字母表示数；数列的概念
	希帕索斯	无理数的发现	无理数的概念
	希波克拉底	弓月形定理	勾股定理

	泰奥多鲁斯	毕达哥拉斯螺线	无理数；勾股定理
	芝诺	阿喀琉斯追龟问题	无穷递缩等比数列求和
	梅内克缪斯	圆锥曲线的发现	圆锥曲线（起始课）
亚历山大时期（公元前 3 世纪-公元 3 世纪）	欧几里得	几何无王者之道	平面几何（起始课）
	阿基米德	鞋匠刀形	圆的周长
		阿基米德之死/阿基米德之墓	球的体积
	埃拉托色尼	地球的丈量	弧长公式
	阿波罗尼斯	轨迹问题	解析几何
		圆锥曲线的研究	椭圆、双曲线的定义与方程
	希帕切斯	弦表	三角函数的概念
	海伦	隧道的设计	相似三角形的应用
	帕普斯	鞋匠刀形内切圆定理	数学归纳法
		三线和四线轨迹问题	解析几何（起始课）
	丢番图	丢番图的墓志铭	一元一次方程

表 5 希腊数学史中的部分思想方法

时期	数学家	思想方法	对应的部分中学数学知识点
古典时期（公元前 6 世纪-公元前 3 世纪）	泰勒斯	三角形内角和定理的发现	三角形内角和定理
	毕达哥拉斯	三角形内角和定理的证明	三角形内角和定理
		勾股定理的发现	勾股定理
	希帕索斯	$\sqrt{2}$ 为无理数的证明	无理数
亚历山大时期（公元前 3 世纪-公元 3 世纪）	欧几里得	三角形内角和定理的证明	三角形内角和定理
		驴桥定理的证明	等腰三角形的性质
		等比数列求和公式的推导	等比数列前 n 项和
	阿基米德	从圆面积到球体积：类比推理	合情推理
		数学中的力学方法	二次幂和公式
	海伦	求平方根的方法	求平方根的近似值
		平行四边形法则	向量的运算
	托勒密	托勒密定理	和角正余弦公式
	帕普斯	均值不等式几何模型	均值不等式

	和角公式的几何证明	两角和的正、余弦公式
丢番图	解二元二次方程组的和差术	解析几何、三角、代数等领域的问题解决

有了这些历史素材和思想方法，我们可以采用附加式、复制式、顺应式和重构式对相关知识点进行教学设计（当然，这不是说历史材料的选取只局限于某一个地域、某一个年代）。例如，将泰勒斯测量船到海岸的距离的方法（以及拿破仑行军遇河的故事）用于全等三角形应用的教学设计（顺应式），将海伦的隧道设计方法（典型案例为萨默斯隧道）用于相似三角形应用的教学设计（顺应式），将欧几里得的比例方法用于等比数列求和公式的教学设计（复制式），将三角形内角和定理的发现过程用于内角和定理的教学设计（重构式），等等。有理由相信，教育取向的数学史课程必将在未来的教师教育中发挥更大的作用。

参考文献

[1] Smith, D. E. *A History of Mathematics*. Boston: Ginns & Company, 1923

[2] 汪晓勤. 史密斯: 杰出的数学史家、数学教育家与人文主义者. 自然辩证法通讯, 2010, 32 (1): 98-107.

[3] 傅海伦等. 试析我国高校数学史教育发展及研究现状. 高等理科教育, 2005, 62 (4): 8-11

[4] 陆书环等. 中日高中新课程数学史与数学教学内容整合的比较研究. 数学教育学报, 2009, 18(1): 67

[5] 杨渭清. 数学史在数学教育中的教育价值. 数学教育学报, 2009, 18(4): 31

[6] 张小明等. 中学数学教学中融入数学史的行动研究. 数学教育学报, 2009, 18(4): 89-92

[7] 徐章韬等. HPM 视角下的数学教材编写. 数学教育学报, 2009, 18(3): 14-17

[8] 燕学敏. 数学史融入数学教育的有效途径与实施建议. 数学通报, 2009, (8): 22-25

[9] 朱凤琴等. 数学史融入数学教学模式的国际研究与启示. 数学教育学报, 2010, 19(3): 22-25

[10] 汪晓勤等. HPM 视角下的数学教学设计: 以椭圆为例. 数学教育学报, 2011, 20(5): 20-23

[11] 蒲淑萍等. 弗赖登塔尔的 HPM 思想及其教学启示. 数学教育学报, 2011, 20(6): 20

[12] 罗新兵等. 数学史融入数学教学研究的若干思考. 数学教育学报, 2012, 21(4): 20-23

圆的面积：从历史到课堂 *

高燕 胡媛

（上海市共富实验学校，上海, 200000）

关于数学史对数学教学的价值，学术界已经有过广泛而深入的讨论。从知识目标上说，数学史帮助学生理解数学，数学史从过程与方法目标上说，数学史提供了丰富的问题解决方法，可以拓宽学生的思维；从情感、态度和价值观的目标上说，数学史增加学生的学习兴趣、激发学生的学习动机、使数学变得更亲和、更令人愉悦、更激动人心，并揭示数学作为人类文化活动的本质。

那么，这些价值在数学课堂上究竟能否实现呢？我们在沪太路教育发展区项目“HPM 与初中数学教师专业发展”的引领下，在六年级上学期“圆的面积”的教学中融入数学史，通过课堂观察、问卷调查和访谈，收集学生的反馈信息，并结合专家和听课教师的反应，得出结论，从而对上述问题作出回答。

1 圆面积公式的历史

尽管古代巴比伦人和埃及人在丈量土地时遇到了圆面积问题，但他们并没有准确的圆面积计算公式。根据泥版 YBC7302 上的记载，圆面积和圆周长之间的关系为 $S=\frac{1}{12}C^2$。而古埃及纸草书上记载的圆面积计算公式是：$S=\left(\frac{8d}{9}\right)^2=\frac{256R^2}{81}$。

在古希腊，求圆面积（即“化圆为方”）乃是三大几何难题之一。公元前 5 世纪，著名哲学家阿那克萨哥拉在为追求真理而放弃财产，身陷囹圄，在铁窗下依然研究“化圆为方”问题，可见这个问题的魅力。著名辩士、诗人安提丰（Antiphon）首次采用圆内接正多边形来解决

* 上海市沪太路教育发展区项目“HPM 与初中数学教师专业发展”系列教学案例之一，指导教师为华东师范大学数学系汪晓勤教授。华东师大基础教育办公室、宝山区教育局对本项目给予大力支持。华东师范大学博士研究生洪燕君、王科、宁锐、访问学者齐春燕、过静、侯建章、唐杰、硕士研究生林佳乐、田方琳等在本案例实施过程中或提出过宝贵意见或建议，或参与学生问卷调查和访谈；浙江省义乌市第二中学陈锋老师用几何画板再现了开普勒求圆面积的方法，在此一并致谢。

"化圆为方"问题。如图 1，从圆内接正方形出发，不断倍增边数，安提丰说，当边数无限多时，圆就被化成了方，即求出了圆面积。虽然这只是空中楼阁，但安提丰的逼近思想为后来的阿基米德所采用。

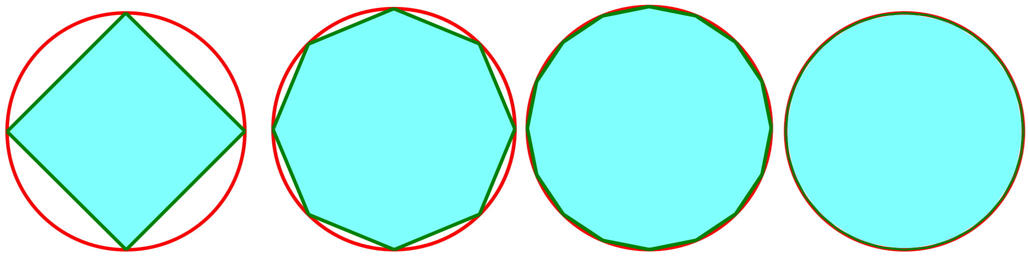


图 1 安提丰的"化圆为方"方案

欧几里得在《几何原本》中给出命题：两个圆的面积之比等于它们的直径之比，但他并没有给出圆面积的计算公式。阿基米德（公元前 287～公元前 212）最早给出圆面积的准确公式 [2]：

命题：圆面积等于一条直角边长为圆半径、另一条直角边长为圆周长的直角三角形面积。

设圆的半径为 r，周长为 C，阿基米德作圆内接和外切正 n 多边形（面积分别为 S_n 和 S_n'），根据 $S_n < \frac{1}{2}Cr < S_n'$，借助穷竭法，证明圆面积 $S = \frac{1}{2}Cr$。

中国汉代数学名著《九章算术》中记载了正确的圆面积公式："半周半径相乘，得积步"，即圆面积等于半周乘以半径。这个公式怎么来的呢？三国时代布衣数学家刘徽给出了证明。

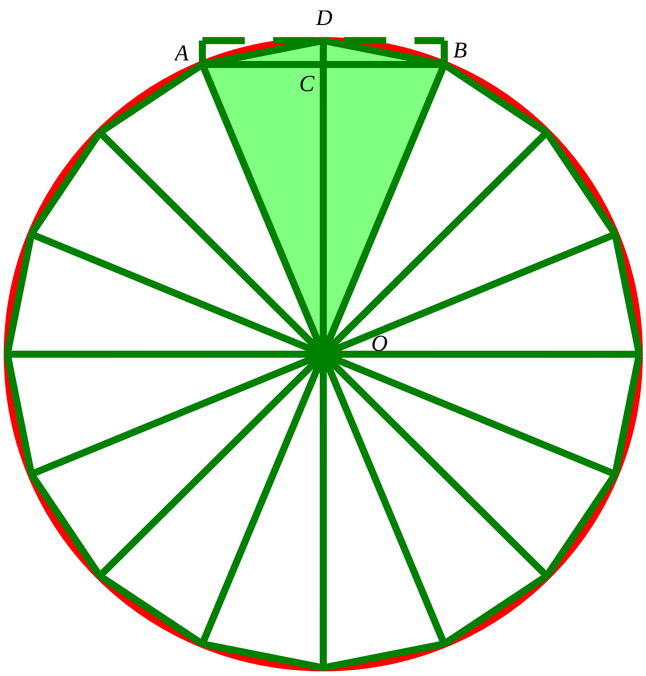


图 2 圆内接 $2n$ 边形由 n 个筝形组成

如图 2，圆内接正 2n 边形的面积是由 n 个筝形（即四边形 $OADB$）组成的，而每一个筝形的面积为 $\frac{1}{2}a_nR$，故得 $S_{2n}=\frac{1}{2}na_nR$。刘徽说："割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。"用我们今天的数学语言来说，这就是：

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}na_nR=\frac{1}{2}CR$$

17 世纪誉满欧洲的天文学家和数学家开普勒在第二次婚姻的婚礼上，在思考酒桶体积算法时，首先想出了圆面积的计算方法。如图 3，将圆分割成无数个顶点在圆心、高为半径的小"三角形"（其实是小扇形，但圆分得越细，小扇形越接近三角形。）将这些小"三角形"都转变成等底等高的三角形，最后，它们构成了一个直角三角形。即

$$S=\sum\frac{1}{2}c_i\,r=\frac{1}{2}Cr=\pi r^2$$

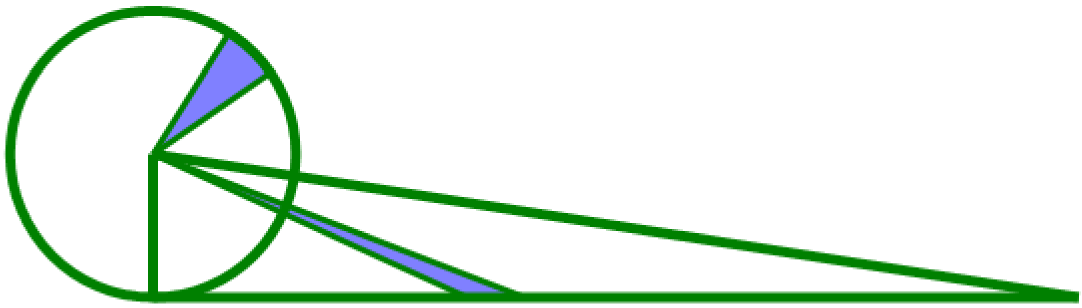


图 3 开普勒求圆面积的方法

2 历史材料的选择

将数学史融入数学教学，必须遵循以下原则。

- 趣味性。教学内容应让学生觉得有趣才行。应该讲述数学背后的故事（当然，不能占太多时间）。
- 科学性。教学内容应符合史实，而不是胡乱编造；数学上不能有错误。
- 有效性。不是为数学史而数学史，而是为有效地完成三维目标而应用数学史。
- 可接受性。教学设计一定要符合学生的认知基础，易于为学生接受。
- 创新性。HPM 视角下的教学设计必须有新意、有特色，对教师专业发展起引领作用。

基于这些原则，我们来考察圆面积的历史素材。首先，学生已经学过圆周长概念，教学中需要让学生看到：仅仅知道周长还不够，还需要计算面积。其次，如何计算圆面积？阿基米德、刘徽的方法对六年级学生而言都太难，并不适合于教学；书本上的方法容易让学生产生"圆面积公式为近似公式"的误解，但拼法简单易懂。经过讨论，我们决定兼用书本上的方

法和开普勒的方法。

选择开普勒的方法可以体现上述原则：开普勒求圆面积的故事满足了教学的“趣味性”；开普勒求圆面积的方法与阿基米德、刘徽等数学家的方法一脉相承，符合人的认知规律，满足“科学性”；在开普勒的方法中，学生易于看清“圆分割得越细，直角三角形面积越接近圆面积”的过程，能够有效地实现过程与方法目标，满足“有效性”；只要知道“等底等高的三角形面积相等”，就能理解开普勒的等积变换过程，故开普勒的方法满足“可接受性”。最后，开普勒的方法比较新颖，满足“创新性”。

3 教学过程

（1）课题引入

动画演示拴在木桩上的羊吃草的例子，引入圆面积课题。

（2）新课探索之一

先介绍割补法，然后利用课前准备好的教具，让学生拼图，推导圆面积公式（是本上的方法）。

（3）新课探索之二

讲述开普勒求圆面积的小故事。作图说明“等底等高的三角形面积相等”。如图 4，*OAC*、*OBD* 和 *OEF* 为等底等高的三角形，它们的面积相等。

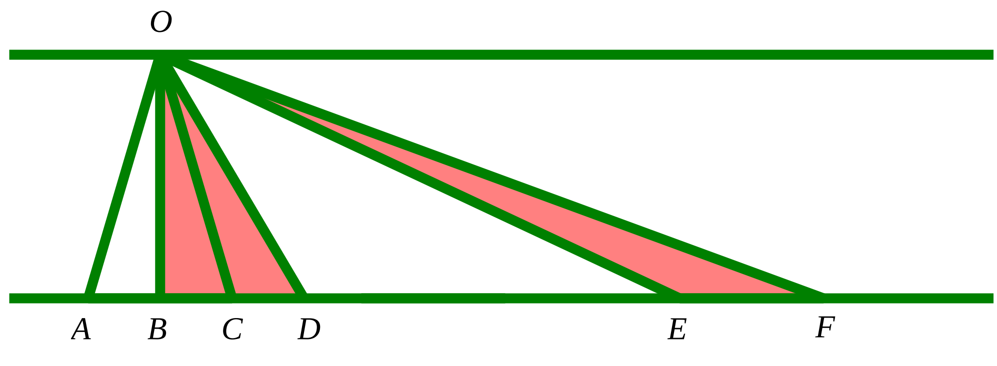


图 4 等底等高的三角形面积相等

用 PPT 动态演示开普勒的方法。开普勒将每一个小扇形当作小三角形来处理，这一积分思想用几何画板不易实现，也不易为六年级学生所理解。有鉴于此，我们将圆内接正 n 边形中的每一个小三角形各进行等积变换，并将它们依次拼接起来，最后形成一个与圆内接正 n 边形等积的直角三角形。将圆分割得越来越细，即当 n 越来越大时，直角三角形的一条直角边越来越接近圆的半径，另一条直角边越来越接近圆的周长，从而得出圆面积公式

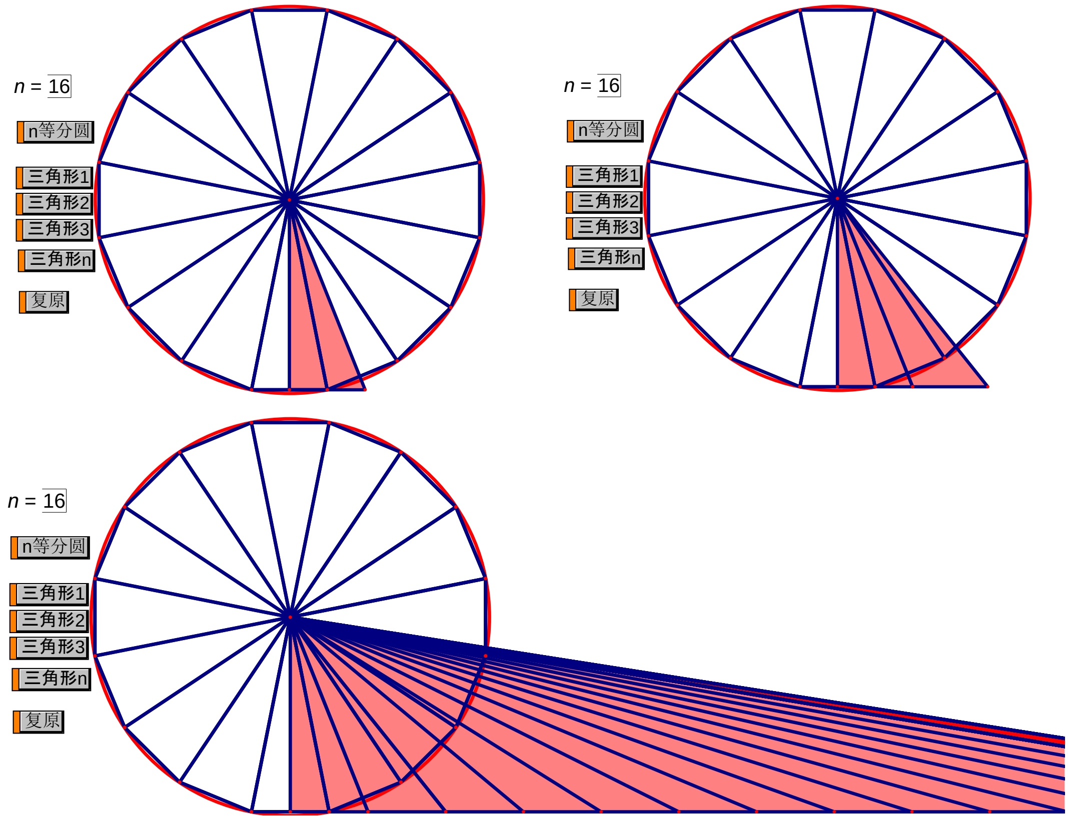


图 5 开普勒求圆面积的过程之一（n=16）

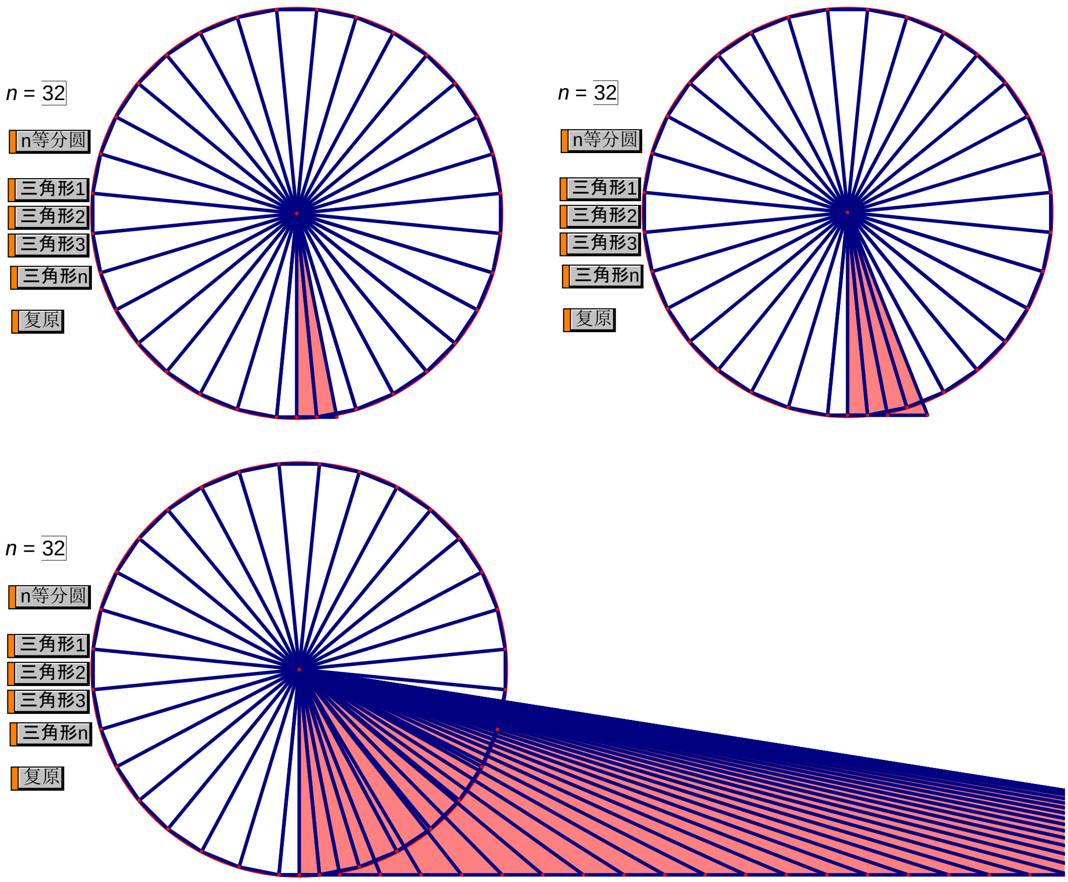


图 6 开普勒求圆面积的过程之二（n = 32）

$S=\frac{1}{2}Cr=\pi r^2$。如图 5 和 6 所示。

（4）例题、练习。

（5）小结。

3 学生反馈

课后，我们对全班 47 名学生进行了问卷调查，并对部分学生进行了访谈。针对问题："老师在这节课中介绍了 17 世纪德国数学家开普勒推导面积公式的方法，你在听讲时有困难吗？"45 人（占 96%）回答"完全能听懂"或"基本听懂"。少数听课教师质疑开普勒的方法，认为学生对该方法的理解会有困难。但问卷调查表明，绝大多数学生能够理解该方法。

针对问题："和以往数学课的教学风格相比，你喜欢这节有数学史融入的讲课方式吗？"46 人（占 98%）回答"非常喜欢"或"喜欢"。针对问题："听了圆面积公式的由来，你的数学学习态度有没有变化？"39 人（占 83%）回答"对数学的兴趣大增"或"对数学的兴趣有所提高"。

针对主观题："在这节课中，你印象最深的是什么内容？为什么？"超过三分之一的学生提到开普勒的故事和开普勒的方法。以下是部分学生的回答。

S1：我觉得开普勒的故事这部分内容好，因为故事吸引了我。

S2：我印象最深的开普勒推导圆面积的公式，我认为十分有趣。

S3：我印象最深的是 17 世纪德国数学家开普勒推导圆面积公式的方法，我认为这很有趣，不像以前那么枯燥了。

S4：我印象最深的是开普勒推导圆面积公式的方法，因为我觉得故事能使我更加容[融]入这节课。（图 7）

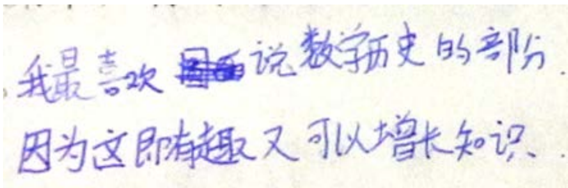
S5：我印象最深的是 17 世纪德国数学家开普勒推导圆面积公式的方法，因为这样做会简单一点，易懂。

S6：我印象最深的是 17 世纪开普勒推导圆面积公式，因为这里老师教得生动有趣，而且讲得很详细，一下就听懂了。

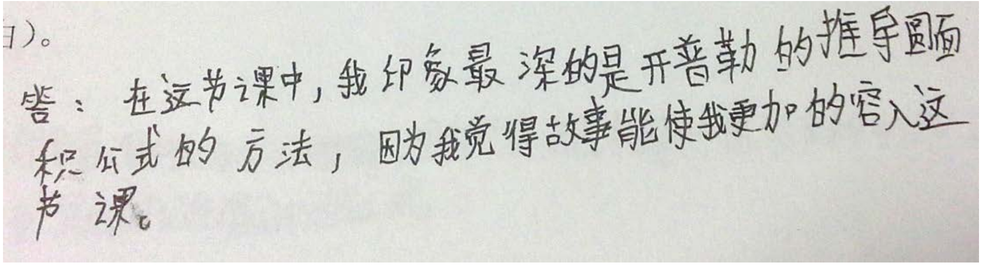
S7：我印象最深的 17 世纪德国数学家开普勒推导圆面积公式，因为很容易、巧妙。

S8：我印象最深的如何求圆的面积，因为它很有趣，而且易懂，方法多。

S9：我最喜欢说历史的部分，因为这即[既]有趣又可以增长知识。（图 7）



我最喜欢~~圆面~~说数学历史的部份
因为这即有趣又可以增长知识.



白)。
答：在这节课中，我印象最深的是开普勒的推导圆面积公式的方法，因为我觉得故事能使我更加的容入这节课。

图 7 学生对圆面积教学的印象

学生对数学史融入圆面积教学的评价可以分称四类：

（1）数学史有趣，能吸引学生的注意力。

（2）数学史上的方法易懂。（3）数学史让学生增长知识；（4）数学史让学生感受到方法多。虽然学生想法朴实、文字稚嫩（还有不少错别字），但我们还是感受到了数学史在实现三维目标上的显著效果。

4 结语

问卷调查和访谈的结果表明，大多数学生喜欢融入数学史的教学方式，对开普勒的故事产生兴趣，对开普勒求圆面积的方法印象深刻，并能理解割补法推导圆面积的思想。

本案例表明，HPM 视角下的数学教学能够较好地实现数学教学的三维目标，值得我们去学习、探索和应用。

遗憾的是，问卷调查中，我们没有让学生对书本上的推导方法和开普勒的方法作出比较。我们将在以后的教学研究中对研究工具加以改进。