上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2014 年第 3 卷第 2 期

阿基米德

（Archimedes，公元前 287—公元前 212）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

目 录

刊首语

本期的封面人物是古希腊伟大的数学家、力学家、天文学家阿基米德。

阿基米德生于西西里岛的叙拉古的一个贵族家庭。他从小就善于思考，喜欢辩论。早年游历过古埃及，曾在亚历山大跟随欧几里得学习。后人给与阿基米德极高的评价。数学史家贝尔（E.T.Bell）说："任何一张列出有史以来三个最伟大的数学家名单中，必定包括阿基米德，另外两个通常是高斯和牛顿"。普林尼（Pliny）称阿基米德是"数学之神"。

对阿基米德来说，除了机械和物理，他比较有兴趣而且投注更多时间的是纯理论上的研究，尤其是在数学和天文方面。在数学方面，他的著作《论球与圆柱》从定义和公理出发，利用"逼近法"算出球面积、球体积、抛物线、椭圆面积，后世的数学家依据这样的"逼近法"加以发展成近代的"微积分"，因此阿基米德被誉为近代积分学的先驱。他还研究出螺旋形曲线的性质，现今的"阿基米德螺线"曲线，就是因为纪念他而命名。另外他在《恒河沙数》一书中，他创造了一套记大数的方法，简化了记数的方式。

在他的墓碑上雕刻着阿基米德要求用的标记：内接圆球的圆柱。因为他证明了内接于圆柱的球体体积等于圆柱体积的 2/3 , 由于圆柱体积的公式是已知的，因而他推出了圆球的体积公式。他因这一数学方面的成就而感到自豪。

在人类历史上没有哪一个古代科学家像阿基米德那样，将熟练的计算技巧和严格的证明融为一体，将抽象的理论和工程技术的应用紧密结合起来。

让我们谨记先哲成就，向大师学习！

理论探讨

HPM 领域教师专业发展探究

王 科

（华东师范大学数学系，上海，200241）

摘要：如何帮助缺乏 HPM 相关知识的中小学数学教师进行 HPM 教学实践，迄今尚缺乏可行的途径。本文建立 HPM 教师专业发展的三棱锥模型，分析在专业发展过程中，教师知识领域、数学教育研究者知识领域和数学史家的知识领域之间的相互作用和融合的过程，提出数学教育研究者诠释学循环，并辅以案例来诠释模型，阐述三棱锥模型对 HPM 领域的意义。

关键词：HPM；教师专业发展；三棱锥模型；诠释学循环

1972 年，在英国 Exeter 召开的第二届国际数学教育大会上，成立了数学史与数学教学关系国际研究小组(International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics，简称 HPM)，1976 年开始隶属于国际数学教育委员会[1]。自此，数学史与数学教育关系成了数学教育的重要研究领域之一。

1 HPM 研究方向

HPM 关注的内容包括数学与其他学科的关系、多元文化的数学、数学史与学生的认知发展、发生教学法、数学史与学生的困难、数学原始文本在教学中的应用等，但其主要研究方向[2]：

（1）关于“为何”的探讨

数学教学中为什么要运用数学史？即对数学史的教育价值进行探讨。欧美学者早在 19 世纪就开始讨论。其中有数学家泰尔凯、德摩根、邹腾等，数学史家卡约里、史密斯等都强调数学史的教育价值。Fauvel 总结了数学教学中运用数学史的 15 种理由[3]，Tzanakis 和 Arcavi 从 5 个方面总结了数学史对支持、丰富和改进数学教学的作用[4]，Gulikers 和 Blom 从三个维度上分别论述数学史对于教师和学生的价值[5]，Jankvist 将数学史对于数学教学的作用分

成“工具”和“目标”[6]。

（2）关于“如何”的讨论

对于数学史在数学教学上的具体运用方法作理论探讨。HPM 研究者需要根据不同的教学情境与内容，探索数学史融入数学教学的最佳方式。Fauvel 总结出十种具体方式[3]；Tzanakis 和 Arcavi 总结了三种方式：一是提供直接的历史信息；二是借鉴历史进行教学，即发生教学法；三是开发对数学及其社会文化背景的深刻意识[4]；Jankvist 提出另三种方式：启发法、模块法和基于历史法[7]；汪晓勤根据国内 HPM 研究特点提出四种方式：复制式、附件式、顺应式和重构式[8]。

（3）数学教育取向的数学史研究

主要通过对数学课程中的概念、公式、定理、问题的历史进行研究，不是为历史而历史，而是为教育而历史。这是 HPM 研究的基础性工作，如果不了解一个概念、公式或定理的历史，就无从谈论概念理解的历史相似性以及借鉴历史的概念教学。目的是获取相关知识点的教学启示，更好地服务教学。

（4）历史相似性研究

所谓历史发生原理，指的是个体数学理解的发展遵循数学思想的历史发展顺序，这就是我们通常所说的“历史相似性”，历史上数学家所遭遇的困难正是学生所经历的障碍。如果某一概念的历史相似性得到检验，那么，教师可以参照历史来预测学生的认知障碍，采用发生教学法有针对性地制订相关教学策略，有效地帮助学生跨越学习障碍。

（5）HPM 视角下的数学教学设计与实践

HPM 研究者们需要积极探索着具体的教学设计模式，以及 HPM 实践模式。在进行 HPM 教学设计和教学实践时， 期望数学教师都熟悉数学史．同时，先由大学教师完成相关主题的历史研究，获得历史材料，然后由大学与中学的教师合作，根据需要对材料进行加工，使之适合于教学；最后由中学教师将加工后的材料用于教学设计，并付诸实践．并在此过程中，探索设计与实践模式。

2 HPM 研究的困境

国内外学者对 HPM 进行了积极探索，并取得了大量研究成果。如[3-6]对运用数学史理由的总结，[3,4,7,8]数学史运用方式的探讨， Furinghetti[9]对数学史运用路径的探索，以及一些实证研究。同时，国内数学研究者也越来越多地开始关注 HPM 研究领域，研究数学史

的价值及其应用，如[2,10,11,12, 13,14]；对于数学史融入数学课堂教学，这也是近年来国际上 HPM 研究者关注的主题，国内 HPM 研究者发表有关 HPM 实证文章如雨后春笋，层出不穷，如[15,16,17]，虽然 HPM 领域研究突飞猛进，但学术研究与课堂之间的鸿沟使得数学史在中学“高评价、低应用”的境遇，迄今仍未得到实质性的改善。

融入数学史的数学教学设计与实践是 HPM 研究的最终落脚点。首先，数学教育取向的数学史研究即为教学而历史，是为 HPM 视角下的数学教学提供可用的历史素材，适应于广大的教学需要。要进行 HPM 视角下的教学，就必须对相关数学史材料进行搜集整理，为其所用。其次，历史相似性研究是 HPM 研究的理论实证研究，HPM 研究的理论基础是历史相似性理论，即学生对数学知识的认知过程和历史上该知识的发展过程存在一定的相似性。相似性的研究可以预测和解释学生的学习困难，可以为教学设计提供有益的借鉴；同时，可以修正并完善历史相似性理论。最后，数学教学中运用数学史的方式研究直接与 HPM 视角下的教学实践紧密关联，即采用什么样的方式融入数学史，才能更好地服务于教学目标。所以，教学设计与实践是整个 HPM 研究的最核心部分，而教学的设计与实践者——教师无疑成了整个 HPM 研究的理解与实践的桥梁。

如何能让 HPM 真正走进课堂？ 首当其冲的是教师的参与，只有通过教师的专业发展，引领其进入 HPM 学术共同体，促进其 HPM 研究的专业发展，逐渐学习研究，并实践数学史融入数学教学，并最终使得 HPM 研究得以长足发展。然而，对于刚接触 HPM 的数学教师，如何把数学史融入数学课堂，如何促进其进入 HPM 研究，尚缺乏相关的研究理论，缺乏科学、规范和系统的研究方法 [18,19] ，致使 HPM 发展滞后于 PME (Psychology of Mathematics Education)。因此，笔者期望通过建立 HPM 三棱锥模型来促进教师专业发展，为 HPM 研究的理论方面作出些许贡献。

3 三棱锥模型

HPM 研究者面临的是如何架设 HPM 理论与实践连接之桥梁，如何把数学史融入到真实教学情境中，并进而设计有效的教学方案；问题的关键是促进教师专业发展，引领教师进入 HPM 研究领域。如何组建数学史家、研究者以及教师的研究联盟；如何平衡研究在“促进教学实践”和“提高学习效率”之间的张力等重要课题。为此，笔者建立 HPM 领域教师专业发展模型——三棱锥模型（图 1）。即通过建立 HPM 学术共同体把 HPM 研究领域的静态的二维 HPM 教学实践[9]（图 2）变成了动态的螺旋式立体三维图（图 1），并从理论与实践两

个方面解决上述问题。

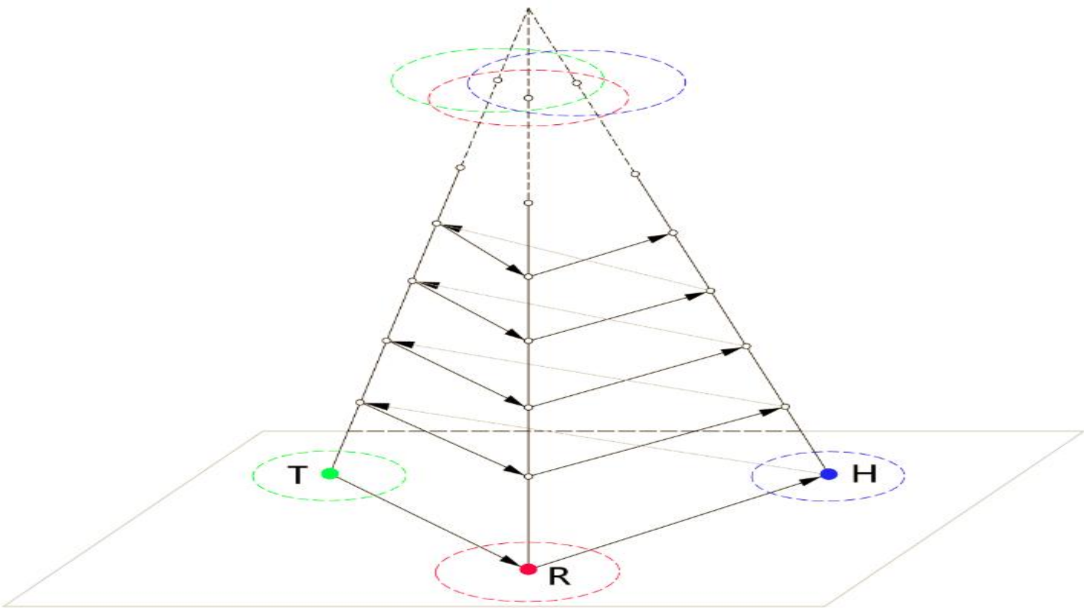


图 1 HPM 领域教师专业化发展模型

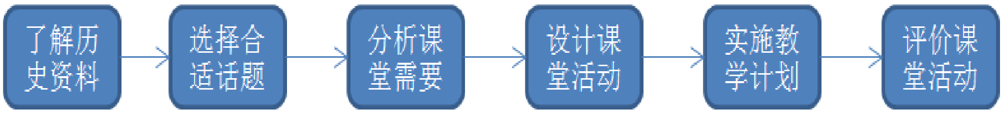


图 2 HPM 教学实践步骤

在三棱锥模型中，如图 1，平面上有三个虚线圆圈分别代表三个知识领域，即教师的知识领域(T)、研究者的知识领域(R)以及数学史专家的知识领域(H)；三个知识领域范围用不同颜色来表示各自领域的主要特征，红色表示教育研究领域需要火热的激情，蓝色表示数学史领域需要严谨科学的态度，绿色代表教学领域需要生机盎然的活力。 并且这三个知识领域有各自的诠释学循环，下面我们依次来看一下这三个领域的诠释学循环图：

数学史诠释学循环，如图 3 所示，古代数学家(M)对数学对象(O)进行诠释，形成数学理论(T)，M、O 和 T 构成初圈；数学史家(H)设想自己进入古代数学家的世界的对初圈进行诠释，得到诠释的结果 —— 数学史(I)。

数学教学的诠释学循环，如图 4 所示，教材编写者(E)通过对课程标准与数学学科知识(S)的诠释，编成教材(C)，E、C 和 S 构成初圈；数学教师(T)设想自己进入教材编写者的心灵之中，对初圈进行诠释，得到教学内容知识(I)，并确定 T、I 和 C1 构成次圈[8]。

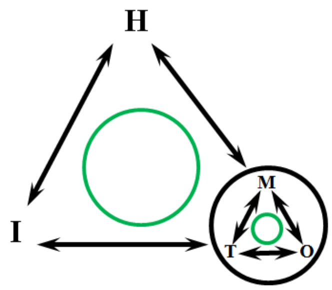


图 3 数学史的诠释学循环图

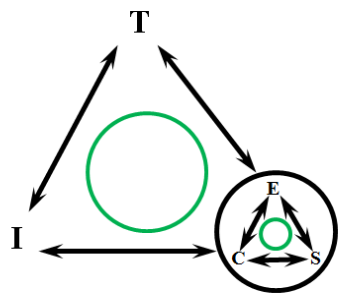


图 4 数学教学的诠释学循环图

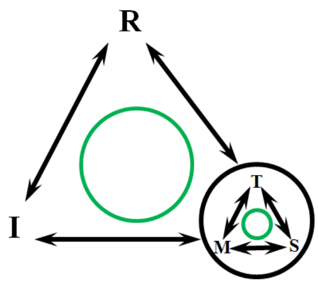


图 5 数学教育研究的诠释学循环图

笔者根据诠释学理论对数学教育研究者也给出来类似的诠释学循环，如图 5 所示，其中教师(T)通过对学生的诠释，实施数学教学(M)，T、S 和 M 构成初的循环圈；教育研究者(R)通过进入真实的教学情境中去，对初圈进行诠释，得到研究结果(I)，并确定 R、I 和初圈构成次圈。

从平面起始，三个知识领域的开始状态是相互分离的。这是一种极限状态，在现实中，三个知识领域可能相互有交集，可能其中两个有交集，但是他们的交集部分所占比率较小。三个领域开始融合之前，教学中的教师(T)和书斋中的数学史专家(H)各自为其主，各自诠释各自发展，彼此之间没有交集。数学教育研究者(R)在此模型中则是数学史与数学教育领域中的研究者，当 R 通过数学史融入数学教学的研究把 T 和 H 组织在一起，从而建立了三棱锥模型，这里的 R 是 T 和 H 之间的纽带，是把 H 的领域的知识输送到 T 领域中，使得 T 领域得到发展，即教师在 HPM 领域的专业发展。

三棱锥模型的启动，首先是教师在教学过程中发现问题，反馈给研究领域中的研究者(R)，研究者采用了数学史融入数学教学的方法即 HPM 方式，来解决教学问题或改善教学效果，如图中的平面上的三个点的箭头方法，从 T 到 R 到 H 的方向，再把得到的结果反馈给教学领域的教师，如此下去，循环往复，螺旋式上升如图中箭头方向。在循环的过程中，TRH 都不同程度的提升了自己的水平，如图中三棱锥的棱，从底面到顶点，代表的水平由低到高。同时，三棱锥的棱是各自领域不断上升的轨迹，每个知识圈随着螺旋式上升而不断扩大，而三个领域的知识圈的也在不断的相互融合，并最终达到完全融合状态。并且在每一次循环结束，三个领域都会形成一种中间状态，类似于平行于图 1 中底面的一个平面，但处于同一平面并不代表 TRH 三方水平相同。对于模型中的两种状态即起始状态和终点状态是理想中的状态，在实践的研究过程中，可能并不存在。绝大多数的状态是三棱锥的中间部分所表示的状态，并且从下往上，他们彼此的融合程度是由低到高。

整个过程中，三棱锥模型是以 R 为桥梁和纽带，组建 HPM 学术共同体把三个领域的参

与者紧密地联系在一起，并形成一个有机整体。三个领域通过彼此之间不断的沟通与交流，学习与实践，并在教学中不断实践数学史融入教学的想法，调整实践的路径，探讨实践理论。与此同时，这三个领域的参与者都不同程度地扩大了自己的知识领域，彼此之间的交集部分随着教学实践的不断深入而不断扩大，同时，不断深入的教学实际推动着三个不同领域相互融合，螺旋式上升，如图 1 中，椎体上部的三个虚圈的状态。当然，最理想的状态是图中三棱锥的顶点即，三个领域融合成一个领域，即其中的任何一个领域都具有其他领域的相关知识，成为了一个综合区域。

综上所述，三棱锥模型不仅统筹各方研究人员于一体，而且在真实的教学情境中，有步骤、有系统、有规律地通过彼此融合，在不断提高教学质量的同时，也促进教师专业化发展，最终 HPM 的相关理论也得到了发展和完善，甚至建立新的理论，使得 HPM 研究成果丰富而可靠。

4 三棱锥模型对 HPM 研究领域的实践意义

4.1 三棱锥模型为 HPM 实践提供了新的路径

HPM 研究的目标是通过数学历史的运用，提高数学教育的水平 。HPM 的功能在于通过数学史寻找数学教育的规律和经验，把数学知识的历史形态加工整理成教师和学生能够方便使用的教育形态，使数学史真正为实际的数学教学服务。而数学教学设计与实践是 HPM 研究最终的目标与落脚点。教学的设计与实践者——教师无疑成了整个 HPM 研究的理解与实践的桥梁。

三棱锥模型可以很好解决了这一问题，它作为一种系统化的模型，强调在真实教学情境中，基于研究者、数学史家以及教师之间的合作，通过不断的沟通与交流，进行一系列学习实践，并不断地进行 HPM 教学设计与教学实践的过程中相互融合发展，并最终促进教师真正融入到 HPM 学术共同体中，同时达到其专业化发展的目的，使得 HPM 的教学实践真正付诸实践。三个领域融合的过程也是修正 HPM 理论的过程，所以，三棱锥模型具有促进实践与理论创新，以及促进教师专业化发展的双重功能，三方融合体现在使得静态二维研究变成动态的三维研究。因此，三棱锥模型可以为 HPM 研究领域的实践提供了新的路径。

4.2 三棱锥模型为 HPM 实践提供可行的操作方法

HPM 研究正是将数学史知识通过各种方式融入到数学教学实践中，并不断提升教学效率的过程，而融入的具体过程是：数学史料的搜集与开发、合理地设计 HPM 视角下的教学方案、通过教师的教学实践与不断修正，最终形成案例。这与模型中三个领域的动态融合有着惊人的相似。首先，三个领域的融合，开始是教师发现问题，研究者提供 HPM 视角，去 H 知识领域中去寻找数学史料，并与教师合作实践 HPM 的教学，在帮助教师提升专业化的同时，提高教学效率。融合需要在真实的教学情境中进行，非常吻合 HPM 实践理念。其次，三棱锥模型是用来说明 HPM 领域教师专业发展，而教师专业发展是穿插在 HPM 教学实践的过程中，教师 HPM 应用能力的提升，从另一方面也使得 HPM 教学的具体实践实施变的更加可控和可操作。所以，用三棱锥模型其来指导 HPM 实验研究具有极高的实用性与操作性。

5　三棱锥模型的应用案例

YW 市 WF 工作室的成立，目的是帮助本市高中数学教师提高专业素质，但由于缺乏一些列的理论指导和培养方向，工作室的运转并非顺利。一次 HPM 大会让工作室的创办者 WF 老师初见 HPM 的研究成果，会后，她便确立以 HPM 教学实践为特色的培养方向，同时邀请华东师范大学 HPM 研究小组参与合作，每年吸收 6-8 位本市优秀高中数学教师，进行 HPM 教学实践。原本 WF 是一名高级教师，具有丰富的教学经验，苦于不知如何进行 HPM 教学实践，但与 HPM 研究小组合作之后，逐渐建立了以 HPM 研究理论为基础，要求工作室每位学员在一学年中选定一个教学知识点，开发 HPM 教学设计，并进行实践，当某学员进行教学实践以及实践总结时，其他学员均参与其中，观摩学习，以便更快地融入到 HPM 研究中来。

工作室的每个成员都具有丰富的教学经验，在教学设计的过程中，HPM 研究小组（三棱锥模型中的 R）将与数学史研究人员（模型中的 H）合作，研究知识点的历史脉络，并对合对原始文献或数学史的二手文献进行再加工，以资工作室学员（模型中的 T）设计教学之用。自此，三棱锥模型便建立起来。

三个知识领域互动开始，T 选定教学知识点，对知识点的数学教学进行诠释学循环，R 参与 T 设计教案过程，开始对教育研究进行诠释学循环，R 开始寻求数学史料，提供选定知识点与 H 进行互动，H 对知识点进行诠释学循环，最后得到能够满足教学需要的数学史料，再将数学史料以合适方式融入到数学的教学中。最后，对设计的教案进行实践，在实践过程

中发现问题，并努力再下一次的教学实践中解决问题，修正与完善教案。通过不断地螺旋式的循环设计教案、实践教案和反思总结过程，提升各知识领域自身的提高，从而达到培养教师关于 HPM 研究的专业化发展目标。自工作室开展 HPM 教学实践一年多，就有 3 位学员以 HPM 教学获得市教坛新秀奖，其他成员也有长足进步。

6 结语

三棱锥模型为 HPM 领域教师专业发展提供了新的途径，同时为 HPM 理论发展带来了新的机遇，当前如何更好地运作三棱锥模型来推进教师专业发展，获得 HPM 研究理论提升，对于研究者来说，是一个巨大的挑战。首先，TRH 组成的三棱锥模型是一个复杂的系统，为此，需要研究者在 HPM 的教学研究实践中不断地应用与推广 TRH 学术共同体来促进教师的专业发展。同时，需要在研究过程中探索真正适合 HPM 研究领域的运作模式，使得三棱锥模型真正成为连接教学与 HPM 领域之间的桥梁，逐步推动着 HPM 研究理论发展与完善。

此外，推广 HPM 领域的教师专业发展模式，需要广大数学教育研究者从书斋中走出，进入真实的教学情境中，积极地联系一线工作者，了解教学现状，发现教学问题，切实从 HPM 视角去帮助教师解决问题。在此过程中，研究者需要采用组建 TRH 的三棱锥模型，通过不断教学实践，不断地融合，来促进 HPM 研究理论和研究方法的发展，乃至建立新的理论和方法。

总之，对于 HPM 研究者，需要继续走出象牙塔投身到更深入地实践行动中去，通过三棱锥模型搭建桥梁不断将 HPM 的理论研究成果有效地渗透到现实的教学世界中，服务于广大的教育工作者，同时紧密联结 TRH 三个知识领域，加深彼此的融合度，并在此过程中加速数学史教学价值的溢出，促进教育研究发展与进步，发展和完善 HPM 研究理论，并最终达到共赢的和谐未来。

参考文献

[1] 汪晓勤 HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊. 2012. No2,1-5.

[2] 汪晓勤,张小明. HPM 研究的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2006,15(1): 16-18.

[3] Fauvel.J. Using History in Mathematics Education[J]. For the Learning of Mathematics, 1991,

11(2): 3-6.

[4] Fzanakis,C & Arcavi,A. Integrating History of Mathematics in the Classroom: An Analytic Survey [M]//J.Fauvel, J. Van Maanen. History in Mathematics Education, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000:201- 240.

[5] Gulikers, I. & Blom, K,. "A Historical Angle": A Survey of Recent Literature on the Used and Value of History in Geometrical Education[J]. Educational Studies in Mathematics, 2001,47(2): 223-258.

[6] Jankvist, U. T. Using History as a "Goal" in Mathematics Education[D]. Roskilde University, 2009.

[7] Jankvist,U.T. A Categorization of the "Why" and "How" of Using History in Mathematics Education[J]. Educational Studies in Mathematics, 2009, 71(3): 235-261.

[8] 汪晓勤. HPM 与初中数学教师的专业发展——一个上海的案例[J]. 数学教育学报, 2013, 22(1): 18-22.

[9] Furinghetti, F. History of Mathematics, Mathematics Education, School Practice: Case Studies Linking Different Domains[J]. For the Learning of Mathematics, 1997,17(1): 51-61.

[10] 张奠宙. 教育数学是具有教育形态的数学[J]. 数学教育学报, 2005, 14(3): 1-4.

[11] 徐利治, 王前. 数学哲学、数学史与数学教育的结合[J]. 数学教育学报, 1994, 3(1): 3-8.

[12] 王青建. 数学史：从书斋到课堂[J]. 自然科学史研究, 2004, 23(2): 148-154.

[13] 朱哲, 宋乃庆. 数学史融入数学课程[J]. 数学教育学报, 2008, 17(4): 11-14.

[14] 郭熙汉. 数学史与数学教育[J]. 数学教育学报, 1995(4): 68-77.

[15] 汪晓勤, 王苗, 邹佳晨. HPM 视角下的数学教学设计：以椭圆为例[J]. 数学教育学报, 2011, 20(5): 20-23.

[16] 徐章韬, 虞秀云. 信息技术使数学史融入课堂教学的研究[J]. 中国电化教育, 2012, 300: 109-112.

[17] 冯振举, 曲安京. HPM 视野下的数学新课程内容构成[J]. 课程教材教法, 2007, 27(9): 38-42.

[18] 黄友初, 朱雁. HPM 研究现状与趋势分析[J]. 全球教育展望, 2013, 42(2): 116-123.

[19] 康世刚, 胡桂花. 对我国“数学史与中小学数学教育”研究的现状分析与思考[J]. 数学教育学报, 2009, 18(5): 65-68.

台湾 HPM 研究的内容与特点

洪燕君

（华东师范大学数学系，上海 200241）

摘要：台湾《HPM 通讯》杂志是台湾 HPM 研究成果的主要发表园地。我们对该刊 1998 年创刊以来所有 16 卷中的文章进行统计和分析，发现台湾 HPM 研究有以下主要特点：以史为基，点连成线；研史促教，线结成面；贴合课堂，形式多元；倡导合作，共同发展。台湾 HPM 研究为大陆 HPM 教学与研究提供了借鉴。

关键词：HPM；数学史；HPM 通讯

HPM（International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics）创立于 1972 年，它隶属于国际数学教育委员会（ICMI），是专门研究数学史与数学教育关系的一个研究组，其主要目标之一是推动数学史在数学教育中的应用工作，即利用数学史的研究成果以及数学史与数学教育的互动，来提升数学教与学的成效。我们通常也将“数学史与数学教育之间的关系”这一研究领域本身简称为 HPM。经过四十多年的发展，HPM 今天已成为数学教育的重要研究领域之一。

中国大陆的 HPM 研究起始于 2005 年。近十年间，虽有不少研究成果问世，且对 HPM 感兴趣者日益增多，但研究方法还不够成熟，学术共同体尚未完全形成，学术水平仍有待于提高。相比之下，台湾的 HPM 研究则起步于 1998 年，迄今已产生了相当丰富的研究成果，在国际上也产生了一定的影响。为了提高大陆的 HPM 研究水平，拓宽大陆 HPM 研究者的学术视野，我们有必要吸收台湾的 HPM 研究成果，借鉴台湾学者的成功经验。

那么，台湾的 HPM 研究有何特点？我们从中能获得什么启示？为了回答上述问题，本文对集中反映台湾 HPM 研究成果的刊物《HPM 通讯》进行较为详尽的统计和分析。

1《HPM 通讯》概况

2000 年 8 月，第九届国际数学教育大会（ICME-9）在日本的立教大学召开，台湾师范大学承办了 ICME 卫星会议——HPM-9。为了准备此次盛会，台湾师范大学的洪万生教授于 1998 年 10 月创办了《HPM 台北通讯》，旨在为数学教师探讨 HPM 或其他数学教育议题搭建一个学术交流的平台。翌年 8 月，《HPM 台北通讯》改名为《HPM 通讯》（以下简称《通讯》）。早在 80 年代初，洪万生教授在决定攻读数学史时就开始关注 HPM 相关议题，但直到 1996 年在葡萄牙参加 HPM-8 后才正式走进 HPM 领域。此后，他走上了新的学术道路，成为 HPM 的耕耘者和 HPM 在台湾的传播者和引路人[1]。

《通讯》每年发行 10 期，每月一期，其中 2、3 月与 7、8 月各为合刊。创刊以来，《通讯》培养了一批 HPM 研究人员，他们中绝大多数为中学教师，逐渐形成了一个学术共同体，在台湾数学教育界产生了广泛的影响。

这 16 年间，台湾 HPM 团队不断有研究成果推向国际 HPM 舞台，受到国际 HPM 界的肯定[2]，刘柏宏教授改编一句古诗来总结《通讯》的发展历程："十年一跃洋洲梦，赢得清流博新名"[3]。

2《通讯》的论文内容统计

16 年间，《通讯》已累积了数量可观的论文，这些论文可以分成六类：数学史、HPM、数学教育、数学文化、学术动态和其他。表 1 给出了各类文章历年的分布情况。

表 1HPM 通讯中的文章内容统计

卷	年份	数学史	HPM	数学文化	数学教育	学术动态	其他	专辑
1	1998	1	6	0	2	3	1	
2	1999	13	14	4	4	22	9	
3	2000	9	18	5	1	14	3	算数书
4	2001	16	21	0	3	16	8	
5	2002	21	9	0	2	31	6	
6	2003	19	12	2	2	23	10	

7	2004	10	8	0	2	29	10	数学普及著作推荐
8	2005	5	5	1	14	20	2	95 学年高中数学暂行纲要；数学归纳法
9	2006	18	9	0	4	20	7	海伦公式
10	2007	11	10	2	4	15	2	
11	2008	8	5	2	4	16	4	
12	2009	9	2	4	5	17	0	
13	2010	6	6	4	5	10	0	
14	2011	9	7	2	3	8	1	
15	2012	4	11	2	2	12	2	《数》简特刊
16	2013	8	5	0	7	10	2	
总计		167	148	28	64	266	67	6
百分比%		22.57%	20%	3.78%	8.65%	35.95%	9.05%	

2.1 数学史

这里的数学史类是指纯粹针对数学史料的学术研究。从表 1 可见，这类文章占了总数的 22.57%，在所有文章中占的比重最大。主要包括以下主题。

2.1.1 历史文献

《通讯》第 3 卷第 11 期以专辑形式发表了《算数书》特刊，这是国际数学史界第一篇全面性的校勘报告，目前其成果已被许多学者广泛引用。对国际上新兴的热门研究主题之一–东算史，学者们从当时数学知识的发展与交流到韩国数学自主性的建立过程都进行了较深入的探讨。一批台师大的硕士论文主题还体现了对中国明清数学史的研究，如林仓亿《中国清代 1723-1820 年间的借根方与天元术》（2002）、陈威男《明代算书<算法统宗>内容分析》（2002）等。这些研究充分显示了台湾 HPM 团队开创性的数学史研究成果。此外，第 2 卷第 4、5 期刊出了《几何原本第 VII 卷定义之解读》（上、下）；2002-2003 年间，HPM 团队还完成了《九章术解》卷一到卷八的系列校勘文章。

这一类别的研究文章主要是以翻译、解读和校勘的形式出现，作者大多直接从原始文献入手，依据史料说话，很少掺杂个人的想法、见解和推断，当不同校勘策略产生了不同风貌时，是非优劣不作定论。如对《算数书》的《“以材方”与“以方材”二题的校勘与解读》中同时呈现了四个人的校勘。

另外，洪万生教授在对中算史的早期研究中，除立足史实、遵循中国古算本原的慎密风格外，还有意识地将研究题材纳入到对中国古算理论体系以及古代科学理论结构的探讨中，提出了许多发人深省的观点。如他在“古代中国的几何学”一文中指出：中国古代几何学无法象《几何原本》那样发展成一种形式理论的规范，是由于本体论和方法论方面的欠缺；在考察 14 世纪中国数学由盛而衰的原因时，他尖锐地指出，其内在原因是当时缺乏有意义的问题；在魏晋南北朝的数学研究中，他认为“非实用性”促进了几何理论的发展，从而几何学成为当时最突出的成就[4]。

2.1.2 数学人物

《通讯》中介绍了许多古今数学家，对他们的研究主要是从数学家的人格特点、数学知识的启发与认知、及其与所处文化脉络的互动等角度来描述，史人合一。如明代历算学家周述学、清代算学家戴煦、骆腾凤、梅启照，韩国数学家南秉吉，以及利玛窦、斐波那契、史都克、奥马·海亚姆、阿基米德、F·克莱因、莱布尼兹、法兰契斯卡、李善兰、华罗庚、陶哲轩等等。第 15 卷第 7 期刘雅茵在她的硕士论文《关孝和<括要算法>之内容分析》中，先对关孝和生平及著述作了概述，然后对其代表作《括要算法》的四卷内容进行分析，最后对各卷内容与中国传统数学的关系，以及关孝和的延拓与发展作了探讨[5]。

另外，还有作者依据自己对欧几里得、阿基米德、笛卡儿等名家数学成就的理解来创作其肖像作品。如，第 15 卷 10 期吴宛柔选择柯西不等式、柯西积分公式和柯西序列等知识作为背景，用深蓝色外套象征柯西年轻又不失稳重的个性，以较少的头发表现其勤于思考的头脑，并给柯西画了一双大眼睛，以期展示其擅长洞悉数学之美的特点[6]。

早期洪万生教授撰写的《从李约瑟出发》文集（1985 年，九章出版社出版）中对一些数学人物也做了深刻分析，如他认为李俨、钱宝珠两位学者的主要贡献在于“史料冤集”与“理性重建”的层面上，但无法充分运用比较史学的方法展开论题；而李约瑟对中国古算体系、特别是对刘徽成就认识的不足使他无法正确理解中国古代数学的理论意义 [4]。

2.1.3 专题呈现

《通讯》中，作者对许多数学概念、公式、定理的历史进行了深入的介绍，如“三角函数公式的托勒密方法”、“余弦定律可以怎么教”等文章；还有些是以专辑的形式，如“海伦公式”专辑，通过把海伦公式的历史证法当成三角形面积教学的桥梁，进而探求在小学、初中、高中等不同阶段现行教材内容的衔接、纵深与统整的方法。

另外，还有些知识点的历史是以系列单元教室的特色出现，苏惠玉先后撰写了十个 HPM 教室单元：①《几何原本》与《九章算术》；②有理数与无理数—可公度量与不可公度量；③平方根的近似值；④解析几何；⑤函数概念的发展；⑥求一术与插值多项式；⑦列方程式—借根方与天元术；⑧解方程的线性思维—试位法与双设法；⑨解方程的几何思维-二次与三次方程式的根式解；⑩帕斯卡三角形。通过这些文章，能引领中学教师快速了解需要的数学史料，进一步塑造自己的 HPM 教学。

并且，为了让研究者了解数学史在“教”与“学”中如何有效，洪万生教授及 HPM 团队在 1988-1990 年间积极开展了“古代数学文本在课堂上的使用”研究计划；在 2006-2008 年间与台大数学系教授张海潮合作筹划拍摄的 16 部数学史影片，每部片长约 25~30 分钟。内容包括乘法公式、因式分解、配方法与公式解、一元二次多项式的函数图形等等。

2.2 数学史与数学教育（HPM）

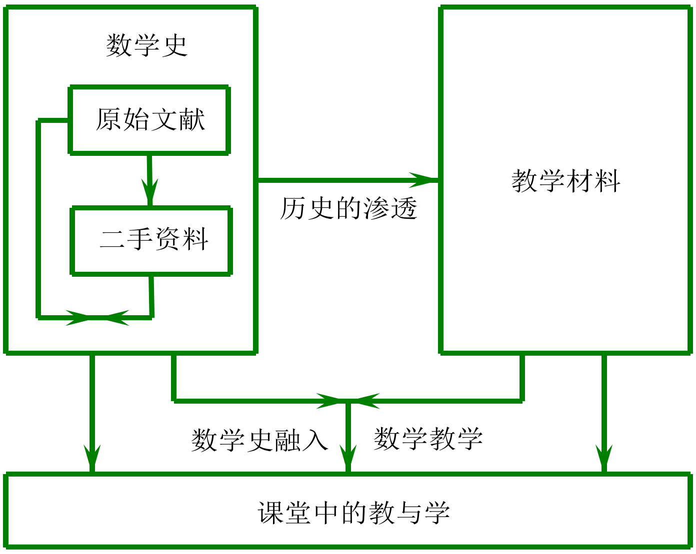
HPM 仅指数学史与数学教育关系的研究，从表 1 可见，这类文章占了 20%，仅次于数学史类。其内容具体包括以下几个方面：

2.2.1 理论探讨

洪万生教授认为数学史在数学教育理想的塑造、数学教学方法的借鉴以及数学课程教材的恰当性评估方面起着无可替代的作用。强调在课堂上，教师运用数学史至少可以分成三个层次[7]：（1）“说故事”可以提升学生的数学学习兴趣，启发其对事物的洞察力、包容力和创造力。（2）在历史的脉络中通过比较数学家所提供的不同方法，可以拓宽学生的视野，培养其全方位的认识能力与思考弹性。如他在“如何在课堂上使用数学史”一文中，列举勾股定理的三种证法，希望学生通过比较差异来分享历史的多元文化关怀[8]。（3）提倡从历史的角度注入数学知识活动的文化意义，在数学教育过程中实践多元文化关怀的理想。黄俊玮也

总结了数学史的教育价值[9]。

此外，洪万生教授还提出了数学史融入数学教学的流程图[10]：



并具体介绍了国际上的做法。

2.2.2 教学实践

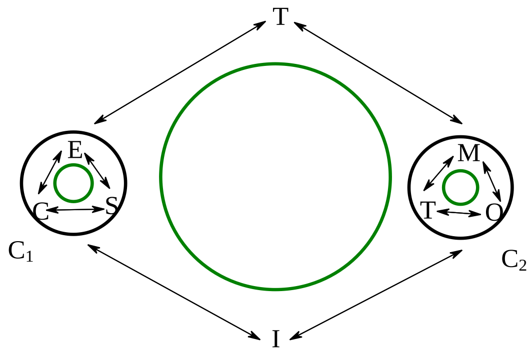
学习单是台湾 HPM 团队将数学史融入课堂教学的主要载体。苏意雯认为，应该从涵盖数学知识的逻辑、历史、学生认知三个面向[11]来设计供课堂教学使用的“学习单”。目前，团队成员以 HPM 课题为依托，已撰写 60 多个教学案例或学习单，部分已发表在《通讯》上，如无限、微积分概念、数学归纳法学习单、曲线下的面积、对数等等。

例如，林仓亿在“数学史融入教学—以对数表为例”一文中，依据现行课程纲要的架构，在对数函数图像教学之后，利用数学史引入对数表，让学生体会前人制作对数表的艰辛[12]。第 1 份学习单是通过法国数学家许凯（N. Chuquet, 1455-1488）的工作，让学生观察两数相乘与指数相加的对应关系。第 2 份学习单介绍对数与对数表的起源以及布里格斯求 lg2 近似值的过程。第 3 份学习单利用对数来发现开普勒（J. Kepler, 1571-1630）的“行星第三运动定律”。课后问卷调查显示，将数学史融入教学，能让学生在学习数学知识的同时，还能获得更多的历史与人文关怀，改变对数学的看法。

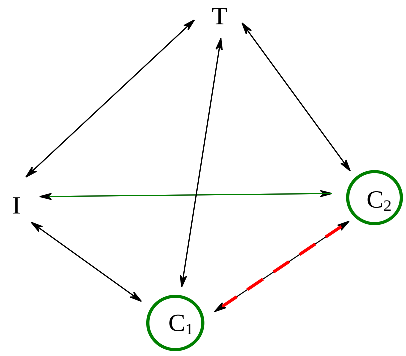
2.2.3 专业发展

为了说明和预测 HPM 如何促进数学教师的专业发展，洪万生和苏意雯借助两种诠释

学循环图，建立了数学教师基于 HPM 的专业发展模型[13-15]。如下图 1 和图 2，即教材编写者（E）通过对课程标准与数学学科知识（S）的诠释，编成教材（C），E、C 和 S 构成初圈（C1）；古代数学家（M）结合数学理论（T）与数学对象（O）构成初圈（C2）[16]；数学教师（T）在 C1 和 C2 之间建立起密切的联系，对初圈进行诠释，确定教学内容知识（I），T、I 和 C1、C2 构成次圈。即在此阶段，教学将历史和教材、课程标准有机地融合在了一起。



基于 HPM 新诠释学循环



诠释学四面体

苏意雯的博士论文《数学教师专业发展的一个面向：数学史融入数学教学之实作与研究》中通过教师行动研究表明，以广泛阅读数学史及数学教学相关书籍、研究 HPM 学习工作单的设计及撰写教学反思、多方面参与和数学教育或 HPM 有关的座谈与研讨、定期专家咨询以及以学校为中心的实践社群方式等 HPM 策略，可以给老师带来了 HPM 教学者身份的转变、参与科普写作、批判反思能力增强、 数学知识的统整以及视学生为学习主体等变化，从而证明了数学史融入数学教学的发展与实践，可以成为数学教师专业发展的进路之一[17]。

洪万生和苏意雯还就 HPM 对教师专业发展的促进作用对若干教师进行了个案研究。

3 台湾 HPM 研究之特点

纵观洪万生教授的研究以及《通讯》16 卷的文章，我们可以总结出台湾 HPM 研究的若干显著特点。

3.1 以史为基，点连成线

数学史研究是 HPM 的基础，没有数学史的研究，HPM 就成了无源之水、无本之木。台湾 HPM 研究非常重视数学史研究，以史为基，点连成线。如通过研究刘徽注来把握中国

古算理论体系；研究 13 世纪中算理论体系来了解近代中国科技落后的史实；对明清杰出数学家及其著作的研究进而丰富我们对“如何衔接传统与现代”问题的认识[4]。

而且，台湾 HPM 团队中绝大多数成员为中学数学教师，和大多数的大陆中学数学教师一样，在进入 HPM 领域之初，他们并不擅长数学史，对原始文献更是不甚了了。但是，很多成员都能潜下心来从某个点入手，进行深入的数学史原始文献研究，如他们的 HPM 教室单元系列设计以及数学专题研究的多元化呈现。这样做不仅能确保用于教育的数学史料的真实性，而且研究者对有关知识点的历史会有更深刻的理解，其 HPM 研究的学术性也就得到提升。

3.2 研史促教，线结成面

数学教育不可能割裂数学的历史。研究数学史，目的是为了改善今天的数学教学。台湾 HPM 研究的另一个显著特点是以史促教、线结成面。

如“《几何原本》第 VII 卷定义之解读”一文为今天如何辗转相除做约分的教学带来了很多启示[18]；文章“中算史中的张本例”解读了中算史上的一些具体的“张本例”，并明确指出其可以供 HPM 研究者参考或使用[19]；《杨辉算书的探讨：一个 HPM 的观点》的论文摘要显示，虽然杨辉算书的职责是普及实用民生数学知识，但它对数学知识深度及内涵地探索很重视，所以作者从 HPM 的角度对数学教学的一些理念和做法进行了反思[20]。

3.3 贴合课堂，形式多元

虽然，学习单是台湾 HPM 研究的主要表现载体，但它不是一成不变的。如在“对数”的学习中，苏俊鸿、林仓亿先后从对数的起源、lg2 的计算等角度设计了不同的学习单。

再如，阮锡琦老师为了贴合课堂选择从有利于学生学习的角度出发来设计学习单，在“三角函数”教学活动课例的五张工作单[21]中，内容包含了东西方的数学史，有看图说故事、口诀，还有古书的原文，但第五张工作单与前四张不同，没有 HPM。说明阮老师的教学没有“为历史而历史”!

此外，卓朝赐老师从培养学生主动学习的意识这个角度提出了以故事来呈现主题、让学生做专题研究、提供数学游戏的材料等观点[22]。而且，数学史微电影的使用也为课堂教学的多样化提供了有效策略。

3.4 倡导合作，共同发展

台湾 HPM 研究能取得瞩目的成就还与她拥有一个精诚合作的团队息息相关。因为要让 HPM 真正走进课堂，就必须有中学教师通过专业发展进入 HPM 学术共同体。否则学术研究与课堂实践之间的鸿沟难以逾越，从而使得数学史在中学“高评价、低应用”的境遇很难获得实质性的改善[23]。

《HPM 通讯》自创刊以来编辑组里的中学教师人数就占到 60%以上，这些中学老师大都是洪万生教授培养的教育硕士，从他们学位论文的主题以及一线教学的感悟里可以看出他们呕心梳理数学史料的印痕以及对教育的真挚，感受到了注重数学知识的历史文化向度，能使学生对数学的理解更加完整，更能体验到数学的价值这一作用。

此外，还值得一提的是，台湾“数学文化工艺虚拟博物馆”的管理和运营是由接受过《HPM 通讯》训练过的 70 多名拥有数学史/HPM 素养的中学教师来保证的。

4 若干启示

掩卷沉思，台湾 HPM 的“以史为基、研史促教、贴合课堂、倡导合作”等研究特点给我们大陆 HPM 的研究带来怎样的启示？要让 HPM 研究真正走进中学课堂发挥它独特的教育价值，笔者有如下管窥之见与大家商榷。

（1）坚持进行深入的教育取向的数学史研究

HPM 研究者要根据教学内容和学生认知的要求，坚持选取适合课堂教学的历史材料深入研究，这样有利于中学一线教师将数学史的诠释与原有数学教学的诠释有效的融合，使数学史学形态的资料转化为数学的教育形态，真正使数学史融入到数学教学中来，从而达到“为教育而历史”的目的，否则，HPM 研究将如空中楼阁，不堪一击。

这个见解与大陆 HPM 团队的思考几乎不谋而合，虽然我们起步稍晚，又面临着重重挑战，但这项教育取向的数学史研究工作必须要踏实、深入地坚持下去。

（2）完善操作性强、适合学情的 HPM 案例研究模式

台湾 HPM 团队建立了融入数学史的“学习单”模式，极便于刚进入 HPM 领域的数学教师实践。但这种模式并不适用于大陆的数学课堂，如“对数”的教学，台湾苏俊鸿老师根据对数的 4 个历史发展阶段设计了相应的 4 个学习单进行教学，而在我们的历史“重构式”

教学中只涉及了 2 个阶段，但课堂反应及课后检测效果反馈非常好。

诚然，数学是心智的活动，是思考的方法。只有生长在理论背景下的方法才更具有顽强的生命力，今后我们仍将在教学的知识与技能、过程与方法、情感态度和价值观上对理论进行实践和再探讨，以期建立起更完善的操作性强、适合学情的 HPM 案例研究模式。

（3）加强高校与中学教师“学习共同体”的研究模式

“学习共同体”是指一个由学习者及其助学者（包括教师、专家、辅导者等）共同构成的团体，以完成共同的学习任务、促进成员全面成长为目的，它在学习过程中强调通过沟通、交流和分享各种学习资源而互相影响、互相促进。

台湾的 HPM 研究长期坚守中学阵营，高校与中学教师并肩作战，这使得她在国际 HPM 舞台上灵动有加、魅力俱增。大陆 HPM 学习共同体虽已有雏形，但在规模和深度上还需进一步发展、成熟。

参考文献

[1] 洪万生. 发刊词[J]. HPM 通讯, 1998,1(1):1-2.

[2] 欧士福. HPM 的发展史: 1976-2000 [J]. HPM 通讯, 2003, 6(10): 2-4.

[3] 刘柏宏. 十年一跃洋洲梦，赢得清流博新名[J]. HPM 通讯, 2008,11(9):1-2.

[4] 刘钝，江晓原. 介绍台湾三位科学史研究者[J]. 自然辩证法通讯, 1991,(6):68-75.

[5] 刘雅茵. 关孝和<括要算法>之内容分析[J]. HPM 通讯, 2012,15(7):12-12.

[6] 吴宛柔. 柯西画像:创作理念[J]. HPM 通讯, 2012,15(10):15-16.

[7] 洪万生. HPM 随笔（一）[J]. HPM 通讯, 1998,1(2):1-3.

[8] 洪万生. 如何在课堂上使用数学史[J]. HPM 通讯, 1998,1(1):2-3.

[9] 黄俊玮. 数学史值得融入数学教学吗？[J]. HPM 通讯, 2007,10(6):1-4.

[10] 洪万生. 数学史与数学的教与学[J]. HPM 通讯, 1999,2(4):1-3.

[11] 苏意雯. 如何制作 HPM 学习工作单－以数学归纳法单元为例[J]. HPM 通讯, 2005,8(4):16-19.

[12] 林仓亿. 数学史融入教学—以对数表为例[J]. HPM 通讯, 2010,13(12):8-16.

[13] 洪万生. PCK vs. HPM: 以两位高中数学教师为例[D]. 香港教育学院, 2005.

[14] 苏意雯. 数学教师以 HPM 促进专业发展之个案研究[R]. 数理教师专业发展学术研讨会，彰化：国立彰化师范大学，2004.

[15] 苏意雯.运用古文本于数学教学-以开方法为例[J].台湾数学教师电子期刊,2007,(9):56-67

[16] 汪晓勤. HPM 与初中教师的专业发展—一个上海的案例[J]. 数学教育学报,2013,22(1): 18-22.

[17] 苏意雯. 数学教师专业发展的一个面向:数学史融入数学教学之实作与研究[J]. HPM 通讯, 2005,8(5):1-2.

[18] 谢佳叡. 几何原本第 VII 卷定义之解读（上）[J]. HPM 通讯, 1999,2(4):4-7.

[19] 洪万生. 中算史中的张本例[J]. HPM 通讯, 2002,5(12):1-3.

[20] 王文姵. 杨辉算书的探讨:一个 HPM 的观点[J]. 台湾 HPM 通讯, 2002,5(7):13-14.

[21] 林仓亿. 高中数学的 HPM 相关资源[J]. HPM 通讯, 2012,15(1):1-13.

[22] 卓朝赐."HPM 台北通讯"读后感[J]. HPM 通讯, 1999,2(4):10-11.

[23] 张小明,汪晓勤. 中学数学教学中融入数学史的行动研究[J]. 数学教育学报, 2009, 18(4): 89-92.

译海拾贝

阿基米德是怎样帮助学生揭开π的神秘面纱的

—Ioannis Papadopoulos

叶晓娟　编译

（ 华东师范大学数学系，上海 200241）

本文描述了一个课堂实验，在实验中学生利用数学史中的方法来学习一种重要的数学思想。确切地说，是一所小学的六年级学生用阿基米德穷竭法计算π值。在计算机环境下，学生通过作圆的内接和外切正多边形来求圆面积的近似值。然后算出该近似值与以圆半径为边长的正方形面积的比值，来作为圆面积与其半径平方的比值。追随阿基米德的思想，学生发现当增加多边形的边数时，计算得出的π值几乎等于 3.14。

1 序言

在过去几年里，研究者们对数学教育中数学史的兴趣日渐浓厚，然而，据 Siu 和 Tzanakis(2004)所说，大部分的研究都停留在理论水平。Jankvist (2011)在他的《国际数学教育委员会第一个百年（1908-2008）：数学世界的思考与建造》一文中也表达了同样的观点，编者 Menghini 和他同事指出："尽管有很多对于数学教育中历史的研究，却很少有人关注数学史在数学教育中的重要作用。" 教师们需要实例去展示：（i）数学史是怎样帮助人们发展更熟练的数学技能的。（ii）在数学教学中，数学史是怎样促进理解，和使大家意识到数学史在促进数学理解中的重要作用的（Clark，2012）。Clark 还补充道，很少（如果有的话）有研究去关注数学史对数学教学的作用。另一方面，有些名不见经传的小学教师们在小学算术教学中有过与数学史联系起来的尝试（Michalowicz 2000）。这些人以及少数的关于在教育中实现这一想法的文章，包括 Smestad (2012), Kjeldsen 和 Blomhøj (2012)，证明了这种方法是可以实现的。我们需要更多的实证研究，以便学习到将数学史融入教与学中去的种种思想方法。

为了回应这种需求，本文向大家展示了一项实证研究，是基于阿基米德穷竭法计算 π

的教学实验。这一实验的灵感来源于一位学生的提问：“为什么 π 约等于 3.14，而不是其他数，如 3.13 或者 3.15？”

如果该问题得不到解决，就会让学生觉得，重要数学思想的发现，只是智者脑海中的灵光一闪，而不是任何人都能掌握的，可探索的科学研究成果。不仅如此，如果一个概念只是作为它本身背景中的一个事实，那么学生就失去了探索这个神秘数字的机会。

借用 Jankvist(2009)的教学实验双重目的：以历史为工具，同时还要以历史为目的。就前者而言，历史能够激发学生学习和研究数学的热情；对于后者，则说明了目的是为了向学生展示这个神秘的数字的存在和它经历的演变过程，而非灵光一闪的结果。出于学生的年龄考虑（小学生），该实验以一种非正规的方式进行，正规程序可能更适合年龄稍长的学生(Furinghetti 2002)。教师研究者认为对于年幼的学生来说，见证一个概念的发展，经历构建数学思想过程中严密思维与丰富想象之间的交互是很重要的(Gulikers and Blom 2001)。帮助学生去做数学对于促进数学学习非常重要。

2 引言

π 在数学史与数学教育史上都占据着重要的位置。

在数学史上，π 的定义是圆周长与其直径的比值，以及圆面积与其半径平方的比值。π 自古以来都是来自世界各国的数学家研究的焦点。

在数学教育领域，对 π 的研究越深入，就越能发现它的神秘(Galton 2009)。最开始，π 出现在小学课程中的公式里面；它在圆的周长和面积公式中被近似值 3.14 取代。随后，学生知道 π 不能用一个准确的小数表示，同时他们并不了解这一结果是如何被发现的。虽然 π 是个看似简单的比值（$C/2r$ 和 A/r^2），但它小数点后面有无数位。确切来说，π 也不能用分数表示。多年后，通常是在大学阶段，学生知道了 π 与欧拉指数 e 和虚数 $\sqrt{-1}$ 之间存在联系。

π 在数学教育中的故事并未止于此，π 的数学趣味远不止这些。本文强调了 π 在小学课程中对于圆面积的作用，描述了一个课堂实验，证明了 π 约等于 3.14。这一实验设计灵感来自于阿基米德对圆作内接与外切正多边形的方法。这种方法适合小学生去理解某些数学概念和使用一些工具。

下一节介绍了阿基米德是怎样用上述方法计算 π 的。第四节展示了类似实验的有关文

献。第五节是实验的内容，给出了实验进行的具体步骤。最后是总结部分，突出了概念历史的重要性，和对学生概念理解的作用。

3 阿基米德方法的简短历史

1706年，William Jones 首次使用希腊字母 π 来表示这个重要的比值，但是对于该值的近似要追溯到更早的时期：希伯来人，埃及人和巴比伦人 (Harris 1959) 在几百年间一直沿用3作为这一比值，并为世人所接受。后来，到了公元前4世纪，Euclid (~325–265 BC)证明了“圆面积的比值等于半径平方的比值”（Book XII, Proposition 2），为 π 的历史作出了巨大贡献，这一结论逐渐发展为圆的面积公式。然而，直到公元前3世纪，Syracuse 的阿基米德（287-212BC）才开始用科学的方法计算 π。在他的著作《圆的测量》中，用到了三种方法。第一种是基于与圆的面积相等的直角三角形，该三角形分别以圆半径和周长为直角边。也就是说 $A=1/2\times C\times r$，其中 A， C 和 r 分别表示圆的面积，周长和半径。第二种方法基于圆面积与正方形的比值，该正方形以圆半径为边长，测量得到的比值是11:14。第三种方法是作圆的内接与外切正多边形，然后将多边形的边数加倍。π 的值随着多边形边数的增加不断精确。这个过程可以一直继续下去，直到多边形与圆周几乎重合。

为了得到 π 的近似值，阿基米德记下算得的 π 的上界和下界。他用圆外切正六边形的面积作为第一个上界。随后将外切多边形的边数不断加倍。他算出每个多边形的周长（一直到九十六边形）。最后得出π 的一个上极限 $3\frac{1}{7}$。同样地，他作出内接多边形来计算下极限（例如正六边形，正十二边形，二十四，四十八，九十六边形）。每次都得到一个下界。通过这种方法，他找到了 π 的一个下极限 $3\frac{10}{71}$。最后他得到 π 的范围：$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$，用十进制小数表示即为 3.140845⋯＜π＜3.142857⋯

$3\frac{1}{7}$ 常常被误当成 π 值，称为阿基米德值：事实上 $3\frac{1}{7}$ 只是阿基米德计算得出的一个上界(Castellanos 1988)。在以后的数年里，许多数学家继续了将圆内接和外切多边形边数翻倍的过程，并得到了更加精确的 π 值。中国以及伊斯兰国家的数学家们在计算 π 的近似值方面作了类似的努力（Burton 2011)。在公元 3 世纪，中国的王蕃计算出近似值 3.1555。两百年后，著名数学家和天文学家祖冲之在他儿子的协助下将 π 的值精确到了 3.1415926 到 3.1415927 之间。中国人计算的精确度在十六世纪末以前都远落后于西方。在伊斯兰国家，

Ghiyath al-Din al-Kashi 将 π 值计算至了小数点后面 16 位，远超过了当时的水平。直到十六世纪荷兰人 Van Ceulen 算出了小数点后 35 位。

尽管后面通过将多边形边数加倍得到了更精确的值，阿基米德计算得到的上界直到今天仍作为 π 的近似值一直被沿用。

我们知道 π 是圆周长与半径的比值（同时也是圆面积与其半径平方的比值）。当我们用这个定义去计算 π 值的时候，我们需要测出圆周长。阿基米德的穷竭法是基于圆周长可以近似为其内接多边形与外切多边形周长的平均值。尽管误差一直存在，π 值随着多边形边数的增加会越来越精确。

表 1 是从正六边形开始的一系列周长的值，由于选择的是单位直径的圆，因此该周长值即作为 π 值的近似（见图 1）。

内接正六边形的周长等于 3，然而外切正六边形的周长是 $2\sqrt{3} = 3.4641046$。内接正十二边形与外切正十二边形的周长分别是 3.10582885 和 3.2153903。将该过程继续下去，可以得到表 1 中的结果。

阿基米德得出结论，当多边形边数增加时，算得的 π 值会越来越接近 π 的准确值。因此，π 值即为多边形周长的极限（当边数趋于无穷大时）。

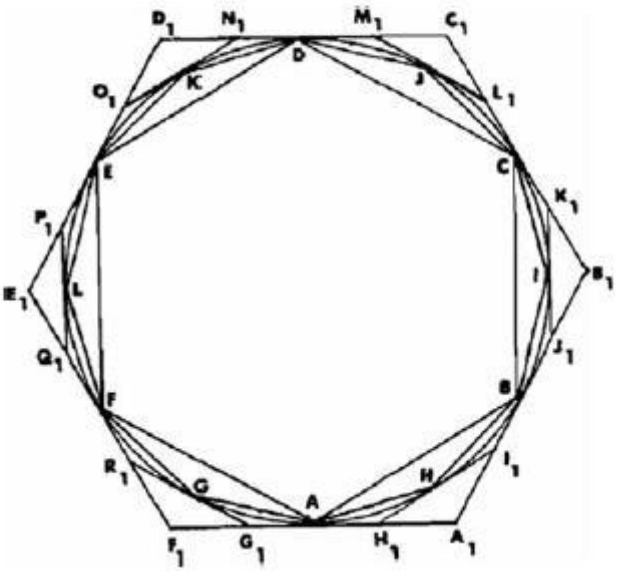


图 1 圆的内接和外切多边形

表 1 内接和外切多边形的周长

边数	内接多边形周长	外切多边形周长
6	3.0000000	3.4641016
12	3.1058285	3.2153903
24	3.1326286	3.1596599
48	3.1393502	3.1460862
96	3.1410319	3.1427146
192	3.1414524	3.14188730

4 文献综述：课堂实验

阿基米德计算 π 的方法尤其在初中课堂里有着不同程度的展示。

Mason 和 Roth (2005)对高中（九年级）学生做了一项实验，通过将数学公式看作一种函数关系和计算的一种方法，同样是以历史记载的阿基米德方法为基础。学生用直尺和圆规作圆的内接和外切正多边形。通过测量他们得到了较精确的上界和下界。但是当边数较大时，学生很难作出图形，在进行到九十六边形时，教师直接给出了算得的结果。

另外一种方法(尽管不是那么传统)在计算机编程环境下进行。Costabile 和 Serpe (2010)对一群初中学生提出了一些问题，并将阿基米德思想蕴含其中，通过在编程环境中编写算法，运行程序来计算。学生利用阿基米德作方法，从用 MatCos 软件作外切正方形开始。作者发现学生学会了（a）探索一种跨数学与信息技术学科的方法，以及（b）结合传统与现代。

但是，最具成就的是下一部分中描述的 Serge Lang 的教学实验。Serge Lang 被耶鲁大学的学生评为最伟大的数学教师(Kahn et al. 2011)。Lang 在他的《数学：挑战中学生！》（Lang 1985）一书中描述了该实验。

Lang 并没有以求 π 的近似值为开始，而是建立了 π 只有唯一准确值，即它是一个常数这一概念。计算 π 的问题是由欧几里（Euclid）早已建立的事实所激发的，即 C 和 A 分别与 r 和 r^2 成正比。因为如果他们不知道对于所有的圆都存在这样的关系，那么也就没有理由去计算比值 $C/2r$ 和 A/r^2 。事实上欧几里得的结论正是如此。从逻辑上看等式 $C/2r=\pi$ 和 $A/r^2=\pi$ 等同于等式 $C=2\pi r$ 和 $A=\pi r^2$，Lang 指出从数学的角度，二者是不一样的。C

和 A 分别与 r 和 r^2 成正比这一概念的合理性是通过相似的概念来说明的。Lang 举了一个简单的例子—相似三角形—来说明其原理。

在第一章《什么是 π》，Lang 向学生说明当一个矩形边长都扩大 r 倍时，它的面积扩大 r^2 倍。随后他重复了这个过程，不过这一次变成了一个曲线图。他继续向学生讲述这样一个事实，即之前提到的欧几里得的结论，当圆的半径从 1 扩大到 r 时，面积是原来的 r^2 倍。Lang 和他的学生得出结论，半径为 r 的圆的面积是 r^2A，其中 A 是半径为 1 的圆的面积。他们定义 π 为这个单位圆的面积，因此半径为 r 的圆的面积为 πr^2。

随后，Lang 通过正多边形来估计圆的面积。通过将正多边形分割成共顶点的等腰三角形来计算正多边形面积。通过测量多边形的周长来估计圆周长。

三角形 T_n 经过 n 次旋转。将底边即为 b_n，高记为 h_n。则三角形面积为 $\frac{1}{2}b_nh_n$。由于多边形由 n 个三角形组成，该 n 边形的面积为 $A_n = n\frac{1}{2}b_nh_n = \frac{1}{2}nb_nh_n$。$nb_n$ 即为多边形周长 L_n。因此 $A_n = \frac{1}{2}L_nB_n$。然后他们将 n 不断扩大到无限，来得到圆周长和面积的近似值。当 n 趋于 ∞ 时，$nb_n = L_n$ 趋近于 C（即周长），h_n 趋近于 r（即半径），A_n 趋近于 πr^2。因此 $A = \frac{1}{2}Cr$。这一重要的公式揭示了 π 的两种定义间的内在联系，即如果用常数 π 表示 $\frac{A}{r^2}$ 的话，那么 $\frac{C}{2r} = \pi$ 也同样成立。

如图 2 所示，如果 b_n, h_n, r, A_n, L_n 和 $b_n^{'}, h_n^{'}, r^{'}, A_n^{'}, L_n^{'}$ 分别表示两个 n 边形的相关数量，那么由他们的相似性可以得出他们的角是相等的。因此我们得到了一些相似的三角形（见图 2）来组成这个多边形，同时有 $\frac{b_n}{b_n^{'}} = \frac{h_n}{h_n^{'}} = \frac{L_n}{L_n^{'}}$，$\frac{h_nb_n}{h_n^{'}b_n^{'}} = \frac{A_n}{A_n^{'}} = \frac{r^2}{r^{'2}}$。然后我们就能推出当 n 趋于 ∞ 时，L_n 和 A_n 分别趋近于 C 和 A（对于其他多边形也是如此），随后便能得到正比例关系 $C:r$ 和 $A:r^2$。根据以上等式还能推出对于每个正 n 边形，有 $A_n = \frac{1}{2}L_nh_n$。于是可以得出结论，当 $n \to \infty, A = \frac{1}{2}rC$。

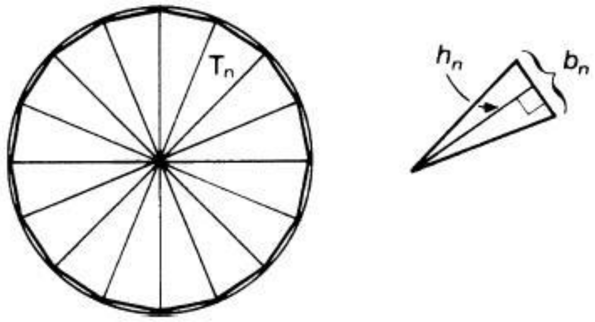


图 2 圆面积的近似（来自 Lang，1985）

5 课堂实验

5.1 实验环境

该实验在希腊的塞萨洛尼基（Thessaloniki）的一所公立小学里进行。27名六年级的小学生参与了该实验。在他们的数学课上，学生已经学过一些常规图形的面积公式，比如三角形，正方形，矩形。他们在5年级的时候学过圆的周长计算公式。他们还尝试过计算不规则图形的面积：将不规则图形分割成熟悉的图形来计算。在实验开始前，没有学生知道圆面积的计算公式。

在本实验中，我们选择圆的面积而不是圆周长主要出于以下两点考虑：（i）学生五年级就已经学过圆的周长公式。（ii）该研究是以圆的面积是其半径平方的3.14倍为基础，我们想把重点放在这一点上。虽然我们以圆面积为基础，但我们选择的是阿基米德第三种方法中计算周长的方法，而不是第一种方法中计算圆面积的方法。因为阿基米德第一种方法是通过反证法来做，并不适合小学生。第三种方法是从正六边形开始，不断将多边形边数加倍来计算周长——更加适合小学生。

该实验在一个计算机环境下进行。实验分为四部分。前三个部分发生在课堂上。第四部分发生在第二周（4天后）。这一部分是为了检测学生对于 π 的概念学习情况。学生三人为一组，借助 Cabri Geometry II Plus 软件来完成实验。这一选择是基于学生对该软件的界面和基本功能已经比较熟悉，并且适合这个年龄的学生和相关数学内容。例如，他们知道如何绘制基本图形（工具：Triangle, Polygon, Circle, Line, Segment），拖动（工具：Pointer, Rotate, Dilate），测量长度（工具：Distance or Length），测量面积（工具：Area），角（工具：Angle），作垂线和平行线（工具：Perpendicular Line, Parallel Line），以及使用 Cabri 计算器（工具：Calculate…）。

利用计算机环境克服了阿基米德穷竭法中构造圆的内接与外切正多边形的一些障碍。对

于年幼的学生来说，用圆规和尺子作圆内接和外切多边形是不太可能的，他们也不能用几何方法算出周长或面积。Cabri 能够自动计算周长或面积，但它无法作出正多边形。为了完成实验，教师定义了宏（一种中间结构，能够进行存储和再现），来拓展软件的功能，使学生能够作出内接和外切正多边形。每一个宏都用一个易于辨识的名字（如 inscribed_12gon.mac, circumscribed_24gon_mac 等等）便于学生使用。

在这三部分结束的四天后，学生拿到一份包含了四道题的作业单，用于检测该实验怎样帮助学生解开神秘数字 π 的谜团的。

5.2 实验是如何开始的

学生的数学教材上，用 A 表示半径为 α 的圆的面积，然后说明 A 比四个以其半径 α 为边长的正方形面积要小（即 $A<4\alpha^2$，见图3）。然后教材作出规定，将圆的面积看作3.14倍的正方形面积，也就是说 $A=3.14\alpha^2$。这时候有学生提了一个问题，也正是本实验的灵感来源。

S5：“为什么 π 约等于3.14，而不是其他数，如3.13或者3.15？”

为了回答该问题，教师设计了基于阿基米德法的一个实验，旨在引导学生自己来计算 π 值。

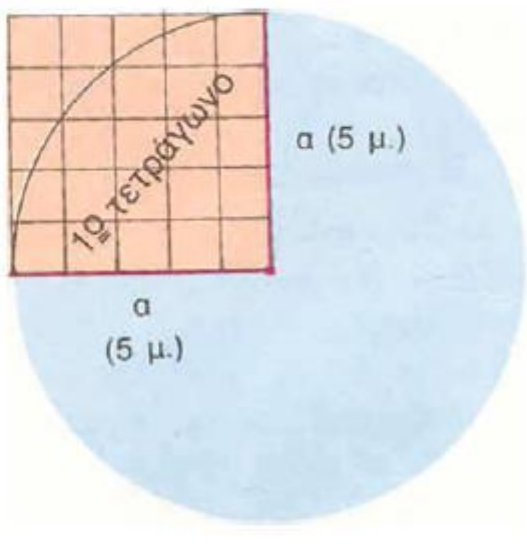


图3 半径为 α 的圆和边长为 α 的正方形

5.3 将阿基米德法付诸实践

我们将课堂讨论的内容记录下来。以下是一段师生间的对话：

教师问学生的第一个问题：

T:要算出圆面积与正方形面积的比值，你需要知道什么？

S5：这两个图形各自的面积！

S3：是这样的，但是我们无法算出二者的面积。

T:为什么呢？

S3:是这样，我们知道正方形的面积公式，即“边长的平方”，但是怎样才能找到圆的面积公式呢？如果我们知道了圆的面积公式……

S6:没有这样的公式。

此时在教师的要求下学生打开了一个准备好的 Cabri 文件，里面画着一个半径为 7 的圆，及其内接和外切三角形（见图 4）。

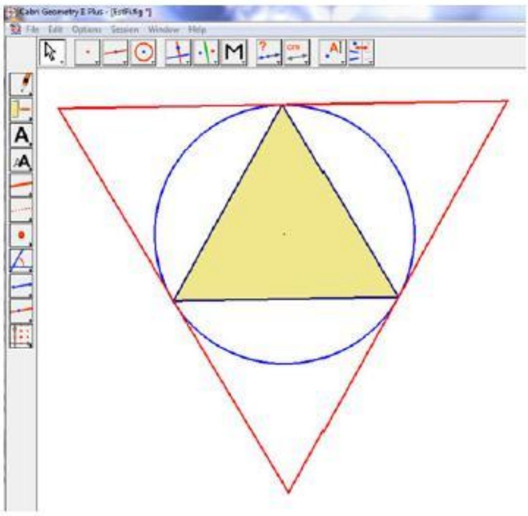


图4 圆的内接和外切三角形

T:现在大家同意将圆的内接三角形面积作为圆面积的近似值吗？

S（很多人）：不能!!!

T:为什么？

S7：三角形比圆面积小太多了！

S10：圆的很大一部分面积没有算进去。

S1:三角形的边里圆周太远了。

T：那么，外切三角形呢？用它来代替圆面积可以吗？

这一次学生仍然不能接受。

S7：它比圆的面积要大。

S13:三角形好几个部分都到圆外面了。

这时就到了一个关键的时刻。

T:既然内接三角形的面积太小，外切三角形面积又太大。那圆的面积应该怎样取呢？

S6：很显然，圆面积是一个比内接三角形面积大，比外切三角形面积小的数。

S16：处于这两个面积之间的数。

S5：可能是中间的那个值。

学生已经学过平均数的概念，因此将内接和外切多边形面积的平均值作为所说的“中间值”是没有什么问题的。该平均值代表圆面积。因此，最后一步就是计算该平均值与以圆半径为边长的正方形面积的比值。通过这种方法他们得到 π 的近似值。他们得到了图 5 中的结果。

半径长	以半径长为边长的长方形面积	内接正多边形的面积	外切正多边形的面积	面积的平均（=圆面积的估计）	圆的面积/正方形的面积
7cm	49cm^2				
等边三角形		63.65cm^2	254.61cm^2	159.13cm^2	3.247551
正六边形		127.31cm^2	169.74cm^2	148.525cm^2	3.031122
正十二边形		147cm^2	157.55cm^2	152.275cm^2	3.107653
正 24 边形		152.19cm^2	154.82cm^2	153.505cm^2	3.132755
正 48 边形		153.50cm^2	154.16cm^2	153.83cm^2	3.1393→3.14

图 5 学生实验得出的结果

下一步，就是要将多边形边数翻倍了。

T：显然大家对我给出的三角形还不够满意，大家有什么改进的建议吗？

S:我们需要一个更大的图形。(很多学生)

S3：一个更多边数的图形。

当教师要求学生用已经建好的宏去画内接和外切正六边形时，学生都很赞同这一想法（见图6）。在计算机环境的支持下，学生在原来图形的基础上画出了内接和外切正六边形，学生很容易理解此时能得到一个更好的圆面积的近似值。

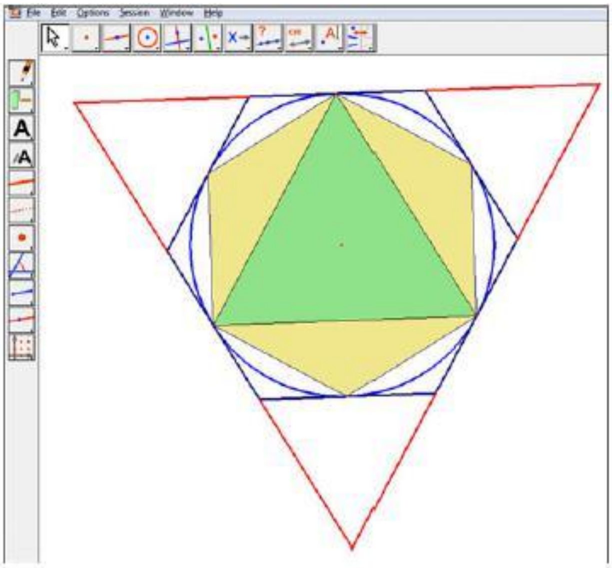


图6 内接和外切正三角形，正六边形

对于这次的内接正六边形，学生有如下的评价：

S3：它与圆接近多了。

S27:它覆盖了圆更多的部分。

对于外切正六边形，他们的评价是：

S10:它比三角形小。

S18:它比超出的部分变小了。

S1：它与圆更接近了。

S8:外面的正六边形盖住了里面的正六边形。

这一次学生对内接和外切正六边形都能够接受了。但是得到的结果与3.14还不够接近（图5）。因此，这个结果还不太令人满意。

这时学生已经可以跟上阿基米德的思想了。

S4：我们需要更多边数的多边形。

S8：内接多边形边数越多，就能覆盖更多的圆面积。

S5：当我们增加多边形的边数时，多边形的边就越靠近圆周。

这时，Cabri又派上用场了。学生开始作内接和外切正十二边形了。（图7）

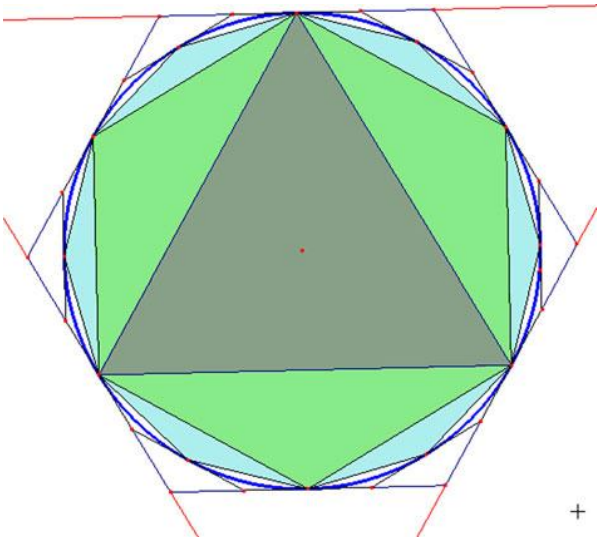


图7 内接正三角形，正六边形和正十二边形

然后学生用合适的工具来计算二者面积的平均值，及其与正方形（边长为圆半径）面积的比值作为 π 的近似值。

学生很快用合适的工具算出了多边形的面积来作为圆面积的近似值，然后计算出该近似值与以其半径为边长的正方形面积的比值。该比值即作为 π 的近似值。由于此时算得的 π 值仍然不够令人满意，学生又开始作二十四边形，四十八边形。于是他们得到了更精确的近似值（分别是3.132755和3.1393，见图5）。通过使用Cabri，所有学生都得到了同样的结果（见图5）。

这时他们似乎已经满意了。他们得出的 π 值（3.1393）已经非常接近3.14了。随后老师鼓励学生去做 96 边形，但学生认为这个结果不会有明显的改善了。而且边数增加到 96 时，图中也看不到明显的变化。于是教师建议学生用软件的局部放大功能来观察，随后得到了更精确的值（见图8）。

该图使得他们能够观察到四十八边形与九十六边形的细微差别。使用相关的计算软件，他们很快算出了 π 值3.1414。

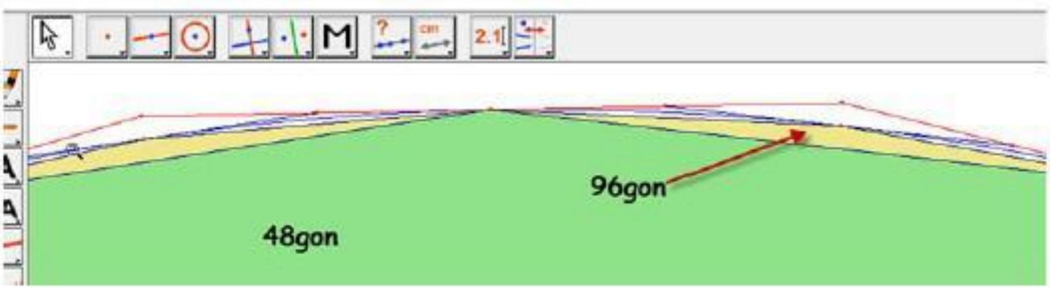


图8 内接和外切 96 边形局部放大图

这时学生觉得这个过程已经接近尾声了，然而接下来教师的话让他们很吃惊。

T: 我很欣慰大家都对圆面积是正方形面积的3.14倍这个结果比较满意，但是大家有没有想过继续将多边形边数加倍，直到它完全覆盖整个圆呢？

S4: 我觉得总是有一部分圆的面积被剩下的。

S5：我认为圆是不可能被完全覆盖的。多边形的边是直线，而圆周的曲线。

S6：在这个过程中，内接多边形和外切多边形的面积会越来越接近。

这时，即使这个方式显得有些笨拙，但学生已经接近了圆的面积是多边形面积极限这样一个概念（当边数无限增加时）。

当证实了圆面积（A）与正方形面积（r^2）比值几乎等于π时，得出结论 $A=\pi r^2$ 就比较容易了。

当学生们了解到，阿基米德在研究π上面有着同样的兴趣，并且阿基米德计算π的方法与他们几乎是一样的时，学生显得很兴奋。

由于该实验仅仅是对于一个半径确定的圆。并没有证明当圆的大小发生变化时，这个 π 值是否同样适用。尽管学生们没有完成这个证明，但他们知道了这个证明是如何开始的，及证明过程中的一些方法过程。这种动态的几何环境有着借鉴意义，适合在很多实例中对学生作一个引导。接下来这部分内容，学生实验了不同大小的圆中，π 值的变化。他们惊奇地发现先前计算的 π 值有着“普遍适用性”。

学生此时是信服了。当一个疑惑被清楚地证实的时候，是个极为重要的时刻。事实上，正如 Harel 和 Sowder (2007) 所说，“给出证明”要求，一个断言可以作为一个猜想，也可以成为一个事实。当人们能够确定其真实性的时候，猜想就成为了事实。教师需要区分二者的差异。学生在适当的年龄要进行一些讨论，目的是清楚某个发现是真实有效的，还要能够解释为什么这些发现有效。正如 Mason et al. (1982) 恰当地描述到：

…通常猜想一个事实很容易，要证明它却很难。要给所有刁钻的读者们一个满意的回答，就得对每一项陈述作出证明。要做到这一点，需要有强大的知识构建，清楚已知和求证之间的联系…（p.115）

因此，教师告诉学生，如果他们多年后仍有兴趣继续对 π 进行研究，那么他们就有机会完成 π 的故事。

6 教学后记

四天后，学生需要完成一份作业单。目的是检测学生对于圆面积与 π 之间关系的概念理解。学生有 20 分钟来回答四道题。

题 1 是选择一种更接近圆面积的正多边形（图 9）。

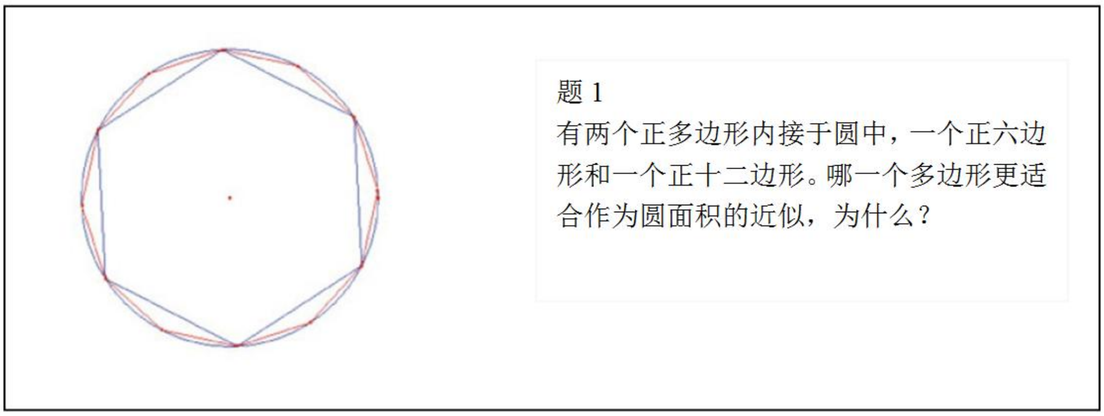


图 9 作业单—题 1

27 名学生中有 25 人答对了这道题。他们给出了很多解释。

(i) 它与圆周更接近。（*S1*，*S4*，*S6*，*S7*，*S8*，*S10*，*S14*，*S15*，*S16*，*S18*，*S22*，*S23*，*S24*，*S26*）

(ii) 它覆盖了圆内更多的边缘部分。（*S27*）

(iii) 它几乎盖住了整个圆。（*S9*）

(iv) 它与圆更合适。（*S20*，*S21*）

(v) 它有更多角因此能覆盖圆更多的部分。（*S3*，*S19*）

(vi) 正十二边形与圆之间的空隙比正六边形要小。（*S2*）

(vii) 它能更好地表示圆面积的近似。（*S5*，*S11*，*S12*，*S17*）

从本题来看，学生似乎对于内接多边形的理解有了很好的掌握，（如前所言）有 25 人答对了此题并有上述解释。

下一题（图 10）是外切多边形的情况，结果表明该图形对学生来说似乎存在困难。题目中并没有给出任何直观图形（如多边形）。目的在于检查学生基于该情形的理解，而不是在给出直观图形的帮助下。此外，直观图像信息的缺失，可以让学生表达出他们对于多边形的边与其面积关系的困惑（内接多边形和外切多边形）。最后，要注意到这份作业单是在教学实验结束四天后做的，学生只能凭印象回忆起图形。能够“看到”这些对象是一种很重要

的数学能力，这也是 Sfard（1991）所说的“*概念的结构化理念*”。因此，学生的回答是建立在对于该情形的理解之上的。只有八名学生（总数是二十七名）给出了十二边形的面积小于 $120\,cm^2$ 这一正确答案。学生的解释是这样的：

在圆外面时，越靠近圆周，多边形的面积就越小。（S4，S5，S6，S7，S9，S15，S16，S20）

题 2 一个圆的外切正六边形面积为 $120\,cm^2$。圆外面还有一个外切正十二边形。你认为该十二边形的面积是大于还是小于 $120\,cm^2$？

图10 作业单—题2

可以说有了结构化概念使得他们能够知道“是什么”和“为什么”，也就是说有了“规则和理由”（Sfard, 1991）。

十一名学生认为正十二边形的面积大于 $120\,cm^2$，他们的理由如下：

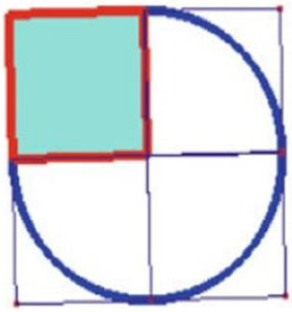
正十二边形比正六边形的边数要多。因此,，它的面积比正十二边形要大。（*S1*，*S2*，*S3*，*S10*，*S11*，*S12*，*S17*，*S22*，*S23*，*S24*，*S25*）。

其余的学生甚至回答说面积相等或是没有回答。

我们给出了至少三种造成错误回答的原因：（i）学生对于题中的情形没有一个直观的想象，（ii）对于多边形的边与面积关系存在误解，（iii）他们画出了错误的图像（将外切多边形画成了内接）。因为内接多边形有着明显的区别，它与外切多边形恰恰相反：随着外切多边形边数的增加，其面积不断减小。

有两位答错第一题的学生（S13，S15）值得一提。第一位没有答出第一题是因为他担心自己的答案是错误的，于是擦掉了它。他甚至还放弃了回答第二题。第二位这两题都没有回答。

题3和题4类似，都是为了检查独立背景下学生对于圆面积公式的理解，和学生是否能将特殊情境与公式所描述的情境联系起来。题3是纯数学背景，题4则将数学背景隐藏在一个看似简单的情境下（图11）。题4中，学生很容易由完全铺满正方形的弹珠数联想到正方形面积，却不容易想到与 π 的概念之间的联系。这也表明了已掌握的知识（题3中对于 π 概念的理解）能否转化到其他情境中去。教师研究者对于学生能否认识到他们所学的知识不仅仅在单纯的几何情境中适用很有兴趣。



题 3

正方形的面积为 16 cm^2 。圆面积是多大？

题 4

我需要 300 颗弹珠来覆盖整个正方形。那么我需要多少颗弹珠覆盖整个圆？

图11 作业单—题3和题4

题3有十五名（总数为27）学生答对（S1，S2，S3，S4，S5，S6，S7，S8，S9，S10，S11，S12，S13，S14，S15）。这些学生将正方形面积乘以3.14倍来作为圆面积，他们利用以前学过的知识发现圆面积是以其半径为边长的正方形面积的3.14倍。然而，他们中不是所有人都意识到该知识同样可以应用到弹珠的题目中去。因此，这十五名学生中只有八人（S1，S2，S3，S4，S5，S6，S7，S8）准确回答出了需要铺满整个圆的弹珠数（约）为$3.14\times300=942$颗。其他学生仍用了300×4（S10，S11，S12，S13，S15，S18，S22，S23）或者没有回答。一种可能的解释是图中四个正方形对他们造成了影响，也就是说他们只注意到了用弹珠铺满整个大正方形而非圆。

7 结语

本文中的实验目的在于研究学生是怎样用数学史中的方法去学习某一数学思想的。该实验是一项实证研究（Schoenfeld 2007）。它证明了借助数学史的作用，可以让学生(i)对 π 有一个更深的理解，(ii)学会欣赏人类在发展数学这个过程中的劳动和智慧。

尽管所有学生都分享了阿基米德的思考过程，但是不是所有人都成功地答对了四道题。这也在意料之中。有很多影响学生表现的因素：疲惫，缺乏相关数学技能，时间不足以完成一项任务或是思考和消化知识，动机不足，健康状况等等，这只是一部分原因。但是，最重要的是，学生能够参与到一个数学概念的产生和发展过程中来，学生能够学习一个数学概念“背后的故事”，而不仅仅是数学事实本身。也就是说，学生有机会去经历数学概念作为一项人类活动的发展过程。

当学生知道他们分享了与阿基米德的思想历程时，他们非常兴奋。但是，更重要的是他们证实了公式的有效性，是来自于他们自己的探究而不是教师的权威。而这就是数学史所起

的作用。

在类似的案例中，同样获得了积极的反馈。这不仅表明了数学史在小学教师的教学中的重要性，还证明了数学课程中的数学史的重要作用。

尽管该研究是在一个特定环境下，在数量相当有限的学生中进行，因此得到的结果不一定具有普适性，但是具有推广意义的。该研究对于某些命题给出了一个高信度的回答，如解释 π 的作用和缘由，不同概念下的精确度。这也为其他研究领域提供了参考价值（Schoenfeld 2007）。这项研究为如下想法提供了一些可能：成立一个课堂数学协会，在该组织中，学生可以进行过去数学家的一些活动，并且将该活动继续下去。

参考文献

[1] D. M. (2011). The history of mathematics. An introduction (7th ed.). New york: McGraw-Hill.

[2] Castellanos, D. (1988). The ubiquitous Pi. Mathematics Magazine, 61(2): 67–98.

[3] Clark, K. M. (2012). History of Mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. Educational Studies in Mathematics, 81(1): 67–84.

[4] Costabile, F., & Serpe, A. (2010). Archimedes in secondary schools: A teaching proposal for the math curriculum. In S. A. Paipetis & M. Ceccarelli (Eds.), The genius of Archimedes: 23 centuries of influence on mathematics, science and engineering (Vol. 11, pp. 479–491)., History of Mechanism and Machine Science Netherlands: Springer.

[5] Furinghetti, F. (2002). On the role of the history of mathematics in mathematics education. In Paper presented at 2nd international conference on the teaching of mathematics at the undergraduate level. Crete, Greece.

[6] Galton, D. (2009). The magic of Pi (p): Coda. The Quarterly Journal of Medicine, 102(6): 439–440.

[7] Gulikers, I., & Blom, K. (2001). ‘A historical angle’. A survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. Educational Studies in Mathematics, 47(2):223–258.

[8] Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester Jr (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning(pp. 805–842). Charlotte: National Council of Teachers of Mathematics.

[9] Harris, H. (1959). The history and calculation of Pi. The Emporia State Research Studies, 8(1): 5–39.

[10] Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the ‘‘whys’’ and ‘‘hows’’ of using history in mathematics education. Educational Studies in Mathematics, 71(3): 235–261.

[11] Jankvist, U. T. (2011). Essay Review. A century of mathematics education: ICMI’s first hundred years. Historia Mathematics, 38(2): 292–302.

[12] Kahn, K., Sendova, E., Sacristan, A. I., & Noss, R. (2011). Young students exploring cardinality by constructing infinite processes. Technology, Knowledge and Learning, 16(1): 3–34.

[13] Kjeldsen, T. H., & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: History as a method for learning metadiscursive rules in mathematics. Educational Studies in Mathematics, 80(3): 327–349.

[14] Lang, S. (1985). Math!: Encounters with high school students. New York: Springer.

[15] Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). Thinking mathematically. New York: Addison Wesley.

[16] Mason, R., & Janzen Roth, E. (2005). Thinking like Archimedes: An instructional design experiment. In Proceedings of the eight international congress of the history, plilosophy, sociology and science teaching, Leeds, UK, www.ihpst2005.leeds.ac.uk/papers.htm. Accessed 10 October 2012.

[17] Michalowicz, K. D. (2000). History in support of diverse educational requirements: Opportunities for change. In J. Fauvel & J. van Mannen (Eds.), History in mathematics education: The ICMI study(pp. 172–200). Dordrecht: Kluwer.

[18] Schoenfeld, A. H. (2007). Method. In F. K. Lester Jr (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 69–107). Charlotte: Information Age Publishing.

[19] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Educational Studies in Mathematics,22(1): 1–36.

[20] Siu, M. K., & Tzanakis, C. (2004). History of mathematics in classroom: Appetizer? Main course? Or dessert? Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 3(1-2): v–x.

[21] Smestad, B. (2012). Not just ‘‘telling stories’’. History of mathematics for teacher students: What is it and how to teach it. Paper presented in ICME-12, Seoul, Korea, Retrieved from, www.icme12.org/upload/UpFile2/TSG/0484.pdf. Accessed 20 May 2013.

人教社课题“数学史融入数学教材”开题会暨教学研讨会召开

洪燕君

（华东师范大学数学系，上海 200241）

2014 年 3 月 15-16 日，由华东师范大学数学系汪晓勤教授主持的人民教育出版社课题“数学史融入数学教材”开题会暨 HPM 教学研讨会在浙江省义乌市义乌中学成功举行。本次会议围绕 3 个主要议题展开：

●数学史融入数学教材——研究内容与研究方法；

● 数学史融入数学教学的实践——经验分享；

● HPM 课例研究——研究方法与分析框架。

会议由人教社资助，浙江省义乌中学承办。来自浙江诸暨、杭州、永嘉、义乌、桐乡等地的浙派名师和中学骨干教师、人教社王嵘老师、华东师范大学博士、硕士研究生等共计 30 余人参加了会议。浙派名师、义乌市数学学科带头人王芳老师主持了会议。

汪晓勤老师和王嵘老师分别作了主题报告，介绍课题的学术背景、研究内容和研究方法；浙江省诸暨中学张小明老师、浙江省萧山中学王芳老师、浙江省桐乡县凤鸣中学沈金兴老师、义乌市第四中学陈锋老师、义乌市第三中学金慧萍老师分别作了专题报告，介绍数学史融入高中数学进行的理念、方法、案例和成效，分享 HPM 教学的经验和心得。会议期间，温州市永嘉县夏晓华数学教育工作室的老师们还带来了她们独具特色的“模拟数学课堂”，引起与会代表的浓厚兴趣。

1 数学史融入数学教材：内容与方法

1.1 研究背景

早在 19 世纪，欧美学者就已经开始关注数学史的教育价值了。20 世纪 70 年代，数学史与数学教育关系（HPM）与数学教育心理学（PME）一样，成了数学教育中的重要研究领域，相应的国际研究小组也正式隶属于国际数学教育委员会（ICMI）。长期以来，人们对

数学史的教育价值已经做了广泛而深入的探讨，如，Gulikers 和 Blom（2001）建立了一个三维分类框架，并且在每个维度上分别总结了数学史对于教师和学生的价值，见表 1。

表 1　数学史的教育价值：Gulikers 和 Blom 的分类框架

类别	教师	学生
概念视角	（1）历史相似性（历史发生原理）； （2）丰富教师的知识储备和教学资源； （3）有助于更好地理解数学的本质。	（1）帮助学生理解数学； （2）使学生获得心理安慰； （3）通过古今数学方法的对比，拓宽学生的思维； （4）帮助学生以非线性方式（即非演绎方式）学习； （5）提供另类方法，促进学生思考。
文化视角	（1）发展多元文化进路； （2）加强数学与其他学科之间的联系。	（1）有助于解释数学在社会中的角色以及数学发展的内外因； （2）展现数学是人类的文化活动； （3）消除性别差异，鼓励女生学习数学。
动机视角	（1）创造活跃的课堂氛围； （2）获取有用的史料，激发教师对所教主题的热情。	（1）增加学生的学习兴趣； （2）创造学生的学习动机； （3）使数学变得更亲和、更令人愉悦； （4）培养优秀生的远见卓识。

Jankvist(2009)则将数学史对数学教育的作用分成“工具”和“目标”两类，首次提出：数学史也是学生学习的目标。

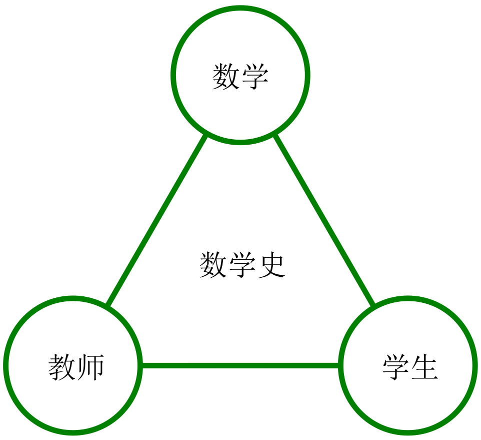


图 1 数学三角形

Gulikers 和 Blom 的框架之涉及教学三角形的两个顶点。事实上，数学史对于第三个顶点——数学也是不可或缺的。

人教版高中数学教材中有较为丰富的数学史内容，见表 2。

表 2 人教版高中数学教材中的数学史

类别	内容	所属栏目
数学概念	函数概念的历史、对数的历史、向量的由来	阅读材料
学科领域	三角学的历史、画法几何与蒙日	阅读材料
数学人物	笛卡儿、费马、海伦、秦九韶	阅读材料
数学方法	中外求解方程的方法、秦九韶算法、欧几里得算法、辗转相除法、更相减损术、割圆术、蒙特卡罗方法、高斯求和法、坐标法与机器证明	阅读材料
定理公式	圆柱容球、祖暅原理、海伦公式	正文
数学问题	萨莫斯隧道、斐波那契数列、国际象棋等。	正文

这些内容大致有以下特点：

- 数学史主题比较单一，主要关注了部分数学概念和少数数学人物；
- 运用方式比较单一，大部分内容是以附加式的阅读材料形式呈现的；
- 内容较零散，不够系统。

因此，将数学史融入数学教材不仅是十分自然而必要的事，而且在数学史融入数学教材的研究方面还存在很大的研究空间。

1.2 研究现状

1998 年，ICMI 研究会议（马塞），J. Fauvel 和 van Mannen 组织 16 个国家（包括中国）的学者对数学史在各国数学课程中的地位进行考察。涉及阿根廷、奥地利、巴西、中国、丹麦、法国、希腊、以色列、意大利、日本、荷兰、新西兰、挪威、波兰、英国、美国等国家的数学课程，但较少涉及具体的教材。

2010 年，在维也纳召开的第 6 届欧洲“数学教育中的数学史与认识论”暑期大学（ESU-6），来自法国、意大利、波兰、希腊等过的学者组织了一次小组讨论，与会者介绍了法国、意大利、波兰、希腊、英国、丹麦、以色列数学教材中的数学史，并粗略讨论了教材中融入数学史的目标、方式、评价标准以及反对将数学史融入教材的一些观点。此外，挪威学者 Smestad(2000)对挪威数学教材中的数学史进行了统计。

国内的研究主要有四类。第一类是对如何将数学史融入教材作理论探讨，如王振辉等（2002）曾讨论过将数学史融入教材的方式；李明振等（2006）讨论了数学史融入中学数学

教材的原则和方式；蒲淑萍等（2012）则从法国教材中获得若干启示。第二类是对现行教材中的数学史内容、呈现方式等进行统计分析，如胡炳生（2002）介绍过新加坡初中教材对数学史料的利用情况；杨豫晖等（2007）分析了小学教材中的数学史内容及其呈现方式；汪晓勤（2012）对法国初中数学教材中的数学史进行了分析；罗新兵等（2012）对北师大版高中数学教材中的数学史的分布特征进行了分析。第三类是对不同教材中数学史内容进行比较研究，如李开慧（2006）对中、新、美三国初中数学教材中的数学史内容作了对比分析。第四类是就教师和学生对教材中的数学史的看法、运用现状进行调查研究，如张明月（2012）。国内相关研究有如下特点：

- 针对初中和小学教材的研究较多，针对高中教材的研究较少；
- 多局限于对教材中的数学史内容的分析，而没有对教材知识的相关数学史进行研究；
- 文本研究较多，实证研究较少；
- 所提建议较多，但对教材编写者的实质性帮助不大。

因此，关于数学教材的数学史，还有很大的研究空间。

1.3 研究内容

鉴于国内外相关研究的不足，汪晓勤老师围绕数学教材修订工作的需求，提出了课题研究的内容框架，如图 2 所示。

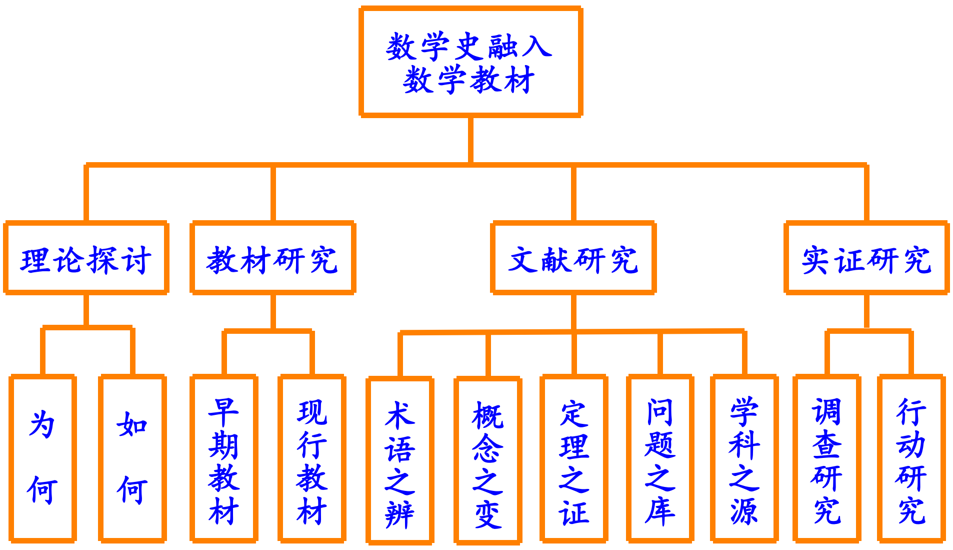


图 2 课题研究内容框架

本课题希望达成以下目标：

- 为数学史融入数学教材提供理论框架；

●为数学史融入数学教材提供更为丰富的材料；

●完善现行教材中的有关数学史内容；

●打破“数学史多用附加式”的传统，增加数学史融入数学教材的方式，更好地发挥数学史的教育价值；

●为其他专题研究提供参考。

1.4 文献研究

汪晓勤老师在报告中较为详细地介绍了关于美国早期数学教材中的数学史的研究，研究对象为19世纪末20世纪初的六种教材，具体信息见表3。

表3　早期的美国数学教材

教材名称	编者	出版社	出版年份
新平面与立体几何	贝曼、史密斯	Ginn& Company	1899
代数学基础	贝曼、史密斯	Ginn& Company	1900
平面几何	贝兹、韦伯	Ginn& Company	1912
平面与立体几何	温特沃斯、史密斯	Ginn& Company	1913
初等代数	卡约黎、奥戴尔	The Macmillan Company	1915
初中数学	温特沃斯、史密斯和布朗	Ginn& Company	1917

研究的主要发现：

●美国早期六种几何或代数教材中融入了相当丰富的数学史元素，教材编写者采用了五种方式来运用数学史，但主要集中在点缀式、附加式、复制式和顺应式；

●数学教材运用数学史的情况与同时代数学史研究状况密切相关；

●相同学科不同教材运用数学史的情况千差万别；

●不同学科的教材运用数学史的情况差异显著。

●今日美国 Prentice Hall 教材所含数学史材料的数量并没有增加多少，而数学史的运用方式也仍然集中于点缀式、附加式和顺应式，并无创新，甚至还少了重构式。

1.5 专家解读

人教社中学数学研究室的王嵘老师就数学史在现有教科书中的渗透方法进行了聚类说明，她认为目前数学教材对数学史的渗透有四种呈现方式：以引入、补充说明或者例、习题

的形式与正文有机的结合；以阅读与思考、探究与发现以及信息技术应用的形式来拓展资料；以实习作业的方式进行课题学习；把数学史选讲作为专题选修课。

与此同时，她对数学史融入数学教材的呈现方法也做了较深入的思考，如在现有内容与方法的梳理中将进一步探究如下问题：现有教材的内容覆盖了哪些历史方面，采用的方法是否最优？现有内容的层次性如何？哪些内容需要保留？哪些内容需要进一步改造？此外，在与正文结合以及课题学习的方式中，一直在思考还有哪些方法值得研究；对于拓展资料的多样化以及数学史选讲的呈现方式里考虑如何古今结合，适当的让学生经历历史上数学家探究与发现某知识的过程，或者怎样让学生运用现代信息技术解决古题，以及怎样更有利于阅读的呈现方式来吸引学生去读、去思考数学史中的人物、事件、思想方法。

报告的最后，王嵘老师从文本和文献相结合的角度提出了专题研究工作的个人计划，希望在课题学习和参与的过程中让数学史中有趣、有价值的东西更好地反映到教材中，圆满完成数学史在数学教材中的研究课题。

2 数学史融入数学教学：经验分享

2.1 矢志不渝

浙江省诸暨中学的张小明老师做了题为“数学史融入数学教学：个人的经验”的报告。自 2004 年开始，张小明老师立足于自己的课堂教学实践，围绕“如何将数学史融入高中数学课堂教学？当数学史融入课堂后的情形为何？”这两个重要问题，开展了长期的行动研究，通过反复实施“计划、行动、观察、反思、再计划”的教学循环，对中学数学教学中融入数学史的方法和途径进行了探索，获得了丰富的实践经验。

张小明老师认为，在研读历史材料的过程中，一方面要着眼于概念的历史发展，另一方面也要关注数学概念的历史发展对数学教学的启示和意义：如历史上数学家遇到的困难对当今学生学习产生怎样的启示？历史上数学家们采用的方法和课本中的方法有何异同？能否为学生所用？在历史的脉络中重新思考课本内容的编排，对此有何看法？哪些历史材料可以融入数学教学之中？具体形式是怎样的？

在将数学史融入教学的方式选择上，他提出首先要考虑学生的需求，依据历史、教材、学生认知这三个维度的分析来选择具体的实施方法，而且无论运用哪种方式，都需要对历史材料进行一定的加工和剪裁，接下来他从自身教学实践的角度提出“学习工作单是实现数学

史融入的有效手段”这一观点，并详细的从历史考证、教材分析、学生认知、历史材料的剪裁、加工和融入等这些层面介绍了“复数概念的学习单设计”。最后，他和大家分享了几个精彩案例：帕斯卡赌注与数学期望（附加式）、等比数列求和公式（复制式）、空间向量的运算（顺应式）、均值不等式的证明（顺应式）、余弦定理的证明（重构式）。

2.2 且行且思

浙江萧山中学的王芳老师做了“HPM 教学设计与实践”的报告。王芳虽然是一位年青教师，但勤奋好学，善于思考，在 HPM 领域颇有建树。她给大家带来了解三角形的应用、数列的概念、导数的概念、导数的应用等 HPM 课例，并分享了“先内容，后素材；多角度，少重复；看需求，多方式；重思想，轻形式”的 HPM 课例研究心得，提出了如何应对学生的提问、处理近期与长远的学习目标以及如何面对学生的功利现象的思考。

2.3 海阔天空

浙江凤鸣高级中学的沈金兴老师做了题为“校本课程：数学史融入课堂的有力补充”的报告。他首先从 2009 年湖北理科高考卷第 10 题、2012 年湖北卷文科第 17 题、2013 年湖北卷理科第 14 题等这些关于多边形数的高考题谈起，分析了教材中的数学史料必将进入高考这一趋势；然后，他谈到以课题研究和教育硕士的求学历程为依托的自身专业成长经历，并详细讲解了“形数理论”的应用和拓展发挥，即由“数列”一章第一节引入“形数理论”知识开始，讲到“等差数列的前 n 项和”，再到“等比数列的前 n 项和”，在这一章的教学中，“形数理论”如一根主线贯穿始终，不仅让学生领略了数学文化的博大精深，同时也体会到了古代数学家深邃的数学思想。

2006 年，浙江省实施新课程改革以来，沈金兴老师义无反顾地承担了“数学文化”的校本课程开发，第一轮校本课程以“提高学生数学学习兴趣”为主，第二轮校本课程（2011-2013 年）围绕“启迪学生的数学思想，提高学生的数学素养”这个主题，并自行撰写了课程纲要和部分教材，且对校本课程的授课形式作了深入思考和总结。如证明二次幂和公式时，除了“形数理论”的方法，还可以用“三角形法”以及“几何证法”和“物理学证法”，这种授课方式称之为“挖掘式”；概率论诞生中的“点数问题”，“贝特朗悖论”可以采用讨论的方法；“欧拉公式”的学习可以使用“探究式”；让学生通过网上查找与主题相关的资料，然后在课上相互交流，称之为“交互式”；有些教材中的内容在可以用“游戏”或“动

手实验”的形式来展现，如：《必修 5》中“数列”这一章的“阅读与思考”的“九连环”，《选修 2－2》中“推理与证明”中“梵天塔”的例子等；还有一些数学公式、定理、结论等具有对称美、形式美、简洁美、奇异美等，可以让学生用欣赏的方式学习。

沈金兴老师总结了学生对于数学史融入数学教学的接受过程：

●第一阶段：愿意听，没用处；

●第二阶段：喜欢听，有兴趣；

●第三阶段：认真听，会思考；

●第四阶段：想听懂，善挖掘。

2.4 牛刀小试

金惠萍老师是义乌高中数学学科王芳名师工作室的青年骨干教师，首次接触“高中数学起始课的 HPM 教学设计”课题研究活动，按照要求她自主选择了“对数概念”的教学内容，并在 HPM 团队指导下进行了三轮磨课。

在大会的这个 HPM 实践交流的环节中，她给大家介绍了“历史重构下的对数概念”的三次教学成长历程：

在这个过程中她不仅掌握了 HPM 教学的基本原则、步骤方法，而且从观念到知识、能力等层面上提升了自己的 HPM 教学设计能力，有效地促进自身的专业成长。

2.5 渐入佳境

义乌高中数学学科王芳名师工作室的陈锋老师是金华市教坛新秀、义乌市教学名师。他在义乌最早实践了 HPM 视角下的“椭圆概念”教学，而后又实施了“棱柱的定义”教学。此次大会上，他给大家分享了自己实施 HPM 教学的心路历程。

在“椭圆概念”的教学中，他介绍了课堂实验“手电筒照射球”中“圆”如何向“椭圆”

知识迁移的构思过程，以及从几何画板的角度对 Dandelion 双球产生的自然过程进行了释疑。

在“棱柱定义”的教学过程中，他先作如下思考：学生对棱柱的定义是否会具有历史相似性？学生会犯欧几里得之类的错误吗？学生能自己定义一个棱柱面吗？基于此，他首先布置学生课前收集、制作棱柱模型，让他们有丰富的感官意识；然后，在课堂上让学生们分组讨论，用自己的语言给棱柱下定义；之后，师生们共同辨析、修正、完善“棱柱”的定义，最后在论证中让学生体会棱柱定义不断严谨的发生、发展过程。这种数学史融入教学的方法称之为“重构法”。此外，他还谈到了如何运用“顺应式”改编数学题，这是 HPM 教学实践的又一种新的尝试。

诚然，这五位中学教师不论从事 HPM 实践研究时间是长是短，但他们对 HPM 的信念坚定而执著，他们的教学实践让大家真切地感受到了数学史是怎样从历史形态走向教学形态的过程，他们的报告深深震撼了每一位与会者，会场上掌声总是经久不息。

3 HPM 课例研究：方法与框架探讨

对于 HPM 课例的分析框架，汪晓勤老师提出如下思路：一种定性、二个诠释学循环、三维教学目标、四种运用方式、五项基本原则。与会者对此进行了热烈讨论。较为遗憾的是，讨论时间太短，大家都意犹未尽。

总体而言，此次大会具有理论水平高屋建瓴、实践过程精益求精、团队合作众志成城等特点，它引发了课题组成员以及王芳工作室和夏晓华工作室诸成员对本课题的浓厚兴趣，增强了大家完成课题研究的信心。

与会人员合影