HPM 视角下“十字相乘法”的教学

李德虎[1]　余庆纯[2]

(1. 上海市新杨中学，上海　200331；2. 华东师范大学数学科学学院，上海　200241)

1　引言

“十字相乘法”是沪教版初中七年级数学教科书第九章“整式”第五节“因式分解”的第三课时的内容，在掌握提取公因式法、公式法等方法的基础上进一步学习十字相乘法.《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》指出：理解因式分解的意义，掌握提取公因式、分组分解、公式法和二次项系数为 1 时的十字相乘法等因式分解的基本方法[1]. 在现行沪教版、人教版和苏科版教科书中，“十字相乘法”的内容呈现互有不同(表 1). 苏科版与沪教版教科书中，“十字相乘法”为正文学习内容，而人教版教科书则仅在“阅读与思考”部分介绍了这种方法. 在引入方式上，人教版、沪教版教科书均以“整式乘法的反向变式”引入“十字相乘法”，并且借助“十字交叉线”进行因式分解与验算，突出因式分解与整式乘法的互逆性. 该引入方式略显生硬，未能突显学习“十字相乘法”的必要性. 苏教版教科书借助拼图活动创设问题情境引入，引人思考.

$$\frac{a}{b^{n+1}+n^nk^{n+1}}+\frac{b}{c^{n+1}+n^nk^{n+1}}+\frac{c}{d^{n+1}+n^nk^{n+1}}+\frac{d}{a^{n+1}+n^nk^{n+1}}$$

$$\geqslant \frac{1}{n^nk^{n+1}}(a+b+c+d)-\frac{1}{(n+1)n^nk^{n+2}}(ab+bc+cd+da)$$

$$=\frac{2nk}{n^nk^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)n^nk^{n+2}}(a+c)(b+d)$$

$$\geqslant \frac{2nk}{n^nk^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)n^nk^{n+2}}\left[\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right]^2$$

$$=\frac{2}{n^{n-1}k^n}-\frac{n^2k^2}{(n+1)n^nk^{n+2}}$$

$$=\frac{n+2}{(n+1)n^{n-1}k^n}.$$

其中等号成立当且仅当 $\begin{cases}a=b=nk,\\c=d=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b=0,\\c=d=nk\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=d=nk,\\c=b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=d=0,\\c=b=nk.\end{cases}$

根据这个一般命题，我们可以列出无数特殊的命题. 例如：

当 $n=2$，$k=1$ 时，$2nk=4$，$\frac{n+2}{(n+1)n^{n-1}k^n}=\frac{2}{3}$，得到最初的命题 1；

当 $n=4$，$k=\frac{1}{2}$ 时，$2nk=4$，$\frac{n+2}{(n+1)n^{n-1}k^n}=\frac{3}{10}$，得到如下的命题 5：

命题 5　如果非负实数 a、b、c、d 满足 $a+b+c+d=4$，那么 $\frac{a}{b^5+8}+\frac{b}{c^5+8}+\frac{c}{d^5+8}+\frac{d}{a^5+8}\geqslant\frac{3}{10}$.

比较上述条件相同而结论相异的两个命题，颇有意味.

参考文献

[1] 2017 年 IMO 中国国家集训队教练组. 走向 IMO · 数学奥林匹克试题集锦[M]. 上海：华东师范大学出版社，2017.

表 1　“十字相乘法”在不同版本数学教科书中的内容比较

版本	教科书位置	引入方式	十字交叉线
人教版	阅读与思考	整式乘法的反向变式	有
苏科版	正文	拼图活动	无
沪教版	正文	整式乘法的反向变式	有

研究发现，教师常以整式乘法的逆向运算来引入十字相乘法与十字交叉线，未能揭示学习十字相乘法的必要性与引入十字交叉线的重要性，且部分学生对十字相乘法存在一知半解的认知，不能很好地掌握十字相乘法[2]. 鉴于此，我们希望从 HPM 的视角，重新设计“十字相乘法”教学内容，并付诸实施，拟定的教学目标如下：

（1）通过阅读因式分解的历史资料与动手拼图活动，了解历史上二次三项式因式分解的多元方法，发现和提出形如 x^2+px+q 二次三项式因式分解问题，提升问题提出的能力；

（2）观看 HPM 微视频，借鉴待定系数法、多项式的竖式乘法，理解并掌握 x^2+px+q 二次三项式因式分解的十字相乘法，认识十字交叉线的重要性；

（3）经历类比学习，了解从二次项系数为 1 逐步过渡到二次项系数不为 1 的二次三项式因式分解，认识十字相乘法的历史演变与重要作用.

2　数学史料及其运用

通过史料研究，发现在 1830－1930 年的美国早期代数教科书中，多项式的乘法常见借助竖式乘法的形式进行代数运算，比如多项式 $x+a$ 乘以 $x+b$（图 1）[4]，其类似于两位数与两位数的竖式乘法.

$$\begin{array}{llll} & x+a & & \\ & \underline{x+b} & & \\ & x^2+ax & & \\ & \underline{\quad\quad bx} & \underline{\quad +ab} & \\ & x^2+(a+b)x+ab & & \end{array}$$

图 1

在美国早期代数教科书中可以发现：对于形如 x^2+px+q 的因式分解，早期教科书给出了配方法、试算法、十字相乘法等方法；对于形如 $ax^2+px+q(a\neq 1)$ 的因式分解，常见有试算法、拆分一分组分解、加减法、换元法、十字相乘法等多元方法[5]. 可见，十字相乘法在二次三项式的因式分解中扮演重要的角色.

1888 年，谢尔顿（Sheldon）在代数教科书中对 $10x^2+19x+6$ 因式分解时，思考 $10x^2$ 最可能的因式是 $5x$ 和 $2x$，6 最可能的因数是 2 和 3，又考虑其交叉相乘再相加后为 $19x$，因此得出多项式 $5x+2$ 乘以多项式 $2x+3$（如图 2）[6]. 同年，尼科尔森（Nicholson）在对 $6x^2+5x-4$ 因式分解时，借助竖式乘法的形式给出了类似运算过程（如图 3）[7]. 可见，十字相乘法在二次项系数不为 1 的二次三项式的因式分解中作用略胜一筹.

$$\begin{array}{l} 5x+2, \\ 2x+3. \end{array}$$

图 2

$$\begin{array}{r} 3x+4 \\ \underline{2x-1} \\ 8x \\ \underline{-3x} \\ +5x \end{array}$$

图 3

十字交叉线的起源可以追溯到 1896 年吉雷特（Gilet）的《初等代数》. 书中，作者采用交叉线进行因式分解，巧妙地将二次项系数为 1 与二次项系数不为 1 的情形统一起来，便于因式分解与验算，如多项式 $x^2-2x-63$（图 4）与 $6x^2+7x-20$（图 5）[8].

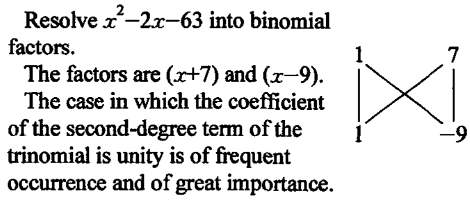

Resolve $x^2-2x-63$ into binomial factors.
The factors are $(x+7)$ and $(x-9)$.
The case in which the coefficient of the second-degree term of the trinomial is unity is of frequent occurrence and of great importance.

图 4

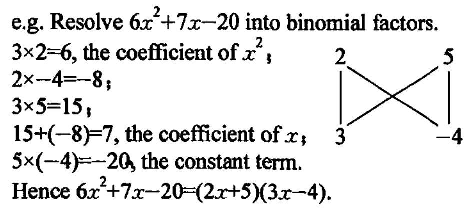

e.g. Resolve $6x^2+7x-20$ into binomial factors.
$3\times2=6$, the coefficient of x^2;
$2\times-4=-8$;
$3\times5=15$;
$15+(-8)=7$, the coefficient of x;
$5\times(-4)=-20$, the constant term.
Hence $6x^2+7x-20=(2x+5)(3x-4)$.

图 5

1899年,费希尔(Fisher)和施瓦特(Schwatt)给出分解 $6x^2+19x+10$ 的八对因式(图6),只有最后一对交叉相乘得到 $19x$,故 $6x^2+19x+10=(2x+5)(3x+2)$[5]. 1902年,乔斯林(Jocelyn)借助交叉线进行多项式 $10x^2-11x-6$ 的因式分解(图7)[9]. 1919年,霍克斯(Hawkes)以实例明确突出十字相乘法与竖式乘法的重要联系(图8)[10].

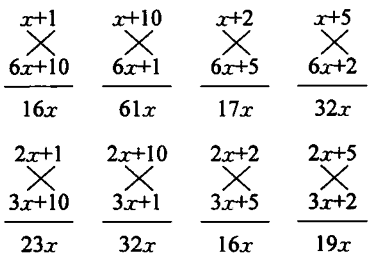


图6

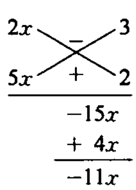


图7

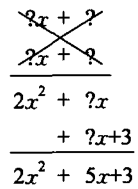


图8

基于史料分析,十字相乘法本质上源于多项式的竖式乘法运算,且在运算过程中保留十字交叉线与未知数,这与沪教版教科书的内容基本一致. 另一方面,十字交叉线的诞生具有重要的历史意义:辅助形如 $ax^2+px+q(a\neq1)$ 的二次三项式进行因式分解与验算,凸显十字交叉线的必要性及重要性,回应为什么要借助十字交叉线进行因式分解的疑问.

3　教学设计与实施

根据史料,本节课教学设计分为发现问题、提出问题、解决问题、讲解新知、应用拓展和课堂小结六个部分.

课前,教师将"因式分解"的相关学习资料(如文献[5])分享到电子教材中,通过AI Class云课堂平台的云笔记、流转笔记等功能推送给每位学生,便于学生课前自主预习.

同时,为充分发挥学生的主体性,在课前开展小组合作的拼图活动. 每个小组各有一个面积为 $x^2(x\neq1)$ 的A型正方形纸片,若干个面积为 x 的B型长方形纸片,若干个面积为1的C型正方形纸片(图9),小组合作探究:如何拼接

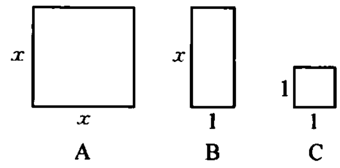


图9

一个面积大于 x^2 的大长方形. 接着,写出大长方形的长、宽与面积的代数式,并且尝试借助竖式乘法进行验算.

3.1　发现问题

师:通过拼图活动,同学们能否拼出一个面积大于 x^2 的大长方形? 各小组展示一下.

生:(各小组展示拼图)可以.

师:所拼成的大长方形的长、宽与面积各是多少?

生:我们组拼出的大长方形,长为 $(x+4)$,宽为 $(x+2)$(图10),面积为 x^2+6x+8. 根据长方形的面积公式,用 $(x+4)(x+2)=x^2+6x+8$ 来表示.

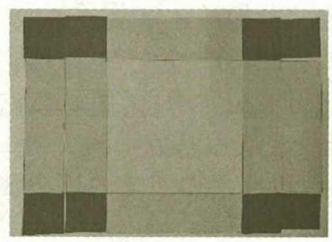


图10

师:认真观察式子,反过来看,你能发现什么?

生:(思考)x^2+6x+8 可以因式分解为 $(x+4)(x+2)$.

师:很好,能用式子表达吗?

生:$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$.

师:很好! 其他小组有新拼法或新发现吗?

生:我们拼出来的大长方形面积为 x^2+3x+2,长为 $(x+2)$,宽为 $(x+1)$(图11),有 $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$.

生:我们拼出来的大长方形面积为 x^2+5x+6,长为 $(x+3)$,宽为 $(x+2)$(图12),有

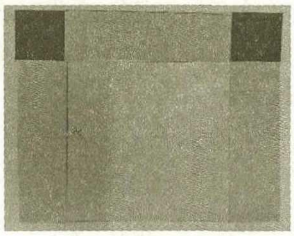


图 11

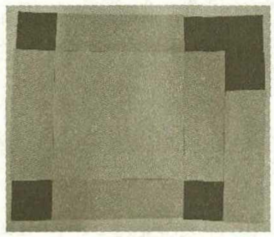


图 12

$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$.

师：很好！通过拼图活动，同学们发现了什么？

生：发现 x^2+6x+8，x^2+5x+6，x^2+3x+2 的因式分解.

设计意图：通过拼图活动与课堂分享，学生思考所拼成的大长方形的面积与长、宽之间的代数关系，发现了一些特殊的二次三项式的因式分解，为后面探究形如 x^2+px+q 的二次三项式因式分解问题做铺垫.

3.2　提出问题

接着，教师引导学生思考 x^2+6x+8 的因式分解方法，学生回顾阅读资料中呈现的方法，如提公因式法、公式法（平方差公式、完全平方差公式）和分组分解法等，体会历史上二次三项式因式分解方法的多样性与灵活性. 然而学生却意外发现：这是新的一类二次三项式的因式分解，且这类二次三项式不能直接利用之前所学的方法进行分解.

同时，同学们也发现：拼图活动中有一个小组无法拼出一个完整的大长方形，引发思考. 教师顺势提问：对于形如 x^2+px+q（p、q 为整数）的二次三项式，如何进行因式分解？

3.3　解决问题

播放 HPM 微视频，介绍笛卡儿与待定系数法，启发学生思考. 接着，教师引导学生利用待定系数法进行探究，得出分解规律，并且尝试分解 x^2-5x+6 并进行验算. 其中，有一部分学生借助多项式的竖式乘法进行分解与验算.

师：利用待定系数法，探究当 p、q 各满足什么条件，x^2+px+q 可以分解成为 $(x+a)(x+b)$？请同学们在学案上自主探究，保留因式分解的过程与结果，并通过 AI Class 云课堂平台进行线上实时分享.

师：大家是如何求解呢？

生：因为 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab=x^2+px+q$，可以得出 $p=a+b$，$q=ab$.

生：也可以借助多项式的竖式乘法来因式分解.

$$\begin{array}{llll} & x+a & & \\ & x+b & & \\ \hline x^2+ax & & & \\ & bx & & +ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab & & & \end{array}$$

师：不错！如果反过来，也可以得出这个规律？

生：可以.

师：很好！我们发现 $x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ 中，有一次性系数 $p=a+b$、常数项系数 $q=ab$ 的分解规律.

师：不错！现在请同学们尝试分解 x^2-5x+6，并思考如何进行验算.

生：x^2-5x+6 分解为 $(x-2)(x-3)$.

师：你是如何进行分解？

生：把 6 拆为 $(-2)\times(-3)$，$(-2)+(-3)=-5$，因此 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

师：很好！你能说说为什么先拆常数项系数 6，而不是一次性系数 -5 呢？

生：因为常数项系数是根据乘积 $q=ab$ 来拆分，可能性比较少；而一次性系数是根据加减 $p=a+b$ 来拆分，可能性比较多，所以我先拆常数项系数 $6=(-2)\times(-3)$.

师：如何验算拆分是正确的？

生：根据一次项系数来验算，$(-2)+(-3)=-5$.

师：很好，总结得很到位！一般来说，对二次三项式 x^2+px+q（p、q 为整数）进行因式分解时，也可以先拆分常数项系数，再根据常数项系数进行验算. 同学们，能否用简短的语言总结呢？

生:拆分常数项,验算一次项.

师:很棒!同学们还有其他新发现吗?

生:还可以借助多项式的竖式乘法进行验算.

教师顺势引导学生使用十字交叉线进行分解与验算(如图13),进一步小结十字交叉线不仅可以“交叉相乘再相加”来验算一次项系数,而且辅助因式分解.

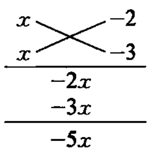
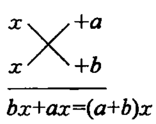


图13　学生利用竖式乘法引出十字交叉线

设计意图:通过探究、解决问题环节,让学生经历从一般到特殊,再从特殊到一般的过程,培养学生的逻辑推理能力.借助待定系数法,探究得到二次三项式因式分解 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$ 中一次性系数 $p=a+b$,常数项系数 $q=ab$ 的分解规律.同时,通过多项式的竖式乘法进行分解与验算,自然引出十字交叉线.

3.4　讲解新知

师:利用十字交叉线来分解系数,把二次三项式分解因式的方法叫做十字相乘法.一般地,$x^2+px+q=x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ 可以用十字交叉线表示.



师:现在我们一起来归纳二次三项式分解因式的要点,大家觉得有哪些?

生:拆分常数项,验算一次项.

师:很好!当 $q>0$ 或 $q<0$ 时,a、b 同号还是异号?

生:当 $q>0$ 时,a、b 同号;当 $q<0$ 时,a、b 异号.

师:不错!当 $q>0$ 时,a、b 同号,且 a、b 的符号与 p 的符号相同;当 $q<0$ 时,a、b 异号,且绝对值大的因数与 p 的符号相同.

此外,师生一起归纳小结:

(1)借助十字交叉线来分解系数的书写格式的规律:竖分横积.

(2)完全平方公式分解是十字相乘法的一类特殊情形,如 $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$.

3.5　应用拓展

通过练习巩固新知、拓展提升.

例1　分解下列因式:(1) $x^2-7x+12$;(2) $x^2-4x-12$;(3) $x^2+8x+12$;(4) $x^2-11x-12$.

例2　请同学们尝试自主出题:形如二次三项式 x^2+px+q 的因式分解.接着将题目上传至AI Class云课堂平台的班级作品库文件夹1,尝试解答其他同学的题目,并将解答题目及过程上传至班级作品库文件夹2.

例3　尝试分解因式 $3x^2+10x-8$.

3.6　课堂小结

师:通过本节课的学习,大家有什么收获?

生1:我们可以采用十字相乘法分解二次三项式 x^2+px+q.

生2:十字交叉线帮助验算,也帮助分解因式.

生3:笛卡尔是位伟大的数学家,他的待定系数法非常有用.

生4:当二次项系数不为1时,我们也可以尝试用十字相乘法进行分解因式.

通过小结,学生点明了本节课的核心内容——十字相乘法,让人惊喜的是学生指出十字交叉线的真正作用:不仅用于验算,而且也是尝试分解因式的重要手段.

4　学生反馈

基于本节课,笔者对班级学生进行了前、后测.在前测中,笔者通过问卷调查了解到:仅38%的学生曾了解过部分数学方法的历史发展,约82%的学生喜欢数学小故事,认为可以帮助理解数学方法.可见,学生对数学史融入数学方法的教学有一定的认知需求.

在后测中,笔者对全班36名学生进行问卷调查,并选择其中4名学生进行半结构式访谈,旨在了解学生对本节课内容的感想与建议.在问卷调查中,71%的学生表示通过课前学习资料的阅览,对历史上分解因式的方法有更加深刻的了解;81%的学生表示拼图活动有助于思考形如 x^2+px+q 二次三项式的因式分解问题;65%的学生表示微视频融入

课堂教学能帮助清楚理解待定系数法的数学思想;72%的学生能正确理解“十字交叉线”的重要意义.

在半结构式访谈中,多数学生认为解决二次三项式的因式分解问题具有多元方法,如提公因式法、公式法、分组分解法和十字相乘法,其中十字相乘法不仅可以化繁为简,而且帮助他们关注二次三项式与所分解的一次因式之间不同次项系数的关系,启发多角度理性思考事物之间的联系.其次,学生们均谈及待定系数法、多项式的竖式乘法对学习十字相乘法有重要的启示作用,有效地加强数学方法之间的相互联系.

此外,对于二次项系数不为1的因式分解的拓展问题(图14),学生们表示十字交叉线既可用于因式分解结果的检验,又可用于因式分解的尝试,可见学生能够将二次项系数为1的情形类比迁移到二次项不为1的情形.

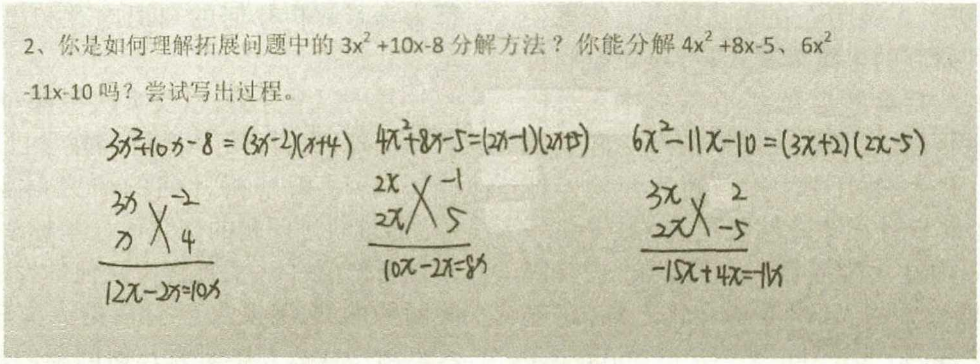


图14

5 结语

HPM视角下“十字相乘法”的教学,借鉴历史发展脉络,构建历史与现实的桥梁,展现数学史的多元价值.通过待定系数法启发学生探究 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$ 中一次性系数 $p=a+b$,常数项 $q=ab$ 的因式分解规律,利用多项式的竖式乘法自然引出十字交叉线,揭示其对因式分解与检验的重要作用,水到渠成地构建“知识之谐”.借助学习历史资料和HPM微视频,学生了解到二次三项式因式分解的多元方法、数学家笛卡儿与待定系数法等趣味历史,在应用中体会十字相乘法之妙,展现“方法之美”.在巩固新知过程中,学生经历十字相乘法的类比拓展,从二次项系数为1逐步过渡到二次项系数不为1的因式分解,培养学生逻辑推理的核心素养,达成“能力之助”.

此外,本节课融合数字教材、微视频、AI Class云课堂平台等教育信息技术,带动数学史内容的可视化呈现,促进了学生的自主学习,提高了课堂的教学效率.

参考文献

[1] 上海市教育委员会.上海市中小学数学课程标准(试行稿)[S].上海:上海教育出版社,2004.

[2] 杨杰.初中数学因式分解内容的教学分析[J].新课程(教师),2010(06):74.

[3] 郭志红.初中生因式分解学习情况的调查与研究[D].河北师范大学,2016.

[4] Wentworth G, Smith D E. Academic Algebra [M]. Boston: Ginn & Co., 1913.

[5] 汪晓勤.美国早期代数教科书中的“因式分解”内容[J].中学数学月刊,2016(11):36-39.

[6] Sheldon. Complete Algebra [M]. New York: Sheldon & Co., 1888.

[7] Nicholson J W. An Elementary Algebra [M]. New Orleans: F. F. Hansell & Brothers, 1888.

[8] Gillet J A. Elementary Algebra [M]. New York: Henry Holt & Co., 1896.

[9] Jocelyn L P. An Algebra for High Schools and Academies [M]. Philadelphia: Sheldon& Co., 1902.

[10] Hawkes H E. Complete School Algebra [M]. Boston: Ginn & Co., 1919.