上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2019 年第 8 卷第 2 期

张奠宙先生（中）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

张奠宙先生一生关注数学史与数学教育（History and Pedagogy of Mathematics, 简称 HPM），致力于传播 HPM 的学术价值和艺术魅力。先生把 HPM 比作“玉石雕刻”的艺术，并认为，“HPM 是数学史料的教育形态，需要对史料进行‘教育’的加工、雕琢、创造才能完成。这是一份独特的创新活动，也因而具有自身的学术价值”。早在上世纪末，先生就曾指出，“数学史对于数学教师而言不仅是教学工作中必须的知识，而且也是形成数学思想观念和科学探索信念的精神源泉”，为此，先生主编了《数学史选讲》一书，以期“使人们更多地了解数学和数学家，更加喜欢数学；不仅策励自己学习数学，还乐于鼓励别人学习数学”。2002 年，先生在《数学教学》创办“数学史与数学教育”栏目，栏目的宗旨是“弘扬数学文化，促进数学教育”，他在“创办前言”中写道，“数学史的教学也许会帮助数学教学重置于‘火热’的思考之中”。《数学史选讲》一书的出版和“数学史与数学教育”栏目的创办，为新世纪背景下 HPM 在中国的传播与发展开辟了广阔的天地。

张奠宙先生认为，“以丰富的数学发展史激励学生”是数学学科德育的重要层次之一。先生指出，“如何理解数学、运用数学、欣赏数学，依然具有人文色彩，数学同样可以作为思想品德教育的有效载体”，而“数学课题的历史背景”具有重要的德育意义。在《数学学科德育——新视角、新案例》一书的实践篇中，先生分享了来自天津中学两个班级的报告。他们成功地坚持每节课三分钟的“数学史演讲活动”，并在班级开展多种多样的数学活动，提升学生的数学兴趣，最后取得了优秀的数学成绩。今天，在落实立德树人教育根本任务的数学课程改革中，数学史融入教学的“德育之效”业已受到一线教师和有关学者的重视，“以德树人”，是新时代 HPM 课例关注的核心要素之一。

张奠宙先生认为，在数学教育中运用数学史知识，是提高数学教育文化品位的重要路径之一。先生指出，“在数学教学中运用数学史知识时，不能简单地、就事论事地介绍史实，而应该着重揭示含于历史进程中的数学文化价值，营造数学的文化意境”，具体来说，应“揭示数学史知识的社会文化内涵”、“阐发数学历史的文化价值”、“营造‘数学史’知识的文化意境”和“提供数学史料，加深对数学知识的文化理解”。今天，通过数学史展现“文化之魅”，已然成为了当今 HPM 课例的一大特色，“以文化人”，让 HPM 课堂架起了沟通数学与人文的桥梁，无数学生也得以徜徉于河畔美丽的风景。

张奠宙先生对 HPM 的未来发展是充满期待和信心的。在汪晓勤教授《HPM：数学史与

数学教育》一书的序言中，先生殷切地希望“HPM 会在未来的中国数学教育中有一个更大的发展，以至成为繁荣数学文化的一种教学常态”。同时，先生还对创立“海派”数学史研究提出了期许。

2018 年 12 月 20 日，我国著名数学家、数学教育家张奠宙先生与世长辞。仙人已逝，但先生的 HPM 思想还在传承，先生与 HPM 的故事还在延续。“以德树人，以文化人”，不仅是今日 HPM 的目标和使命，更是对先生一生教书育人、诲人不倦的最好概括。“潮平两岸阔，风正一帆悬”，循着先生的足迹，在先生思想的启迪之下，HPM 的明天定会更美好。

一庭春雨，细润万物。

目　录

CONTENT

历史研究

美国早期代数教科书中的“负负得正”解释方式研究*

邵爱娣，栗小妮

（华东师范大学 教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

“负负得正”是初等代数中的一个十分重要的符号法则，早在公元 7 世纪就已为印度数学家婆罗摩笈多（Brahmagupta, 598～670）所知。13 世纪，意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci）在《计算之书》中提出“负负得正”法则，但只将其用于计算$(a-b)(c-d)$，而非两个纯粹的负数相乘。之后，中国数学家朱世杰（1249-1314）在《算学启蒙》中也提出“正负术”：“同名相乘为正，异名相乘为负”。16-17 世纪，欧洲数学家，如德国的斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487-1567）和克拉维斯（C. Clavius, 1538-1612）等相继在其代数著作中提出符号法则。到了 18 世纪，英国数学家桑德森（N. Saunderson, 1682-1739）、瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）等先后试图对符号法则进行“证明”。19 世纪，德国数学家汉克尔（H. Hankel, 1839-1873）和 F·克莱因（F. Klein, 1849-1925）揭示了“负负得正”无法证明的事实。

18 世纪以来，“负负得正”法则始终是数学教学中的一个难点。19 世纪法国著名作家司汤达（Stendhal, 1783-1842）因为他的两位数学老师未能合理解释“负负得正”的缘由而对数学失去了兴趣。[1]著名昆虫学家法布尔（H. Fabre, 1823-1915）在自学数学时因教科书未能清晰地解释“负负得正”而“吃尽苦头”。[2]即使是到了今天，很多学生对于该法则也仍只知其然而不知其所以然。巩子坤的调查显示，97%的学生能够利用“负负得正”法则进行运算，但不超过 11.5%的学生可以给出合理的解释，说明对于学生来说，运用法则容易，但理解却很困难。[3]因此，选择恰当的方法去解释符号法则，乃是教科书编写者和数学教师需要解决的重要问题。

贾随军等的研究表明，20 世纪以来中学数学教科书对于“负负得正”的解释主要有“运用现实模型”、“运用相反数的性质”、“隐性运用分配律”、“显性运用分配律”、“运用减法运

* 上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”之系列论文之一

算”、“运用变换”等 6 种方式。[4]但上述研究仅局限于国内外 34 种中学数学教科书，其中 1963-2008 年间出版的国外教科书 10 种，1906-2012 年间出版的国内教科书 24 种。我们还需要以更宽阔的视野去研究“负负得正”的历史，以便为今日教科书编写、课堂教学以及 HPM 课例研究提供更丰富的素材和更深刻的思想。为此，我们对 1820-1939 年间出版的美国代数教科书进行考察，试图回答以下问题：美国早期代数教科书如何解释“负负得正”？从中可以总结出哪些类型？“负负得正”的解释方式在 120 年间经历了怎样的嬗变过程？对今日教科书编写和课堂教学有何启示？

2 研究对象

从有关数据库中搜索 19-20 世纪的美国代数教科书全文，对于不同时间出版的同一作者的教科书，若书名和内容一致，则视为同一种教科书，选取最早的一个版本；若书名不同，则视为不同的两种教科书。最终，我们在 1820-1939 年间出版的代数教科书中选出 200 种，若以 20 年为一段，则 200 种代数教科书的分布情况如图 1 所示。

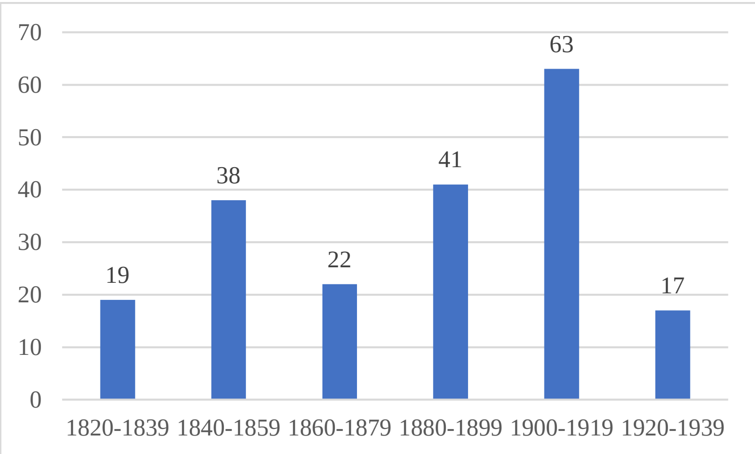


图 1　200 种教科书的时间分布

200 种教科书的书名互有不同，有《代数基础》、《代数专著》、《代数初阶》、《代数导引》、《代数举要》、《初等代数》、《学校代数》、《中学代数》、《大学代数》、《大中学代数》等等。

200 种代数教科书中，174 种是中学教科书，19 种是大学教科书，7 种高中和大学合本。“负负得正”法则出现在“乘法”、“正数和负数”、“负数”、“乘法和除法”等章节，出现在“乘法”章节的最多，占 63.5%，其次是“正数和负数”，占 14%。

所有 200 种教科书都对“负负得正”法则作出了各自的解释，我们对这些解释进行仔细的归类和分析。对于不易归类或有歧义的解释方式，本文作者一起交流研讨，最终确定其所属类别。

3 关于“负负得正”的解释

200 种教科书中，关于“负负得正”的解释方式可以分为利用分配律、连减法、利用相反数、归纳法、几何方法、物理模型和生活模型七类。

200 种教科书中，175 种各给出了 1 类解释，24 种各给出了 2 类解释，只有 1 种教科书给出了 3 类解释。七类解释共出现 226 次，具体分布情况如图 2 所示。

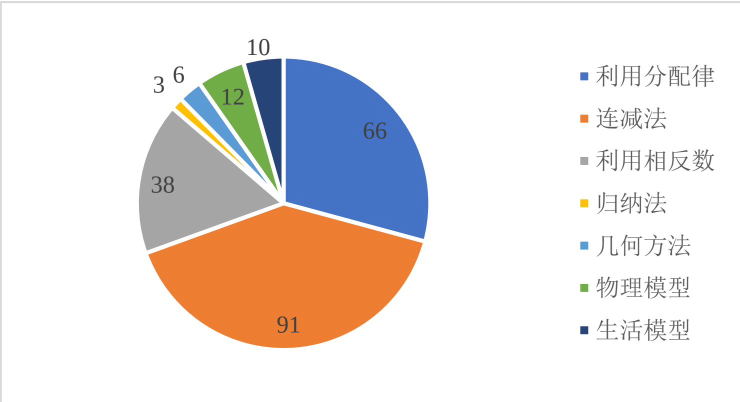


图 2 “负负得正”解释方式的分布

3.1 利用分配律

共有 66 种教科书（占 29.2%）运用（或逆向运用）乘法分配律，试图去证明“负负得正”，F·克莱因称之为“半逻辑证明”。具体有以下四种做法。

方法 1：利用 $(a-b)(c-d)$

这种方法源于斐波那契。在《计算之书》中，斐波那契利用几何方法证明了等式[5]

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+ad \quad (a>b>0,\ c>d>0) \qquad (1)$$

如图 3 所示。有 55 种教科书直接利用公式（1）得出“负负得正”，但只有 Schuyler（1870）

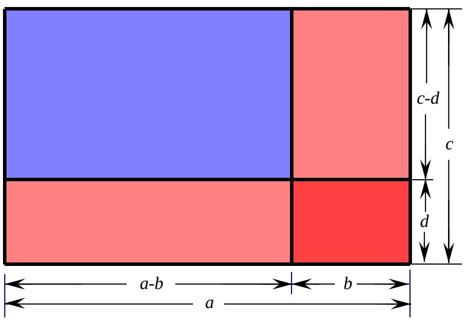


图 3 斐波那契的几何证明

通过扩大（1）的适用范围给出进一步的解释：若在（1）中，设 $b=d=0$，则 $(+a)\times(+c)=+ac$；

若 $a=d=0$，则 $(-b)\times(+c)=-bc$；若 $b=c=0$，则 $(+a)\times(-d)=-ad$；若 $a=c=0$，则 $(-b)\times(-d)=+bd$。[6]

方法 2：利用 $(a-a)(-d)$ 或 $(-a)\times[(-b)+b]$

有 8 种教科书采用此法。如 Hill（1857）先“证明”正负得负：因 $(a-a)\times d=[a+(-a)]\times d=ad+(-a)\times d=0$，故 $(-a)\times d=-ad$。再由

$$(a-a)(-d)=[a+(-a)](-d)=a(-d)+(-a)(-d)=-ad+(-a)(-d)=0$$

得到 $(-a)\times(-d)=ad$。[7]

Slaught & Lennes（1908）和 Rietz（1910）首先“证明”正负得负：设 $a\times(-b)=x$，则 $a\times(-b)+ab=x+ab$，即 $a\times\left[(-b)+b\right]=x+ab$，于是得 $a\times 0=0=x+ab$，故 $x=-ab$，即 $a\times(-b)=-ab$。再设 $(-a)\times(-b)=x$，则 $(-a)\times(-b)+(-a)\times b=x-ab$，即 $(-a)\times\left[(-b)+b\right]=x-ab$，于是得 $(-a)\times 0=0=x-ab$，故 $(-a)\times(-b)=ab$。[8][9]

方法 3：利用 $(-a)\times[c-(b+c)]$

有 2 种教科书采用此法。将 $-b$ 视为 $c-(b+c)$，则有[10]

$$(-a)\times(-b)=(-a)\times[c-(b+c)]=-ac-[-a(b+c)]=-ac-(-ab-ac)$$
$$=-ac+ab+ac=ab$$

方法 4：利用 $[(+m)-(+a)](-b)$

只有 1 种教科书采用此法[11]。考虑 $[(+m)-(+a)](-b)$，一方面，利用“正负得负”，有 $[(+m)-(+a)](-b)=(+m)(-b)-(+a)(-b)=-bm-(-ba)=-bm+(+ba)$。另一方面，$[(+m)+(-a)](-b)=-bm+(-a)(-b)$，故得 $(-a)\times(-b)=+ab$。

3.2 连减法

“连减法”是对乘法意义的拓广：将一个数乘以一个正整数，相当于连加该数若干次；将一个数乘以一个负整数，相当于连减该数若干次，由此得到“负负得正”。共有 91 种教科书（占 40.3%）采用此法。例如[12]：

$(+4)\times(+3)=+(+4)+(+4)+(+4)=+12$；

$(-4)\times(+3)=+(-4)+(-4)+(-4)=-12$；

$(+4)\times(-3)=-(+4)-(+4)-(+4)=-12$；

$(-4)\times(-3)=-(-4)-(-4)-(-4)=+12$。

3.3 利用相反数

所谓相反数法，是将$(-a)\times b$和$(-a)\times(-b)$看作一对相反数，若已知前者为负，则后者必为正。这种方法源于欧拉。欧拉在《代数基础》（1821）中首先通过债务的倍数来说明正负得负：将$-a$视为债务，取三次，则债务必变成三倍多，故$(-a)\times 3=-3a$（$a>0$），一般地，有$(-a)\times b=-ab$（$a>0,b>0$），故“正负得负”。由于$(-a)\times(-b)$（$a>0,b>0$）要么等于ab，要么等于$-ab$，但已证$(-a)\times b=-ab$，故$(-a)\times(-b)=ab$ [13]。

共有 38 种教科书（占 16.8%）采用此法。具体有以下三种方式。

方法 1：反证法

有 3 种教科书采用反证法。如 Young（1838）的解释是[14]：若承认$(-b)\times a=-ab$（已证），则必有$(-b)\times(-a)=+ab$，否则$(-b)\times a=(-b)\times(-a)$，于是$a=-a$，矛盾。

方法 2：直接改变符号

共有 32 种教科书采用此法。如 Smyth（1850）的解释如下：若乘数为$+b$，则被乘数保留自己的符号，重复b次，于是有$(+a)\times(+b)=+ab$，$(-a)\times(+b)=-ab$；若乘数为$-b$，则被乘数取相反符号，重复b次，于是有$(+a)\times(-b)=-ab$，$(-a)\times(-b)=ab$。[15]后来的作者多倾向于用具体数字来说明这种情形，先说明$(-3)\times 4=-12$，而$(-3)\times(-4)$意指-3改变符号，即为 3 再重复 4 次，即$(-3)\times(-4)=12$。[16]

方法 3：利用-1的意义

这种方法的出发点是“-1与任意一个数的乘积等于该数的相反数”或“乘以-1就是取一次、变符号”。有 3 种教科书采用此法。如：

$(-m)\times(-n)=(-1)\times m\times(-n)=(-1)\times(-n)\times m=mn$ [17]；

$$(-3)\times(-4)=(-1)\times 3\times(-4)=(-1)\times(-12)=+12$$ [18]；

$$(-a)\times(-b)=a\times(-1)\times b\times(-1)=ab\times(-1)\times(-1)=(-ab)\times(-1)=ab$$ [19]。

3.4 归纳法

这种方法最早为桑德森所采用。桑德森在《代数基础》（1739）中先提出命题："一个等差数列的各项依次乘以同一个数，所得乘积构成等差数列。"利用该命题，等差数列 4，0，－4 依次乘以 3，所得乘积构成等差数列，前两个乘积依次为 12 和 0，故第三个乘积为－12，即 $(-4)\times 3=-12$；依次乘以－3，所得乘积构成等差数列，前两个乘积依次为－12 和 0，故第三个乘积为 12，即 $(-4)\times(-3)=12$[20]。有 3 种教科书采用此法。

Benedict（1877）取等差数列＋4，＋3，＋2，＋1，0，－1，－2，－3，－4，先将各项分别乘以＋3，观察所得等差数列的规律，得出"负正得负"；再将数列各项分别乘以－3，观察新数列的规律，得出"负负得正"[21]，如图 4。

+4 +3 +2 +1 +0 -1 -2 -3 -4
+3
———————————————
12 +9 +6 +3 +0 -3 -6 -9 -12

+4 +3 +2 +1 +0 -1 -2 -3 -4
-3
———————————————
-12 -9 -6 -3 +0 +3 +6 +9 +12

图 4 Benedict（1877）中"负负得正"的解释方式

3.5 几何方法

有 6 种教科书采用有向线段来解释"负负得正"。如 Newcomb（1882）中给出如下几何解释[22]：假设 a 表示从零点向右长度为 1cm 的线段，则 $-a$ 表示从零点向左长度为 1 厘米的线段，如图 5。

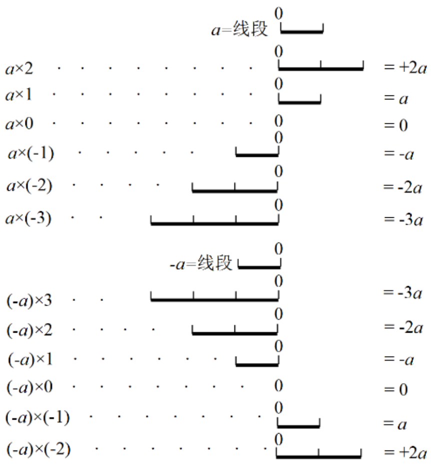


图 5 Newcomb（1882）中"负负得正"的几何解释

Long & Brenke（1913）设向右为正方向，用三个单位长度在直线上沿着正方向测量 5 次，所测得的线段长度为$(+5)\times(+3)=+15$。若沿着反方向测量 5 次，得$(-5)\times(+3)=-15$。用反方向的三个单位长度沿着该方向测量 5 次，得$(+5)\times(-3)=-15$。将反方向上三个单位长度反向测量 5 次，得$(-5)\times(-3)=+15$。[23]

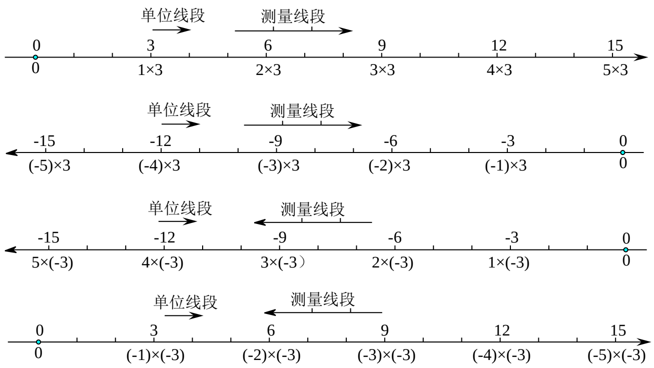


图 6　Long & Brenke（1913）中“负负得正”的几何解释

3.6 物理模型

部分教科书利用物理量之间的关系，如浮力、行程、杠杆等解释“负负得正”，我们将其归类为利用“物理模型”解释。

3.6.1 气球模型

利用气球所受浮力大小来说明正负数的乘法法则，称为“气球模型”，有 5 种教科书采用此法。如 Slaught & Lennes（1908）的解释如下[24]：一位气球驾驶员在出发之前，做了如下准备工作：（1）他给气球充入 9000 立方英尺的气体，气体每一千立方英尺的上升力为 75 磅。（2）他取了 8 袋沙子，每袋重 15 磅。则此时气球受到的浮力为 675 磅，即$(+75)\times(+9)=+675$磅，受到的阻力为 120 磅，即$(-15)\times(+8)=-120$磅。若在气球飞行过程中，驾驶员打开阀门，放掉 2000 立方英尺的气体，相当于气球受到的阻力增加了 150 磅，即$(+75)\times(-2)=-150$磅；若驾驶员扔掉 4 袋沙子，相当于气球受到的浮力增加了 60 磅，即$(-15)\times(-4)=+60$磅。

3.6.2 行程模型

利用物体行驶过程中路程、速度和时间的关系解释“负负得正”称为“行程模型”，有 5 种教科书采用此法。如 Oliver, Wait & Jones（1882）中给出了以下解释[25]：一列火车以 20 英里/小时的速度从西往东开，现经过 A 处，则 5 小时后，将到达 A 处以东 100 英里处，此

即 $20\times(+5)=100$；5 小时前，位于 A 处以西 100 英里处，此即 $20\times(-5)=-100$。若火车以 20 英里/小时的速度从东往西开，现经过 A 处，则 5 小时后，将到达 A 处以西 100 英里处，此即 $(-20)\times(+5)=-100$；5 小时前，位于 A 处以东 100 英里处，此即 $(-20)\times(-5)=100$。

Hopkins（1905）则采用人的运动来解释[26]，如图 7。规定向东走为正，向西走为负，未来的时间为正，过去的时间为负。一个人以每小时 3 英里的速度向东走，4 个小时后他位于起点东面 12 英里处，即 $(+4)\times(+3)=+12$。一个人以每小时 3 英里的速度向西走，4 小时后他位于起点西面 12 英里处，即 $(+4)\times(-3)=-12$。一个人以每小时 3 英里的速度往东走，4 小时前他位于起点西面 12 英里处，即 $(-4)\times(+3)=-12$。一个人以每小时 3 英里的速度向西走，4 小时前他位于起点东面 12 英里处，即 $(-4)\times(-3)=+12$。

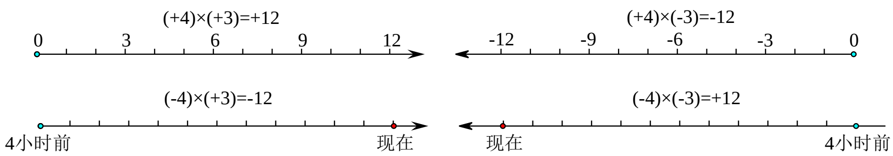


图 7　Hopkins（1905）中的“负负得正”行程模型图示

3.6.3 力矩模型

Keal & Leonard（1938）采用了力矩模型[27]，如图 8。规定支点右边的臂为正，支点左边的臂为负，向上的作用力为正，向下的作用力为负，逆时针方向转动的力矩为正，顺时针方向转动的力矩为负。正力作用于正力臂，杠杆沿逆时针方向旋转，产生正力矩，即 $(+3)\times(+7)=21$；负力作用于正力臂，杠杆沿顺时针方向旋转，从而产生负力矩，即 $(+3)\times(-7)=-21$；正力作用于负力臂，杠杆沿顺时针方向转动，产生负力矩，即 $(-3)\times(+7)=-21$；负力作用于负力臂，杠杆沿逆时针方向旋转，即 $(-3)\times(-7)=21$。

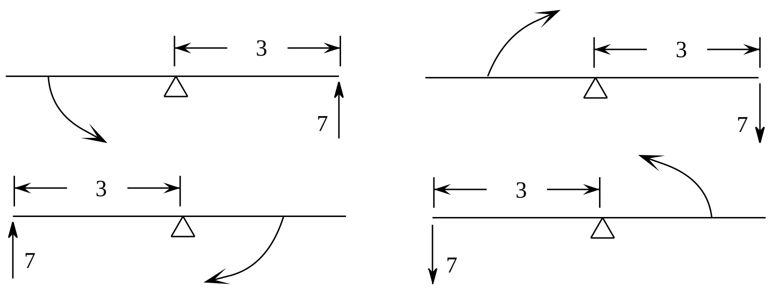


图 8　Keal & Leonard（1938）中“负负得正”的力矩模型图示

3.6.4 水箱模型

Aley（1904）采用了水箱模型[28]：一个容量为 1000 加仑的水箱当前含有 600 加仑的水，考虑以下四种情况：（1）一根水管以每小时 10 加仑的速度将水注入水箱，则 $8\frac{1}{2}$ 小时后注水 85 加仑，即 $10\times 8\frac{1}{2}=85$。（2）在相同的速度下，6 小时前水箱含水量比现在多－60 加仑，即 $10\times(-6)=-60$。（3）一根排水管以每小时 5 加仑的速度排水，10 小时后水箱增加－50 加仑的水，即 $(-5)\times 10=-50$。（4）一根排水管以每小时 6 加仑的速度排水，8 小时前水箱含水量比现在多 48 加仑，即 $(-6)\times(-8)=48$。

3.7 生活模型

“生活模型”是指基于现实生活情境（如收入、债务等）的解释方式，具体可分成以下两种情形。

有 5 种教科书采用节约和浪费 [29]、收益和损失 [30]来解释“负负得正”。如 Beman & Smith（1900）设计了如下情境[31]：某镇上每人每周需纳税 1 美元，若有 5 人迁入该镇，则该镇每周增加收入 $(+5)\times(+1)=+5$ 美元；若有 5 人迁出该镇，则该镇每周增加收入 $(-5)\times(+1)=-5$ 美元。该镇每周为每个流浪汉支付 1 美元，若有 5 个流浪汉迁入，则该镇每周增加收入 $(+5)\times(-1)=-5$ 美元；若有 5 个流浪汉迁出，则该镇每周增加收入 $(-5)\times(-1)=+5$ 美元。

美国数学家和数学史家 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）最早用债务解释“负负得正”。假定某人每天欠债 5 美元（记为－5），在给定日期他身无分文（0 美元）。那么在给定日期 3 天后（记为+3）他欠债 15 美元，即 $(+3)\times(-5)=-15$；在给定日期 3 天前（记为－3），他的财产比给定日期多 15 美元，即 $(-3)\times(-5)=15$。[32]

有 5 种教科书采用了该模型，如 Durell & Robbins（1897）给出如下解释[33]：

（1）100 美元取 5 次，得 500 美元，即 $(+100)\times(+5)=+500$；

（2）100 美元的债务取 5 次，得－500 美元，即 $(-100)\times(+5)=-500$；

（3）100 美元扣除 5 次，得－500 美元，即 $(+100)\times(-5)=-500$；

（4）100 美元的债务扣除 5 次，相当于增加了 500 美元，即 $(-100)\times(-5)=+500$ 。

4 分布与讨论

4.1 各种解释方式的分布

由于每个时间段选择书的数量不均，本文采用百分率统计。以 20 年为一段，这七类解释的分布如图 9 所示。

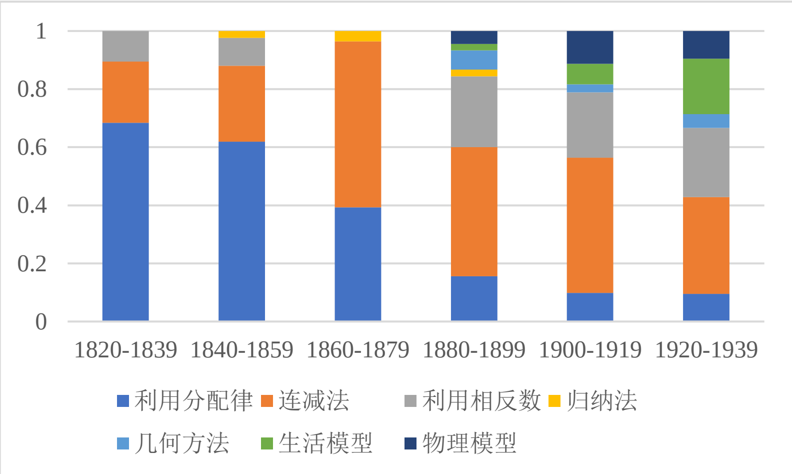


图 9 诸解释方法的分布变化

从图 9 可见，1880 年以前，“负负得正”的解释方式较为单一，以利用分配律和连减法解释为主，其中利用分配律解释占主导地位，但随着时间的推移，该方法所占的比率逐渐下降。1880 年后，解释方式逐渐多样化，出现了几何方法、物理模型和生活模型等。

1840 年后，利用分配律逐渐减少，连减法逐渐增加。在我们考察的时间范围内，连减法占比仅次于利用分配律。该方法仅拓展了乘法的意义，再结合加减法的性质，受到早期教科书编写者的青睐。

相反数法在所有解释方式中位列第三。1820-1859 年之间该解释方式共出现 6 次，每个时间段占比较为接近。1860-1879 年之间没有出现，在该时间段，大部分作者倾向于连减法。1880-1939 年之间共出现 32 次，相比于 1820-1859 年，每个时间段的占比逐渐上升。可见，相反数法由于简洁明了而成为 19 世纪后期和 20 世纪初期教科书编写者偏爱的方法之一。

归纳法出现于 1840 年后。在 200 种教科书中，归纳法共出现 3 次，在所有方法中出现次数最少。国内现行人教版和北师大版教科书也采用了这种方式。

几何方法主要借助于有向线段的度量来解释符号法则，出现于 19 世纪后期，但次数较少。该方法虽然直观，但由于蕴含向量思想，且正向和反向测量与有向线段的正负方向易于

混淆，对学生来说未必容易，这大概是教科书编写者很少选择它的原因。

物理模型和生活模型出现于 1880 年后，与前 5 种解释方式相比，两类模型将数学与现实情境联系起来，由生产、生活中的实际事例抽象出符号法则，较之几何方法更直观，更易于接受，故随着时间的推移，占比逐渐上升。国内现行部分教科书也选择了物理模型，如沪教版采用行程模型，苏科版采用水位升降模型。

4.2 讨 论

利用分配律、相反数法、连减法、归纳法和几何法都是从数学内部出发解释符号法则，而物理模型和生活模型则从数学外部出发来解释该法则。尽管物理模型和生活模型呈逐渐上升的趋势，但大部分教科书（占总数的 90.7%）依然局限于数学内部的逻辑关系。

“负负得正”解释方式的演变与数学和数学教育的进步息息相关。就数学而言，1880 年以前的教科书毫无例外都试图从数学内部出发“证明”负负得正。但随着时间的推移，数学家逐渐认识到“负负得正”不能证明的事实。19 世纪德国数学家汉克尔发现，“在形式化的算术中，负负得正是不能证明的。”F·克莱因将负负得正法则视为“危险的绊脚石”，他对数学教师提出忠告：“不要试图去证明符号法则的逻辑必要性，别把不可能的证明讲得似乎成立。”[34]自此人们才发现，教科书中利用分配律所进行的“证明”，其实根本不是真正的证明。因此，1880 年以后，用分配律来“证明”负负得正的教科书显著减少。

物理模型和生活模型的出现和占比的逐渐上升与 19 世纪末 20 世纪初的数学教育变革有关。1892 年，美国组织了全国性的中等学校教学委员会，重新制定中等学校教育目标和标准课程计划，倡导算术要具体化，努力把算术、代数和几何互相联系起来。[35]20 世纪初出现了国际性的数学教育改革运动。1901 年，培利（J. Perry, 1850-1920）认为数学教学的目的不是为了考试和创造数学家，实用性决定了应该教什么。新的教学方法应该让人们认识到数学的实用性。他主张教学要基于学生的经验，让学生自己构建抽象的概念。1902 年，受培利的影响，美国数学会会长穆尔（E. H. Moore, 1862-1932）呼吁要少强调数学的系统性和形式化，多强调数学的实用性，提倡实验的教学方法。[36]在这些背景下，更多的教科书作者开始关注“负负得正”法则与现实情境之间的联系，生活模型或物理模型应运而生。

5 结论与启示

综上，1820-1939 年间的 200 种美国早期代数教科书采用了多种不同的方式解释“负负得正”。从早期的三种方式发展到后期的七类方式并存。随着时间的推移，“半逻辑”的分配

律方法解释逐渐减少，连减法逐渐占据上风，成为数学家们喜爱的方式。在此期间，归纳法仅仅昙花一现。19 世纪末 20 世纪初开始，受数学教育改革的影响，几何方法、物理模型和生活模型逐渐进入人们的视野，并且其占比逐渐上升。尽管如此，连减法和相反数法仍然占据优势。

早期教科书中的“负负得正”解释方式及其演变规律，为今日的教科书编写、教师专业发展和课堂教学带来一定的启示。

5.1 对教科书编写的启示

早期教科书中“负负得正”法则的解释为今日教科书编写提供了丰富的材料。教科书编写者可以考虑如何展示“负负得正”这一法则的产生和形成过程，才能让学生感受到它的合理性。贾随军等在其考察的各版教科书中发现，约 6 成教科书从数学本身解释“负负得正”法则[4]。早期教科书编写者也更倾向于从数学内部出发解释“负负得正”，如连减法和相反数法。尽管物理模型和生活模型更具趣味性，但其中涉及几个变量的实际意义，不易为学生所理解；而连减法和相反数法言简意赅，较易理解。今日教科书编写者可以兼顾两种方式，让学生明白：不论从数学内部出发还是从现实情境出发，“负负得正”都是合理的存在。

5.2 对教学的启示

早期教科书中“负负得正”解释方式的研究，可以让教师了解一个看似简单的法则背后的历史轨迹，知道“负负得正”是为了保证已有运算律成立而作出的“规定”，教师不要试图在教学中证明法则的合理性，因而犯科学性错误。同时，早期教科书中的七类解释方式为教师提供了丰富的教学资源和更多的选择；从不同解释方式出现的频数，也可以看到前人的倾向性，为自己的选择提供参考。另外，通过了解历史上数学家认识“负负得正”的曲折过程以及“负负得正”解释方式的演变，教师可以预测学生的认知障碍，自信而坦然地面对学生“为什么负负得正”的疑问，保护学生的好奇心和求知欲，渗透数学德育，实现人性化的数学教育。

有理数乘法教学的难点在于如何向学生解释“负负得正”的合理性。教学在运用早期教科书所提供的有关素材时，既可以采用复制式，也可以采用顺应式。例如，学生在学习有理数乘法时已经学习了有理数的减法和相反数等知识，这时选用连减法和相反数法较为合适。对于物理模型和生活模型，教师可选择学生熟悉的情境，并进行适当改编，作为数学解释的补充。

参考文献

[1] 佟巍, 汪晓勤. 负数的历史与“负负得正”的引入[J]. 中学数学教学参考, 2005(Z1): 126-128.

[2] 法布尔. 昆虫记[M]. 上海: 世界图书出版公司, 2016.

[3] 巩子坤. “负负得正”何以能被接受[J]. 数学教学, 2010(03): 7-10.

[4] 贾随军, 刘明君, 叶蓓蓓, 曹春艳. 20 世纪以来中学数学教材中“负负得正”法则解释方式的研究[J]. 数学教育学报, 2015, 24(04): 76-81.

[5] Siegler L. E. *Fibonacci's Liber Abaci: A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation* [M]. New York: Springer-Verlag, 2002.

[6] Schuyler, A. *A Complete Algebra for Schools and Colleges* [M]. Cincinnati: W. Hinkle, 1870: 24-27.

[7] Hill, D. H. *Elements of Algebra* [M]. Philadelphia: J. B. Lippincott, 1859: 24-29.

[8] Slaught, H. E. *High School Algebra*: *Advanced Course* [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1908: 9.

[9] Rietz, H. L. *College Algebra* [M]. New York: H. Holt and Co., 1910: 8.

[10] Strong, T. *A Treatise on Elementary and Higher Algebra* [M]. New York: Pratt, Oakley & Co., 1859: 20-21.

[11] Lefevre, A. *Number and Its Algebra* [M]. Boston: D.C. Heath & Co., 1896:90.

[12] Taylor, J. M. *A College Algebra* [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1889: 12.

[13] Euler, L. *An Introduction to the Elements of Algebra* [M]. Cambridge: Hilliard and Metcalf, 1821: 9-11.

[14] Young, J. R. *An Elementary Treatise on Algebra* [M]. Philadelphia: Carey, Lea & Blanchard, 1838: 21-22.

[15] Smyth, W. *Elementary Algebra* [M]. Portland: O. L. Sanborn and Co., 1850: 60-62.

[16] Hall, H. S. *Elementary Algebra for Schools* [M]. London, 1885: 26-27.

[17] Keigwin, H. W. *Principles of Elementary Algebra* [M]. Boston: Ginn & Co., 1886: 9-10.

[18] Taylor, J. M. *A College Algebra* [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1889: 13-14.

[19] Hayes, E. *Algebra for High Schools and Colleges* [M]. Norwood: J. S. Cushing & Company, 1897: 20-21.

[20] Saunderson, N. *The Elements of Algebra* [M]. Cambridge: the University Press, 1739: 56-58

[21] Benedict, J. T. *Elements of Algebra* [M]. New York, 1877: 15-16.

[22] Newcomb, S. *A School Algebra* [M]. New York: H. Holt, 1882: 90-91.

[23] Long, E. *Algebra* [M]. New York: The Century Co., 1913: 71-73.

[24] Slaught, H. E. *High School Algebra*: *Complete Course* [M]. Boston: Allyn and Bacon, 1908: 62-63.

[25] Oliver, J. E. *A Treatise on Algebra* [M]. Ithaca: The authors, 1882: 11-12.

[26] Hopkins, J. W. *A First Book of Algebra* [M]. New York: The Macmillan Co., 1905: 49-50.

[27] Keal, H. M. *Mathematics for Electrical Students* [M]. New York: J. Wiley & Sons, 1938: 40-42.

[28] Aley, R. J. *The Essentials of Algebra* [M]. New York: Silver, Burdett, 1904: 40-41.

[29] Rushmer, C. E. *High School Algebra* [M]. New York: American book company, 1923: 73-74.

[30] Engelhardt, F. *First Course in Algebra* [M]. Philadelphia: The John C. Winston Company, 1926: 75-76.

[31] Beman, W. W. *Elements of Algebra* [M]. Boston: Ginn, 1900: 40-41.

[32] Boulet, G. On the essence of multiplication. *For the Learning of Mathematics*, 1998, **18** (3): 12-18.

[33] Durell, F. *A School Algebra Complete* [M]. New York: Maynard, Merrill & Co., 1897: 39.

[34] Klein, F. *Elementary Mathematics from an Advanced Viewpoint* (Vol.1) [M]. New York: Dover Publications, 1945.

[35] 马忠林. 数学教育史[M]. 南宁:广西教育出版社, 2001: 339-355.

[36] Hassler. J. O. *The Teaching of Secondary Mathematics* [M]. New York: The Macmillan company, 1935: 105-130.

理论探讨

HPM 视角下的人口增长问题学习进阶设计*

姜浩哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 问题的提出

人口增长问题是中、小学数学教材中常见的数学问题。在小学数学“认识百分数”相关章节中，学生就有接触到“人口增长率”的概念，并开始简单预测未来人口增长趋势；在初中学习了函数的相关概念后，学生能通过函数的图像寻找人口数量随时间增长的规律；而高中等比数列的有关内容则与人口指数增长模型有着密切的联系。

在我国，尽管人口增长问题学生各学段的数学学习中均有涉及，但通常教学却往往只重视数学知识本身，忽视了课程内容的联系、学生思维的发展和建模能力的培养。近年来，关于学习进阶（Learning Progressions）① 的相关研究和应用方兴未艾[1]。吴颖康等认为，“学习进阶揭示了学生在学习和探索某一主题时，对该主题的思考、理解与实践活动在相当长的一段时间内是如何从简单到复杂、从低水平到高水平、从新手到专家逐步发展的。”[3]倘若基于学习进阶加以设计，使人口增长问题教学能围绕主线、不断深入贯穿于不同学段的相关课程内容之中，不失为系统帮助学生认识模型本质和提升建模能力的良策。

在数学史上，人口增长问题同样引发了数学家们的广泛兴趣。早在公元前 4500 年，巴比伦王国就举办了全国性调查，按族登记人口[4]。17 世纪，英国学者格兰特（J. Graunt, 1620-1674）编制了世界上第一张生命表，并正式开始人口数量规律的科学研究[5]。著名数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《无穷分析引论》中介绍指数和对数时引入了相关人口指数增长的实例[6]，马尔萨斯（T. Malthus, 1766-1834）在此基础上对人口指数增长模型进行了完善。一方面，人口增长问题的发展历史为建立假设的学习进阶（Hypothetical Learning Trajectories）提供了参考[7]；另一方面，从 HPM 视角看，丰富的历史材料在选择

---

* 上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”之系列论文之一

① Learning Progressions 与 Learning Trajectories 本质上具有一致性，因而在此可不做区分（参阅文献[2]和[3]）。

和加工后融入课堂教学同样具有较高的价值和意义。

2 教学设计

2.1 小学阶段人口增长问题的教学设计

2.1.1 新课引入

教师向学生介绍新课历史背景。人口增长问题由来已久，我国先秦时期管子、孔子、商鞅、韩非子等人就在著作中进行了相关论述，甚至提出了人口和土地之间应有一个理想比例的思想。古希腊柏拉图（Plato, 公元前 427-公元前 347）和亚里士多德（Aristotle, 公元前 384-公元前 322）从城邦国家的防务、安全和行政管理角度研究了人口“适度”问题。17 世纪后，许多数学家、统计学家或都探讨过人口增长问题。当然，研究人口增长问题，必然离不开人口统计数据。早在公元前 4500 年，巴比伦王国就举办了全国性调查，按族登记人口。我国是世界上唯一有长期不间断人口资料记录的国家，据《后汉书》记载，公元前 2200 年，大禹就曾经“平水土，分九州，数万民”，所谓“数万民”就是统计人口。

2.1.2 例题解析

例 1 我国（不含港澳台）1970 年、1980 年和 1990 年人口总数分别为 8.30 亿、9.87 亿和 11.43 亿[①]，试比较 1970 年至 1980 年间、1980 年至 1990 年间人口增长速度。

教师指出，1970 年至 1980 年间、1980 年至 1990 年间人口数量分别增长了 1.57 亿、1.56 亿。然而，从历史上看，我国自 1982 年起推行计划生育政策，1980 年至 1990 年间人口增长速度呈放缓趋势。教师继而指出：在人口基数不同的情况下，不能通过人口增长的绝对数量比较人口增长速度。

教师联系百分数、比例的有关内容，启发学生寻找能表示人口增长速度的“相对量”，并给出学生人口增长率的数学公式：设某地区 X 年人口总数为 S_1， $X+N$ 年人口总数为 S_2，则该地区在 X 年至 $X+N$ 年间人口总增长率为 $\dfrac{S_2-S_1}{S_1}\times 100\%$。教师要求学生运用人口增长率的概念和公式作答例 1，发现结论与历史相符。

教师指出，学生可以将数学模型理解为数字、字母或其他数学符号组成的，描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法，虽然真正实际问题的数学模型通常要比例 1 复杂得多，但是建立数学模型的基本步骤已经包含在了解决例 1 的过程中了：对实际人口总数

[①] 数据来源：中华人民共和国国家统计局. 中国统计年鉴 2014[M]. 北京：中国统计出版社, 2014.

进行近似以简化问题；用字母表示数；根据实际问题列出数学公式；求出数学解答；用得到的数学答案解释原问题；最后还用历史背景知识对上述结果进行了简单检验。

2.1.3 思维拓展

思考题 1 若已知 2010 年 A、B 两地区人口总数均为 10 万人，2010 年至 2015 年间，A 地区人口总增长率为 30%，B 地区每年平均人口增长率为 6%，试比较 2015 年 A、B 两地区的人口总数。

小学生在百分数应用的学习过程中常有这样的思维误区，即 N 年间人口总增长率等于年平均人口增长率与 N 的乘积，教师通过思考题 1 引导学生思考和发现 5 年后 A、B 两地区人口总数并不相等，既帮助学生巩固了所学新知，也为后续学习埋下伏笔。

在课堂最后，教师为学生简单拓展人口自然增长率与出生率、死亡率之间的关系，并补充介绍格兰特生命表的有关历史内容。

2.1.4 课后活动

教师布置课后活动[①]，要求学生通过网络、图书等收集世界人口历史数据，绘制简单的世界人口调查统计表、折线统计图等，估算不同时期世界人口增长率并对未来世界人口进行合理预测，搜集资料了解人口发展与资源环境承载能力之间的关系。

我国著名教育家张奠宙教授指出:“解决数学应用问题的本质是数学建模。”在小学阶段，学生运用数学公式解答应用问题的过程，本身也是一种典型、简约、形象的数学建模过程[9]。教师往往也会直接为学生建立模型，学生一般只需要找出模型中数学符号在具体问题情境中的含义，代入相关数值后即可求解得到答案。教学设计既包含有中国传统式的课堂教学，也将美国探究实践式的课后活动融入其中。教师通过建立“人口增长率”模型帮助学生学习百分数的应用，也使学生体会了数学建模的基本步骤，从而对数学模型产生初步的认识。

2.2 初中阶段人口增长问题的教学设计

2.2.1 新知传授

教师教授学生描点法作函数图像的一般步骤：列表、描点、连线，并详细说明和举例。

2.2.2 例题解析

教师引导学生从函数的观点分析人口增长问题并给出例题。

[①] 本课后活动教学设计参考了全美数学教师协会（NCTM）的官网资源和文献[8]。

例 2　表 1 给出了近两个世纪的美国人口统计数据，运用描点法作出人口数量随时间（年份）变化的函数的图像。

表 1 美国历史人口数据[①]

年	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890
人口/百万	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2	31.4	38.6	50.2	62.9
年	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
人口/百万	76.0	92.0	106.5	123.2	131.7	150.7	179.3	203.2	226.5	248.7	281.4

学生作答后，教师要求学生回忆小学阶段学习的“人口增长率”概念并进行相关计算，随后，教师引导学生发现：在人口增长率较高的时期，函数图像上升“陡峭”，而在人口增长率较低的时期，函数图像上升“平缓”，并指出通过函数图像观察人口增长趋势更具直观性。同时，教师补充了 1930 年至 1960 年经济萧条和二次大战的历史背景，以解释其间人口增长缓慢的原因。

从简单运用已建立的模型到根据一般步骤自主建立模型，这一阶段的学习让学生对数学建模有了更进一步的尝试。再看数学模型，小学时，学生了解的数学模型仅仅是用来解决实际问题的，它只是具有应用价值，但如今，教师引导学生发现数学模型还是对现实情境的一种简洁、清晰的表达，一段函数图像，却很好地阐明了近两个世纪的人口增长过程，这也很好地解释了人们常说的“数学是一种语言”，从这个意义上说，学生在对数学模型本质的认识上也完成了一次进阶。

2.3　高中阶段人口增长问题的教学设计

2.3.1　新课引入

首先，教师引导学生回忆小学时的思考题 1，要求学生猜想 N 年间人口总增长率与年平均人口增长率之间的关系。同时，教师帮助学生回顾初中阶段学习的例 2，要求学生计算 1790 年至 1860 年期间各相邻 10 年人口数量的比值，发现近似相等。教师由此引导学生建立等比数列模型：从 1970 年起到 1860 年美国每 10 年的人口数量近似地构成一个等比数列$\{a_n\}$，若每 10 年人口总增长率为x，则$\{a_n\}$的公比$q=1+x$。

2.3.2　历史展示

教师向学生展示数学家欧拉研究人口增长问题的历史。1748 年，欧拉在《无穷分析引

① 数据来源：姜启源，谢金星，叶俊. 数学模型（第 4 版）[M]. 北京：高等教育出版社，2011:164.

论》中介绍指数和对数时就引入和讨论了相关人口增长问题。欧拉认为，第 n 年的人口数量 P_n 满足 $P_{n+1}=(1+x)P_n$，其中 n 为正整数，x 代表人口增长率，x 为正实数。如果考虑初始人口数量 P_0，则 $P_n=(1+x)^n P_0$。这被称作是人口几何级数增长模型或人口指数增长模型[10]。其后，人口学家马尔萨斯在调查了英国 100 多年的人口统计资料，对指数增长模型进行了完善并补充了人口增长率不变的假设[11]。教师随后要求学生建立模型解答下述选自《无穷分析引论》[6]中的例题。

例 3　某地现有人口 10 万，年增长率为 $\frac{1}{30}$，求百年后该地人口数。

教师介绍，这道问题欧拉是根据 1747 年柏林人口调查数据提出的，1747 年柏林人口数量约为 10.7224 万。欧拉通过人口指数增长模型说明自然情况下任何地区在一个世纪中人口数量将增加 10 倍以上，而这一事实也在伦敦被观察证实[10]。

2.3.3　思维拓展

教师指出，在欧拉《无穷分析引论》[6]指数与对数的相关章节还讨论了贷款利率问题，与人口指数增长模型十分类似，思考题 2 对原书问题进行了适当改编。

思考题 2　某人以 5%的年复利率借款 40 万弗罗林，商定 n 年后一次性还款，问 n 年后连本带息共应还款多少？

教师引导学生运用类比的思想方法建立等比数列模型解答，将两类问题进行适当比较并要求学生联系小学阶段课后活动中人口发展与资源环境承载能力关系的资料思考：在贷款利率问题中，如果 $n\to\infty$，则还款金额必定也会趋向于无穷大；但是在人口增长问题中，如果时间接近无限长，人口数量会趋向于无穷大吗？

如果说小学阶段通过“增长率”研究人口增长问题较为繁琐且缺少了直观性，初中阶段通过函数的图像研究人口增长问题不能很好满足定量分析的要求，那么在高中阶段，借助等比数列相关知识得到的人口指数增长模型则同时弥补了以上两种方法的缺陷。通过数列通项公式，便可以简单明了计算和预测某一地区较长时间内人口数量。高中阶段，教师从小学思考题和初中例题的内容再出发，引导学生在事先没有步骤和方法可循的情况下自主建立等比数列模型。思维拓展环节，教师结合《无穷分析引论》的相关内容设置思考题，引导学生通过类比的思想方法使数学模型应用到更多新的领域，数学模型再也不是预制好的、一成不变的，而是可以根据具体问题不断调整、灵活多变的，也不是为特定对象所独有的，而是可以转移到所有合适领域中的。课堂最后，教师再次结合小学课后活动内容启发学生进行深度思考，帮助学生了解人口指数增长模型也有不完善的地方，因为地球

的资源和空间是有限的，人口不可能无限制地增长，并引导学生树立正确的人口观。

3 数学史与学习进阶融合的方式

表 2 数学史与学习进阶融合的方式

<table>
<tr><th>学段</th><th colspan="2">数学史运用方式</th><th>教学环节</th><th>本教学环节数学史相关内容</th><th>回顾的其他学段或环节的内容</th><th>回顾相关教学内容的目的</th></tr>
<tr><td rowspan="3">高中</td><td rowspan="8">整体性重构</td><td>复制式</td><td>例题解析</td><td>《无穷分析引论》中人口增长问题</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">顺应式</td><td>新课引入</td><td>运用指数增长模型分析美国 18 世纪上半叶人口数据</td><td>N 年间人口总增长率简与年平均人口增长率之间的关系</td><td>引导学生联系等比数列的有关内容建立模型。</td></tr>
<tr><td>思维拓展</td><td>《无穷分析引论》中贷款利率问题</td><td>《无穷分析引论》中人口增长问题、人口发展与资源环境承载能力之间的关系</td><td>引导学生通过类比的思想方法建立和应用数学模型，并对两类问题进行比较。启发学生树立正确的人口观。</td></tr>
<tr><td>初中</td><td>顺应式</td><td>例题解析</td><td>通过函数的图像分析美国历史人口数据</td><td>通过增长率分析中国历史人口数据</td><td>补充说明人口增长率在函数图像中的体现，对比说明通过函数图像观察人口增长趋势更具直观性。</td></tr>
<tr><td rowspan="4">小学</td><td rowspan="3">附加式</td><td>新课引入</td><td>介绍人口思想和人口普查的历史</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>思维拓展</td><td>介绍格兰特生命表</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>课后活动</td><td>查阅资料了解世界历史人口数据、人口发展与资源环境承载能力之间的关系</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>顺应式</td><td>例题解析</td><td>通过增长率分析中国历史人口数据</td><td></td><td></td></tr>
</table>

纵观从小学至高中的人口增长问题教学设计，数学史在整体性重构后与学习进阶相融合的，史料和问题在教学中环环相扣、层层铺垫，如表 2 所示。教学设计中，数学史料和问题不断回顾、补充、对比，意图促进学生的认知和元认知水平[12]。

4 数学史与学习进阶融合的价值

在人口增长问题的教学设计中，不仅由学习进阶联结而成的数学内容、思想的体系和网络呈现了“方法之美”，而且融合了的数学史与学习进阶还共同体现了“知识之谐”、“探

究之乐”、“能力之助”、“文化之魅”和“德育之效”。

4.1 方法之美

许多研究发现学习进阶有助于学生形成更丰富的知识网络或概念序列[3, 13]。通过学习进阶，百分数、函数、数列等多样的数学方法，类比、数形结合等精妙的数学思想在人口增长问题教学中联结成系统全面、有机统一的网络体系，呈现出“方法之美”。

4.2 知识之谐

一方面，基于历史人口统计数据或历史上数学家们的认知引导学生发现和解决问题，使得学生理解和学习模型有关知识的过程变得自然而然、水到渠成；另一方面，基于学习进阶的教学是依据学生的认知和理解而设计的，各学段教学内容环环相扣、层次铺垫，学生也能明白有关模型或知识不是“降落伞”从天而降，体现了“知识之谐”。

4.3 探究之乐

一方面，历史人口数据为数学建模提供了丰富的资源依托，学生在探究如何更好地描述历史人口增长规律的过程中既能被数学家们的智慧吸引，也能因自身数学活动经验的积累而收获乐趣。另一方面，在学习进阶中，人口增长问题环环相扣、层层深入，面对愈发复杂的问题情境，学生更能在好奇心的驱使下揭开问题的层层面纱，刨根究底之中“探究之乐”也愈发浓烈。

4.4 能力之助

一方面，历史问题有助于提升学生数学建模等核心素养[14]；另一方面，学习进阶为循序渐进地引导学生发展建模能力提供了科学依据。从开始学会运用已经建立的模型，到自主建立和求解模型，学生数学建模能力不是一蹴而就的，基于学习进阶的教学也无疑成为“能力之助”。

4.5 文化之魅

一方面，人口增长问题历史悠久，既展现了数学与现实生活的联系，教学设计也充分体现了 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）的“数学文化原理”；另一方面，学习进阶过程中，教学设计同样为学生呈现出多元的学习文化[15]：既有中国传统文化注重的循序渐进的课堂讲授，也引入了西方文化所提倡的旨在引导学生实践、探索、体验的课后活动。

4.6 德育之效

一方面，教学设计落实了“立德树人”这一今日教育的根本任务，通过数学史的融入引

导学生更好地认识数学活动的本质，理解数学是不断演进的，数学家们勤奋、执着、严谨的优秀品质更向学生传递了数学背后的人文精神；另一方面，基于学习进阶的教学也促进了“人口观”的发展，教师引导学生逐渐理解了人口增长应与资源环境相适应，潜移默化的“德育之效”也由此产生。

5 结语

从 1989-2016 年核心期刊文献的统计分析可以发现，中小学生数学建模能力的提高是数学教育研究人员关注的焦点，优秀的数学建模案例还略显不足[16]。一方面，数学史可以作为假设的学习进阶建立的依据，而学习进阶又能科学地、循序渐进地发展学生建模能力；另一方面，数学史又为数学建模案例的开发提供了丰富、真实的背景资源。与此同时，数学史和学习进阶融合后还体现了多个维度的价值（如图 1 所示）。当然，考虑到学习进阶本身具有假设性的特点，我们在学习进阶设计的过程中尚未开展实证研究，因而还存在部分值得完善的地方。但是，我们有理由相信，从 HPM 视角下设计数学建模的学习进阶无论是对于当前的教学实践、案例开发，还是对今后教科书的修订和编写，都具有重要的参考意义。

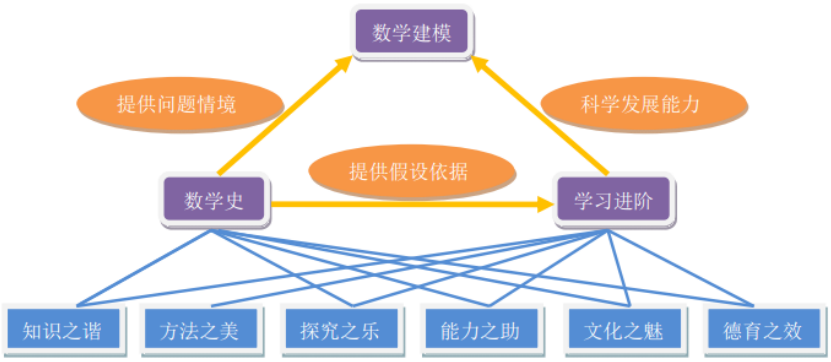


图 1 HPM 视角下的数学建模学习进阶设计

参考文献

[1] National Research Council(NRC). *Taking Science to School: Learning and Teaching Science in Grades K-8* [M]. Washington: National Academies Press, 2007:211-251.

[2] Daro P, Mosher F A, Corcoran T. Learning Trajectories in Mathematics: A Foundation for Standards, Curriculum, Assessment, and Instruction[EB/OL]. (2015-06-03) [2016-11-20]. Consortium for Policy Research in Education, 2011.

http://www.cpre.org/sites/default/files/researchreport/1220_learningtrajectoriesinmathcciireport.pdf. DOI:10.12698/cpre.2011.rr68

[3] 吴颖康, 邓少博, 杨洁. 数学教育中学习进阶的研究进展及启示[J]. 数学教育学报, 2017, 26(6): 40-46.

[4] 孙兢新. 人口普查的历史[J]. 江苏统计, 2000(s1):38-41.

[5] (美) Pollard J H 著, 姚志坚译. 人口增长的数学模型[M]. 成都: 四川大学出版社, 1988:1-2.

[6] Euler L. *Introduction to Analysis of the Infinite*[M]. New York: Springer-Verlag, 1988:75-92.

[7] Bakker A. Design Research in Statistics Education – on Symbolizing and Computer Tools[D]. The Freudenthal Institute, Utrecht, 2004:51,87.

[8] 蓝非. 掌握方法是解决数学问题的关键——美国小学数学拓展课《人口增长中的数学》案例[J]. 现代教学, 2005(11):60-61.

[9] 张秋爽. 在问题教学中建构数学模型——有感于吴正宪《行走中的数学问题》的教学[J]. 教育视界, 2015(8):25-26.

[10] Bacaër N. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*[M]. London: Springer-Verlag, 2011: 13-39.

[11] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型（第 4 版）[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 163-173.

[12] Fauvel J, Maanen J V. *History in Mathematics Education*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 2000:289-290.

[13] Nordine J, Krajcik J, Fortus D. Transforming Energy Instruction in Middle School to Support Integrated Understanding and Future Learning[J]. *Science Education*, 2011, 95(4):670-699.

[14] Wang X Q, Qi C Y, Wang K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics: An Empirical Study[J]. *Science & Education*, 2017, 26(2): 1029-1052.

[15] 张三花, 黄甫全. 学习文化研究:价值、进展与走向[J]. 江苏高教, 2010(6):15-18.

[16] 牛伟强, 张倜, 熊斌. 中国中小学数学建模研究的回顾与反思——基于 1989—2016 年核心期刊文献的统计分析[J]. 数学教育学报, 2017, 26(5):66-70.

教学实践

HPM 视角下的函数概念教学*

黄深洵 [1] ，刘思璐 [2]，沈中宇 [3]

（1.上海市青浦区第一中学，上海，201700；2.华东师范大学教师教育学院，上海，200062；

3.华东师范大学数学学院，上海，200241）

1 引 言

《高中数学课程标准》（2017 年版）指出："函数是现代数学最基本的概念，是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具，在解决实际问题中发挥重要作用。函数是贯穿高中数学课程的主线。"[1]"函数的概念"是沪教版高一年级第一学期第三章第一节的内容，对于帮助学生建立完整的函数概念、学习后续相关内容起到了至关重要的作用。高中数学中的几乎所有的代数内容都围绕函数和函数思想展开。

高中函数概念的教学要求学生在初中用变量依赖关系描述函数的基础上，用集合语言和对应关系刻画函数。在实际教学过程中，由于函数知识体系的复杂性、变量概念的复杂性和辩证性、函数符号的抽象性等原因[2]，学生学习函数概念时存在一定的困难。教学的关键在于如何让学生从初中"变量说"函数定义自然过渡到"对应说"函数定义，理解函数的意义，而不是以机械记忆的方式学习[3]。基于以上观点，许多教师尝试对高中函数概念的教学进行探索[4-7]。

已有的研究表明，高中生对函数的理解与历史上数学家的理解具有一定的相似性[8]。函数概念的演进历史为高中函数概念教学实现从"变量说"到"对应说"的自然过渡提供了重要参考。同时，HPM 视角下的教学实践表明，数学史有着多方面的教育价值，可以构建"知识之谐"、彰显"方法之美"、营造"探究之乐"、实现"能力之助"、展示"文化之魅"、达成"德育之效"[9]。但由于受沪教版教科书的影响，已有函数概念 HPM 教学案例未能真正实现从对应说到变量说的过渡[10]。有鉴于此，我们在已有相关案例的基础上，从 HPM 的视角重新设计函数概念的教学，具体的学习目标如下：

（1）理解函数的概念及函数的三要素,会根据具体情况确定函数的定义域以及判断两个函数是不是同一函数；

* 本文系华东师范大学 HPM 工作室系列课例之一。

（2）经历函数概念的探究过程，形成动态的数学观，提升数学抽象的能力；

（3）体验函数概念的演进过程，感受数学的理性精神，提升数学学习的兴趣和信心。

2 历史材料及其运用

函数的概念经历了漫长的历史演进过程，可以将函数概念的历史分为四个阶段，分别是“解析式说”阶段、“变量依赖说”阶段、“变量对应说”阶段以及“集合对应说”阶段。

2.1 “解析式说”阶段

从 18 世纪起，数学家们已经对函数概念进行了持续不断的研究。古代分析学家，将任一量 x 的不同次幂称为 x 的函数。接着，其涵义被拓展为含 x 的代数式。

1748 年欧拉（L. Euler, 1707-1783）的经典著作《无穷分析引论》问世，在此书中，欧拉首次用“解析式”来定义函数。他将函数定义为：“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式。”欧拉明确突破了代数式的局限，区分了代数函数和超越函数。[11]

2.2 “变量依赖说”阶段

18 世纪中期，数学家们一直在争论振动弦问题：“一根两端固定的弹性弦被变形成某种初始形状，然后被释放出来振动。问题是描述确定某时刻弦形状的函数。”这场辩论对函数概念的演变产生了重要的影响，处于刻画弦形状的函数的需要，数学家围绕“如果两个表达式在某个区间一致，那是否处处一致？”这一问题展开了争论，如果函数被定义为解析式，那么答案是肯定的，曲线的一小部分已经决定了其表达式，从而决定曲线整体的位置，而欧拉发现某些分段函数不符合这一规律，同时徒手画的曲线也不满足这一规律[12]。

因此，数学家们开始意识到用“解析式”定义函数已经不够完善了，于是到了 1755 年，欧拉在《微分基础》更新了自己对函数的定义：“如果某些量依赖于另一些量，当后面这些量变化时，前面这些变量也随之变化，则前面的量称为后面的量的函数。”[11]函数的“变量依赖说”定义因此诞生。

2.3 “变量对应说”阶段

到了 19 世纪时期，德国数学家狄利克雷（G. L. Dirichlet, 1805-1859）于 1837 年发表题为“用正弦和余弦级数表示完全任意的函数”的文章，定义函数为：“设 a、b 是两个确定的值，x 是可取 a、b 之间一切值的变量。如果对于每一个 x，有惟一有限的 y 值与它对应，使得当 x 从 a 到 b 连续变化时，y 也逐渐变化，那么 y 就称为该区间上 x 的一

个连续函数。在整个区间上，y 无需按照同一种规律依赖于 x，也无需单单考虑能用数学运算来表示的关系。”[11]

从欧拉以来，数学家对函数的“任意性”有了更深的认识，但是实际上，他们都将函数认为是解析式或曲线，而狄利克雷首次将函数看成任意的变量对应关系，并且他举出了“性状极怪”的函数实例，即狄利克雷函数。其意义就在于：它突破了以往人们对于函数的印象，是第一个既不是由一个解析式表示，也不是徒手绘制的曲线；它说明了函数作为任意配对的概念[12]。

2.4“集合对应说”阶段

集合论诞生后，函数定义得到了进一步抽象，1939 年，布尔巴基学派在《集合论》中给出了函数新定义：“设 E 和 F 是两个集合，它们可以不同，也可以相同。E 中的一个变元 x 和 F 中的变元 y 之间的一个关系称为一个函数关系，如果对每一个 $x\in$E，都存在唯一的 $y\in$F，它满足与 x 的给定关系。我们将联系的每一个元素 $x\in$E 和 $y\in$F 的运算称为函数；y 称为 x 处的函数值。函数是由给定的关系决定的，两个等价的函数关系确定了同一函数。”[12]

19 世纪，英国传教士伟烈亚力（A. Wylie,1815-1887）和中国数学家李善兰（1811-1882）在翻译时采用了“解析式”定义，将“变量”译为“变数”，“包含变数的表达式”就译为了“函数”，其中“函”、“含”同义，这便是中文“函数”的由来[11]。

基于以上历史，本节课主要采用了重构式，选取历史上函数概念演进的关键阶段，在课堂上重构函数概念的发生发展过程，从而让学生自然地完成函数概念的深入理解。

3 教学设计与实施

3.1 创设情境，引入主题

教师播放一段吉他曲，并展示了三位数学家的图片（如图 1）。

图 1 三位数学家

从左往右分别是著名的数学家欧拉、狄利克雷、李善兰，这些数学家都对函数概念的发展与传播做出了特别的贡献，本节课将沿着三位数学家的脚步，再次探究函数的概念。

3.2 基于历史，探究新知

首先，教师让学生回忆已有关于函数的知识，肯定学生对于函数是解析式的意象，提出数学家欧拉就是如此定义函数，接着教师提出问题引发学生思考：

师：刚刚我们听了一段优美的吉它曲，那么琴弦振动的图像可以用函数来刻画吗？随手画的曲线呢？

教师展示了琴弦振动的图像和随手画的一段曲线（如图 2），请学生写出解析式，学生发现很难写出解析式。教师与学生讨论“解析式说”的局限。

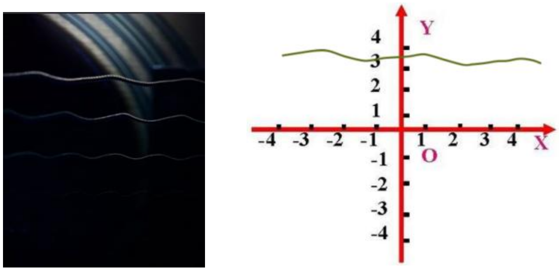


图 2 弦振动的图像和随手画的一段曲线

师：通过刚刚的例子，我们发现“解析式说”对函数的认识并不全面，于是函数的概念要进行改进。这时候就像我们同学说的一样，数学家们进一步认为函数是两个变量之间的关系，这就得到了我们初中里面函数的定义，请你和同桌讲讲初中里函数的定义。

生：在某个变化过程中有两个变量，设为 x 和 y，如果在变量 x 的允许的取值范围之内，变量 y 随着 x 的变化而变化，它们之间存在确定的依赖关系，那么变量 y 叫做变量 x 的函数，x 叫做自变量。

师：由于“解析式说”不太完善，欧拉改进了函数的定义，他在 1755 年重新定义了函数，与刚刚提到的初中定义的函数类似，我们把这个定义称为“变量依赖说”。

接着，教师举出三个函数例子，让学生用“变量依赖说”进行解释：

（1）校运会男子 100 米纪录统计表；

（2）常值函数 $y=0(x\in R)$；

（3）历史上有位数学家叫狄利克雷，有一天他提出一个函数，这个函数的特点是当 x 为有理数时，y 对应的值为 1，当 x 是无理数时，y 对应的值为 0。

学生发现用“变量依赖说”并不能够很好解释这三个例子。

师：所以我们用“变量依赖关系”来定义函数是不是也有问题呢？我们看狄利克雷所提出的函数，这个函数里面，确实是一个变量变了，另一个变量也跟着变，但是两个变量之间还有依赖关系吗？

生：没有依赖关系。

师：由这三个例子，我们发现用“变量的依赖关系”来刻画函数，好像也不太合理。我们需要对函数的概念再修正一下，怎么改呢？ 刚才我们说两个变量是“依赖”关系，但是我们举出好几个例子发现变量之间依赖吗？

生：不依赖。

师：也就是我们需要把“依赖”这个词换一下就可以了。你觉得可以换什么词呢？

生：我觉得可以把“依赖”改成“对应”。

师：为什么？

生：因为具体的函数关系中，每一个 x 的值，都有一个 y 的值和它相对应。

师：确实“对应”就是一个很好的描述，两个变量在变化过程中，他们之间的关系有时候可以描述，有时候不能描述，但是只要有一个 x 的值，就会有一个 y 的值和它对应。所以如何对之前的定义进行修正？

生：一般地，在一个变化过程中，如果有两个变量 x 与 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么我们就说 x 是自变量，y 是 x 的函数。如果当 $x=a$ 时,$y=b$，那么 b 叫做当自变量的值为 a 时的函数值。

师：很好。教材中把函数的定义讲的更加简洁，把所有 x 的值构成一个集合用集合 D 来表示，则有：如果在某个变化的过程中有两个变量 x、y，并且对于 x 在某个实数集合 D 内的每一个确定的值，按照某种对应法则 f，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数，记做 $y=f(x),x\in$D。历史上狄利克雷对函数的概念进行了修正，与刚刚同学讲的类似，称为函数的“变量对应说”。

3.3 回顾历史，深化理解

师：刚刚经历了函数概念从“解析式说”到“变量依赖说”再到“变量对应说”，我们接下来我们通过一段微视频（如图 3）把刚才的过程复习一下。

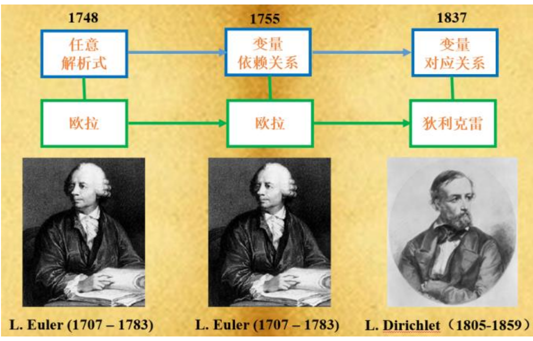


图 3 函数概念发展的微视频片段

师：刚才我们看到了函数概念演变的过程，但是函数概念并没有到此停止，接下来我们争取也要做点贡献。我们之前学习了集合的语言，能不能用集合的语言再把狄利克雷函数表示得简洁一点呢？x 是有理数，说明 x 的取值范围是什么集合？

生：有理数集 Q

师：那么无理数呢？如果不能用指定的字母表示，能不能用集合的运算表示呢？

生：用 Q 的补集表示。

师：集合语言可以使得表示更简单，看看我们能不能用文氏图表示。我们用方框表示实数集，用一条线把实数集为有理数和无理数，按照对应法则，对于每一个 x 的值，y 都有唯一确定的值与其对应，若 x 取任意有理数和任意无理数，它对应的 y 分别是多少？

生：0 和 1

师：既然 x 的取值范围看成集合，是否 y 取到的值也能看成集合？这个集合里面有多少个数？

生：两个数，0,1

师：那我们也可以用文氏图表示 y 值构成的集合。当我们用文氏图表示 x 和 y 构成的集合的时候，函数可以看成什么之间的对应关系呢？还仅仅是两个变量之间的对应关系吗？同桌之间可以先交流一下。

生：可以看成两个集合之间的对应关系。

师：很好，两个集合之间的对应关系，对应这个词仍旧保留，是哪两个集合呢？

生：自变量的取值范围构成的集合和函数值的取值范围构成的集合。

教师引导学生一起总结函数的集合对应关系下定义，教师指出该定义是布尔巴基学派提出的，告诉学生如今函数定义的渊源。之后，教师引导学生对之前列举的例子再次进行了检验，并感悟函数的三要素：定义域，对应法则，值域。

3.4 练习例题，巩固新知

教师通过以下练习，对之前学习的知识进行了巩固。

例 1：求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$；　　（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{3x-2x^2-1}}$；

（3）$y=\dfrac{3x}{2x-\sqrt{3-4x}}$；　　（4）$y=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$

例 2：已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+1,(x>0) \\ \pi, \quad (x=0) \\ 0, \quad (x<0) \end{cases}$，求 $f(-1)$，$f(2)$，$f[f(-1)]$ 的值。

例 3：下列函数是同一函数吗？

（1）$y=x+1$ 与 $y=\sqrt{(x-1)^2}$　（2）$y=1$ 与 $y=x^0$

（3）$y=\dfrac{x^2-x}{x}$ 与 $y=x-1$　（4）$f(x)=x^2, x\in[-1,1]$ 与 $g(x)=|x|, x\in[-1,1]$

3.5 总结内容，交流感悟

教师引导学生回忆本节课的具体内容，并从中梳理知识层面及精神层面的收获。

首先从知识层面上，回忆函数概念演变的重要内容。函数概念从“解析式说”到“变量依赖关系”到“变量对应关系”，再到“集合对应关系”。复习如何通过三要素来判断两个函数是不是同一函数。

其次从精神层面上，教师启发学生看到函数概念的演变过程，明白任何一个数学概念并不是一开始就得到标准答案的，而是需要经过不断的演变和修正。学生也提出要将这节课看到的这种不懈努力的精神融合到自己的学习当中。最后教师鼓励学生“函数的概念可能还会继续演进下去，说不定下一位做出贡献的数学家就在我们的同学之中”。

4 学生反馈

为了解本节课教学效果，对全班 38 名同学进行了前测和后测，并在课后进行了访谈。

在课前测试中，对于问题：“是否存在一个函数，将每一个正数对应到 1，将每一个负数对应到-1，将 0 对应到 0？”有 42.1%的同学认为不存在，而在课后测试中，对于类似的问题：“是否存在一个函数，将每一个质数对应到 1，将每一个合数对应到-1，将 0 对应到 0？”仅有 7.9%的学生认为不存在。

在课前测试中，对于坐标轴上的任意曲线（如图 4 左），有 21.1%的同学认为不是函数，而在课后测试中，对于类似的问题（如图 4 右），仅有 15.6%的同学认为不是函数。

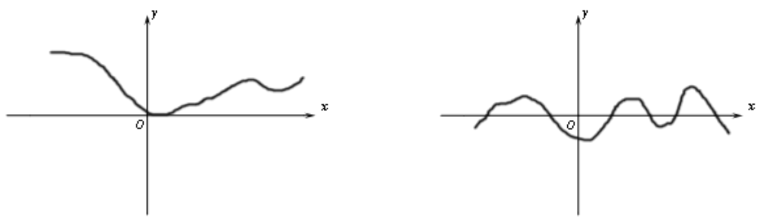


图 4 任意曲线题目

在课后测试中，对于这节课中印象最深的内容，学生的回答可以分为函数的演变、函数的定义两种类型，其典型回答有：

- 函数概念的演变过程，知识是不断进化的；
- 函数的演变过程，它结合视频增加趣味性；
- 历史上的数学家及其对函数概念的不断研究；
- 数学家探索函数的精神，不断修正，启示自己开始时做错也很正常，后面的反思和修改更重要，试错与反思才会越来越好。
- 函数关系用集合表示和函数三要素，这个内容很新鲜。

从课后我们对学生访谈的结果来看，学生能区别出初中函数定义与高中函数定义，并且能体会到集合知识在函数定义中的应用；对于狄利克雷函数函数，学生印象深刻，并能将其复述；对于课堂引入微视频介绍数学史的环节，学生感觉新颖，表示能让自己更集中的了解函数概念的演进历史，并从中感受数学家对真理坚持不懈，孜孜以求的精神等。

5 结 语

本节课主要采用重构式再辅以顺应式、附加式的方式将数学史素材融入函数概念的教学中。通过重构函数概念发展的历史，让学生经历从解析式定义到集合对应关系定义的函数概念扩张过程。通过顺应式改编历史上弦振动问题、狄利克雷函数，引发学生认知冲突，让学生由函数的解析式定义顺利过渡到对应关系定义。通过附加式的方式将历史上函数的定义与学生所讲的定义相联系，同时，播放函数概念发展的微视频，让学生有一条清晰的函数概念发展史的脉络。

从数学史的多元价值上来看，通过重现函数概念的历史发展过程帮助学生自然地实现函数概念从初中到高中的过渡，构建了“知识之谐”。在函数定义的完善过程中，利用数学史引发学生的热烈讨论与主动探索，营造了“探究之乐”。在完善函数概念的过程中，让学生经历数学概念不断抽象化的过程，培养学生数学抽象的核心素养，实现了“能力之助”。在展示函数概念的同时，介绍各国数学家探索函数概念的背景与过程，揭示知识源流，强调多元文化，展示了 “文化之魅”。让学生体会数学家们探索真理的客观过程，培养学生的理性精神和动态数学观，达成了“德育之效”。

课后通过同行评议和教学实录，发现本节课仍有一些不足之处，比如教师课堂的引导语设计部分不够精准，课堂中的学生活动形式不够丰富，学生在探究活动过程中参与不足等，

建议在以后的教学中加入多样化的学生活动设计，给学生提供更多探究和表达的机会，将会使本节课的教学效果更加显著。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 [S]. 北京: 人民教育出版社, 2017.

[2] 张文亮. 高中函数学习难点及教学教法[J]. 中学数学教学参考, 2015(30): 47+70.

[3] 邓勤. 新课程背景下初高中数学教学的有效衔接——从函数概念的教学谈起[J]. 数学通报, 2011, 50(02): 33-35.

[4] 陶维林. 函数的概念教学设计[J]. 中小学数学(高中版), 2009(Z2): 51-55.

[5] 李雪梅, 赵思林, 李雪梅. 基于 APOS 理论的函数概念“八步”教学设计[J]. 中学数学杂志, 2017(11): 10-15.

[6] 肖三杏.教学函数概念 注重数学抽象——关于“函数的概念”微课教学设计[J]. 中小学数学(高中版), 2016(11): 11-13.

[7] 章建跃, 陶维林.注重学生思维参与和感悟的函数概念教学[J]. 数学通报, 2009, 48(06): 19-24+30.

[8] 任明俊, 汪晓勤. 中学生对函数概念的理解——历史相似性初探[J]. 数学教育学报, 2007 (04): 84-87.

[9] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics [J]. *Science & Education*, 2017, 26(7-9): 1029-1052.

[10] 钟萍, 汪晓勤. 函数概念:基于历史相似性自然过渡[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2016 (02): 62-68.

[11] 汪晓勤. 19 世纪中叶以前的函数解析式定义[J]. 数学通报, 2015, 54 (05): 1-7+12.

[12] Kleiner, I. Evolution of the function concept: A brief survey [J]. *College Mathematics Journal*, 1989, 20 (4): 282-300.

实证研究

HPM 视角下的高中函数概念教学对学生认知影响的实证研究*

刘思璐[1]，沈中宇[2]

（1. 华东师范大学教师教育学院，200062；2. 华东师范大学数学科学学院，200241）

1 引言

随着 HPM 课例研究的深入开展，课例的评价日益受到人们的关注。在 HPM 课例评价框架中，“价值的深刻性”是十分重要的维度[1]。实践表明，数学史有助于揭示知识之谐，促进数学理解[2]。但是，对于不同的主题，如何有效地检测教学前、后学生在理解上的变化情况，是需要课例研究者去解决的重要课题。根据国际上 HPM 已有研究的相关启示，还需要进一步规范研究方法, 注重实证研究[3]。

函数是中学数学的核心概念，关于学生对函数概念的理解，人们已经做了大量的实证研究。有的研究者将学生在函数概念上的认知发展过程分为“作为算式的函数”、“作为变化过程的函数”和“作为对应关系的函数”三个阶段[4]，或“认识变量”、“突出关系”等六个层次[5]；有的研究者基于 SOLO 水平或 APOS 理论对函数概念的理解水平进行划分[6-7]。尽管有研究表明，高中生对函数的理解与历史上数学家的理解具有一定的相似性[8]，但迄今很少有人借鉴函数概念的历史来刻画学生理解水平的变化过程。

鉴于此，本研究以函数概念的历史演进过程作为参照系，构建学生的认知分析框架，在此基础上检测学生在 HPM 视角下的函数概念教学之后的认知变化情况。具体的研究问题为：在 HPM 视角下的函数概念教学实施前后，学生在函数概念各认知水平上发生了哪些变化？HPM 视角下的函数概念教学中的哪些因素造成了学生的函数概念认知水平的变化？希望通过本研究，为函数概念的教学以及 HPM 课例评价的研究提供参考。

2 函数概念认知发展水平

2.1 函数概念的历史

从历史上看，函数概念的发展并不是在推翻旧定义重构新定义的过程，而是为了研究范围更广的问题从而扩展其适用性的过程，最直接的证明就是函数概念无论如何变化都可以根

* 上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”之系列论文之一

据后面的概念来解释属于之前概念的函数。根据函数概念的历史发展，可将其划分为 4 个阶段（如图 1 所示），这里只研究中学数学中函数的相关历史。

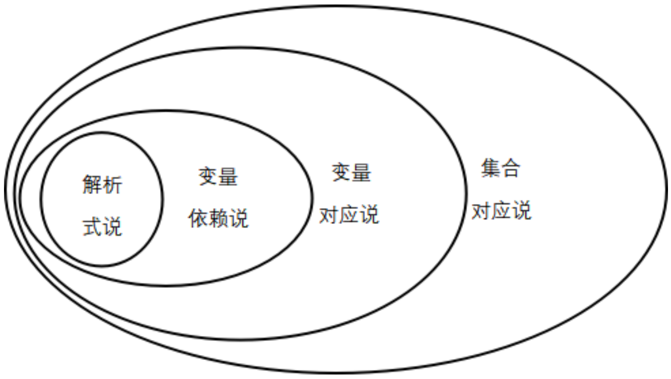


图 1 函数概念历史发展水平

第一阶段为“解析式说”。理解函数为任意解析式。如：1748 年，欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《无穷分析引论》中采用“解析式说”来定义函数：“一个变量的函数是由该变量和一些数或常量以任何方式组成的解析式。”[9]

第二阶段为“变量依赖说”。理解函数为函数值随自变量的变化而变化。如：1755 年，欧拉在《微分学原理》采用“变量依赖说”重新定义了函数：“如果某些量依赖于另一些量，当后面这些量变化时，前面这些变量也随之变化，则前面的量称为后面的量的函数。”[9]

第三阶段为“变量对应说”。理解函数为自变量取一个值，因变量对应的取一个值。如：1837 年，德国数学家狄利克雷（G. L. Dirichlet, 1805-1859）发表题为“用正弦和余弦级数表示完全任意的函数”的文章，采用“变量对应说”拓展了当时的函数概念：“设 a、b 是两个确定的值，x 是可取 a、b 之间一切值的变量。如果对于每一个 x，有惟一有限的 y 值与它对应，使得当 x 从 a 到 b 连续变化时，y 也逐渐变化，那么 y 就称为该区间上 x 的一个连续函数。在整个区间上，y 无需按照同一种规律依赖于 x，也无需单单考虑能用数学运算来表示的关系。”[10]

第四阶段为“集合对应说”。理解函数为两个非空数集之间的对应关系。如：1939 年，布尔巴基学派在《集合论》中采用了“集合对应说”给出了函数新定义：“设 E 和 F 是两个集合，它们可以不同，也可以相同。E 中的一个变元 x 和 F 中的变元 y 之间的一个关系称为一个函数关系，如果对每一个 $x\in E$，都存在唯一的 $y\in F$，它满足与 x 的给定关系。将联系的每一个元素 $x\in E$ 和 $y\in F$ 的运算称为函数；y 称为 x 处的函数值。”[11]

函数概念的每一次演进，其背后都有许多历史动因，数学家们也因此不断对函数概念进行完善。以欧拉对函数的认识为例，当他给出“函数是解析式”的声明后，同期的数学家们争论的振动弦问题(“一根两端固定的弹性弦被变形成某种初始形状，然后被释放出来振动。

问题是描述确定某时刻弦形状的函数”）却引发了他的思考，出于刻画振动弦函数的适用性需要，欧拉将函数更新为“变量依赖说”下的定义。而狄利克雷对函数的“任意性”有着更深的认识，他是较早将函数看作任意的变量对应关系的人，为了证明自己的观点他举出了“性状极怪”的函数实例，即狄利克雷函数。[10]同时函数概念史的发展也是曲折而艰辛的，即便是函数概念发展到“对应说”时期，仍有许多数学家甚至是教科书采用“解析式说”和“变量依赖说”定义函数[12]。 国外有关研究也发现许多 17-18 岁学生的概念意象与欧拉的概念意象相一致，而不是与现代概念的定义相一致[13]。

2.2 基于数学史的函数概念认知发展水平

对应于函数概念演进的四个阶段，可以将学生认知划分为四个水平，如图 1 所示。

表 1 基于数学史的函数概念认知发展水平

认知水平	理解类型	有关研究中的认知水平
L1：解析式水平	将函数理解为任意解析式。	作为“算式”的函数； 认识变量；突出关系。
L2：变量依赖水平	将函数理解为函数值随自变量的变化而变化。	作为“变化过程”的函数； 区分函数与算式。
L3：变量对应水平	将函数理解为自变量取一个值，因变量对应的取一个值。	作为“对应关系”的函数； 掌握“对应”；把握形式化描述。
L4：集合对应水平	将函数理解为两个非空数集之间的对应关系，定义域取一个值映射到值域的一个值。	作为“对应关系”的函数； 形成函数对象。

根据函数概念史每一阶段认知水平的特征和内涵，将函数概念的认知发展水平划分为 4 个水平，每一个水平对函数的解释都有其特点，并与有关研究中的认知水平相对应。

3 研究方法

本研究综合使用了问卷调查和访谈的方法，通过问卷调查检测 HPM 视角下的函数概念教学前、后学生的对函数概念的认知水平有哪些变化，采用访谈的方式了解造成这些变化的原因，从而得到此次教学中，造成学生对函数概念认知水平的变化的因素有哪些。

3.1 研究对象

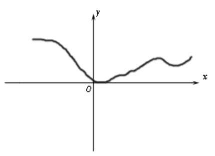
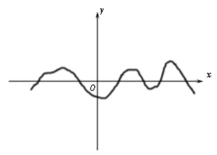
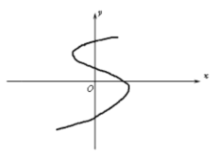
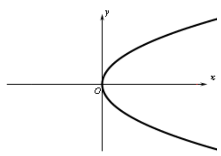
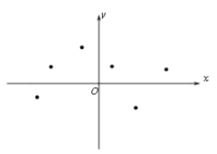
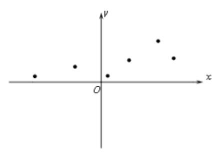
问卷调查法的研究对象为上海市某高中高一年级经过 HPM 视角下函数概念课的 135 名

（四个班）学生。访谈法的研究对象为这四个班中随机抽取的 8 名学生。该校处于上海市中等水平，四个班级均为平行班。

3.2 研究工具

依据已有的函数概念理解水平问卷，选取其中的部分问题进行改编[14-15]，经过预测试的调整，最终编制了可对比的前、后测问卷，具体内容见表 2。

表 2 前、后测问卷题目

题目	前测（T1）	后测（T2）
Q1：语言叙述题	是否存在一个函数，将每一个正数对应到1，将每一个负数对应到-1，将 0 对应到 0？请说明理由。	是否存在一个函数，将每一个质数对应到 1，将每一个合数对应到-1，将 0 对应到 0？请说明理由。
Q2：任意曲线题	下列图像，y 是不是 x 的函数？请说明理由。 	同左。 
Q3：“S”形曲线题	下列图像，y 是不是 x 的函数？请说明理由。 	同左。 
Q4：散点图题	下列图像，y 是不是 x 的函数？请说明理由。 	同左。 

Q1 考查学生对函数解析式的理解程度。Q2 考查学生对初中函数在依赖关系下的理解程度。Q3 考查学生对中学函数对应关系中“唯一性”的理解程度。Q4 考查学生对函数对应关系中离散情况的理解程度。通过给被访谈学生看自己前、后测问卷进行访谈，主要是了解学生在本节课后对函数概念有哪些新的理解，同时本节课的哪些具体内容促进了学生的这些理解。

3.3 数据收集

首先，课前让学生完成前测问卷，接着，进行 HPM 视角下的函数概念教学，四个班的 HPM 函数概念课均由同一位教师完成，该课共分为四步。第一步复习引入，教师带领学生回忆初中函数的概念和例子，然后介绍三位数学家（欧拉、狄利克雷和李善兰），引导学生再次探究函数的概念。第二步历史重现，教师展示欧拉对函数的“解析式说”定义，肯定学生对于函数是解析式的意象。教师播放一段吉他曲引出琴弦振动形状（模拟“弦振动问题”）和随手画的一段曲线作为函数的例子，与学生讨论“解析式说”定义的局限性，引出欧拉对函数的“变量依赖关系”定义。接下来教师通过校运会男子 100 米纪录统计表、常值函数 $y=0$（$x \in R$）和用文字语言描述的狄利克雷函数的例子与学生讨论“变量依赖说”定义的局限性，引出狄利克雷对函数的“变量对应关系”定义。随后教师呈现函数的标准定义，并结合实例强调函数的三要素，播放微视频介绍函数概念的部分历史。接着教师用文氏图表示狄利克雷函数，引出布尔巴基学派的“集合对应关系”的函数定义。第三步知识应用，学生讨论和交流练习题，对所学进行巩固和应用。第四步课堂小结，学生在教师引导下总结本节课的学习内容，交流学习感悟。课后让学生完成后测问卷，并随机抽取 8 份前测问卷确定访谈学生并找到对应的后测问卷辅助进行访谈。

3.4 数据分析

本研究主要采用质性分析方法。第一步，整理与编号。将每份学生问卷进行五位数编号，第一位数为题号（1 代表 Q1），第二位数为前、后测（1 代表 T1），后三位数为学生问卷上编号，比如 11021 代表 Q1 中 T1 的问卷编号为 021 号的学生答案。第二步，分类与统计。依据历史上函数概念认知发展水平，将学生答案划到其相应的水平。判断理由为空白或无关理由，为 0 水平。学生在函数概念各认知水平上的具体表现见表 3。统计每道题前、后测不同水平百分比，得到学生在 HPM 视角下的教学前、后，函数的认知水平有哪些变化。学生问卷所显示水平的分类由两位研究者进行，第一位研究者对所有问卷进行分类，第二位研究者随机抽取 10%进行一致性检验。第三步，分析与归因。根据统计图分析学生不同理解水平的变化，再通过访谈，分析学生产生这些变化的原因，从而了解 HPM 视角下的函数概念教学中的哪些因素造成了学生的函数概念认知水平的变化。

表 3　学生的典型答案

认知水平	回答类型	典型回答	对应编号
L1	写出解析式	是（学生写出该函数的分段解析式）。	11021
	认为没有规律	不是，无规律。	21024
L2	根据图像判断	是（学生画出该函数图像）。	11111
		不是，没有图像。	41005
	回答依赖关系	是，有依赖关系。	12004
	识别变量变化	是，y 随 x 的变化而变化。	32062
L3	利用对应判断	是，因为每一个 x 都有唯一确定的 y 值	12120
		不是，1 个 x 有多个 y 值。	31010
	回答对应关系	是，x, y 存在一一对应。	21021
L4	集合对应关系	是，集合间有对应关系。	42058
		是，有对应关系、定义域、值域	42067

比较表 1 和表 3，发现基于数学史的函数概念认知发展水平和学生在函数概念各认知水平上的答案是相对应的。根据表 3 可以看到，不同水平的学生答案表现是存在差异的，且同一水平的具体表现也不一致的。比如 L2 水平的具体表现为“根据图像判断”、“回答依赖关系”和“识别变量变化”。

4 研究结果

4.1 函数认知水平的变化

通过比较前、后测调查问卷的结果，发现学生在函数概念各认知水平上发生明显的变化。具体变化如下。

4.1.1 语言叙述题

图 2 为学生在 Q1 的前、后测水平分布对照。

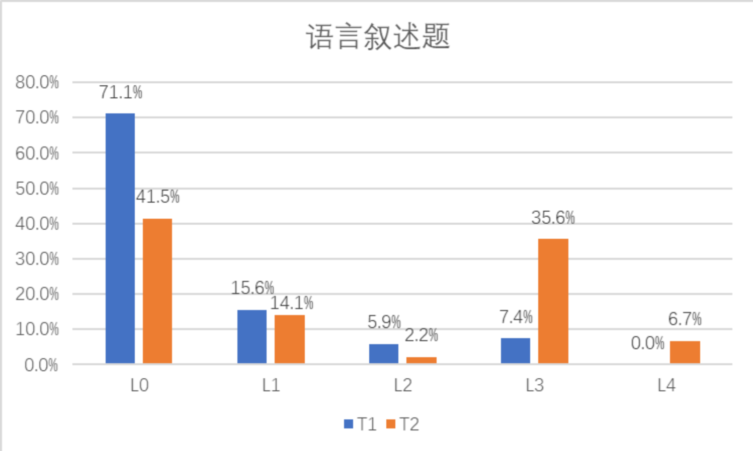


图 2 学生在 Q1 上的理解水平变化

根据图 2，可以看到学生在 Q1 上对函数理解水平的变化趋势。后测处于 0 水平的空白或者无效理由明显减少，说明课后更多的学生对该问题的判断有了自己明确的理由。1 水平在四道题中的比例不论是前、后测都是最高的，这跟这道题的考查目的有关，该函数可以用每一个水平的函数概念去进行解释，而学生用写出解析式来解释是较为常见的。2 水平的答案比例在前、后测都最小，说明学生难以用“变量依赖说”去解释这个函数。答案处于 3 水平的学生人数在有效答案的比例最高。4 水平的答案在后测中才出现，且该题后测中的 4 水平比例在四道题中是最高的。

4.1.2 任意曲线题

图 3 为学生在 Q2 上的前、后测水平分布对照。

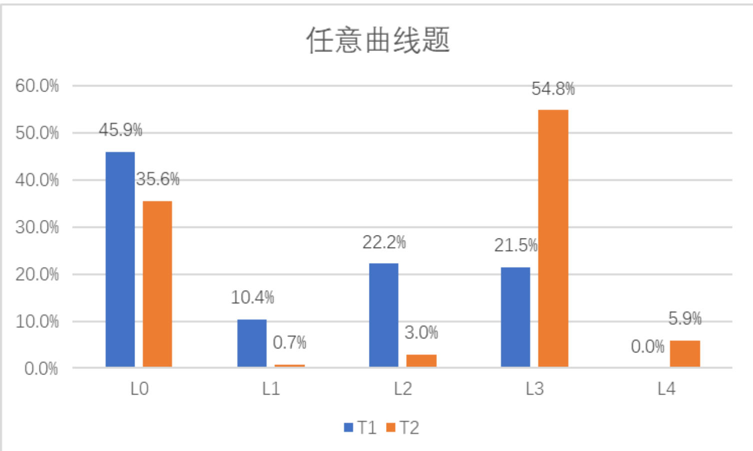


图 3 学生在 Q2 上的理解水平变化

根据图 3，可以看到学生在 Q2 上对函数理解水平的变化趋势。该题答案在前测中的 0 水平的比例是四道题中最低的，相比而言学生在课前更容易用自己的理解去解释这个函数。该题是考查学生对任意曲线是函数的理解程度，至少应从“变量依赖说”的水平才能进行合理解释，所以课后 1 水平的比例极小，学生用解析式或者有规律是难以解释这个函数的。2

水平的学生在前测的有效答案中的比例最高，这也许是因为学生在课前对“y 随 x 的变化而变化”的函数理解较为广泛。课前和课后 3 水平的比例在四道题中都是较多的。同样，4 水平的答案在课后才出现。

4.1.3 S 型曲线题

图 4 为学生在 Q3 上的前、后测水平分布对照。

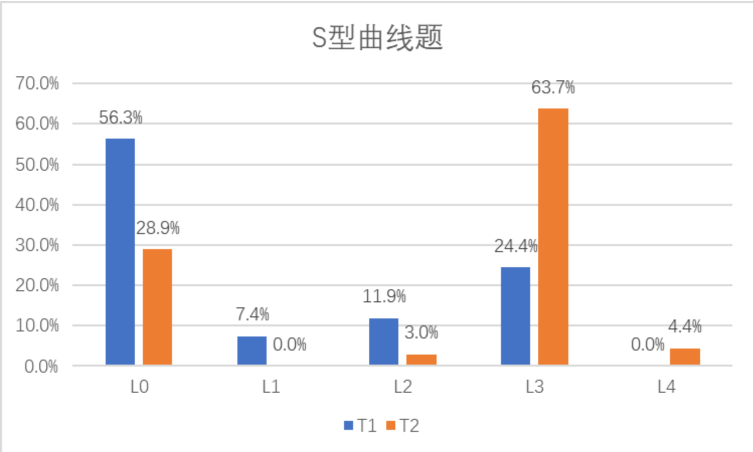


图 4 学生在 Q3 上的理解水平变化

根据图 4，可以看到学生在 Q3 上对函数理解水平的变化趋势。该题后测中的 0 水平的比例是四道题中最低的，说明学生在课后对于这道题的判断理由是比较充分的。与其他 3 道题不同的是，该题的 1 水平的答案在后测中没有出现，学生不再用解析式和规律来解释该图像不是函数。该题考查学生对函数对应关系中 y 值“唯一性”的理解,故处于水平 3 及以上的学生才有可能作出正确回答，而学生在前、后测中处于 3 水平的比例在有效答案中也是最多的。但是处于 4 水平的比例在四道题中最小的，这也许是因为学生对于“集合对应说”理解不到位，所以他们更倾向于用自己最熟悉的认知水平来进行判断。

4.1.4 散点图题

图 5 为学生在 Q4 上的前、后测水平分布对照。

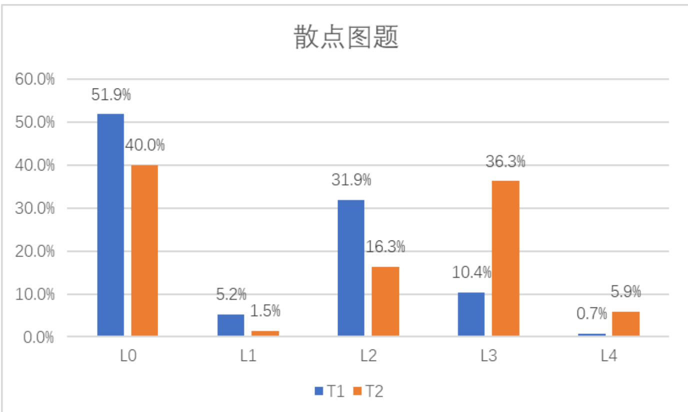


图 5 学生在 Q4 上的理解水平变化

根据图 5，可以看到学生在 Q4 上对函数理解水平的变化趋势。本题的难度偏大，学生之前和课上并没有见过此类离散函数，故处于 0 水平的答案比例在前、后测都较高。处于 1 水平的答案在前测四道题中也是最低的，这可能是由于学生的判断时无法用写出解析式的方式来解释。不同的是处于 2 水平的学生在前、后测的比例是四道题中最高，查阅问卷的判断理由发现，有很多学生认为该题中只有点没有连接起来成为图像，所以不是函数，体现了学生对于函数是连续的函数意象。这也印证了学生对于函数的意象是复杂的和内隐的，故学生在回答不同问题时可能会调用不同的认知水平来进行判断。处于 3 水平和 4 水平的学生比例在该题后测中增加。查阅学生问卷，发现前测中处于 4 水平的学生答案为“不是，因为它不是有序数对”（41061），虽然学生对有序数对的理解有误，从而导致判断失误，但是这可以视为学生努力调用自己函数意象去解释自己判断的一种表现。

4.2 HPM 视角下的教学对函数认知水平变化的影响因素

结合调查问卷的所显示出来的函数认识水平的变化，进一步通过访谈发现，HPM 视角下的教学对函数认知水平变化的影响因素主要体现在三个方面。

4.2.1 四个阶段的函数定义为学生提供函数概念表述方式

根据统计图，发现四道题答案所显示的 0 水平比例在前测中都占有相当大的比重，而后测中都有所减少，说明大部分学生在课后能够表达出自己对于函数的理解。这种表达的方式是由于这节课的教学内容和模式所产生的。同一数学概念，由于个体的认知结构水平的不同，理解水平会不同。[16]这点根据问卷中学生的答案和对他们的访谈可以看到，学生对于函数有着自己的理解。比如：

研究者：今天学了历史上四个函数的概念，有解析式说、变量依赖说、对应说、集合论，在四个定义中，你们最喜欢哪个？

生 1：我最喜欢依赖关系，因为它比较有规律。

生 2：我喜欢集合说，因为它是我们现在对函数的定义，算是目前为止最标准的一个。

学生通过课上所提供数学史中的函数概念，可以找到与自己认知水平对应的函数概念，并用其进行判断和表达，可见数学史为学生提供了自己所理解的函数概念的表述方式。同时也可以根据学生答案中的关键词来找到其相应的认知水平进行了解。

4.2.2 狄利克雷函数促进学生掌握变量对应关系

根据统计图，发现四道题答案所显示的 1、2 水平比例明显减少，3 水平明显增加且比例在后测中较大。这跟这节课的教学内容本身有着很大的关系。但是教师通过重构式、顺应

式和附加式将函数概念的历史融入数学课堂教学的方式对学生理解变量对应关系是有着很大帮助的。这点从学生访谈中可以得到印证。比如：

研究者：你在前、后测问卷中回答的变化跟课堂上我们所使用的哪些函数例子有关？比如第 1 题？

生：比如狄利克雷函数。课前我是把所有的数全部弄到一块，然后画出来这个函数的图像。然后课后，因为上课讲了一个狄利克雷函数所以说感觉这个跟狄利克雷函数有点像，所以我就是仿照它的样子就写了它的表达式。

研究者：那么，这三个图像题呢？

生:之前就是根据初中的印象判断的,这个在初中的时候老师不太强调一个 x 对一个 y，但是高中好像就很强调一一对应关系的。

研究者：那个这些改变跟这节课上举的例子有关系吗？

生：有关系。

研究者：哪些例子呢？

生：就是一开始在讲函数发展时，讲到狄利克雷对函数重新的定义嘛，就是根据这个来对这些图像进行判断的。

狄利克雷当年为了说明自己函数定义中“任意对应”的性质，举出了特殊的狄利克雷函数[9]，这在今天看来是突破函数依赖关系的较好反例，教师通过顺应式来简化狄利克雷函数再给学生呈现，有助于学生认识到之前对于函数是依赖关系的局限性。可见数学史能够促进学生对变量对应关系的理解。

4.2.3 文氏图激发学生理解集合对应关系

根据统计图，发现四道题答案所显示的 4 水平基本上都是在后测中才出现。集合对应关系对于中学生而言是需要很高的认知水平才能理解的。如何帮助学生在学习变量对应关系的函数概念后继续理解集合对应关系的函数概念是教学内容的上一个难点，在 HPM 视角下的函数概念教学中教师采用用文氏图表示狄利克雷函数的定义域和值域，然后表示这两个集合间的对应关系，从而引出集合对应关系的函数定义。这是这节课通过映射的方式第二次使用狄利克雷函数。通过调查问卷和学生访谈发现已经有一小部分学生的认知水平处于 4 水平。比如：

研究者：你们可以谈一下初中概念和高中概念有什么不一样呢？

生：感觉比较复杂一点了。

研究者：为什么觉得更加复杂了呢？

生：需要注意的点很多。

研究者：哪些点是你觉得需要注意的呢？

生：概念里面的专有名词一定要很精确。比如唯一对应，集合对应。

研究者：“狄利克雷函数能帮助你更好地理解函数这个概念吗？”

生:“我觉得可以，因为当 x 取一个值的时候，y 也有唯一确定的一个值与它对应，它的图像（这里指教师画的狄利克雷函数的文氏图）能让我更好地理解对应关系。

在这段对话中，通过引导性的语言，可以看到学生 1 在表述地过程中逐渐准确地意识到自己学习函数的新定义中与之前初中学习的函数定义的不同之处。学生注意到狄利克雷函数的文氏图下的对应关系，虽然学生 3 并没有明确提到集合对应关系，但是综合来看数学史对于学生理解集合对应关系的函数概念是有着激发作用的。

5 结论与启示

根据以上结果，可以获得如下结论。从总体上看，经过 HPM 视角下的函数概念教学，学生对于函数概念的理解水平有所提升。除去不能显示出学生认知水平的答案，发现课前大部分学生对函数的概念意象是处于解析式水平和变量依赖水平，课后大多数学生的认知水平提升到变量对应水平，少数学生达到了集合对应水平，但仍有部分学生处于解析式水平和变量依赖水平，不能显示出学生认知水平的无效答案也有所减少。通过重构式、顺应式将历史上函数概念的定义、狄利克雷函数等因素融于教学有助于学生对函数概念的理解。

基于以上结论，可以得到以下启示。

5.1 参照历史坐标，理解学生水平

学生答案所表现出他们对函数概念的理解水平与函数概念的历史水平存在相似性，并且学生对函数概念的认知水平的发展与其历史水平的发展也具有相似性。但学生的认知基础以及学习环境是不同的，教学中应因势利导，因材施教，将历史作为理解学生认知水平的参照系，而非照搬历史。

根据课后学生认知水平的结果，发现学生对函数概念的理解是存在困难的。历史上函数概念的发展经历了 200 多年，掌握一定的数学史知识有助于教师预测学生的学习困难[17]，让学生在短时间内理解新的函数概念是不现实的，这需要教师给予学生足够的耐心和时间来帮助他们。

5.2 寻找历史动因，跨越认知障碍

历史上函数概念的每一次演进，背后都有其相应的历史动因，从函数的解析式阶段到变量依赖阶段，背后是欧拉等数学家对振动弦问题的思考和讨论，从变量依赖阶段到变量对应阶段，涉及狄利克雷对函数“任意性”的认识，从变量对应阶段到集合对应阶段的转化涉及布尔巴基学派对数学基础的思考。

在函数概念的教学中，需要透过函数概念的发展阶段，找到这些历史动因，将其由数学发展史中的“原初性问题”转化为课堂教学中的“本原性问题”[18]，将历史上推动函数概念发展的函数例子设置成环环相扣的问题串，HPM 视角下的教学对函数认知水平变化的影响因素显示，这些问题串可以帮助学生跨越障碍，达成对函数概念的深入理解。

5.3 依据历史阶段，编制研究工具

随着数学史融入数学教学受到越来越多数学教育研究者的重视，需要更多的实证研究证据尤其是质性数据说明数学史在数学教育中的作用[19]。为了进一步规范研究方法，需要基于一定的理论基础，开发合适的研究工具。

在 HPM 视角下数学概念教学的课堂效果评价方面，可以通过划分数学概念的历史发展阶段制定学生数学概念理解水平，从而编制适当的问卷以及访谈提纲，检测学生在认知方面的理解水平的变化并探明其影响因素，最后建立依托实证研究的 HPM 视角下数学概念教学的课堂评价效果评价体系。

参考文献

[1] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017 (01): 35-41.

[2] Wang, X., Qi, C., Wang, K. A categorization model for educational values of the history of mathematics [J]. *Science & Education*, 2017, 26: 1029–1052.

[3] 沈中宇, 邹佳晨, 汪晓勤. ICME-13 之 HPM 专题研究综述[J]. 数学教育学报, 2017, 26 (05): 71-76.

[4] 曾国光. 中学生函数概念认知发展研究[J]. 数学教育学报, 2002, 11 (2): 99-102.

[5] 贾丕珠. 函数学习中的六个认知层次[J]. 数学教育学报, 2004, 13 (3): 79-81.

[6] 陈蓓. 利用 SOLO 分类法探究学生函数概念理解水平[J]. 数学教育学报, 2009, 18 (2): 35-38.

[7] 濮安山, 史宁中. 从 APOS 理论看高中生对函数概念的理解[J]. 数学教育学报, 2007, 16

(2): 48-50.

[8] 任明俊, 汪晓勤. 中学生对函数概念的理解——历史相似性初探[J]. 数学教育学报, 2007, 16 (4): 84-87.

[9] 汪晓勤. 19 世纪中叶以前的函数解析式定义[J]. 数学通报, 2015, 54 (5): 1-7+12.

[10] Kleiner, I. Evolution of the function concept: A brief survey [J]. *College Mathematics Journal*, 1989, 20 (4): 282-300.

[11] 钟萍,汪晓勤. 函数概念:基于历史相似性自然过渡[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2016 (02): 62-68.

[12] 关嘉欣, 汪晓勤. 19 世纪末 20 世纪初美国初等代数教科书中的函数概念[J]. 数学通报, 2015, 54 (11): 10-14.

[13] Kjeldsen, T., Petersen, P. Bridging History of the Concept of Function with Learning of Mathematics: Students' Meta-Discursive Rules, Concept Formation and Historical Awareness [J]. *Science & Education*, 2014, 23 (1): 29-45.

[14] Reed, B. M. The Effects of Studying the History of the Concept of Function on Student Understanding of the Concept [D]. Ohio: Kent State University, 2007: 273-282.

[15] Kjeldsen, T., Blomhøj, M. Integrating history and philosophy in mathematics education at university level through problem-oriented project work.[J]. *ZDM Mathematics Education*, 2009, 41 (1-2): 87-103.

[16] 鲍建生, 周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009: 109.

[17] 赵瑶瑶,张小明.关于历史相似性理论的讨论[J].数学教育学报,2008 (04): 53-56.

[18] 徐文彬,杨玉东. “本原性问题”及其在数学课堂教学中的应用[J]. 数学教育学报, 2005 (03): 14-16.

[19] Jankvist, U. T. On empirical research in the field of using history in mathematics education. ReLIME, 2009, 12 (1), 67–101.

活动信息

HPM 教学观摩与研讨活动

韩嘉业

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

2019 年 3 月 19 日，华东师范大学教师教育学院副院长汪晓勤教授带领 HPM 研究团队以及 HPM 工作室成员，来到了上海市建平中学、华东师范大学附属东昌中学参加 HPM 工作室教学观摩与研讨活动。本次活动是在汪晓勤教授及其 HPM 研究团队的指导下，以 HPM 的视角展现高一年级“余弦定理”、高二年级“二项式定理”的课堂教学。“余弦定理”授课教师为上海市建平中学的杜金金老师，“二项式定理”授课教师为华东师范大学附属东昌中学的向荣老师。

在“余弦定理”的课堂上，杜老师首先带领学生探究“已知三角形的三边，判别三角形的形状”问题，回顾勾股定理，并在此基础上类比猜想对于一般的三角形，是否三边平方之间也存在着某种关系。杜老师运用几何画板作图，根据欧几里得（Euclid，约 325BC-265BC）在《几何原本》中给出的几何模型证明勾股定理，类比探索一般三角形中边与角的等量关系，得到余弦定理的表达式。然后在一般三角形中，建立平面直角坐标系，利用两点间距离公式证明余弦定理。接着杜老师从对象、结构、作用、表述和联系五个方面分析余弦定理，完成定理在学生心中的固化。随后通过三个例题，展现余弦定理在数学问题和实际问题中的应用。最后，杜老师小结了这堂课上余弦定理的研究过程，并介绍了余弦定理和正弦定理之间的互化和联系。

杜老师课堂教学

“余弦定理”课后研讨

课后，杜老师与 HPM 研究团队、HPM 工作室成员进行了深入的交流与探讨。杜老师详细阐述了他在备课过程中的心路历程，以及在试讲课后他对教学设计做出的修改，并反思了不足。大家轮流发言，一致肯定了杜老师的教学设计。其中，汪老师特别提到介绍余弦定理和正弦定理之间的互化和联系是本节课的亮点，并向大家讲解了课堂引入过程中体现的历史相似性。在研讨过程中，大家认为杜老师的教学设计达成了 HPM 教育价值中的知识之谐、方法之美、文化之魅、能力之助和德育之效，缺少了探究之乐，希望杜老师将来能留出一些时间让学生自主探究。

在“二项式定理”的课堂上，向老师从学生熟悉的杨辉三角（贾宪三角）切入，讲授数学史的相关内容，引出主题。随后向老师展示了这节课的学习目标，并把它与学生课前预习后提出的疑问做了对应。接着向老师让学生以小组为单位讨论二项式定理在正整数指数下的一般展开式，整堂课在师生对话交流中顺利展开。在探究新知的过程中，向老师通过微视频展示了二项式定理产生的必要性，并借助信息技术展示学生讨论的成果，从而得到二项式定理在正整数指数下的一般展开式。然后向老师通过两个例题让学生体会二项式定理中通项公式的应用，并启发学生思考三项展开式的情形。最后，向老师让学生围绕知识之谐、探究之乐、文化之魅、德育之效、能力之助等关键词来谈谈学习体会。

向老师课堂教学

“二项式定理”课后研讨

课后，向老师和本校听课教师、HPM 研究团队、HPM 工作室成员进行了深入的交流与探讨。向老师首先介绍了备课的过程和设计的想法，并反思了不足。然后大家轮流发言，一致肯定了问题提出是数学教育非常重要的一个环节。在向老师平时课堂教学的培养和熏陶之下，东昌中学的学生在问题提出方面具有很大的潜力。汪老师认为，本节课最大的亮点是让学生从 HPM 六大价值来总结收获，这是 HPM 教学实践的一次创新。

部分成员合影留念

短短一天的时间，我们走进了浦东新区两所高中，听到了两节优秀的 HPM 课例，两节课中亮点层出不穷，引人入胜。无论是杜老师带领学生探索余弦定理的表达式，还是向学生揭示余弦定理和正弦定理之间的互化与联系，抑或是向老师鼓励学生提出问题，以及引导学生从 HPM 六大价值来总结收获，都是值得我们学习的新思路。通过不断地观摩与研讨，HPM 工作室成员的课例一定会越来越精彩！