上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2017 年第 6 卷第 2 期

康托尔

（Moritz Benedikt Cantor, 1829~1920）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首语

康托尔于 1829 年 8 月 23 日出生于德国曼海姆。父亲艾萨克·贝涅狄克·康托尔来自阿姆斯特丹；母亲内丽·施纳伯尔（Nelly Schnapper）是一位货币交换商的女儿。

康托尔先是接受私人教师的启蒙教育，在曼海姆读中学。1848 年，他进入德国最古老的大学——海德堡大学学习，施维恩（F. F. Schweins, 1780~1856）和阿尔内特（A. Arneth, 1802~1858）是他的数学老师。其中，前者后来成为他的博士生导师，后者则是一位数学史家，于 1852 年出版《纯粹数学的历史》。1849~1851 年，他进入格丁根大学学习，高斯（C. F. Gauss, 1777~1855）教授数学与天文学，韦伯（W. E. Weber, 1804~1891）教授物理学，斯特恩（M. Stern, 1807~1894）教授数学。1851 年，他在海德堡大学获博士学位。

海德堡大学校徽

海德堡大学图书馆主建筑（建于 1905 年）

施维恩

高斯

斯特恩

韦 伯

博士毕业后，他没有像同龄人那样马上参加工作（大多去中学任教），而是于翌年夏赴柏林继续学习，听数学家狄利克雷（L. Dirichlet, 1805~1859）和斯坦纳（J. Steiner, 1796~1863）的课。1853 年，他回到海德堡大学，成为一名无薪讲师。

康托尔学的是纯数学，做的主要是纯数学研究，1855 年以前并无迹象表明他会把研究

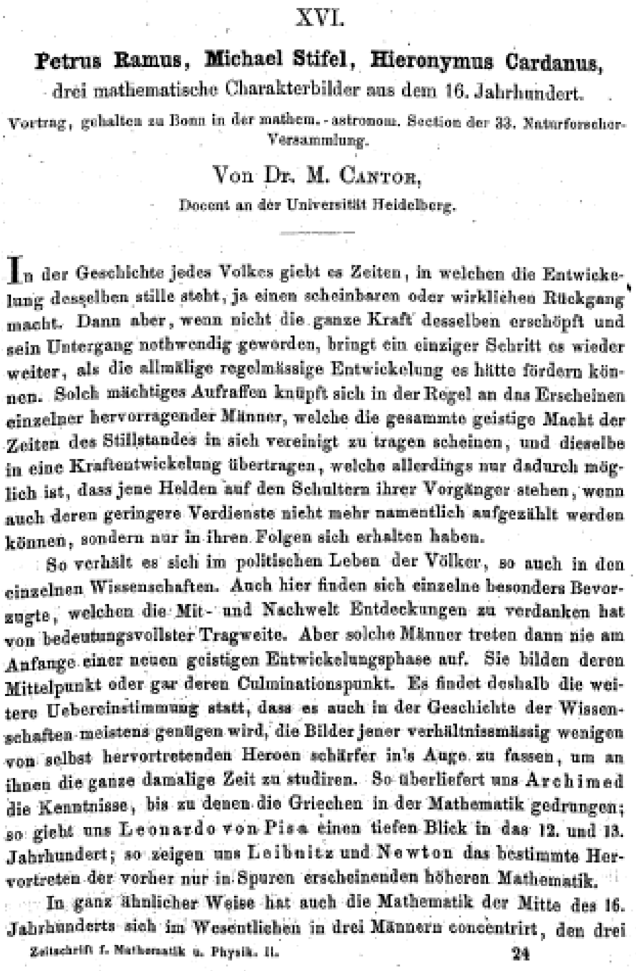
狄利克雷

斯坦纳

沙 勒

贝特朗

兴趣转向数学史。1856 年，他在《数学物理杂志》上发表了第一篇数学史论文——“今日数码在欧洲的传入”。1857 年，在波恩举行的一次科学会议上，他报告了一篇关于 16 世纪数学家拉缪斯（P. Ramus, 1515~1572）、斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487~1567）和卡丹（G. Cardan, 1501~1576）的论文，深受好评。这次会议促使康托尔下决心继续研究数学史。康托尔对后学的提携、宽容与鼓励，或许与自己年轻时候的经历有关吧！



XVI.

Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus,

drei mathematische Charakterbilder aus dem 16. Jahrhundert.

Vortrag, gehalten zu Bonn in der mathem.-astronom. Section der 33. Naturforscher-Versammlung.

Von Dr. M. Cantor,

Docent an der Universität Heidelberg.

In der Geschichte jedes Volkes giebt es Zeiten, in welchen die Entwickelung desselben stille steht, ja einen scheinbaren oder wirklichen Rückgang macht. Dann aber, wenn nicht die ganze Kraft desselben erschöpft und sein Untergang nothwendig geworden, bringt ein einziger Schritt es wieder weiter, als die allmälige regelmässige Entwickelung es hätte fördern können. Solch mächtiges Aufraffen knüpft sich in der Regel an das Erscheinen einzelner hervorragender Männer, welche die gesammte geistige Macht der Zeiten des Stillstandes in sich vereinigt zu tragen scheinen, und dieselbe in eine Kraftentwickelung übertragen, welche allerdings nur dadurch möglich ist, dass jene Helden auf den Schultern ihrer Vorgänger stehen, wenn auch deren geringere Verdienste nicht mehr namentlich aufgezählt werden können, sondern nur in ihren Folgen sich erhalten haben.

So verhält es sich im politischen Leben der Völker, so auch in den einzelnen Wissenschaften. Auch hier finden sich einzelne besonders Bevorzugte, welchen die Mit- und Nachwelt Entdeckungen zu verdanken hat von bedeutungsvollster Tragweite. Aber solche Männer treten dann nie am Anfange einer neuen geistigen Entwickelungsphase auf. Sie bilden deren Mittelpunkt oder gar deren Culminationspunkt. Es findet deshalb die weitere Uebereinstimmung statt, dass es auch in der Geschichte der Wissenschaften meistens genügen wird, die Bilder jener verhältnissmässig wenigen von selbst hervortretenden Heroen schärfer in's Auge zu fassen, um an ihnen die ganze damalige Zeit zu studiren. So überliefert uns Archimed die Kenntnisse, bis zu denen die Griechen in der Mathematik gedrungen; so giebt uns Leonardo von Pisa einen tiefen Blick in das 12. und 13. Jahrhundert; so zeigen uns Leibnitz und Newton das bestimmte Hervortreten der vorher nur in Spuren erscheinenden höheren Mathematik.

In ganz ähnlicher Weise hat auch die Mathematik der Mitte des 16. Jahrhunderts sich im Wesentlichen in drei Männern concentrirt, den drei

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. II. 24

康托尔关于 16 拉缪斯、斯蒂菲尔和卡丹的论文

康托似乎有着永远满足不了的学习欲望。不久，他远赴巴黎，继续深造，结识了数学家沙勒（M. Chasles, 1793~1880）和贝特朗（J. Bertrand, 1822~1900），并与之成为挚友。沙勒

也是一位著名的数学史家，早在 20 年前，他就出版了一部数学史著作——《几何方法的起源与发展历史概述》(1837)。沙勒鼓励康托尔在《科学院会议纪要》上发表数学史论文，并将康托尔讨论古希腊数学的信函发表在《纪要》上。


APERÇU HISTORIQUE

DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE,

DE CELLES QUI SE RAPPORTENT A LA GÉOMÉTRIE MODERNE,

MÉMOIRE DE GÉOMÉTRIE

PAR M. CHASLES,

BRUXELLES,

M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE.

1837.


Die

Geschichte der reinen Mathematik

in ihrer Beziehung

zur

Geschichte der Entwickelung des menschlichen Geistes

von

A. Arneth,

Professor in Heidelberg.

Aus der

„Neuen Encyklopädie für Wissenschaften und Künste"

besonders abgedruckt.

Stuttgart.

Verlag der Franckh'schen Buchhandlung.

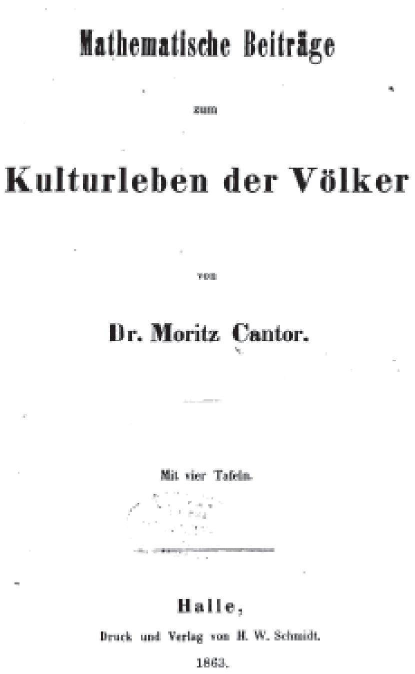
1852.

《几何方法的起源于发展历史概述》扉页　　　　　　《纯粹数学的历史》扉页

1860 年，他开始讲授数学史课程。这门课常常连开三学期，可见其内容之丰富。听课的学生中有后来成为著名数学史家的冈特（S. Gunther, 1848~1923）。1863 年，他出版第一部学术著作——《数学对一个民族文化生活的贡献》(*Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*)，并晋升为海德堡大学临时教授（extraordinary professor）。揭示数学在一个民族文化生活中以及国家之间的交流中的地位，是康托尔研究数学史的重要目标。事实上，他后来撰写《数学史讲义》时也不忘这一初衷。1865 年，他出版第二部学术著作——《欧几里得及其世纪》(*Euklid und sein Jahrhundert*)，总结了古希腊数学家欧几里得、阿基米德、埃拉托色尼、阿波罗尼斯的数学工作。

从数学到数学史，不断学习、不断深造、不断研究，青年时代的康托尔似乎没有时间顾及个人问题。直到 1868 年 8 月 23 日，在 39 岁生日，康托尔与来自法兰克福的蒂丽·格罗斯沃尔（Tilly Gerothwohl, 1847~1873）喜结连理，他们有一儿一女。

1875 年，康托尔出版第三部学术著作——《罗马的土地丈量》(*Die Römischen Agrimensoren*)。尽管罗马人对数学鲜有贡献，但康托尔发现，中世纪罗马土地丈量员对古埃及和古希腊实用几何方法在欧洲的传播起着十分重要的作用。1877 年，康托尔晋升为



Mathematische Beiträge

zum

Kulturleben der Völker

von

Dr. Moritz Cantor.

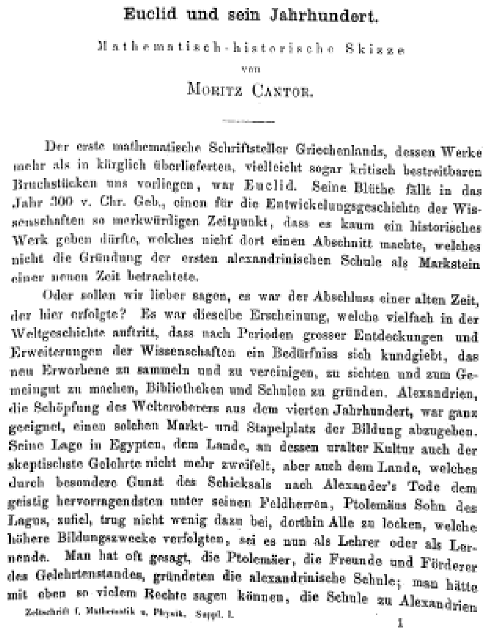
Mit vier Tafeln.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1863.

《数学对人类文化生活的贡献》扉页



Euclid und sein Jahrhundert.

Mathematisch-historische Skizze

von

Moritz Cantor.

Der erste mathematische Schriftsteller Griechenlands, dessen Werke mehr als in kürglich überlieferten, vielleicht sogar kritisch bestreitbaren Bruchstücken uns vorliegen, war Euclid. Seine Blüthe fällt in das Jahr 300 v. Chr. Geb., einen für die Entwickelungsgeschichte der Wissenschaften so merkwürdigen Zeitpunkt, dass es kaum ein historisches Werk geben dürfte, welches nicht dort einen Abschnitt machte, welches nicht die Gründung der ersten alexandrinischen Schule als Markstein einer neuen Zeit betrachtete.

Oder sollen wir lieber sagen, es war der Abschluss einer alten Zeit, der hier erfolgte? Es war dieselbe Erscheinung, welche vielfach in der Weltgeschichte auftritt, dass nach Perioden grosser Entdeckungen und Erweiterungen der Wissenschaften ein Bedürfniss sich kundgiebt, das neu Erworbene zu sammeln und zu vereinigen, zu sichten und zum Gemeingut zu machen, Bibliotheken und Schulen zu gründen. Alexandrien, die Schöpfung des Welteroberers aus dem vierten Jahrhundert, war ganz geeignet, einen solchen Markt- und Stapelplatz der Bildung abzugeben. Seine Lage in Egypten, dem Lande, an dessen uralter Kultur auch der skeptischste Gelehrte nicht mehr zweifelt, aber auch dem Lande, welches durch besondere Gunst des Schicksals nach Alexander's Tode dem geistig hervorragendsten unter seinen Feldherren, Ptolemäus Sohn des Lagus, zufiel, trug nicht wenig dazu bei, dorthin Alle zu locken, welche höhere Bildungszwecke verfolgten, sei es nun als Lehrer oder als Lernende. Man hat oft gesagt, die Ptolemäer, die Freunde und Förderer des Gelehrtenstandes, gründeten die alexandrinische Schule; man hätte mit eben so vielem Rechte sagen können, die Schule zu Alexandrien

Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. Suppl. I.

1

《欧几里得及其世纪》书影

DIE

RÖMISCHEN AGRIMENSOREN

UND IHRE STELLUNG

IN DER

GESCHICHTE DER FELDMESSKUNST.

EINE

HISTORISCH-MATHEMATISCHE UNTERSUCHUNG

VON

DR. MORITZ CANTOR.

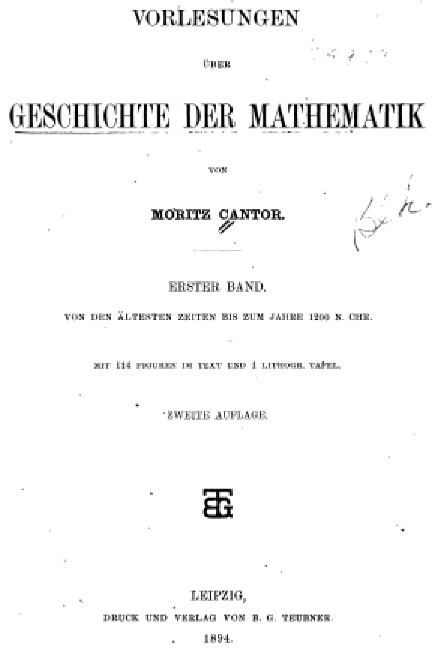
MIT 5 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1875.

《罗马的土地丈量》扉页



VORLESUNGEN

ÜBER

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

MORITZ CANTOR.

ERSTER BAND.

VON DEN ÄLTESTEN ZEITEN BIS ZUM JAHRE 1200 N. CHR.

MIT 114 FIGUREN IM TEXT UND 1 LITHOGR. TAFEL.

ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

《数学史讲义》扉页

荣誉教授（honorary professor）。

1856 ~1860 年间，康托尔担任《化学、物理与数学评论》的联合编辑；从 1860 年开始，担任《数学与物理杂志》（*Zeitschrift für Mathematik und Physik*）文献部分的联合编辑；1877~1899 年，他担任《数学史论文集》（*Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*）的主编。他在期刊上发表了许多数学与科学史论文。1875 年，他为《德意志人物传记》撰写了大多数的数学家传记。

1880 年开始，康托尔陆续出版《数学史讲义》（*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*）各卷，内容如下：

第 1 卷（1880 年）：1200 年以前的数学；

第 2 卷（1892 年）：1200 年~1668 年间的数学；

第 3 卷（1894 年）：1668~1758 年间的数学；

第 4 卷（1908 年）：1759~1799 年间的数学。

岁月匆匆，人生易老，在第 3 卷出版的时候，康托尔已经六十五岁了。对于人们期待的第 4 卷的撰写，康托尔深感力不从心。1904 年，在海德堡召开的第三届国际数学家大会上，一个合作编写计划诞生了，来自不同国家的 9 位学者（V. Bobynin, A. von Braunmühl, F. Cajori, S. Günther,V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti, C. R. Wallner）共同承担第四卷的编写工作，各负责一个专题，康托尔任主编。

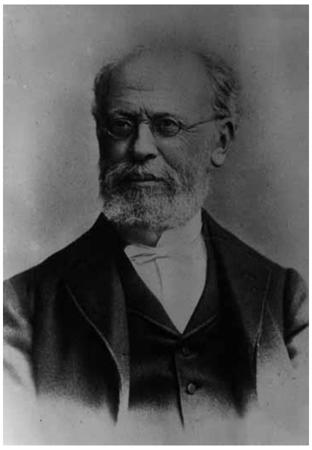
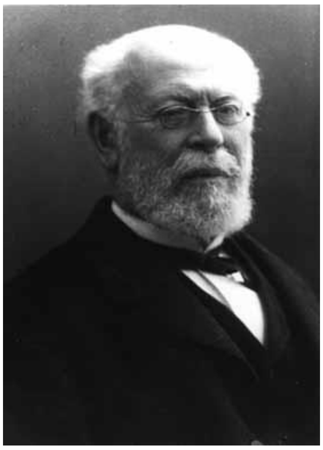
《数学史讲义》出版后，取代了法国数学史家蒙蒂克拉（J. É. Montucla, 1725~1799）的经典著作《数学史》的地位，成为 19 世纪里程碑式的标准数学史著作，影响巨大，奠定了数学史作为一门学科的地位。苏格兰数学家吉布逊（G. A. Gibson, 1858~1930）评价此书道：“自不待言，这部历史在很多年间必将是一部数学史的标准著作，在完整性、准确性以及清晰性上无与伦比，就所涵盖的历史时期而言，它必将是一本永久性的参考书。”[1]美国数学史家史密斯（D. E. Smith, 1860~1944）称，此书是“迄今为止出版的关于数学通史的最伟大的著作”[2]。卡约黎（F. Cajori, 1859~1930）指出，此书是 19 世纪最全面、最可靠的数学通史，并称康托尔为“19 世纪的蒙蒂克拉”[3]。

在 1899 年，为庆祝康托尔七十岁生日而编辑出版的《数学史论文集》第 9 卷上，另一位德国著名数学史家库尔兹（M. Curtze, 1837~1903）编写了一份康托尔的论著目录，目录长达 26 页。

1900 年，在巴黎召开的国际数学家大会上，康托尔作为当时世界上最有影响的数学史家，应邀作了题为“关于数学编史学”的报告。康托尔的法文说得很流利，听众中有两位法国人，其中一位断言康托尔一定是法国人，因为他不相信一名外国人能把法语讲得这么好；而另一位则坚称康托尔是土生土长的德国人。他们开始打赌，并在会后向康托尔求证。

1908 年，康托晋升为正教授。1913 年退休，成为名誉教授。

美国著名数学史家史密斯三十岁那年曾打算在海德堡大学进修数学史，他去了康托尔家，

五十三岁时的康托尔　　七十岁时的康托尔　　八十岁时的康托尔

受到热情的鼓励。在此后的二十年间，史密斯多次登门拜访。最后一次是在 1910 年，那时的康托尔已至垂暮之年，双目几乎失明，在史密斯告别的时候，康托尔把手指向书架，说："这些是我的书，但我已经看不见了。"[2]令人唏嘘不已。卡约黎于 1915 年 5 月 2 日拜访八十六岁高龄的康托尔。虽然看不见客人，但听力尚好，思维清晰。他聊到自己的学生岗特和布劳缪尔（A. von Braunmühl, 1853~1908），聊到英年早逝的数学史家汉克尔（H. Hankel, 1839~1873），聊到坦纳里（P. Tannery, 1843~1904）关于芝诺悖论的讨论，聊到魏塞尔（C. Wessel, 1745~1818）关于虚数的那篇论文，聊到数学家纽康姆（S. Newcomb, 1835~1909）在国际数学家大会上用法文作报告之事，还聊到他的有数学天赋的孙子。康托尔告诉卡约黎，他和集合论的创立者康托尔（G. Cantor, 1845~1918）的祖先都来自丹麦，因此他认为他们俩是远亲，但后者却不予认同。

参考文献

[1] Gibson, G. A. Review: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (Vols I, II and III), by Moritz Cantor. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1898, 17: 9

[2] Smith, D E. Moritz Cantor. *Scripta Mathematica* 1932, 1: 204-207.

[3] Cajori, F. Moritz Cantor, the historian of mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society*, 1920, 26: 21-28

目　录

CONTENT

文献研究

ICME-13 之 HPM 专题研究综述*

沈中宇 邹佳晨

（华东师范大学数学系，上海，200241）

国际数学教育大会（简称 ICME）是国际数学教育委员会（简称 ICMI）最重要的活动之一，每四年召开一次，第 13 届国际数学教育大会（简称 ICME-13）于 2016 年 7 月 24 日~31 日在德国汉堡的汉堡大学和汉堡会议中心举行。本次会议共有 54 个专题研究组（Topic Study Group，简称 TSG），其中 TSG 25 的主题是“数学史在数学教育中作用”，即通常所说的 HPM（数学史与数学教育之间的关系）。

HPM 专题研究组在 ICME 中的设立有着较长的历史，在 1976 年德国卡尔斯鲁厄举行的 ICME-3 中，根据提议，ICMI 执行委员会在它随后的会议中开设了这一研究小组[1]。而在国内，自从 2005 年第一届全国数学史与数学教育研讨会召开以后，数学史在数学教育中的作用日益受到关注。据统计，《数学教育学报》2010 年后载文下载频次前 20 的论文中，就有 6 篇与数学史、数学文化对数学教育的作用有关[2]。虽然国内的 HPM 研究文献日益增多，但研究水平仍有待于提高；研究者需要有国际视野，及时了解国际 HPM 研究动态，从中汲取经验与启示[3]。

有鉴于此，本文对 TSG 25 的所有报告内容进行综述和分析，试图回答以下问题：TSG 25 的报告涉及哪些研究内容？有何特点？对 HPM 研究与 HPM 视角下的数学教学实践有何启示？

1 TSG 25 基本情况概述

1.1 TSG 25 的目标和理念

TSG 25 的目标在于建立一个学术论坛，让来自世界各地的研究者分享他们的研究兴趣、研究结果和国际化的思想，包括数学史融入数学教学的理论探讨、实践经验和实证研究，并让他们从交流和研讨中获得丰厚的回报；同时，也激发年轻学者对 HPM 领域的研究兴趣。TSG25 的讨论包括所有层次的教育，从小学到大学，包括在职教师的培训。

TSG 25 的理念是：数学是人类智慧的宝库，有着漫长的历史与充满活力的今天，因此，数学知识不仅由其演绎结构所决定，也受到原始动机的引导，这对数学知识的理解是不可或缺的。学习数学并不仅仅意味着学习现成的数学知识，还需要了解知识背后潜在的动机、数学家的活动与反思过程。因此，在数学教学中，教师需要给予学生做数学的机会。获取数学知识的逻辑结构和了解知识的产生过程都应该是数学教学的核心。

*上海市教育科学研究重大项目 “中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”（项目号：D1508）系列论文之一。

因此，在数学教育中，认识到数学具有以下的特征是非常重要的：不同的文化都对数学的发展做出过贡献；数学与其他科学学科、哲学、艺术和技术都有着密切的联系；随着时间的推移，关于“数学是什么”，已经产生过很多不同的观点；数学是刺激和支持科学技术、艺术和社会发展的永恒力量。

数学史融入数学教育有助于在学生中建立科学与人文的联系，这对今日数学教育尤为重要。通过数学学习，学生既要获得技术知识，也要接受博雅教育。

1.2 TSG 25 的主题

TSG 25 围绕以下 6 个主题展开：（1）数学史融入数学教育的理论或概念框架；（2）历史与认识论在数学教育中的应用：课堂实验和教学材料；（3）数学课程或教科书中的数学史调查；（4）课堂上的原始素材及其教学效果；（5）在数学教学中将历史和认识论作为一个跨学科的方法来揭示数学和科学的密切联系；（6）文化和数学的交融。

2 TSG 25 的内容简述与分析

在 TSG 25 中，来自 17 个国家的学者共作了 34 个报告，其中 16 个为常规报告、18 个为口头交流报告，另外还有 4 份海报。常规报告的时间为 15 分钟，外加 5 分钟讨论；口头报告的时间为 10 分钟，外加 5 分钟讨论。海报则在所有 TSG 的海报环节展示。

这些报告均符合以上会议 6 个主题中的 1 个或多个主题，为了更清晰地展示各报告的内容，我们将其重新分成以下 7 类[4-6]，这 7 类涵盖了会议的 6 个主题且每个报告均属于这 7 类中的 1 类。

第 1 类：HPM 理论探讨；

第 2 类：教育取向的数学史研究；

第 3 类：历史相似性实证研究；

第 4 类：教学实践与课例开发；

第 5 类：HPM 与教师专业发展；

第 6 类：数学史融入数学教材研究；

第 7 类：技术与 HPM。

图 1 给出了各类主题的分布。

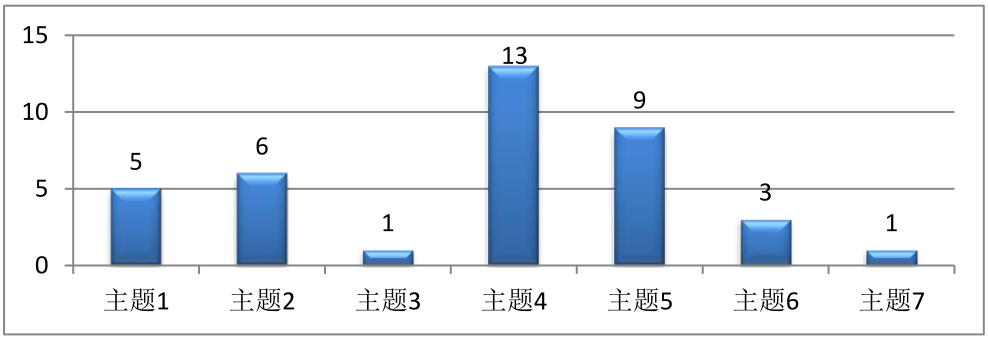


图 1 38 个报告中各类主题的频数分布

从图 1 可见，有关教学实践与课例开发、HPM 与教师专业发展和教育取向的数学史研究的报告占了绝大多数。

2.1 HPM 理论探讨

在 HPM 的理论层面，需要解决“为何”与“如何”问题，即数学史的教育价值、数学史与数学教育方方面面的关联以及数学史在数学教学中的运用方式。有 3 个常规报告和 2 个口头报告聚焦理论探讨。

Weiss-Pydstrygach 在报告中指出，数学史有助于再现代数概念的几何背景，弥补代数教学中的背景的缺失。报告呈现了霍纳法的丰富的几何背景，说明这些几何背景可以促进和完善学生对数学的理解。[7]

Fonseca 在报告中追溯了 1980 年代在墨西哥数学教育界兴起的社会认识论。该理论强调，数学知识是由社会建构而不是由学校创造的，学校系统中的数学知识改变了数学的结构和表现形式；数学知识的社会建构是一个从个体对数学对象的直接行动开始到人类的社会活动、到社会中的反复实践、再到作为材料和思想形态的呈现、最后到社会实践的管理这一嵌套的过程。社会认识论关注知识的四个维度——社会与文化、认识论、认知和教学，将知识视为一个动态发展的过程。[8]该理论为 HPM 理论与实践研究提供了参考。

Kjeldsen 和 Johansen 在报告中以卡丹的数学问题以及幂的现代理论说明，代数符号作为一种认知工具，对于学生的数学学习具有重要作用。作者建议，可以通过列出清晰的学习目标、设计学习单进行相关主题的教学。[9]

丹麦学者 Sørensen 在报告中鉴于教师选择和运用数学史料的困难，提出了一个史料选择和开发的框架——从篇幅、语言和层次三个角度选择历史素材，根据教学目标将数学史作为背景或内容的支持[10]。作者又提出基于课程的数学史开发流程——从原始材料到丹麦语翻译、再到情境化、润饰和评论，最后给出教学建议。

洪燕君以三角形内角和定理的教学为例，呈现了数学史融入数学教学的实践模式——高校 HPM 研究团队与中学一线教师开展合作，以及具体流程——按准备、设计、实施和评价四个步骤实施教学。[11]

五个报告分别讨论数学史的教育价值、社会认识论与 HPM 之间联系、教育取向数学史料的开发流程以及数学史融入数学教学的实施方法。

2.2 教育取向的数学史研究

教育取向的数学史研究是以服务教育为目的，针对数学课程中涉及的概念、公式、定理、问题的历史所进行的文献研究。本主题有 1 个常规报告、3 个口头报告和 2 份海报，内容涵盖小学、中学、大学三个学段。

Vásquez 鉴于学生学习加减法存在的困难，强调教学活动背后的现实与文化背景的重要性，因此对历史上的加减算法进行了考察[12]。Aisah 在海报中鉴于学生认识负数存在困难，对负数在东西方被人们接受的历史过程作了探讨，并揭示了文化对数学发展的影响[13]。

Sternemann 在报告中对 e 的历史进行了研究，发现雅各·伯努利（Jacob Bernoulli, 1654~1705）并没有像人们通常认为的那样发现了 e，50 年后的欧拉（L. Euler, 1707~1783）才发现该常数，教师可以从历史素材中获得教学启示。[14] Mrabet 在报告中讨论了泰勒斯定理的历史，并提出若干教学建议[15]。Arora 在海报中考察了印度《绳法经》中的有关材料及其教育价值[16]。

Lodder 的报告考察了“网络图和生成树”的历史，并从作为工具的数学史、认知迷惑、目标层次与元层次四个方面对史料的运用进行了分析。[17]

2.3 历史相似性研究

历史相似性研究，是指根据历史发生原理，将学生对数学概念的理解过程与数学概念的历史发展过程相对照。只有一个常规报告聚焦历史相似性的实证研究。Sanz 首先考察了历史上有关分数的文字题以及不同时空数学家（如斐波那契、奥雷尔、欧拉等）的解法。让学生解同样的问题，作者发现：学生偏爱代数解法而非算术解法，因而并未显示出历史相似性。不过，作者指出，历史上数学家的解法对于从算术到代数过渡阶段的教学仍然具有重要启示。[18]

从上述报告可见，虽然前人对学生从算术到代数过渡的历史相似性已做过不少研究，但仍然存在进一步研究的空间。

2.4 教学实践与课例开发

教学实践与课例开发是指将数学史融入数学教学的实践探究，此主题是 TSG 25 的热点之一，共有 6 个常规报告、6 个口头报告和 1 份海报涉及该主题，涵盖了小学、中学、大学不同学段。

Tsiapou 选取中国数学典籍《九章算术》中的问题以及刘徽的事迹，对希腊的小学生开展相关的教学活动，教学实践表明，这些活动有助于学生数学观的改变。[19]

Guevara 在报告中指出，可以利用几何直观来学习代数。作者分析了刘徽《九章算术》注和花拉子米《代数学》中的一元二次方程解法的潜在价值，并按 Giardino 的步骤，让学生完成有关任务。研究表明，几何直观对于学生从算术到代数的过渡具有促进作用。[20] De Varent 将古巴比伦数学泥版中的面积计算方法应用于 10 年级的课堂中，试图引发学生对现代方法进行反思，结果发现，泥版上的方法并未起到理想的教学效果，究其原因，可能与学生在泥版的阅读理解上存在困难有关。[21] Kotarinou 让学生参与项目“希腊化时期的亚历山大：知识的灯塔”的研究，通过文献研读、话剧演出的方法让学生学习相关的数学知识。[22]Syriopoulos 将历史叙事应用于教学，激发了学生的学习兴趣。[23] Krohn 将历史上的天文学问题用于 11~12 年级的教学，让学生经历历史上数学问题的解决过程，同时也迎合了现代教育的需要。[24] 虞佳玮利用中国的《九章算术》和《海岛算经》中与数学课程内容相对应的问题，对法国某国际学校 7~9 年级学生进行了教学实验。[25]此外，方倩报告了数学史融入二项式定理的实践研究[26]，杨懿荔报告了 HPM 视角下的斜率概念的教学研究[27]，沈中宇

报告了 HPM 视角下“全等三角形应用”的同课异构教学研究[28]。

也有学者对大学阶段的 HPM 教学实践展开研究。Clark 针对学生在从中学数学向大学数学的过渡中所存在的困难而开设了一个讨论班，讲授从欧几里得到希尔伯特的数学发展历史。实践表明，数学史的教学有助于解决学生的过渡困难。[29]Baggett 在教学实践中以读书报告、研讨会的方式指导学生（来自不同国家）进行历史研究。经过 6 轮教学之后，作者针对所产生的一些问题，对历史研究活动作了一定的调整。[30] Schöneburg 实施了一项跨学科的课题研究，将有关缩放尺的历史材料用于教学，揭示了发明于 400 多年以前的缩放尺的教育价值。[31]

以上我们看到，有关小学数学教学的报告关注学生的信念以及原始素材的使用；有关中学数学教学的报告关注数学史在改善教学方面的有效性，并呈现了丰富多彩的实践方式。

2.5 HPM 与教师专业发展

HPM 与教师专业发展是关于数学史对数学教师专业发展影响的研究，在该主题上有 4 个常规报告与 5 个口头报告，涉及职前与在职两类教师。

Guillemette 利用历史现象学的方法对六位修读数学史课程的职前教师进行研究，通过教学录像和访谈等手段，对职前教师在阅读历史素材时产生的认识论迷失现象进行了进一步的描述，从而揭示数学史对职前教师教育的作用。[32]。Bernardes 将 Sylvester 和 Cayley 的有关工作运用于矩阵和特征值的教学，以此考察数学史对职前教师的矩阵和特征值概念转变的影响。[33]Spies 基于 Grigutsch 的信念分类和 Schoenfeld 等人的信念系统，对职前教师的微积分信念进行了调查；通过向职前教师讲授雅各·伯努利求抛物线切线的方法，发现他们的信念发生了改变。[34]

黄友初从 MKT 理论出发，就勾股定理的历史，对 10 名职前教师进行培训，发现数学史有助于丰富和完善他们的 MKT。[35]齐春燕通过对 8 位职前教师的调查，发现基于数学史的问题提出活动促进了教师专门内容知识（SCK）的发展。[36]Thieme 利用讲座的方式对职前教师进行数学史知识（包含原始材料）的培训，发现学生对数学史知识的学习存在一定的困难。[37]

Lawrence 从拉斐尔（Raphael, 1483~1520）名画“雅典学院”中的数学知识出发，设计了一门在职教师培训课程，课程提升了教师学习数学的热情，并让他们获得了职业认同感[38]。Dindyal 针对学生死记微积分公式的现象，开展了将微积分的历史融入教学的两轮课例研究，共六节课。结果表明，教师获得了专业发展。[39]邹佳晨利用教师专业发展的诠释学循环模型，划分了 HPM 驱动下的教师专业发展的四阶段，即数学史诠释学循环和数学教学诠释学循环的分离阶段、接触阶段、交叉阶段和包含阶段[40]。

从该主题的报告可见，针对职前教师的研究关注原始素材对教师情感的影响，而针对在职教师的研究关注教师的在职培训、课例研究以及教师专业发展的模型。

2.6 数学史融入教材研究

有 1 个常规报告、1 个口头报告和 1 份海报涉及数学教材中的历史分析。

Schorcht 采用四个维度对德国教科书中的数学史任务（先给出一段数学史材料，然后提出数学问题）进行了分析，并对其中涉及的数学史材料进行了分类。[41] Kirez 利用有关分析框架，对土耳其第二次课程改革之后 5~8 年级的数学教科书进行了考察，发现其中涉及的数学史内容较为肤浅。[42]Koirala 考察了 2010 年出版的美国州共同核心数学标准中涉及的数学史内容，特别分析了婆什迦罗（Bhaskara, 1114~1185）《莉拉沃蒂》中的有关内容。[43]

几位报告人都是基于某个特定的框架来分析教科书中的数学史内容的。

2.7 技术与 HPM

只有一篇口头报告涉及“技术与 HPM”这一主题。Suzuki 在报告中首先介绍了卡丹解一元二次方程的几何方法。如图 2 所示，要解方程 $ax = x^2 + N$ （$a > 0$），作线段 $AB=a$，取中点 G，以 BG 为边作正方形 EG，作面积等于 N 的矩形 EF，取线段 HG，使其平方等于矩形 FB。根据《几何原本》第 2 卷命题 5 和命题 3，可得 AH 和 HB 为原方程的两个根。

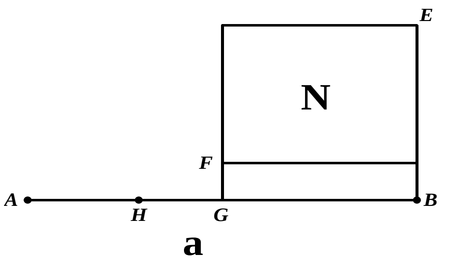


图 2

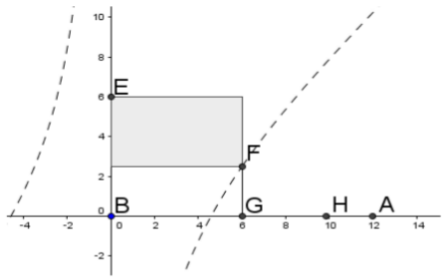


图 3

用软件 Geogebra 来实现上述解法，如图 3 所示。取点 A（a，0），AB 中点为 G，作正方形 EG，利用函数 $f(x) = x - \dfrac{N}{x}$ 与 $f(x) = \dfrac{a}{2}$ 的交点得到 F，从而可知 EF 的面积为 N，然后使得 GH 的长度为 BF 面积的算术平方根，从而得到方程的解分别为 AH 和 HB 的长度。最后，根据 a，N 的不同符号，讨论了四种情形下的一元二次方程解法。[44]

技术为 HPM 插上一双翅膀，技术与 HPM 的融合必将成为未来 HPM 研究的重要方向之一。

3 TSG 25 的特点

根据 TSG 25 的所有报告，可以总结出国际 HPM 研究的若干特点。

3.1 重视理论基础

由 38 个报告可见，单纯的理论思辨、数学史研究或课堂实践较少，更多的是将数学史研究、课堂实践、教师专业发展等研究与相应的理论结合起来，重视理论的指导，这标志着 HPM 研究领域正在逐渐走向成熟。

报告人引用了一些常用的理论或观点。关于数学史的教育价值，有 Jankvist 的工具说和目标说，刘柏宏对数学史教育价值的描述，Heeffer 和 Fried 等提出的数学史对数学教学的

作用。关于数学史的应用方式，有 Sfard 的认知交流理论，Barnett 等关于原始素材使用方式的框架。关于数学史与教师专业发展的关系，有 Jahnke 的“再定位”（reorientation）理论，Barbin 的认知迷惑理论，Radford 的客观化（objectification）理论。

还有一些报告提出了新观点或新框架。关于教育取向的数学史研究，Sørensen [7]从教师的需要出发，提出了面向课程的数学史开发流程以及供教师阅读的数学史素材的模板，有一定的借鉴意义。关于教学实践与课例开发，Kjeldsen 和 Johansen [19]将认知科学中的“认知工具”概念应用于数学学习中，提出“数学认知工具”概念，并指出：数学史提供了数学的认知工具。关于 HPM 与教师专业发展，Spies[34]对已有的教师信念系统理论，如 Grigutsch 的工具-系统-过程-实用信念系统、Schoenfeld 的经验主义信念系统以及 Burscheid 和 Struve 的形式信念系统进行了梳理和整合，从学习动机和数学本质两个新的维度来看待教师的信念。

3.2 研究方法规范

各报告运用了各种不同的研究方法，包括现象学方法、质性分析法、人种志研究、问卷调查、访谈、测试等。如，Sanz 利用数学史上的问题对学生进行测试[17]；Guillemette 采用现象学方法对教师阅读数学史材料之后的生活体验进行研究[32]。

Schorcht 在报告中[41]首先从教科书数学史任务中提取古今联系、数学发展、数学人物、知识目标四个维度；为了对每个数学史任务进行分类，采用 Mayring 提出的质性内容分析法，这是一个系统的方法，一共分为 10 个步骤，首先将需要分析的材料提取出来，第 2 步确定以上所说的四个维度，第 3 步和第 4 步提取出材料中的属性并进行编码，属性由四个维度刻画而来，第 5 到第 7 步对例子进行描述，从而必要时对属性进行修正，第 8 步根据极值、理论兴趣和经验频率确定属性，第 9 步确定原型，第 10 步对原型进行详细描述，再结合 Kelle and Kluge 的类型构建以及数学家 Ganter, Wille and Stumme 的形式概念分析，最后确定德国教科书中的五类数学史任务，然后利用两个例子对其中的两类任务进行了说明，最后说明利用这些属性不仅可以分析，也可以用于编制数学史相关的任务。

3.3 多元文化交融

从小学的刘徽、加减法、分数运算、面积算法、负数，到中学的一元二次方程解法、幂的表示、微积分初步、e 的历史、泰勒斯定理，再到大学的网络图和生成树、矩阵等，各报告涉及丰富多彩的数学史素材，其中有古代中国、印度、希腊、阿拉伯以及欧洲的数学史素材，充分展现了数学文化的多元性。

西方学者表现出对东方历史文化的浓厚兴趣，如 Guevara 在其报告中发掘刘徽和花拉子米解一元二次方程方法的潜在价值 [20]。Tsiapou 将中国《九章算术》中的问题以及刘徽的事迹用于教学，在“哲学卡片”活动中让学生了解汉朝的历史文化对刘徽的影响，并探究刘徽有关发现的背景，而在“数学树”活动中让学生将刘徽的数学成就进行整理和分类[18]。这说明，国外学者对中国数学史有较深入的研究，并乐于将其应用于课堂教学。

值得注意的是，国外数学教学中运用数学史的方式十分丰富，有学习单、数学史课程、讲座、讨论班、名画中的数学史展示、原始材料的直接使用、数学拓展课、数学建模活动、戏剧表演、数学史课程包等。国内则主要集中于将数学史融入某个具体知识点的常规课堂教学中，这在某种意义上反映了东西方数学教育制度和数学课堂文化的差异。

在 2012 年 ICME-12 的 HPM 小组中有 16%的报告由东方学者所作[45]，到了 ICME-13，这一比例上升到了 26%。因此，HPM 的国际化程度日益增加，东西方的学术思想必将在交融中共同发展。

4 结论与启示

以上我们看到，TSG 25 的报告涉及 HPM 理论探讨、教育取向的数学史研究、历史相似性实证研究、教学实践与课例开发、HPM 与教师专业发展、数学史融入教材研究、技术与 HPM 七个主题；总的说来，各报告展现了重视理论基础、研究方法规范、多元文化交融的特点。据此，我们得到如下启示。

（1）构建理论框架，重视本土特色。理论与实践相结合为国外学者所重视，也是今后 HPM 研究的趋势。HPM 领域的大多数理论都是建立在作者所在国家的教育现实之上的，很多学者将数学史原始文献运用于教学实践。因此，如何将有关理论以及实践经验本土化，与中国的数学教育现实相结合，建立我们自己的 HPM 理论框架，值得我们继续探讨。

（2）规范研究方法，注重实证研究。在 HPM 的初创阶段，人们主要以思辨或者纯历史研究为主，而在国内，HPM 领域的思辨或经验总结类的文献至今仍然占有相当大的比重。从 TSG 25 的众多报告可以看出，HPM 领域今天已经发展到了实证研究阶段，因此，我们需要建立并采用科学合理的研究方法，提升 HPM 的研究水平。

（3）关注多元文化，加强国际交流。在信息化和全球化时代，多元文化在世界学术界已深入人心，传统的“西方中心论”早已成为明日黄花。而在我们的课堂上，只讲“中国最早”、“中国第一”的数学史话题也是远远不够的。HPM 本身就是一个跨学科的研究领域，要求研究者具有开阔的视野和博大的胸怀。加强中外交流、借鉴他山之石、关注多元文化、博采东西方数学史素材，是未来 HPM 理论和实践研究的必然需求。

（4）丰富教学方式，开拓第二课堂。国外 HPM 教学实践形式较为开放，主题也比较丰富。而在国内，由于升学的压力和教学进度的限制，HPM 在课堂上的空间很小。我们可以借鉴国外有关经验，通过更多样的形式（如开发拓展课程、上演数学话剧等）来运用数学史，更好地发挥数学史的育人价值，让数学史真正成为数学学科落实“立德树人”根本任务的有效教学工具。

参考文献

[1] 冯振举，戴丽丽. 国际 HPM 的发展历程及启示[J]. 西北大学学报自然科学版，2005, 35(5):652-656.

[2] 万家练. 对《数学教育学报》下载频次较高的论文评析——以 2010 年后的载文为例[J]. 数学教育学报, 2016, 25(2)：96-102

[3] 康世刚, 胡桂花. 对我国"数学史与中小学数学教育"研究的现状分析与思考[J]. 数学教育学报, 2009, 18(5):65-68.

[4] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006, 15(1):16-18.

[5] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012(2):1-5.

[6] 鲍建生, 徐斌艳. 数学教育研究导引[M]. 江苏教育出版社, 2013.

[7] Pydstrygach, Y. W. Algebra without context is empty, visualizations without concepts are blind [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[8] Fonseca, F. W. R. The socioepistemologic approach to the didactic phenomenon: an example [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[9] Kjeldsen, T. H, M.W. Johansen. The history of artifacts as a resource in mathematics education [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[10] Sørensen, H. K. Facilitating source-centered history of mathematics in Danish upper-secondary mathematics education [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[11] Hong, Y. Teaching mathematics from the perspective of HPM: process and model [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[12] Vásquez, M. R. History of mathematics in the classroom: algorithm of the addition and subtraction [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[13] Aisah. How negative numbers can be accepted in the community [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[14] Sternemann, W. About continuous compound interest by Jacob Bernoulli [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[15] Mrabet, S. The development of Thales theorem throughout history [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[16] Arora. Activities for the construction of geometrical figures based upon sulba sutra [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[17] Lodder, J. Primary historical sources in the classroom: Graph Theory and spanning trees [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[18] Sanz, M. T. Missing curious fraction problems: the unknown heritage and the unknown numbers of heirs [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[19] Tsiapou, V.. Liu Hui shares his views about mathematics with students of a Greek primary school [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[20] Guevara, I. Geometry and visual reasoning to introduce algebraic language as Liu Hui and Al-Khwarizmi did [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[21] Varent, C. Consequences of the use of an ancient mathematical tablet in the classroom [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[22] Kotarinou, P. Expanding contexts for teaching upper secondary school geometry [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[23] Syriopoulos, S. The course of a theorem in time: a mathematical narration addressed to 11th grade students. [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[24] Krohn, T. Authentic & historic astronomical data meet new media in mathematics education [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[25] YU. Teaching mathematics in chinois by using chinese mathematical history [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[26] Fang, Q. Instructional design and implementation of binomial theorem from the perspective of HPM [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[27] Yang, Y. An instruction design about inclination and slope [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[28] Shen, Z. Teaching of application of congruent triangles from the perspective of HPM [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[29] Clark, K. A seminar designed to address the transition problem from school to university mathematics: initial results [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[30] Baggett, P. Involving students in research in the history of mathematics education: from book report to major project [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[31] Schöneburg, S. The Pantograph – a historical drawing device for math teaching [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[32] Guillemette, D. An empirical study concerning lived experience of pre-service teachers engaged in the reading of historical texts [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[33] Bernardes, A. History of matrices: promoting commognitive conflicts and encouraging reflection on meta-discursive rules in prospective teachers [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[34] Spies, S. Making domain-specific beliefs explicit for prospective teachers – an example of using original sources [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.

[35] Youchu, H. A qualitative study on the development of pre-service teachers' knowledge in the

history of mathematics—a case of the Pythagorean Theorem [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.
[36] Qi, C. Research on the problem posing of the HPM [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.
[37] Thieme, B. S. A curriculum for history of mathematics in pre-service teacher education [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.
[38] Lawrence, S. Euclid's art after Bath [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.
[39] Dindyal, J. A historical perspective for teaching calculus: the development of a lesson package [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.
[40] Zou, J. The model of teachers' professional development on integrating the history of mathematics into teaching in Shanghai [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.
[41] Schorcht, S. History of mathematics in textbooks from first to seventh grades – types of tasks [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.
[42] Kirez, B. History of mathematics in the Turkish middle school mathematics curriculum and textbooks [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.
[43] Koirala. Using History of mathematics to address the common core standards [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.
[44] Suzuki, T. The method of geometrical solution of equations using Geogebra: focus on the root of quadratic equations in Ars Magna [R]. 13th International Congress on Mathematical Education, 2016.
[45] 黄友初, 朱雁. HPM 研究现状与趋势分析[J]. 全球教育展望, 2013, 42(2): 116-123

调查研究

高中数学教科书“对数”阅读材料使用现状的调查*

王 鑫 汪晓勤 邹佳晨

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

1 引 言

“阅读与思考”栏目作为人教版高中数学教科书的特色之一，是数学史融入教科书的一个载体，同时也是促进德育实施的重要途径。阅读材料主要介绍与数学教学内容相关的数学史知识以及数学知识的延伸、拓展和应用，编写的初衷有两个：一是体现教学内容的弹性，使教科书符合不同层次学生发展的需要；二是帮助学生理解正文内容，开阔学生的视野，培养人文精神[1]。

邓建在 2002 年通过对 154 名学生调查发现，由于应试的阴影及教育观念的限制，阅读材料基本处于被封闭的状态[2]。徐永忠通过对 60 位教师的调查发现，大多数教师因为阅读材料不在考试范围内而不予重视。[3]朱丽娟对 255 名高中生调查发现，男生和女生、优生和差生、文科生和理科生对阅读材料的使用和理解能力都有差异，阅读材料未引起教师的足够重视[4]。钟建新对 25 名师生访谈发现，阅读材料的利用率不到 50%，究其原因有：教师在思想上不重视，自身知识结构不完善，不领会阅读材料的编写意图，阅读材料的趣味性不足[5]。殷长征研究发现，教师对阅读材料的处理很“现实”，师生均带有强烈的应考意识，有意去读阅读材料的学生少，带着明确目标去读的学生就更少了[6]。

“对数的发明”是高中数学必修一第 2 章第 2 节“对数函数”之后的阅读材料。材料首先介绍了对数发明的背景——由于天文、航海等的发展而迫切要求改进数字计算方法；接着，介绍苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier, 1550～1617）的工作：1614 年，纳皮尔以三角函数积化和差思想、等比数列和等差数列对应关系为基础，借助运动学模型，用几何术语阐述了对数方法，他的朋友布里格斯（H. Briggs, 1561～1630）将对数加以改造，发明了常用对数；最后，介绍了对数的应用以及对数与指数之间的关系。

那么，在教学实践中，这则阅读材料的使用现状如何？是否发挥了其应有的教育价值？内容是否还有待完善？我们希望通过研究来回答上述问题，以期为教学和教科书的修订提供参考。

2 研究方法

我们采用问卷调查的研究方法，研究工具是一份学生问卷和一份教师问卷。前者目的是了解高中生对阅读材料的使用情况和对对数发明过程的了解程度；后者目的是了解高中一线

* 上海市高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地——上海数学教育教学研究基地之研究项目“如何在数学课程中体现立德树人的教育根本任务”系列论文之一。

数学教师对阅读材料的使用情况及对对数发明的历史及其教育价值的认识。

学生问卷分为三个部分，共 14 小题，其中 13 道选择题，1 道主观题。教师问卷也分为三个部分，共 15 小题，其中 13 道选择题，2 道主观题。两份问卷中均附有一段关于纳皮尔生平事迹的简介。具体内容见下文。

共向浙江、四川等地发出学生问卷 237 份，收回有效问卷 230 份，回收率 97.05%；发出教师问卷 21 份，收回有效问卷 16 份，回收率 76.2%。230 名答卷学生均来自高一年级，基本上已学完高中数学必修一上册内容。在 16 名答卷教师中，有新手教师，也有 30 多年教龄的专家型教师，具有一定的代表性。笔者委托自己的高中数学老师及大学同学负责在自修课上发放学生问卷，并督促学生认真答卷，答完后当场回收。收回的教师问卷包括纸质版和电子版两种形式，笔者汇总后利用软件进行统计分析。

3 结果

以下我们选择与对数阅读材料相关问题的师生回答情况进行统计和分析。

3.1 学生问卷

第 1 题：教材中的阅读材料你看了多少？

图 1 给出了学生回答情况的统计结果。从图 1 中可见，在 230 名学生中，绝大多数都看过教材中的阅读材料，看过约一半或一半以上的学生占 68.7%，而剩下 31.3%的学生只看过

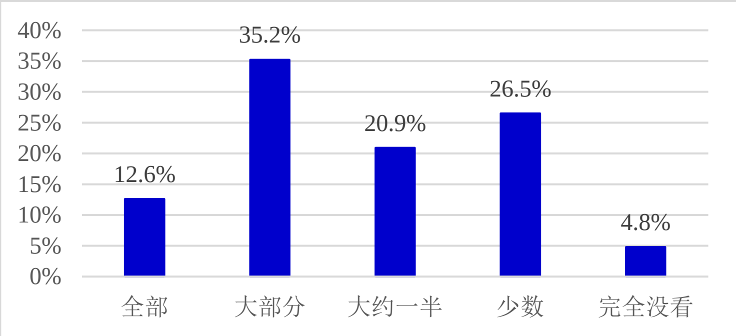


图 1 学生对阅读材料的阅读情况

少数或根本完全没看。结果表明，高中生对阅读材料的使用情况很不理想，阅读材料作为教科书正文之后的补充内容没有得到学生的足够重视。

第 2 题：你喜爱某些阅读材料的原因是什么？（可多选）

图 2 给出了学生回答的统计结果。

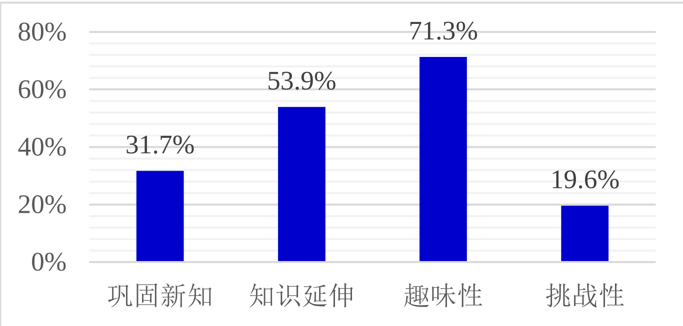


图 2 学生喜欢某些阅读材料的理由

第 3 题：你不喜欢某些阅读材料的原因是什么？（可多选）

图 3 给出了学生回答的统计结果。

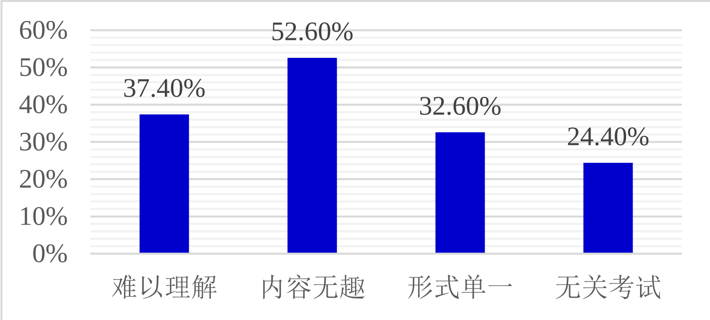


图 3　学生不喜欢某些阅读材料的理由

从图 2 和图 3 可见，多数学生喜欢阅读内容生动有趣的材料，而不愿意去读枯燥无味的材料；超过半数的学生喜欢能拓展和延伸正文知识的材料。此外，内容难懂和无关考试是学生不读阅读材料的重要原因。

为使学生对纳皮尔发明对数的背景有更深入的了解，也便于调查的进一步进行，笔者在问卷中附上一篇关于纳皮尔生平事迹的简介，让学生阅读后接着回答问题。

苏格兰数学家约翰·纳皮尔（J. Napier, 1550～1617）13 岁时带着失去母亲的深深伤痛，背负父亲的殷殷期盼，远赴欧洲大陆求学。21 岁时，他结束了海外留学生涯，回到了阔别已久的故乡。然而，故乡却早已不再是记忆中的样子。兵连祸结，满目疮痍。当他回到魂牵梦萦的温馨家园——莫契斯顿城堡，迎接他的不是父亲慈祥的微笑，而是占领者冰冷的刀枪。父亲身陷囹圄，男儿无家可归。

磨难和变故并没有击垮纳皮尔。他回到乡间，开始重建家园，并专注于数学研究。当他得知祖国面临被侵略的威胁时，他凭借自己的聪明才智，设计了燃烧镜、大炮、战车等许多武器，希望用它们来打击敌人、保家卫国。

为了解决天文学中大数计算的困难，纳皮尔花费了 20 年时间发明了简化计算的神奇工具——对数，于 1614 年出版《奇妙的对数定律说明书》。他在书的前言中写道：“没有什么比大数的乘、除、开平方或开立方运算更让数学工作者头痛、更阻碍计算者的了。这不仅浪费时间，而且容易出错。因此，我开始考虑怎样消除这些障碍。经过长久的思索，我终于找到了一些漂亮的简短法则……”

远在伦敦的数学家布里格斯（H. Briggs, 1561～1630）读了《奇妙的对数定律说明书》后爱不释手。1615 年暑期，他乘马车专程拜访纳皮尔。两位数学家见面时，彼此打量，沉默十五分钟！在之后的一个月里，两位数学家深入研讨，达成共识，对“对数”进行了改进，导致了常用对数的诞生。

第 4 题：你能从所给的资料中看到数学家纳皮尔身上哪些品质？（可多选）

图 4 给出了学生回答情况的统计结果。无论是二十年如一日的执着与坚持，还是面对少年丧母、家园失陷所表现出来的坚强；无论是保家卫国发明军械的责任与担当，还是积极与

他人交流沟通的虚心与谦逊，对数背后的人文精神跃然于纸上。从图 4 可见，学生能够从新材料中挖掘出纳皮尔身上多种可贵的品质。

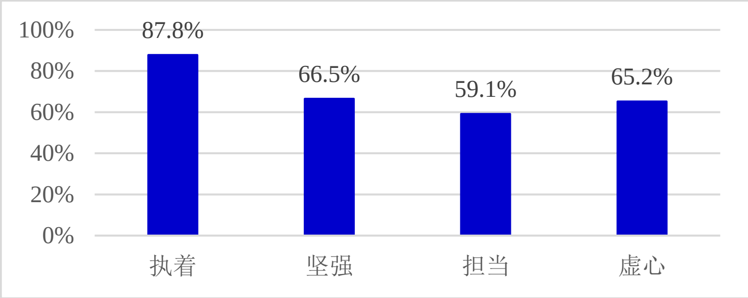


图 4 学生从纳皮尔身上看到的品质

第 5 题：如果将上述对数发明者纳皮尔的生平事迹写进阅读材料，对你产生的作用是什么？（可多选）

结果如图 5 所示。从图 5 可见，对数发明者纳皮尔的生平事迹可以增加学生的兴趣，拓宽他们的知识，并从数学家身上获得人生的启迪。

3.2 教师问卷

第 1 题：您在备课时是否会关注教材中的阅读材料？

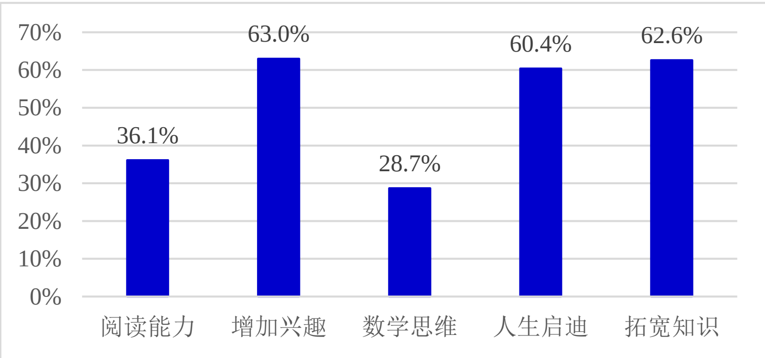


图 5 学生对新阅读材料的收获

图 6 给出了教师回答情况的统计结果。从中可见，绝大多数教师对阅读材料有所关注，但只有 25%的教师经常关注阅读材料，仅有 6.2%的教师会将阅读材料当作正文内容一样对待。

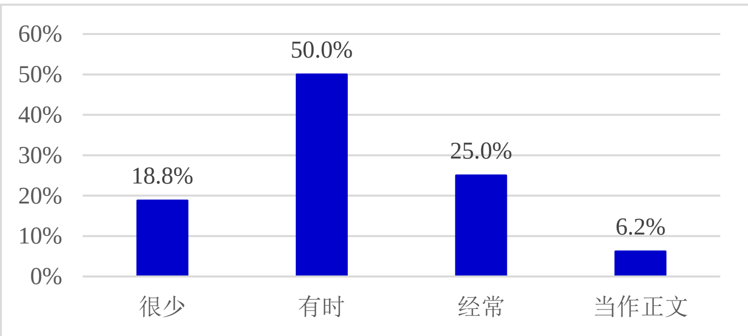


图 6 教师对阅读材料的关注情况

第 2 题：您一般采用哪种教学方式讲授阅读材料？

结果如图 7 所示。从中可见，对于阅读材料，43.8%的教师选择让学生课后自学的方式。一些教师会选择性地让学生在课上集中学习，或将其融入新知识的学习中，合计占比 56.2%。

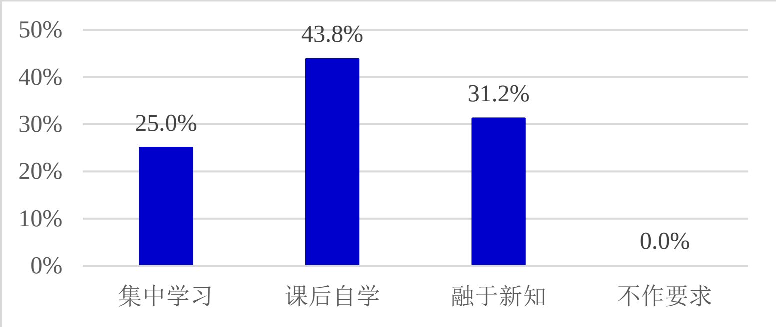


图 7 教师对阅读材料的讲授方式

第 3 题：您使用或不使用某些阅读材料一般是取决于什么因素？（可多选）

结果如图 8 所示。

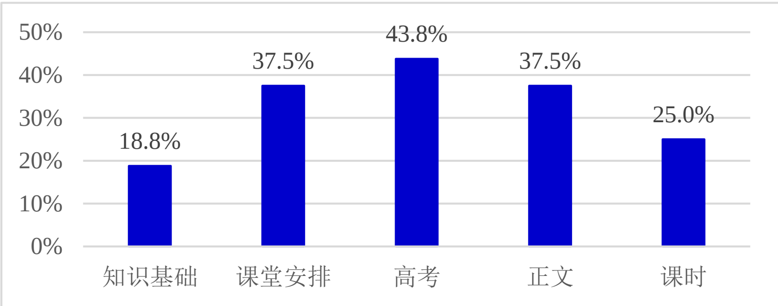


图 8 教师使用阅读材料的动机

从图 8 可见，排第一位的是与高考相关的程度。这说明，教师对阅读材料关注度不高的原因是其内容与考试关系不大。此外，教学进度和课堂容量也是导致阅读材料关注度不高的重要原因。

在教师问卷中，我们也附上了关于纳皮尔生平事迹的内容。

第 4 题 如果将上述对数发明者纳皮尔的生平事迹写进阅读材料，对学生产生的作用是什么？（可多选）

结果如图 9 所示。从中可见，教师对新材料教育价值的认识比学生更加深刻。他们最看重的是新材料在“拓宽知识”上的价值，其次才是新材料在激发兴趣方面的价值。此外，教

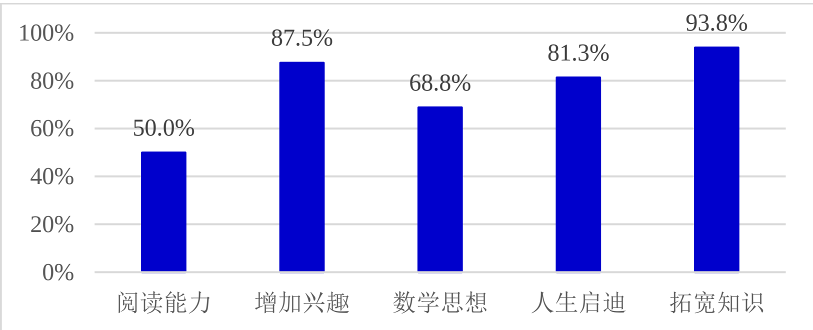


图 9 教师对新阅读材料教育价值的看法

师也比学生更加注重数学思想方法以及阅读能力。

4 启示与讨论

问卷调查结果表明，教师和学生对阅读材料的关注度不高，使用情况不甚理想，阅读材料未能发挥应有的教育价值。这与已有的相关调查结果是一致的。这一结果与编写阅读材料的初衷相去甚远。

根据调查结果，笔者认为，以“对数的发明”为主题的阅读材料需要具备以下特点。

（1）趣味性。学生不喜欢内容无趣、形式单一的阅读材料。要让材料有趣，需要关注有关人物本身。就对数的发明这一主题而言，业余数学家纳皮尔原本就是 17 世纪传奇式的人物，在他身上发生了许多有趣的故事：巧捉飞鸽、荒塞寻宝、神鸡识贼……，特别是他希望与他家隔河而建的棉绒厂厂主关闭工厂，以免噪音打断他思路的故事以及有关纳皮尔与布里格斯那场旷世之约的佳话。这样的材料既增加了阅读材料的趣味性和可读性，又反映了纳皮尔的智慧和专注，还揭示了对数发明在当时学术界所引起的巨大反响。

（2）可学性。学生对阅读材料中纳皮尔对数的运动模型以及关系式 $y=10^7\cdot e^{-10^{-7}\cdot x}$ 的理解存在困难。阅读材料中提到，纳皮尔的对数思想是以等差数列和等比数列之间对应关系为基础的。这种对应关系已经为 15~16 世纪数学家所熟悉，如德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487～1567）在《整数算术》（1544）中给出双数列

$$\begin{array}{cccccccccccc} \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \ldots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & \ldots \end{array}$$

之间的四条运算法则：（1）等差数列中的加法对应于等比数列中的乘法；（2）等差数列中的减法对应于等比数列中的除法；（3）等差数列中的简单乘法对应于等比数列中的乘方；（4）等差数列中的除法对应于等比数列中的开方[7]。

利用上述法则，一些特殊正整数的乘法变得十分简单。例如，要求 1048576×65536，我们能够在等差数列中分别找到 16 和 20，于是所求乘积就是等比数列中与 36 相对应的项，即 $2^{36}=68719476736$。然而，由于等比数列相邻两项之间的间隔越来越大，上述法则并不实用。例如，要求 9048374×8187307，在上述等比数列中根本找不到乘数和被乘数。

为此，纳皮尔巧妙地构造了新的等比数列

$$10^7,\ 10^7\left(1-10^{-7}\right),\ 10^7\left(1-10^{-7}\right)^2,\ 10^7\left(1-10^{-7}\right)^3,\ \cdots,\ 10^7\left(1-10^{-7}\right)^n,\ \cdots$$

该等比数列的公比为 0.9999999，与 1 十分接近，能够保证相邻两项的间隔非常小，而且越来越小。这样，就可以利用它与等差数列之间的对应关系来简化乘除运算了[8]。

纳皮尔构造了两种运动来说明这种对应关系。设想有两个质点 P 和 Q 分别在线段 AB 和射线 CD 上运动，其中 $AB=10^7$。P 作减速运动，Q 作匀速运动。它们各从端点 A 和 C

同时出发，初速度均为10^7（数值上等于 AB 的长度），经过单位时间，各匀速运动单位距离到 P_1 和 Q_1；于是 $P_1B=10^7-1=10^7\left(1-10^{-7}\right)$，如图 10 所示。接下来，质点 P 从 P_1 出发，

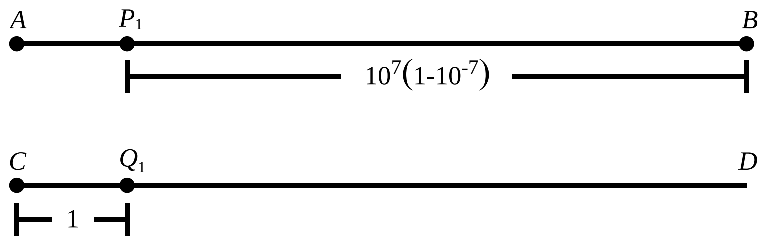


图 10 双数列的首项对应关系

以速度$10^7\left(1-10^{-7}\right)$（数值上等于 P_1B 的长度）匀速运动单位时间到 P_2；同时，Q 从 Q_1 出发，仍以初速度10^7运动单位时间到 Q_2。于是 $P_2B=10^7\left(1-10^{-7}\right)-\left(1-10^{-7}\right)=10^7\left(1-10^{-7}\right)^2$，如图 11 所示。

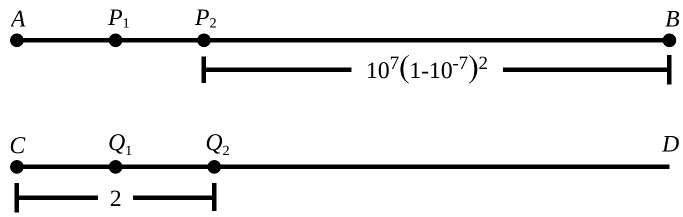


图 11 双数列的第二项对应关系

这样，每经过单位时间，质点 P 到端点 B 的距离依次对应于纳皮尔等比数列中的一项；质点 Q 到端点 C 的距离依次对应于等差数列中的一项。CQ_n 就是 P_nB 的对数。

在此基础上，纳皮尔很自然得到了他的运动模型：质点 P 和 Q 各从端点 A 和 C 同时出发沿线段 AB 和射线 CD 运动，P 作减速运动，速度在数值上等于剩余距离 PB；Q 作匀速运动。它们初速度均为10^7。于是，在运动过程中，$CQ=y$ 就是 $PB=x$ 的对数，如图 12 所示。

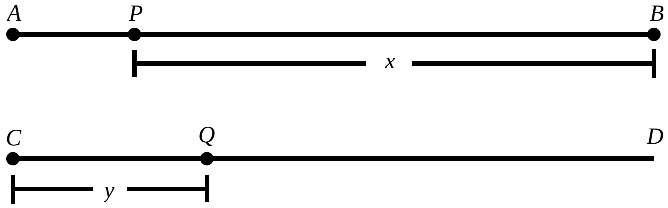


图 12 纳皮尔的运动模型

这样，纳皮尔实现了从离散的双数列到连续的运动模型的自然过渡。写清楚上述过渡的过程，纳皮尔的工作就更易于为师生所理解。

（3）有效性。阅读材料不受关注的原因之一是它无助于对对数概念的理解，且与考试

无关。为此，除了上文中的对数简化运算思想的介绍，还需让学生看到对数的重大历史意义和实际应用价值。法国数学家拉普拉斯（P.S. Laplace, 1749～1827）曾赞誉道，“因为省时省力，对数倍增了天文学家的寿命。”例如，利用对数，易于发现开普勒（J. Kepler, 1571～1630）的行星第三定律。

（4）科学性。作为教材内容的一部分，阅读材料应该符合史实、准确无误，反映数学内容本身的内在逻辑和历史发展顺序，真实反映数学史中的重大事件和人物典故。教材中“对数的发明”阅读材料基本满足了这一要求。

（5）人文性。纳皮尔以 20 年如一日的执着与坚持，最终发明了对数；面对生活的磨难和变故，表现出强大的内心；在祖国面临敌人入侵的危难时刻，表现出责任和担当；在和布里格斯的思想碰撞中，表现出谦逊和对学术孜孜不倦的追求……对数的历史充满了德育元素——坚强、担当、执着、虚心、交流、合作，为实施德育提供了丰富的素材。

我们有理由相信，满足上述五个特点的阅读材料，完全可以实现阅读材料的编写初衷，而阅读材料的教学也完全可以成为在数学教育中落实“立德树人”根本任务的一条途径。

参考文献

[1] 余建国, 何明. “阅读材料”教学使用情况的调查和分析[J]. 教育研究与评论, 2016, (10): 5-9.

[2] 邓建, 汤国铎, 雷忠强. 关于“数学阅读材料”情况的调查[J]. 中学数学教学参考, 2002, (12): 23-25.

[3] 徐永忠. “阅读材料”教学现状分析与建议[J]. 数学通报, 2004, (4): 13-14.

[4] 朱丽娟, 陈海华. 高中数学教材中阅读材料使用情况的调查与思考[J]. 高中数学教与学, 2009, (2): 1-4.

[5] 钟建新. 关于高中数学“阅读材料”的思考[J]. 数学通报, 2011, 50(4): 12-14.

[6] 殷长征. 苏教版高中数学必修教材阅读栏目使用情况的调查及思考[J]. 中学数学, 2012, (11): 23-25.

[7] 徐斌, 汪晓勤. 从指数律到对数[J]. 数学教学, 2010, (6): 35-38.

[8] 金惠萍, 王芳. HPM 视角下的对数概念教学[J]. 教育研究与评论, 2014, (9):28-34.

教学实践

HPM 视角下的"任意角"概念教学*

饶 彬

（浙江省桐乡市凤鸣高级中学，桐乡，314500）

1 引 言

"任意角"是人教版高中数学《必修 4》1.1.1 节的内容。近年来，一些教师尝试利用时钟、摩天轮、齿轮旋转等来设计《任意角》的教学，取得了不错的效果。实践证明，教师以"三角函数是刻画周期现象的模型"为出发点展开教学，不仅让学生感受到学习三角函数的必要性，更帮助学生理解三角函数这一章的重难点，使学生更容易掌握角及相关概念。但已有的设计也存在很多不足，比如：（1）未能让学生理解三角函数与周期现象之间的关系；（2）未深入探索任意角出现的必要性；（3）未解决学生在"正负角"规定上的认知冲突。

有鉴于此，笔者采用 HPM 的视角来设计本节课的教学：首先，根据上一节"三角函数序言课"的观点，揭示三角学的目的是刻画现实生活中的周期现象；接着，利用古代的计时仪器——日晷来确定时间与四季来引入角，以史为鉴，激发学生的学习动机，增加课堂的趣味性；最后，让学生探究正负角的来历、象限角的应用等，增加学生的参与意识。具体的教学目标和教学重、难点如下。

教学目标：（1）理解任意角以及象限角的概念，掌握终边相同的角的表示方法；（2）经历任意角概念的产生过程，理解角的推广的历史必然性，探究正负角定义的合理性；（3）体会角概念的历史渊源，激发学生的学习动机和兴趣，体会数学"源于生活、用于生活、高于生活"的道理。

教学重点：任意角概念、正负角历史来源、象限角和终边相同的角。

教学难点：任意角扩展的历史必然性，坐标系中画任意角，终边相同角之间的关系。

2 教学过程

2.1 情境引入

教师首先用 PPT 展示唐诗："离离原上草，一岁一枯荣；野火烧不尽，春风吹又生。"由此引出周期现象的话题：像四季变换、日夜交替这样的循环往复、周而复始的现象，在数

* 上海市教育科学研究重大项目"中小学数学教科书的有效设计"子课题"中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计"（项目号：D1508）教学案例之一。作者相继在浙江省高中数学名师工作室活动和第四届 HPM 研讨会上作了教学展示。

学上被称为“周期现象”。

师：同学们，在日常生活中，你们还见过哪些“周而复始”的现象？请举例说明。

生：钟表的时针、分针、秒针旋转，体操中运动员的转体，摩天轮转动。

生：一周 7 天、一年 12 个月、12 生肖等等。

生：游戏中的陀螺旋转、跑步中绕圈跑、过山车中的起点到终点等等很多娱乐活动。

生：地球绕太阳旋转、卫星绕地球旋转、星系之间的运动等等。

师：同学们讲得很好，生活中有很多周期现象。大家是否知道，人类是用什么数学模型来探究这些现象的呢？下面我们就来讲讲角与周期现象中一些不能不讲的故事吧！

教师用 PPT 展示图 1 和图 2，其中前者为匀速运动的汽车，后者为场景喷泉。让学生思考：可以用什么函数来刻画图中的现象？学生分别回答一次函数 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 和二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$。

图 1

图 2

师：那用什么函数来刻画周期现象呢？我们迄今所学的函数，都无法用来刻画这种现象，所以我们必须构建相应的新函数。这个新函数就是我们要学习的三角函数，如正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$ 等。我们先来谈谈三角函数的自变量“角”与周期现象之间有何联系。

【设计目的：课堂伊始采用师生合作诗歌的方式，可起到点题、拉近师生距离、调节学生紧张情绪等作用;接着用生活中的现象引入，在学生的最近发展区激发思维活动，让学生体会数学源于生活，用于生活，同时也点明了三角函数这一章的本质：刻画与研究周期现象，对“三角函数”整章内容起到了开宗明义的作用。】

2.2 新课探究

2.2.1 角的推广

先让学生回顾静态角和动态角的定义。播放时长 2 分钟的微视频——“立竿见影”（图 3）。视频介绍了古人确定时间的工具——日晷。“日晷”本意指太阳的影子，现在往往将利

用日影测时的计时工具称为“日晷”。早在 6000 年前，古巴比伦人已开始使用日晷，而古代中国人则是 3000 多年前的周朝开始使用这种工具的。

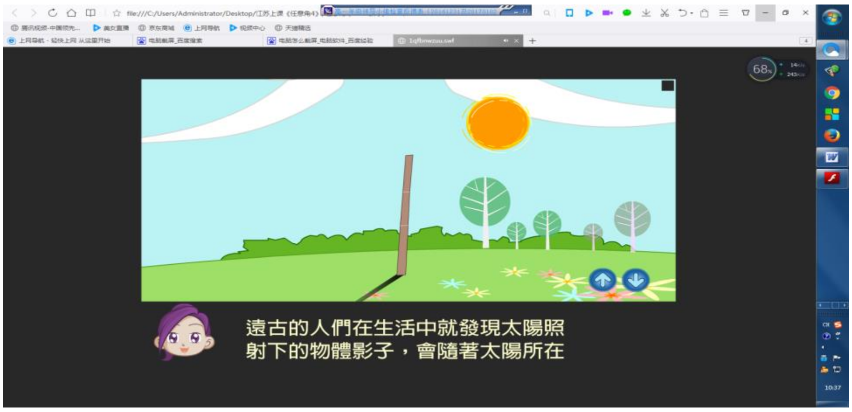


图 3

师：图 4 是中国的日晷，其上的一圈代表一天，一天又分 12 时辰，子时为一天开始，亥时为一天的结束。这里还有一个古代神话故事，传说动物所代表的时辰，就是它们到达南天门的时间，老鼠最早、猪最晚。

图 4

图 5

教师通过自制的教具，与学生一起“模拟”古人用日影测时的方法（图 5），同时提出问题：古人怎样利用日晷来测量“四季”呢？用 PPT（图 6）讲解古人利用日晷测量四季的基本原理与角度规律。《周髀算经》卷上称：“故冬至日晷丈三尺五寸，夏至日晷一尺六寸。冬至日晷长，夏至日晷短。”

【设计目的：将数学史融入课堂，利用历史中角的起源“测量节令与时间”这一特点，课前老师制作了一个日晷模型，通过师生共同演示“日影测时的过程”感受静态角与动态角在确定时间与四季中的作用，同时体会到初中所学的角的两种定义都有它的现实意义，由于此教学活动形式比较新颖，因此学生参与度很高，而且产生了对数学知识的认同感。】

接着，教师提出以下问题：（1）时间过去一时辰，影子旋转了多少度？（2）时间过去一天又一个时辰，影子又旋转了多少？（3）时间过去两天又一个时辰，影子旋转了多少呢？

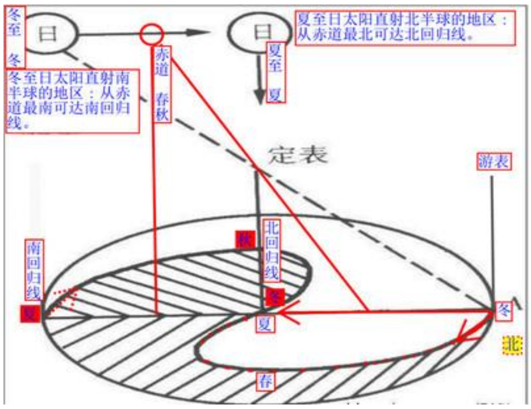


图 6

并让学生思考：三个问题中影子旋转的角相同吗？若相同说明理由，若不同则如何区分？

生 1：三个问题中角旋转的角度应该是相同的，都是 30°，但好像又有区别，不知道怎样区分。

生 2：我也觉得不相同，第一个问题中的角旋转了 30°，第二个是 1 圈加 30°，第三个是 2 圈加 30°。

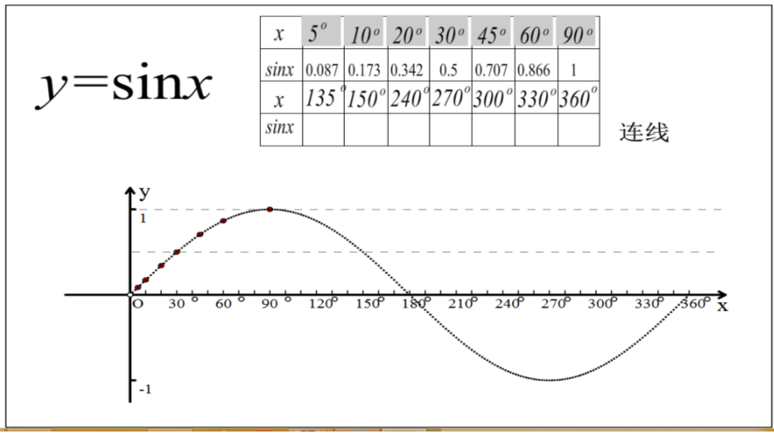


图 7

生 3：三个问题中角旋转的度数不相同，我觉得第一个为 30°，第一个为 390°，第三个为 750°。

多数学生表达了与生 3 相同的观点，这说明，学生可以很自然地接受任意角。为了进一步说明推广任意角的必要性，教师利用一段 Flash 视频来展示正弦函数的图象（图 7）。

接着，又让学生观察下列四张图片（图 8-11），其中，图 8 位旋转中的陀螺、图 9 为转动的电扇、图 10 为运动的车轮、图 11 为花样滑冰中的人体旋转。

图 8

图 9

图 10

图 11

2.2.2 正角和负角

教师使用日晷，对角作进一步的推广。提出两个问题：(1) 时间过去一个时辰，影子旋转了多少度？(2) 时间倒流一个时辰，影子旋转了多少度呢？并让学生思考：两个问题中影子旋转的角度相同吗？若相同请说明理由，若不相同该如何区分？

生 4：虽然两个影子看似都是旋转了 30°，但是应该是有区别的，不然过去 1 个时辰与倒流 1 个时辰就没有区别了。

生 5：我觉得旋转的角度没有区别，就是方向不同，一个是逆时针旋转的，一个是顺时针旋转的。

生 6：虽然我觉得也都是 30°，但是我还是觉得两个应该不一样，就是不知道如何区分？

师：大家讲得都非常好，虽然看似都旋转了 30°，但是肯定有区别。从时间上来看，一个是过了 1 个时辰，一个是倒流 1 个时辰；从旋转的方向上来看，一个是顺时针旋转了 30°，一个是逆时针旋转了 30°。对于研究生活现象的数学来讲，一定会想办法区分它们。不如让我们穿越回到 18 世纪的欧洲，在这里正在举行一场确定"任意角方向"的会议，我作为执行主席主持本次大会，你们作为各国的参与者，请大家各抒起见。作为来自中国代表的我，先来表达自己的观点。借用中国的阴阳学说，给这两个旋转角度进行命名，一个称为阳角，一个为阴角，你们有不同意见吗？

生 7（班长）：我觉得可以叫逆角与顺角，也可以叫左角与右角。

生 8（语文课代表）：……（站起来想想，没敢回答）

师：我看你眼睛一眨一闭，你想告诉大家叫开角与闭角吧！

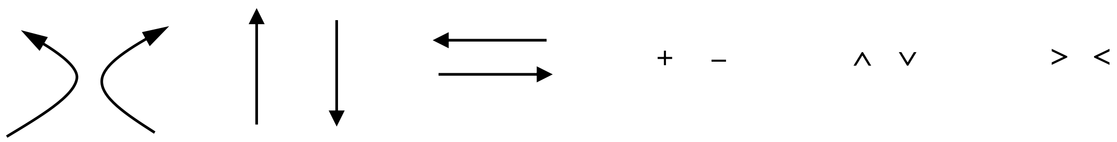
生 9：我觉得也可以叫“站角”与“坐角”。（大家开心地笑了）

生 10：我觉得可以叫左角、右角或者叫东角、西角。

生 11：那也可以叫上角、下角或者叫前角、后角。

生 12：我觉得从数学的角度出发叫正角与负角更好。

师：很好，大家起了这么多名称，不过同学们有没有想过，数学除了名称外还可以有相应的符号。有同学想到用什么符号来表示吗？（下面是每组代表上讲台画的角的数学符号）



（第一组） （第二组） （第三组） （第四组） （第五组） （第六组）

师：我们现在以数学家的眼光来审视，哪一个更符合“简单、实用又统一”的原则？

生（异口同声）：用正负角，符号用正负号最好。

师：看来同学们的观点与历史上的数学家们是相似的。现在我想问问大家，角度在同一个平面中旋转有两个方向，一种逆时针旋转，一种顺时针旋转，你们觉得哪个方向为正角，哪个为负角呢？

生：顺时针为正，逆时针为负。

师：我读书的时候也是这么想的，但是……给大家看看：我们人类主要集中在北半球，而北半球中的一些自然现象是这样的。图 12 是水的漩涡、图 13 是台风中心。

生（惊讶）：都是逆时针的呀，那肯定是逆时针为正了！

师：我本来也想这样说服大家，但是事实上以逆时针为正方向还有其他原因。大家都知道；像图 14（动态图片）中的赛跑运动员其都是逆时针跑的，图 11 中花样溜冰运动员的旋

图 12

图 13

转，也是逆时针旋转的。平常生活中大家可以试试，让一个人旋转一圈，多数人都是逆时针

旋转的，所以用逆时针作为旋转正方向，可能是生物本能所决定的。

图 14

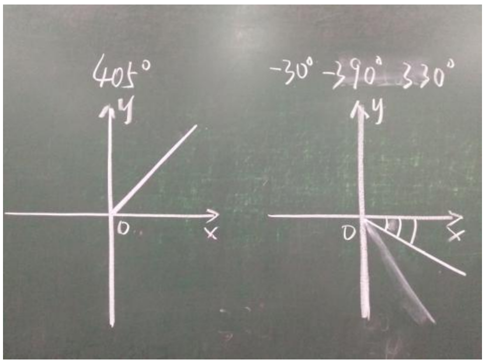


图 15

2.2.3 象限角

引导学生探究：可以把任意角放在哪里研究比较合适？（简便、统一、实用）

规定：角的终边在第几象限，我们就说这个角是第几象限的角；如果角的终边在坐标轴上， 就认为这个角不属于任何象限，或称这个角为终边落在轴上的角.

【设计目的：让学生体会到角扩展的历史必然性，同时师生共同探究正负角名称的来历，让学生感受，每一个数学知识与名称不是随性而为，是有充分理由的。同时融入多种现代化的信息技术手段，微视频、flash player 动画、几何画板等等，使课堂精彩纷呈，让学生回味无穷。】

2.2.4 终边相同的角

让学生在直角坐标系中画出以下各角：－30°，－50°，405°，270°，－30°，330°，－390°，并说明它们分别是第几象限角。

给学生 3 分钟时间画图。之后，让三名同学在黑板上各画出－50°、405°和 270°。教师巡视一圈，发现存在以下问题：

① 部分学生认为题目过于简单，未经作图就直接写出了角属于第几象限；

② 多数学生在旋转方向上都是正确的，但并没有画出角旋转的轨迹。

师：大家都感觉到了，在直角坐标系中画图的确很方便，但在不知道所画的角（见图 15）是 405°的前提下，你觉得第一个图是几度？第二个图又是几度？

生：齐声回答 45°和－30°。

师：所以为了使我们画的角度可以正确的表示角度，应该画出角旋转的轨迹。

接下来让学生思考：上图中－30°，330°，－390°是第几象限角，这些角有什么内在联系？由此引出“终边相同的角”的概念。$330°=-30°+360°$，$-390°=-30°-360°$，两者都是与

－30°终边相同的角。一般地，终边与－30°相同的角的集合为$\alpha=-30°+k\cdot 360°\ (k\in Z)$。

【设计目的：通过学生自己画图，体验将角放在直角坐标系中来研究的好处，同时也发现数学中各种要求的必要性。】

2.3 课堂总结

让学生回答：通过本节课，你觉得自己学到了什么？

学生总结：这节课和平时的数学课不一样，让我们知道了数学概念的一些来龙去脉及为何要这样取名的原因，同时还激发了我们学习数学的兴趣，有利于我们以后对数学的学习．就像刚才老师所说的，数学源于生活，却高于生活，我觉得这跟我们做人的道理是一样的，是从生活中来，又到生活中去．

教师充分肯定了学生的认识，并对本节课内容又进一步总结：角的旋转如同陀螺的运动，不停地旋转，周而复始．大如日出日落、四季交替，小到如人的眼睛大约每隔 4 秒眨一眨．在这种周期性的运动中，有某种恒定的东西，始终保持不变，数学中，是利用三角函数来研究与刻画这些拥有周期现象的事物．

【设计目的：通过学生与老师的总结，进一步体验数学史融入课堂，不仅仅增加了课堂的知识、提升了课堂的文化品位，更重要的是让学生了解到数学学习的必要性，增强学生学习数学知识的信念．】

3 教学反思

本课例是经过多次打磨、反复修正后形成的。在课例开发过程中，笔者收获了很多。

（1）走进学术领域，明确专业进路。在课例的设计、打磨、研讨过程中，笔者得到了高校HPM研究团队的指导和帮助，从一个HPM的门外汉，慢慢对数学史融入数学课堂有了自己的思考，并深深感受到了HPM的魅力。同时，笔者也找到了构建自己未来20年数学课堂教学的新思路，提高了自己教好数学的信心。虽然过程艰辛，但付出很值得。

（2）加深数学理解，提升课堂品味。在教学设计过程中，搜集、研读数学史料，思考并感悟所讲授主题——任意角的必要性，对于“数学源于生活”的道理有了更深刻的理解。通过教育取向的数学史研究，自己的数学素养得到了改善；通过历史与现实的融合，自己的课堂品味得到了提升。

（3）丰富学生知识，改变教学观念。本课例关注知识的形成过程，注重学生的探究活动。笔者发现，探究过程激发了学生的学习欲望，拓宽了学生的数学思维，而学生的观点具有一定的历史相似性。因此，笔者对学生有了更丰富的理解，对“以学生为主体”的理念有了更

深刻的认识。

本节课也留下了一些遗憾。

（1）整节课有前大后小之嫌，应该对前面的课堂引入部分进行精简，加入一点数学思维深的问题，让学生除了理解也可以锻炼深层次的思维能力；

（2）课堂中对多个内容进行了历史的重构，数学史在本节课中的主要作用是为学生提供探索的依据与机会，并反映数学与现实生活之间的紧密联系，但是还是缺少一些历史依据，无法呈现原汁原味的数学史，希望能进一步的找寻与完善；

（3）课题中虽然用了部分信息技术，但希望把更多信息技术可以应用到课堂中，让数学史与信息技术辅助现代课堂，活动中可以再增加一些与学生的互动。

比利时—美国科学史家萨顿（G. Sarton, 1884~1956）说过："在科学和人文之间只有一座桥梁，那就是科学史。"同样我们也可以说，在数学知识与学生思维之间也需要一座桥梁，那就是数学史，让我们利用好它独特的魅力，构建火热的思维之路吧。

参考文献

[1] [苏] 诺渥塞洛夫著, 郑醒华等译. 三角学专门教程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2014

[2] [英] 斯科特著, 侯德润, 张兰译. 数学史[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2010

[3] 徐品方, 张红, 宁锐. 中国数学简史[M]. 北京: 科学出版社, 2009

[4] 张维忠, 汪晓勤. 文化传统与数学教育现代化史[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006

[5] 张奠宙, 王善平. 当代数学史话[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2010

HPM 视角下高中数学课堂教学的特点初探*

——基于“任意角”的同课异构案例分析

李婷　汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

“任意角”是苏教版高中数学必修四第一章《三角函数》的第一节课。高中三角函数是刻画周期现象的模型，而任意角则是三角函数的自变量。[1]初中阶段，学生已经学习过静态角的定义，认识了锐角、直角、钝角、平角以及圆周角，而本节课是要在此基础上，从运动的角度，用旋转的方法重新建构角的概念，[2]让学生经历和认识数学知识发生与发展的过程，感受和体验人类研究和发现数学的思维过程。其教学目标是：

（1）推广角的概念、引入大于 360°的角和负角；

（2）通过创设情境，理解并掌握正角、负角、零角的定义；理解任意角以及象限角的概念；掌握所有与 α 角终边相同的角（包括α角）的表示方法；

（3）通过本节课的学习，了解角与周期变化紧密关系，揭示知识的背景，激发学生学习兴趣，培养分析、探求的学习态度。

在第四届 HPM 研讨会上，来自江苏的教师 A 和来自浙江的教师 B 就“任意角”这一主题，进行了同课异构的教学展示。教师 A 并未从 HPM 的视角设计教学，教师 B 选择了 HPM 的视角。教学对象为初三年级同等层次的两个班级，授课教师 A 和 B 的教龄均超过十年，他们对授教班级情况均不熟悉。

教无定法，但不同教法之间可以相互启迪。英国作家萧伯纳曾说：“如果你有一种思想，我有一种思想，彼此交换，我们每个人就有了两种思想，甚至更多的思想”。本次会议安排同课异构活动的目的就是为不同视角的概念教学提供交流和碰撞的机会。鉴于中学数学教师对 HPM 了解不多，HPM 视角下的教学实践较少，本文拟对 A、B 两位教师的教学进行比较和分析，以便从中归纳出 HPM 视角下的高中数学课堂教学的若干特点。

1 教学流程的比较

表 1 给出了两节课的教学流程的对照。

* 上海市教育科学研究重大项目 “中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”（项目号：D1508）系列论文之一。

表 1 教学流程对比

环节	教师 A	教师 B
新课引入	• 复习静态角的定义； • 对已学过的角进行分类； • 提出“是否有超过 360°的角”的问题。	• 引入“刻画周期现象”的古诗； • 呈现与数学紧密相连的生活现象； • 创设了两个用函数刻画运动现象的问题。
概念建构	• 结合生活中体操、跳水等运动构建动态角的定义； • 直接给出正、负角、象限角、轴线角的概念。	• 追溯历史，解释静态角的定义； • 借用日晷实验演示古人用日晷测量时间的原理建构旋转角的定义； • 在实验演示中，学生创造正、负角，教师用自然规律解释正、负角规定的必要性与合理性； • 解释研究象限角的必要性。
公式探究	• 写出三个与具体角的终边相同的角； • 写出一定范围内与具体角终边相同的角； • 探究与轴线角终边相同的角； • 探究与任意角终边相同的角之间数量关系。	• 判断象限角； • 画图并探究：-30°，330°，-390°有何内在联系； • 探究终边相同的角满足的数量关系。
新知巩固	• 例题讲解； • 变式练习。	
课堂小结	• 教师总结新学的知识点。	• 教师总结提炼； • 学生畅谈收获。

从表 1 可见，A 采用了常规的教学设计，从复习旧知开始，通过体操和跳水运动，引出动态角的概念，再给出正负角、象限角的概念；然后引导学生探究终边相同的角之间的数量关系；接着是例题讲解和课堂练习；最后给出小结。B 教师采用 HPM 视角的设计，综合运用文学、天文和历史知识来引入动态角概念，引导学生探究正负角和象限角概念；然后引导学生探究终边相同的角的数量关系；最后是课堂小结。

在新知巩固环节，A 做得比较到位，设计的 5 道练习题，分别涉及了任意角的概念、判断象限角，写出几个与具体角终边相同的角，以及终边相同角的应用，内容全面，由浅入深，

达到了知识与技能目标要求。

B 教师由于在动态角和正负角概念上设计了探究活动而花费了较长的时间，因而缺失了新知巩固环节。

2 新课引入环节的比较

在新课引入环节，教师先引导学生回顾静态角的定义，引出本节课的学习内容——角。然后提问学生是否有超过 360°的角，结合生活经验，引出动态角概念。教师 B 先通过诗歌引出自然界的周期现象，引出刻画周期现象的新数学模型——三角函数，再利用日晷来引出动态角的概念。以下是两位教师的教学片段。

教师 A 的教学片段

师：今天由我来给大家上一节数学课，这节课我们一起来学习“角”，初中已经学过角，请大家回忆一下当时是怎么定义的呢？

生：从一个定点引出的两条射线组成的图形就是角。

师：也就是说由公共端点引出的两条射线组成的图形是角，初中学习过哪些角，这些角是怎么定义的，又是如何分类的？

生：小于 90°的角是锐角、等于 90°的角是直角、大于 90°的角是钝角，还有平角等于 180°。

师：很好，有没有同学补充？

生：还有周角是 360°。

师：这是初中学习的角，还是比较有限的，其实生活中有许多角是超过我们所学角的范围，大家有没有留意一下周围，有没有哪些角师超过了我们所学角的范围？

教师 B 的教学片段

上课铃响，教师 B 打开多媒体，请学生欣赏一首诗和一副对联：（1）离离原上草，一岁一枯荣。野火烧不尽，春风吹又生。（2）海水朝朝朝朝朝朝朝落，浮云长长长长长长长消。

师：这两句话刻画了什么样的生活现象？

生：（看到这首诗与对联，学生兴趣盎然，议论纷纷。）它是有规律的周而复始的现象。

师：你能再举出具有这种现象的例子吗？

由于是陌生老师上课，又有许多新老师听课，学生表现得有些拘谨，只有个别同学说出日夜交替，四季变换是“周而复始”的现象。这时老师总结这种周而复始的现象就是数学中的周期现象，紧接着又展示出匀速运动的汽车与喷泉场景。

师：数学中我们用什么函数来刻画汽车的匀速运动和喷泉运动的轨迹？

生：用一次函数刻画汽车的匀速运动，二次函数刻画喷泉运动的轨迹。

师：很好，大家数学学得很扎实！生活中的各种现象与数学有着紧密的联系，我们可以用函数表示生活中的运动过程，生活中的周期现象就可以用数学中的三角函数来刻画与研究,后面我们会慢慢地接触。今天我们将进入新的一章内容的学习,研究周期现象的对象----角。

接下来和教师 A 的做法类似，进入旧知复习环节，回顾初中学习过的静态角的定义。

在本环节，教师 A 采用了传统的做法，而教师 B 则通过古诗来引出周期现象的话题，令人耳目一新。从中可见，教师 A 的目的很纯粹，就是要实现角的推广；而教师 B 不仅仅满足于角的推广，更重要的是要点明：现实世界处处有周期现象，要研究周期现象，需要用三角函数模型，而三角函数的自变量是任意角。因此，B 是从解决实际问题的需要与数学内部的需要出发来揭示角的推广的必要性。

此外，数学和诗词，历来有许多可供谈资的材料。[3]这为 B 的课堂平添了许多文化味。

3 概念建构环节的比较

3.1 角的推广

教师 A 先举了运动会中体操、跳水等动作中旋转角的例子，并告诉学生生活中还有一些角具有方向性，例如钟表中的指针旋转所形成的角，所以要重新定义角的概念。然后在黑板上写下旋转角的定义，并重复两遍，再通过画图演示向学生解释旋转角的定义。

教师 B 首先介绍历史资料：早在 1 万年前人类就可以利用星体之间的角度（静态）规律来确定时间与四季，这时的角是静态定义的角。引领学生回忆静态角的定义并进一步直接给出旋转角的定义，然后播放一个介绍日晷的视频，介绍古人利用日晷（角度规律）测量时间与四季的原理。B 借用自制的简易日晷，当场演示日晷测量时间的原理，并展示了 0°到 360°的旋转角。之后，B 提出“是否有超过 360°的角”的问题，通过展示出日常生活中学生熟悉的场景：陀螺的旋转、电风扇的旋转、汽车轮胎的运动以及花样滑冰项目中运动员旋转，让学生感受到确实存在超过 360°的角。再次利用日晷影子旋转的角度进一步解释有大于 360°的角。

数学发展史表明，直观的考察，常常大大超前于理性的描述。[4]两种设计都借生活中的直观具象让学生看到 0°～360°角的局限性，创造学生的认知冲突，从而突显角的推广的必要性。教师 A 借助体育中的体操和跳水运动，教师 B 则借助天文、历史知识以及生活中的各种现象。A 的设计贴近生活，易于激发学生的兴趣。尽管体操和跳水运动能够让学生感受到

存在大于 360°的角，但由有关空间运动并非绕固定点进行，因而不易形成旋转角概念。B 的设计充满文化之魅，不仅激发学生的兴趣，而且，由于影子在日晷的晷面上绕一个固定运动，因而易于形成旋转角概念。

3.2 正负角

引入旋转角概念后，教师 A 直接给出正负角的概念。而 B 抛出按分别顺时针和逆时针旋转的 30°角，让学生自己去创造正、负角的名称，现场气氛十分热烈。下面是教学片段。

师：如何区别按顺时针旋转 30°的角与按逆时针旋转 30°的角呢？

生：用逆时针角与顺时针角区分。

师：好像可以，还有谁有想法？

生：用“正角与负角”区分。

师：这个也合理，还有更多的想法吗？

生：用左角与右角表示。

师：同学们都非常有创造力，实际上,历史上的许多数学家们也曾用这些方式来区分顺时针旋转 30°的角与逆时针旋转 30°的角。为了易于数学表达，同学们觉得用什么符号来区分不同方向的角比较合适？请说说你的理由。

生：我觉得还是用正（+）、负（−）表示比较好，因为我们学过这个符号，这样更方便。

师：同学们真是伟大啊，你们的想法与数学家不谋而合，看来，只要大家愿意努力，未来都可能成为伟大的数学家……

接着 B 进一步追问学生朝哪个方向旋转的角为正角，学生统一认为顺时针旋转的角为正角，而这与教材上的规定恰恰相反。于是，B 向大家展示了海底旋涡、台风以及人沿跑道跑的方向都是逆时针方向，由此解释，数学家们规定正、负角源于自然现象与人的本能，有其合理性。虽然这样解释的正确性还未得到验证，但至少给学生一种意识，数学上的规定是有其必要性与合理性的。

A 在正负角概念引入时采用“直接切入法”，能较快地将知识呈现给学生，探究成分较少。弗赖登塔尔认为，数学教学应使学生利用旧知“再创造”新知。[5]B 则借鉴正负角的历史，通过提出“区分顺时针旋转角与逆时针旋转角”的问题，让学生“再创造”正负角概念。这里，正负角概念由学生自主建构，体现了“知识之谐”；学生有机会像数学家那样去给按不同方向旋转的角进行命名，并使用符号来表达，既积累数学活动经验，同时也获得成功的体验，体会到“探究之乐”。

3.3 象限角

正负角概念引入后，教师 A 画图结合讲解直接给出象限角的概念，让学生运用概念判断 30°，-30°，420°，-150°，-90°分别是第几象限角，然后请学生思考初中学习的锐

角和钝角是第几象限角。

教师 B 先向学生解释，不同的人从不同的视角研究同一事物时，需要遵循统一的标准。为了便于统一和规定，研究角需要一个数学工具，从而提出“你认为把角放在哪一个数学工具中研究更方便”的问题，引出象限角的概念，最后判断象限角。

教师 A 的教学片段

师：为了便于研究，我们把角的始边固定下来，固定在坐标系中，角的顶点固定在原点上，把始边固定在 x 轴非负半轴上，接下来让始边开始旋转，始边会落在象限内，除了落在象限内，还可能落在什么地方？

生：坐标轴上。

师：很好，那始边在旋转的时候，如果落在象限内，我们就把这个角称为象限角。终边落在第一象限的角叫做第一象限角，那么终边落在第二象限内就叫第二象限角。刚刚有同学说终边可能落在坐标轴上，我们就叫它为轴线角。接下来，我们看看刚刚画的一些角分别是第几象限角......

教师 B 的教学片段

师：我们在研究旋转角的时候，可以把始边竖着放，横着放，也可以斜着放。如果所有人在研究同一事物时没有一个标准，看着很别扭。所以我们在研究任何一个数学知识时必须用工具统一规范。那么你认为把角放在哪一个数学工具中研究更方便？

生：平面直角坐标系。

师：很好，既然要放在平面直角坐标系中研究，那么我们看看该如何统一始边呢？你们觉得把始边应放在哪儿？

生：x 轴。

师：我们把始边放 x 轴正半轴上，历史上的数学家们也是这么想的。接着，始边开始旋转，旋转到这儿（教师在黑板上画出一个终边落在第三象限的角），这个角多大？是不是大于 180°？

生：嗯。

师：那如果没有这个坐标系，让你去量这个角容易吗？比如我用这个直角三角尺去量，方便吗？

（学生纷纷摇头）

师：但是我放在直角坐标系中，马上就能量出来，只需要量哪一部分？

生：只需要测量下面的锐角，然后加上 180°。

师：非常好！也就是先看它旋转了几圈，再看多出的锐角部分。看来把角放在直角坐标

系中研究确实比较方便......

与正负角的情形类似，A 直接给出象限角的概念，而 B 则解释了引入象限角的必要性，使得象限角的学习更加明确与清晰，体现了知识之谐。

4 公式探究环节的比较

教师 A 先提出“第一象限角是否都是锐角”的问题，然后让学生写出 3 个与 70°终边相同的角，判断哪些角与 30°终边相同，说出在 360°到 1080°范围内与 75°角终边相同的角有哪些，求出终边分别在 y 轴非负（正）半轴上、x 轴非负（正）半轴上的角 α 所满足的关系式。最后，教师提出一般性的问题：与角 α 终边相同的角满足怎样的关系？

教师 B 先让学生判断-50°，405°，270°，-30°，330°，-390°分别是第几象限角，并且在平面直角坐标系中画出各角的终边，再引导学生观察-30°，330°，-390°的角有什么内在联系。下面是两位教师的教学片段。

教师 A 的教学片段

师：锐角是第几象限角？

生：第一象限角。

师：第一象限角是否都是锐角？

生：不是。

师：能否举个反例？

生：420°的角是第一象限角，但它不是锐角。

师：很好，我们一起来看教案上的四个问题。

接下来，教师在几何画板上演示教案上的四个问题。

师：先画出 70°的角，再将 70°角的终边按逆时针方向旋转一圈，回到原来的位置，此时的旋转角是 430°，如果再向逆时针旋转一圈，此时旋转角为 790°，反过来，如果顺时针旋转一圈则旋转角变为-290°，转两圈就是-550°，所以和 70°终边相同的角是由 70°角的终边逆时针或是顺时针旋转一圈、两圈甚至更多圈得到的。

接着用同样的方式解决了后面三个问题。

教师 B 的教学片段

师：-390°、-30°、330°之间有怎样的联系？

生：它们的终边是相同的。

师：那么数量关系上有什么联系？

生：相差 360°。

师：能不能说得更精确一些？

生：330°比-30°多 360°，-390°比-30°少 360°。

师：是的，我们甚至还可以得到-390°比 330°少 720°，也就是 2 个 360°，或者也可以说是多 2 个 360°。

接着教师引导学生总结出终边相同的角之间相差 k 个 360°，用数量关系式表达与角 α 终边相同的角 β：$\beta=\alpha+k\times360°$（$k\in Z$）。

在终边相同的角的探究上，A 和 B 都是从特殊实例入手，探索新事物， 总结出一般性的规律。A 从几何意义上去探寻终边相同角的关系式，由易到难，循序渐进。教师 B 从代数角度探究终边相同角的关系式，两种方式均能够促进学生的积极思考。A 给予学生大胆尝试、猜想、验证的机会较少，学生学习的积极性与主动性有待提高，只有毅力持久的学生才能保持 45 分钟的注意力。B 给学生动手画图、思考探究的机会较多，尽可能地让学生自己发现规律，归纳总结，探究过程效率较高，学生整体表现活跃。

5 课堂小结环节的比较

教师 A 自己总结课堂所学内容。教师 B 先提炼本节课学习的内容，阐述角的本质以及三角函数的本质，再让学生谈谈学习收获与感悟。

教师 A 的总结片段

师：我们把初中的角扩充到了任意角，就是正角、负角、零角，由旋转得到，第二我们学习了终边相同的角怎样表示，今天的就上到这里。

教师 B 的总结片段

师：角的旋转如同陀螺的运动，不停地旋转，周而复始。大如日出日落、四季交替，小到如人的眼睛大约每隔 4 秒眨一眨。在这种周期性的运动中，有某种恒定的东西，始终保持不变，数学中，是利用三角函数来研究与刻画这些拥有周期现象事物。今天我们不仅扩展了初中学过的角，还探究了终边相同角的关系，请同学们说说这节课你的感受？

生 A：我学到了角的度数可以很大，也可以很小，有正角、负角、零角，还有相同终边角之间相差 360°的 k 倍（$k\in Z$）。

生 B：我知道了日晷的原理，原来角很早就出现了，还有今天我们和数学家一样，能够自己创造角。

教师A自己做了简短的小结，而教师B在点明角的推广对于研究周期现象的重要性之后，

又一次把机会让给了学生。学生收获了知识，体验了成功的喜悦，增强了自信心。

6 结语

美国学者 Bidwell 曾说过："在教学中融入数学史，可以将学生从数学的孤岛上挽救出来，并安置于一个生机勃勃的新大陆上，这个新大陆包含着开放的、生动活泼的、充满人情味的并总是饶有趣味的数学。"[6]从上述比较可以看出，HPM 视角下的数学教学注重知识的自然发生过程，注重激发学生的数学学习动机，注重为学生提供探究机会，注重数学课堂的文化品味，具有"知识之谐"、"探究之乐"、"文化之魅"与"德育之效"的特点。

虽然数学史的融入让课堂变得精彩，但一节课只有 45 分钟，过多的探究必然导致巩固练习时间的减少。教师需要精心选取数学史料，合理设计探究环节，方能使让 HPM 视角下的数学课堂更为常态化。

参考文献

[1] 王芝平. 构建三角函数刻画周期现象——任意角三角函数概念的教学反思[J]. 数学通报, 2012, (1): 25-26+12.

[2] 许章永."任意角"教学设计的思考[J]. 教育教学论坛,2010,(33):236.

[3] 张奠宙. 数学和诗词的意境[J]. 世界科学,2007,(02):48.

[4] 郭思乐. 数学教学中的直观[J]. 课程.教材.教法,1986,(05):40-42+39.

[5] Freudenthal, Hans. New Math or New Education?[J]. Prospects: Quarterly Review of Education, 1979,9(3):p321-31.

[6] Bidwill J K. Humanize Your Classroom with the History of Mathematics [J]. *Mathematics Teacher*, 1993, 86(6): 461-464.

HPM 视角下的“字母表示数”教学

孙 洲

（上海市延河中学, 上海，200331）

1 引 言

代数学经历了从修辞代数到缩略代数、再到符号代数的过程。[2]在代数发展的早期，人们完全用文字来表示一个代数问题的解法，这便是修辞代数。古代两河流域的代数学就属于修辞代数，公元前 6 世纪古希腊的毕达哥拉斯学派使用的也是修辞代数方法。公元 3 世纪，古希腊代数学鼻祖丢番图（Diophantus）在其《算术》中首次用字母“ς”来表示未知数，成为缩略代数最早的作者。然而，丢番图并不知道用字母来表示任意一个数，他只能用特殊的数来代替题目中的已知数。[3]

直到 16 世纪，法国数学家韦达（F. Viète, 1540～1603）在《分析引论》（1591）中使用字母来表示任意数或一类数，标志着符号代数的诞生。

“字母表示数”是沪教版初中数学七年级上册第一课的内容，是学生学习符号代数的开端，因此，这一内容的教学至关重要。学生在六年级时已经学过方程，他们对“字母能表示未知数”是有认知基础的，而“字母能表示任意数”则是本需要突破的难点。教材直接告知字母可以表示任意数，未能揭示“字母表示任意数”思想的产生过程，难以激发学生的学习动机。代数学的历史告诉我们，从用字母表示未知数到用字母表示任意数，经历了 1300 年的漫长过程。数学教育研究也表明，学生对于代数字母符号的理解存在一定的历史相似性。有鉴于此，笔者决定尝试从 HPM 的视角来实施教学，让学生经历从缩略代数到修辞代数再到符号代数这一完整的过程，深刻理解字母表示数的一般意义，从而突破教学难点。

本节课拟定的教学目标是：

（1）理解字母表示的意义。因为字母表示数是“代”数的基础，学生在学习本节课之前对字母表示数是有一定感知的，所以通过本节课的学习进一步理解字母表示数的意义是首要目标。

（2）会用字母表示一些简单问题中的数。能够用字母表示数又是后面列代数式学习的前提，所以本节课的学习中会用字母表示问题中的数以及如何表示是为后续的学习做铺垫。

（3）通过用字母表示数的相关数学史的了解，领会一般化的数学思想方法。数学史的

渗透是本节课的关键，而教学的难点就是要让学生理解字母表示任意数的功能。让学生通过探究，经历从由修辞代数到缩略代数再到符号代数，体会一般化的数学思想。

2 教学设计与实施

2.1 复习旧知

问题 1：给出古埃及时期的莱因德纸草书上的一个问题。一个量，加上它的$\frac{2}{3}$，它的$\frac{1}{2}$和它的$\frac{1}{7}$，等于 33。求该量。

在解决问题一时，学生很自然的想到这个所求的量是未知量，所以设出未知数 x 表示所求量，根据等量关系列出方程 $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=33$。

学生列出方程后，笔者追问了三个问题：这里的 x 表示什么？可不可以换成 a、b 或者其他字母？在一些问题的求解过程中，字母可以用来表示什么？目的是让学生根据已有知识，得到字母可以用来表示未知数，为后面的学习埋下伏笔。

2.2 新课探究

问题 2：古希腊数学家丢番图一生中解过很多代数方程和不定方程，被人们誉为“代数学鼻祖”。他所著《算术》一书的第 1 卷第 1 题，翻译成现代语言，是这样的：已知两数的和与差，求这两个数。

这个问题是引入部分的关键，也是整节课的重点所在，设计的意图是，学生知道字母可用来表示未知数，故会去设出所求的两个数；而两数的和与差虽是已知的，题中却没有给出，所以学生产生了认知冲突。让学生分组讨论，之后，教师展示各组的解法。

（1）不知道怎么表达已知数，如图 1。

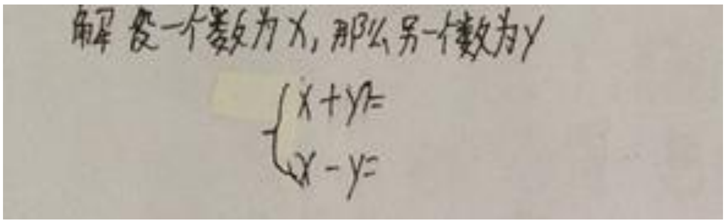


图 1

以下是教学片段。

师：请你说说你的想法。

生：因为这两个数是让我们求的，是未知的，所以设它们分别为 x 和 y。

师：那么你写出的 $x+y$ 与 $x-y$ 表示什么？

生：$x+y$ 与 $x-y$ 分别表示这两个数的和与差。

师：那为什么等号后面什么都没写？

生：因为这两个数的和与差没告诉我们是多少。

师：而题目中不是说已知两数的和与差吗？

生：但是没告诉我们具体是多少啊，这正是我不理解的地方，所以我就空着了。

学生在此形成了认知冲突，已有的知识让他们很自然的用字母表示未知数，但当已知的两数和与两数差没有给出是多少时就不知道该如何处理了。

（2）用特殊值来代替已知数，如图 2。

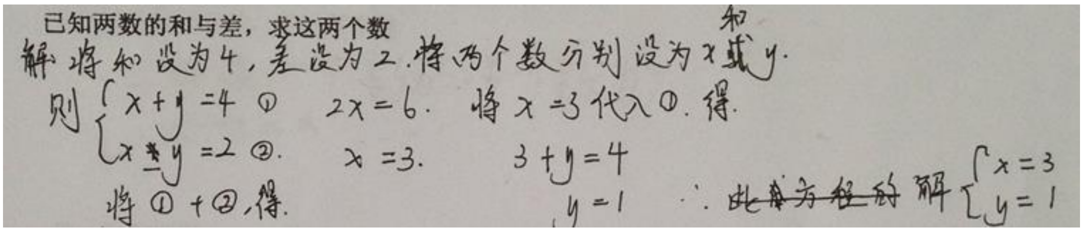


图 2

以下是教学片段。

师：你说一下为什么这么做？

生：因为和与差没有告诉我们是多少，所以我就想能否用特殊值代入，这样就可以求出这两个数了。

师：这个做法好像比前面同学的做法有进步了，通过用特殊的数来表示两个数的和与差，可以求出这两个数的值，那么我想问一下大家，这个解法可不可以？（抛出问题，引发学生讨论，有人认为可以，有人认为不行。教师让不认同该解法的同学说明理由。）

生：这样的做法答案不唯一，如果我设这两个数的和与差不是 4 与 2，设其他的数，这样求出来的两个数就不一样了。

师：嗯，非常好，因为两数的和与差可以是任意的，所以这种解法具有一定的特殊性，现在我们看来是不严密的。可是如果在 1800 多年前，这个同学一定是伟大的数学家，因为丢番图就是用这个方法来解决这个问题的，我们可以叫她小丢番图。

展示此解法的目的主要是让学生看到用特殊值代替已知数的不严密性，从而促使学生进一步的思考，为后面的新解法做好铺垫。通过将学生和丢番图作比较，让她获得成就感，而其他同学一下子感觉丢番图这个伟大的数学家离他们并不遥远，从而加深对历史上数学家的印象，也为后面的代数学发展史的学习打下基础。

（3）用符号表示已知数，如图 3。

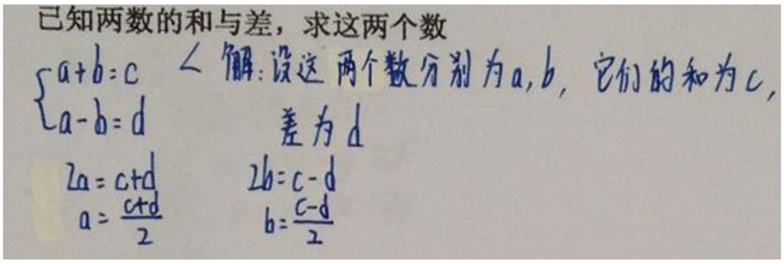


图 3

以下是教学片段。

师：请你来说说为什么这么做？

生：我发现这两个数的和与差并没有告诉我们具体是多少，于是我就将它们设为字母来做。

师：哦，你就是用字母来表示这两个数已知的和与差，而前面我们已经讨论出这里的和与差是任意的，所以你用字母来表示它们，那么这样我们不仅仅可以用字母来表示未知数，还可以用字母来表示什么？

生：还可以用字母来表示已知数。

师：也就是说，字母可以表示任意数。同学们非常棒，通过前一种解法，同学们成了小丢番图；而通过现在这种以解法，同学们又成了小韦达。

通过上面第三种解法，学生发现，当题中没有给出已知量的具体数值时，也可以用字母来表示它们。于是，很自然得到结论：字母不仅可以用来表示未知数，也可以用来表示已知数。通过将学生与数学家韦达比较，进一步拉近他们与数学家之间的距离。

（4）文字表述，如图 4。

这一方法是教师在另一个班级的课堂上发现的，用来分享给同学。

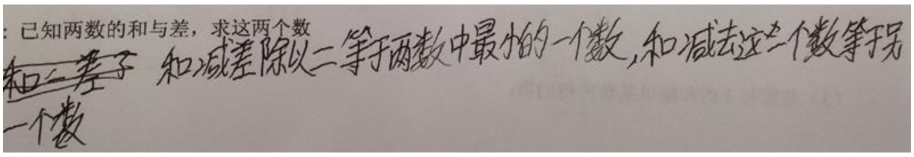


图 4

师：这个解法和前面用字母表示数的解法有什么区别和联系？

生：联系就是这两种解法实际上是一样的，区别就是，一种是用文字来表述结论，一种则是用字母来表示结论。

通过两种方法的比较，让学生体会到，字母表示要比文字表述简单得多，这也反映了代

数学的演进、优化过程。

2.3 历史回溯

教师介绍代数学的三个发展阶段，分别与上述三种解法相对应：

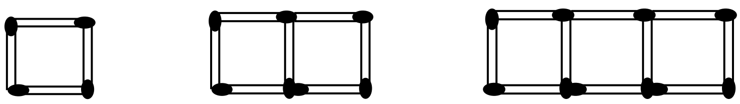
我们刚才的三种做法恰好对应了历史上代数学的三个发展阶段，即修辞代数、缩略代数和符号代数。解法 4 对应的阶段叫做修辞代数，就是完全用文字来表达一个问题的解法，因为古人一开始并未学会用字母表示数，问题的求解是用文字表达的，没有出现任何字母符号。所以用文字来表达解法，可能一个很简单的问题都要写好几页纸，大家如果感兴趣可以去阅读《九章算术》、《计算之书》等数学经典。解法 2 对应于缩略代数阶段：用字母来表示未知数，这一阶段的代表人物就是古希腊数学家丢番图，由于不知道用字母来表示任意数，丢番图只能用特殊的数来代替题中的已知数。解法 3 对应于符号代数阶段：用字母表示任意数，这一阶段的代表人物是法国数学家韦达，他在《分析引论》中使用字母来表示未知数和已知数，也就是用字母来表示任意数。

通过代数学发展三阶段的介绍，让学生体会字母表示数思想产生的过程和字母表示数的意义，并且从历史的角度去理解：为什么要用字母表示数？字母可以表示什么数？这里，数学史的渗透达到了高潮。教师又强调，我们在课堂上用了短短的十几分钟就走完了当初数学家花一千三百多年时间才走完的路，因此，我们站在了前人的肩膀上！

2.4 新知应用

在该环节，教师让学生寻找规律，并用字母来表示任意数。

例 用一盒火柴棒作如下实验：



用 4 根火柴棒搭成一个正方形，接着用火柴棒按如图所示的方式搭成两个正方形，再用火柴棒搭成三个正方形、四个正方形、……

问题（1）：能否根据图示，完成下列表格呢？

正方形的个数	1	2	3	4	……
用去的火柴棒的数量					

问题（2）：那么 20 个正方形需要多少根火柴？（追问：怎么算出来的？）30 个呢？

问题（3）：那么任意个正方形需要多少根火柴呢？

在具体的回答过程中发现，学生大部分在第一个和第二个问题中能够完成回答，对于第三个问题，基本上摆脱了对修辞代数的依赖，大部分都能过渡到符号代数，但是由于个体有差异，并不是所有的学生在字母表示任意数的问题上都能够从修辞代数过渡到符号代数。一名学生依然用文字来表述搭任意个正方形所需的火柴棒数目：4+（正方形个数-1）×3。

2.5 巩固练习

在本环节，利用前面各问题中的结果，强调字母表示数的规范写法。一方面，将文字语言转化为符号语言；另一方面，强调书写规范，为后续“列代数式”的学习作铺垫。同时，也对前面涉及的数学史内容做一个呼应，而不让它悄然谢幕。

3 学生反馈

对于问题 2 的教学，笔者本来预设学生会给出三种解法，见表 1[4]。让学生经历从文字表述到字母表示未知数再到字母表示任意数的过程，从而对应代数学发展的三个阶段，让学生理解字母不仅可以表示未知数，还可以表示已知数，从而突破教学难点。

表 1 教师预设问题 2 的三种解法

代数学的三个阶段	具体解法
修辞代数	两数和加两数差再除以 2，得较大数；两数和减两数差再除以 2 得较小数.
缩略代数	设两数分别为 x 和 y，两数和为 100，两数差为 40，算得 x 和 y 分别为 70 和 30.
符号代数	设两数分别为 x 和 y，两数和为 m，两数差为 n，算得 $x=\dfrac{m+n}{2}$，$y=\dfrac{m-n}{2}$.

然而，教学过程中，没有一个学生用文字表述出问题的结果，说明学生在用文字来表述一个问题的解法还是有一定困难的，他们一看到有未知数，就想到用字母来表示未知数，可见，多数学生已经掌握了缩略代数的解法。表 2 给出了问题 2 的求解情况。从中可见，60%的学生能想到用字母来表示未知数；但其中有 7 名同学在用字母表示未知数后一筹莫展，说明他们对题中没有具体给出已知数还是感到困惑的。另 5 名学生用特殊值来代替已知数，虽然列出了方程组，得到所求数的值，但通过讨论，发现该解法是不恰当的，从而进一步形成认知冲突。只有 6 名学生用符号代数方法来解决问题并完全做对，这几名学生已经完全理解字母表示数的意义了。

表 2 课堂上学生对番图问题的解法

解法	人数	百分比
修辞代数	0	0%
缩略代数	12(7 人只设未知数没有列出方程)	60%（35%）
符号代数	8（6 人做对）	40%（30%）

课后，对全班 20 名学生进行了问卷调查，有效问卷 20 份，调查结果表明对“听懂了这节课的内容”这一观点的选择“非常同意”和“同意”的有 16 个学生（占全班学生的 80%），说明多数同学能够理解了“字母表示数”的意义。

对“我愿意了解字母表示数的历史知识”这一观点的选择“非常同意”和“同意”的有 18 个学生（占全班学生的）90%（见图 6），说明这节课应用数学史来解决问题给了他们全新的尝试，让他们产生了非常大的兴趣。

从问卷中最后一个问题“本节课你印象最深的是什么”的回答就可见一斑，全班有 12 名学生（占全班学生的 60%）都提到了对数学史的印象深刻。

有的是说数学史有趣吸引了自己（见图 5）：

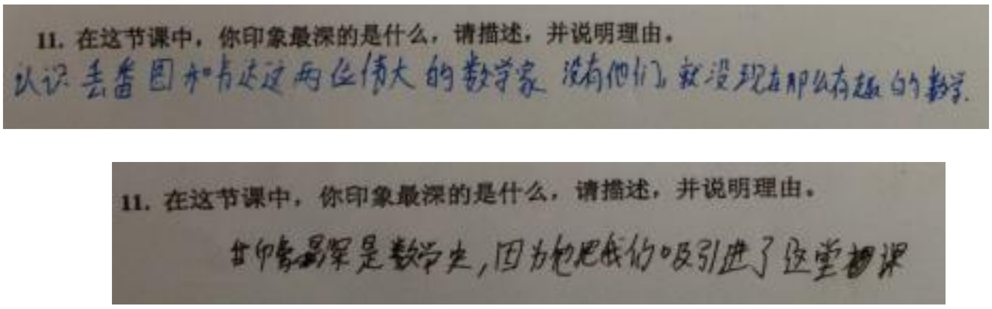

11. 在这节课中，你印象最深的是什么，请描述，并说明理由。
认识丢番图和韦达这两位伟大的数学家，没有他们就没现在那么有趣的数学
11. 在这节课中，你印象最深的是什么，请描述，并说明理由。
我印象最深是数学史，因为他把我们吸引进了这堂好课

图 5

有的说我们用短短的一节课时间完成了 3 千多年的跨越（见图 6）：

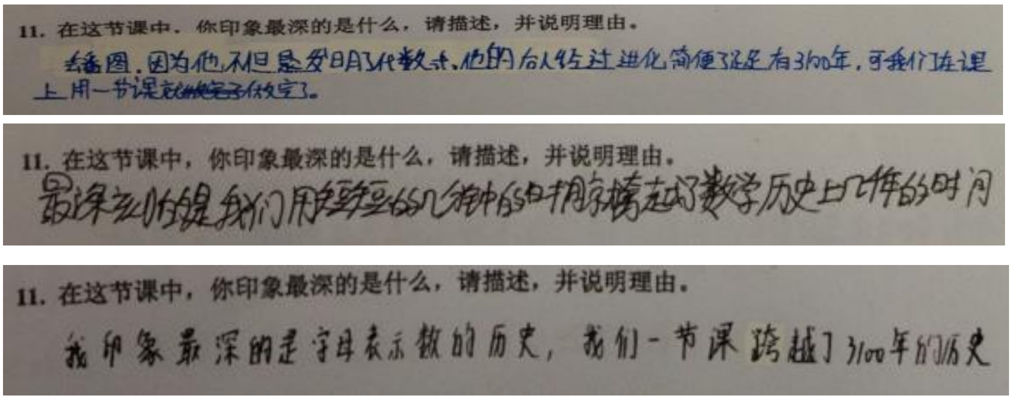

11. 在这节课中，你印象最深的是什么，请描述，并说明理由。
丢番图，因为他不但是发明了代数式，他的后人经过进化简便了足足有3100年，可我们在课上用一节课就完完全全做完了。
11. 在这节课中，你印象最深的是什么，请描述，并说明理由。
最深刻的是我们用短短的几分钟的时间跨越了数学历史上几千年的时间
11. 在这节课中，你印象最深的是什么，请描述，并说明理由。
我印象最深的是字母表示数的历史，我们一节课跨越了3100年的历史

图 6

5 结语

数学史的融入为学生经历数学知识的发展过程提供了很好的载体。在以往的教学中，教师往往直接告诉学生字母可以用来表示任意数，学生只是知识的被动接受者，并没有探究的机会，也没有知识发生和发展的而过程。本节课利用两个经典历史问题引入教学，为学生创设了探究的历史情境。问题 1 的解决，表明大部分学生已经掌握了用字母表示未知数。在问题 2 的探究过程中，学生给出了不同的解法，与代数学的后两个发展阶段相对应。通过不同方法的展示，学生对用字母可以表示未知数、用字母可以表示已知数、用字母可以表示任意数这三个层次有了进一步理解。

通过古今方法的对比，让学生体会到数学学习的历史相似性，看到历史上数学家也经历了同样的过程，感悟到数学思想演进的缓慢过程；认识到古人历经数百年甚至数千年才解决的问题，我们今天通过努力也能加以解决。在探究过程中，学生仿佛成了数学家，获得了成就感，提升了自信心。而历史上的数学家仿佛成了班级里的一名学生，学生得以与他们“近距离接触”。此外，数学史将数学中有趣的一面呈现给了学生，为他们带来了新鲜感，极大地激发了学习的积极性。

参考文献

[1] 上海市教育委员会. 上海市中小学数学课程标准[M]. 上海: 上海教育出版社, 2004.

[2] 汪晓勤，樊校. 用字母表示数的历史[J]. 数学教学, 2011(9).

[3] 张连芳，汪晓勤. 初中生对符号代数的理解：历史相似性初探[J]. 中学数学月刊, 2013(4).

[4] 叶晓娟，顾海萍. 基于历史相似性的“字母表示数”的教学[J]. 中学数学教学, 2014(10).

学术活动

春雨绵绵润桐乡，共话 HPM 促成长

李婷

（华东师范大学 教师教育学院 200062）

书香脉脉，梧桐影长。阳春 3 月 30 日清晨，春风拂晓，细雨绵绵。华东师范大学教师教育学院及数学系的博士、硕士生一行共 20 余人，在汪晓勤教授的带领下前往浙江省桐乡凤鸣高级中学开展了“数列专题”的 HPM 教学研讨会。本次研讨会共有两个环节，先由凤鸣高级中学 HPM 研究小组的三位老师授课，然后与会人员一同参加研讨。开课教师与内容分别是：孙冲老师的《数列的概念》、方蕾老师的《递推数列》和饶彬老师的《等差数列》。下面是本次教学研讨会的简要流程。

课堂一：数列的概念

孙冲老师首先带领学生复习函数的概念，以细胞分裂和人口增长为例回顾已学过的函数类型。然后以《庄子. 天下篇》中记载的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”、斐波那契《算盘全书》里的七老妇人赴罗马问题与生兔子问题、赫歇尔发现天王星、谷神星的发现为情境，并播放 1 分 20 秒的精彩视频介绍了神奇的“螺线与斐波那契数列”，以及古希腊毕达哥拉斯的三角数与正方形数，从而抽象出新的函数模型——数列，利用历史材料与自然现象展示了数学与天文、自然和生活的紧密联系。概念建构环节中，教师先让学生观察和总结上述数列的共同特征，并尝试说出数列的定义。概念讲解环节，教师强调了数列的“顺序”与“函数”本质特征。再引导学生类比函数的表示方法，获得通项公式的概念以及数列的三种表示方法。接着，孙老师以举例的方式按照数列的项数、任何一项的绝对值是否超过某一正的常数、函数单调性角度考虑对数列进行了分类。最后，学生在巩固训练中完成了本节课的学习。

（孙冲老师授课）

课堂二：递推数列

上课前，方蕾老师播放“九连环基本解法”视频，引起学生好奇心。接着引领学生回顾数列的概念与数列的表示，并阐明本节课学习内容“探究数列中项与项之间的等式关系”。然后分别呈现了斐波那契数列与三角形数列，引导学生先观察数与数间的联系，再验证数列后面每一项的数是否均满足此种关系，最后归纳出项与项之间满足的递推公式。在处理三角形数列时，教师提出“你能否从图形间的规律看出数列项与项的关系？”，从而引出第二种获得递推数列的方式。在解决了《庄子. 天下篇》中的问题、“科赫曲线”的边数、周长问题与棋盘麦粒问题中，不仅使用这两种方法找到了数列的递推公式，还总结了第三种获得递推关系的方式。此外，在解决棋盘麦粒问题时，教师让学生自己创造一种放麦粒的递推方法，学生想到构造幂、指等多种形式的递推关系，拓宽了学生思维。最后，解“九连环”问题的呈现将整节课推向了高潮，与课前的视频相呼应。

（方蕾老师授课）

（饶彬老师授课）

课堂三：等差数列

情境创设环节，饶老师先介绍古代“结绳记事”和“五进制数”的由来，从中得出两个简单的数列。然后呈现自制的“七衡六间图”，并解释了《周髀算经》中“七衡六间图”的原理，把每一衡与第一衡的距离抽象出一个数列。接着给出古巴比伦《泥版书》中“五人分银”与《九章算术》中“官员分鹿”的故事，进一步得到两个数列。学生在经历观察、归纳、举例、概括的过程中，构建了等差数列的概念。接下来，教师让学生创造等的差数列的符号表达，并根据概念探究出等差数列的通项公式。在讲到“等差中项”时，教师阐释此概念起源于古巴比伦两数之间的差值。课堂练习部分，学生欣赏并解决了古代“竹九节”问题和《张丘建算经》中数列求解问题。最后，饶老师总结，从人类计数开始，等差数列就呈现在人类

生活中，现代生活也处处有等差的踪影，例如电影院的座位、鞋子的大小、商品的价钱、住房价钱、银行贷款等等……

下午，春雨依旧菲菲，教学研讨会却开展得如火如荼。先由三位执教教师说课，然后由各位老师与硕、博士生对三节 HPM 数列专题课例发表看法。有的认为利用数列的历史背景知识不仅可以激发学生兴趣，展示数学魅力，创造学习动机，更重要的是做到了让学生知其然，知其所以然，还要知其必然；有的认为创设的问题情境精彩纷呈，例题也充满浓厚的文化底蕴，令人耳目一新；有的总结这三节课就是:“把数列玩了起来”；还有的硕士认为三位教师真正做到 M.克莱因所说的那样：“每一个教师都应该成为一名演员，他甚至可以行为古怪一点，他不应害怕幽默，而应随意使用它，即使是一个无关的玩笑或故事也能大大地活跃课堂”。博士生们则从更高的理论层面来评析。有的博士认为这三节课史料的运用具有连续性，做到了“一材多用”，还可作为后续内容学习的生长点，实现“旧料新用”。也有的提出了史料价值使用效果的最优化问题，史料选择与融入要恰如其份。当然也有些博士从 HPM 实践取向的几个方面、课堂设计的背景线索等多角度来评价。

（教学研讨环节）

（研讨会成员合影）

研讨会最后，由汪教授总结。汪教授高度肯定了开发三节连续数学内容的 HPM 课例的价值，并对三节课中的史料运用情况作出了点评，就如何提高史料运用的深刻性提出了几点建议。他认为三节课在加强人文精神、数学欣赏和提高学生的数学素养方面还需努力。同时指出，HPM 实践研究需要高校与中学形成共同体，既提高中小学数学课堂教学效率，又促进教师专业发展。

在这春雨绵绵之际，我们在桐乡轻轻叩开泥土，清香徐来，慢慢播下HPM的种子，共同憧憬数学教育的美好未来，等那秋日的黄风吹过，HPM教学研究终会收获丰硕的果实！