上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2023 年第 12 卷第 01 期

克拉维斯（C. Clavius, 1538-1612）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首新语

从克拉维斯的《几何原本》注看数学家的创新

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

在创新意识成为核心素养、拔尖创新人才的培养备受关注、人工智能（如 Chat GPT）对学校教育提出挑战的今天，人们开始倡导数学“留白创造式”教学，即立足立德树人的目标，为学生自主学习、创获新知提供足够思维空间和探究机会的教学。那么，如何通过课堂留白来引发学生的创新？本文以 16 世纪德国著名数学家克拉维斯（C. Clavius, 1538-1612）《几何原本》注中的部分内容为例，总结数学家做出创新贡献时所运用的策略，为留白创造式教学的实施提供思想启迪。

1 新命题的发现

《几何原本》命题 I.16 称：“在任意三角形中，若延长一边，则外角大于任一内对角。”该命题对于四边形成立吗？如图 1 所示，考察矩形、一般平行四边形、梯形、含三个钝角的四边形，外角大于所有不相邻内角的结论并不成立。

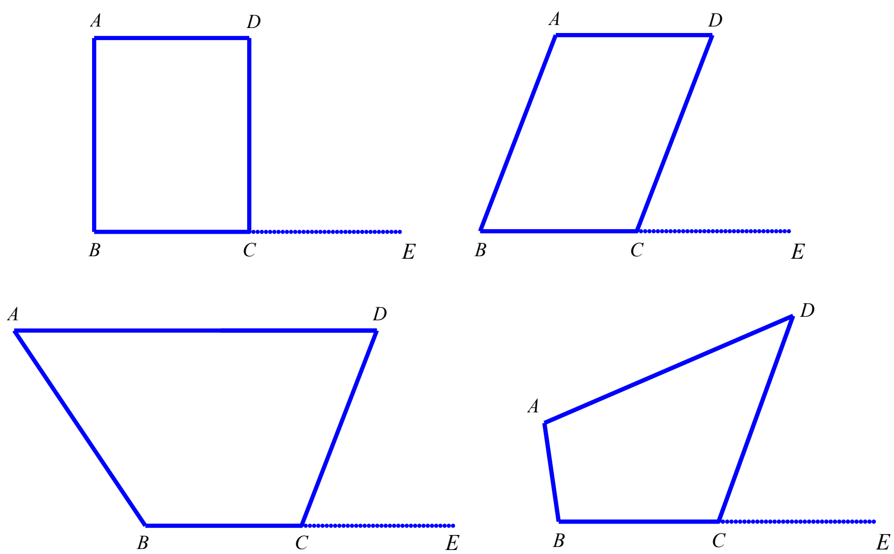


图 1 一些四边形

克拉维斯构造了一个外角大于所有不相邻内角的四边形，据此得到一个新的命题。如图 2，四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC$ 为钝角，$\angle BAD$ 为直角，BA 与 CD 的延长线交于点 G，则外角 DCE 分别大于三个不相邻的内角。即

命题 1 若四边形的一个内角为直角，其对角为锐角，则该锐角的邻补角大于所有不相邻的三个内角。

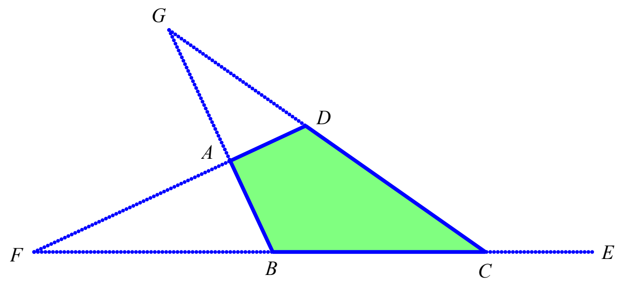


图 2 含有两个钝角和一个直角的四边形

《几何原本》第一卷给出以下四个命题：

命题 I.35：同底且位于同样两条平行线之间的平行四边形相等；

命题 I.36：等底且位于同样两条平行线之间的平行四边形相等；

命题 I.37：同底且位于同样两条平行线之间的三角形相等；

命题 I.38：等底且位于同样两条平行线之间的三角形相等。

克拉维斯则提出了两个梯形之间的关系：

命题 2 同底、位于同样两条平行线之间且相对的底相等的梯形相等；

命题 3 等底、位于同样两条平行线之间且相对的底相等的梯形相等。

利用命题 I.37 和 I.38 可证明命题 2，利用命题 I.38 可证明命题 3。

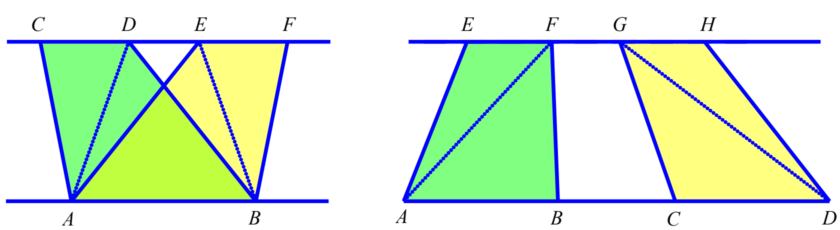


图 3 等底等高或同底等高的梯形之间的关系

《几何原本》命题 I.43 指出：“在任意平行四边形中，位于对角线两端的两个平行四边形的补形相等。”如图 4，欧几里得考虑的对角线两端的平行四边形具有一个公共顶点（位于对

角线上），克拉维斯则考虑了两个平行四边形没有公共顶点的情形，进而提出新的命题。如图 5，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 I 和 J 位于对角线 AC 上，四边形 $AKJL$ 和 $IHCF$ 均为平行四边形，则余形 $KBHIJ$（或 $KBHM$）和 $LJIFD$ （或 $LNFD$）相等，由此可得

命题 4 在任意平行四边形中，位于对角线两端、且没有公共顶点的两个平行四边形的补形相等。

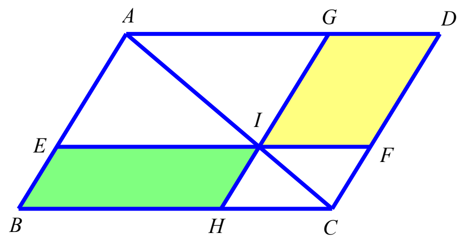


图 4 《几何原本》命题 I.43

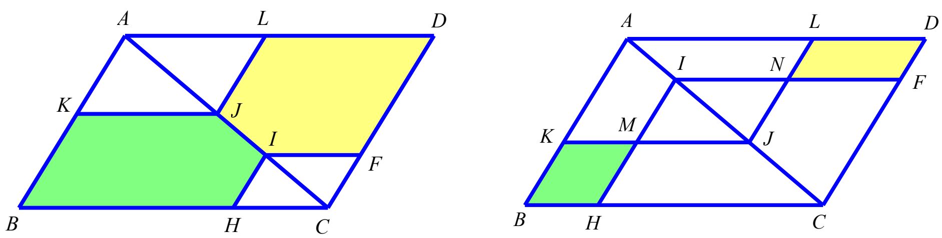


图 5 命题 I.43 的推广

《几何原本》命题 III.22 称：“圆内接四边形的对角之和等于两直角。”克拉维斯则证明了该命题的逆命题：

命题 5 在四边形中，如果对角之和等于两直角，则过任意三个顶点的圆也经过第四个顶点。

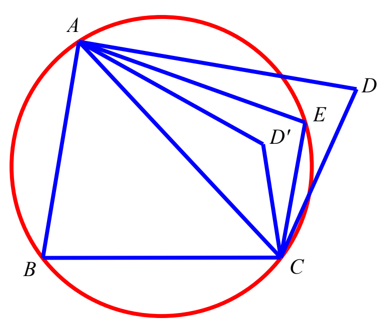


图 6 命题 III.22 的逆命题

克拉维斯采用了反证法：已知四边形 $ABCD$ 的对角之和为两直角，假设顶点 D 不在经过顶点 A、B、C 的圆上（位于圆内或圆外），则在圆上取一点 E，于是由命题 III.22 可得 $\angle B+\angle E$ 等于二直角，从而 $\angle E=\angle D$ 或 $\angle D'$，这是不可能的。

2 新方法的运用

《几何原本》命题 I.32 称："在任意三角形中，如果延长一边，则外角等于两个内对角之和，且三角形的三个内角之和等于二直角。"公元 5 世纪，古希腊哲学家普罗克拉斯（Proclus, 约 411-约 485）证明：n 边形的所有内角之和等于 $(2n-4)\times 90°$。如图 7 所示，普罗克拉斯从 n 边形的某个顶点出发作对角线，将多边形分割成 $n-2$ 个三角形，从而得出结论。克拉维斯则在 n 边形内部任取一点，连结该点与各顶点，将多边形分割成 n 个三角形，从而得出结论。如图 8 所示。这种证明更能为学生所理解。

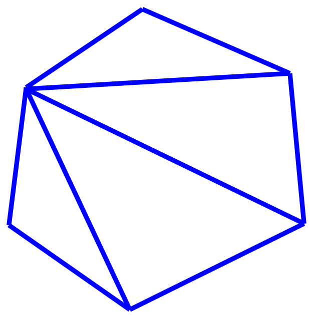


图 7 普罗克拉斯的证明

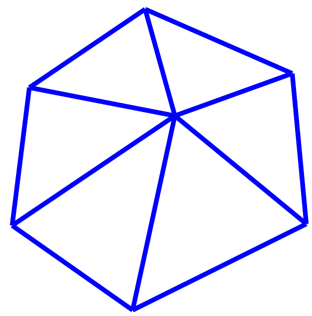


图 8 克拉维斯的证明

《几何原本》命题 I.47 就是著名的毕达哥拉斯定理（勾股定理）："在直角三角形中，直角所对边上的正方形等于直角边上正方形之和。"如图 9 所示，欧几里得以全等三角形为媒介，证明正方形 *AFEC* 和 *BCHG* 的面积分别等于长方形 *AIKD* 和 *DKJB*，从而得出结论。

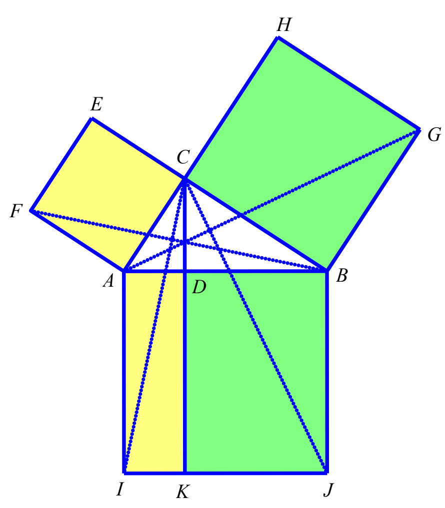


图 9 欧几里得关于勾股定理的证明

利用《几何原本》之前已经出现的有关命题，克拉维斯给出了两种全新的证明。

证法 1：如图 10，分别在 Rt△ABC 的两条直角边 AC 和 BC 上作正方形 $ACEF$ 和 $BCHG$ 延长 FE 和 GH，交于点 K。连结 KC 并延长，交 AB 于点 D。分别过点 A 和 B 作 AB 的垂线，交 FK 和 GK 于点 I 和 J，连结 IJ。易证：Rt△AIF≌Rt△CKE≌Rt△ABC，Rt△JBG≌Rt△KCH≌Rt△ABC，故知四边形 $AIJB$ 为正方形，且 $AI//DK//BJ$。利用命题 I.35 得，

$$S_{\square ACEF}=S_{▱ACKI}=S_{▱AILD}，\quad S_{\square BCHG}=S_{▱BCKJ}=S_{▱BJLD}，$$

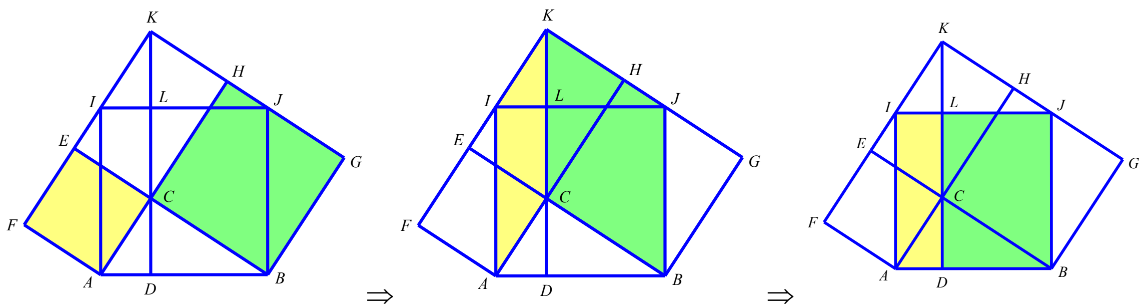


图 10 勾股定理新证之一

故得

$$S_{\square ACEF}+S_{\square BCHG}=S_{▱AILD}+S_{▱BJLD}=S_{\square AIJB}。$$

与欧几里得不同，克拉维斯在 Rt△ABC 的斜边 AB 的同侧作三个正方形，并以平行四边形为正方形和长方形之间的媒介，得出结论。

证法 2：如图 11，同证法 1，分别在 Rt△ABC 的两条直角边 AC 和 BC 上作正方形 $ACEF$ 和 $BCHG$，过点 A 和 B 作 AB 的垂线，分别与 FE 的延长线和 GH 交于点 I 和 J，连结 IJ。

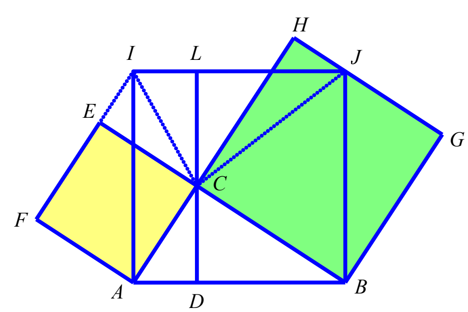


图 11 勾股定理新证之二

过点 C 作 AB 的垂线，分别与 AB 和 IJ 交于点 D 和 L，连结 CI 和 CJ。利用命题 I.41 得，

$$S_{\square ACEF}=2S_{\triangle ACI}=S_{▱AILD}，\quad S_{\square BCHG}=2S_{\triangle BCJ}=S_{▱BJLD}，$$

故得

$$S_{\square ACEF}+S_{\square BCHG}=S_{\square AILD}+S_{\square BJLD}=S_{\square AIJB}。$$

这里，克拉维斯在 Rt△*ABC* 的斜边 *AB* 的同侧作三个正方形，并以三角形为正方形和长方形之间的媒介，得出结论，证明过程更加简洁。

克拉维斯还用同样的方法证明了帕普斯命题（勾股定理的推广）：如图 12（1），在任意三角形 *ABC* 的两腰 *AC* 和 *BC* 上分别作平行四边形 *ACEF* 和 *BCHG*，*FE* 和 *GH* 的延长线交于一点 *K*，连结 *KC* 并延长，交底边 *AB* 于点 *D*。分别过点 *A* 和 *B* 作 *DK* 的平行线，交 *FE* 和 *GH* 于点 *I* 和 *J*，则平行四边形 *AIJB* 的面积等于平行四边形 *ACEF* 和 *BCHG* 的面积之和。如图 12（2）和 12（3），利用《几何原本》命题 I.35，克拉维斯分别以平行四边形 *ACKI* 和 *BCKJ* 为媒介，建立平行四边形 *ACEF* 和 *AILD*、平行四边形 *BCHG* 和 *BJLD* 之间的等面积关系。

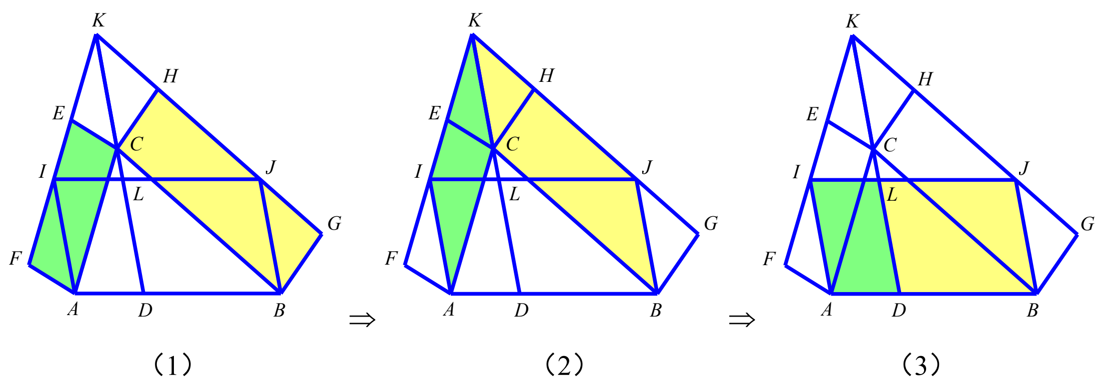


图 12 克拉维斯关于帕普斯命题的证明

3 新课题的研究

人们很容易将“等边多边形”和“等角多边形”混为一谈，“等边”和“等角”是否等价？《几何原本》第四卷中有如下作图问题：

命题IV.11：作已知圆的内接等边且等角的五边形；

命题IV.12：作已知圆的外切等边且等角的五边形；

命题IV.15：作已知圆的内接等边且等角的六边形；

命题IV.16：作已知圆的内接等边且等角的十五边形。

可见，“等边”和“等角”是不同的条件，否则只要说“等边”或“等角”即可。克拉维

斯敏锐地捕捉到两者的差别，并作了深入的研究。他首先证明

命题 6 圆内接等边多边形必是等角的。

如图 13，若圆内接多边形是等边的，则以各边为底、圆心为顶点的等腰三角形两两全等，因而它们的底角两两相等，从而各内角两两相等。

由克拉维斯指出，圆内接等角多边形不一定是等边的，因而命题 6 的逆命题并不成立。如图 14，设 *ABCDEF* 为圆内接等边六边形，在弧 *AB*、*CD* 和 *EF* 上分别取点 *G*、*H* 和 *I*，使得 $AG = CH = EI$，易知圆内接六边形 *AGCHEI* 是等角多边形，但并非对等边多边形。

那么，一个圆内接等角多边形满足什么条件才同时是等边的呢？克拉维斯接着证明了三个命题：

命题 7 边数为奇数的圆内接等角多边形是等边的；

命题 8 边数为偶数、但有两条邻边相等的圆内接等角多边形是等边的；

命题 9 边数为偶数、但在两条等边之间有偶数条边的圆内接等角多边形是等边的。

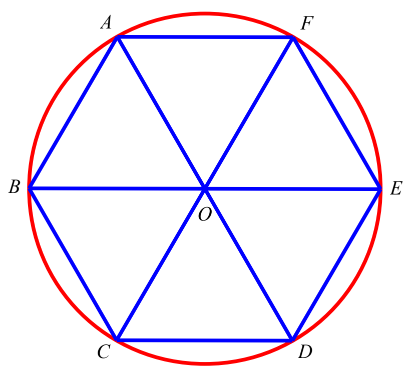


图 13 圆内接等边多边形

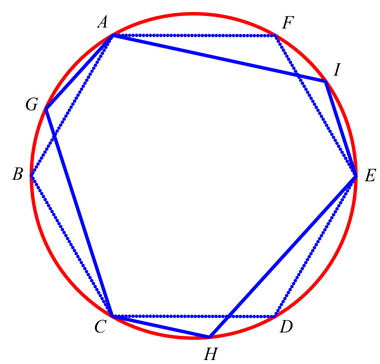


图 14 圆内接等角多边形

克拉维斯接着证明：

命题 10 圆外切等角多边形必是等边的。

如图 15，若圆外切多边形是等角的，则以各边为底、圆心为顶点的三角形均为等腰三角形，且它们两两全等，因而各边两两相等。

由克拉维斯指出，圆外切等边多边形不一定是等角的，因而命题 10 的逆命题并不成立。如图 16，设 *ABCDEF* 为圆内接等边六边形，在弧 *AB*、*BC*、*CD*、*DE*、*EF* 和 *FA* 上分别取点 *G*、*H*、*I*、*J*、*K* 和 *L*（不是相应弧圆弧的中点），使得弧 $AG = AL = CH = CI = EJ = EK$，分别过点 *G*、*H*、*I*、*J*、*K*、*L* 作圆的切线，得到圆外切六边形 *PQRSTU*，易知该六边形是等边多边形，

但并非对等角多边形。

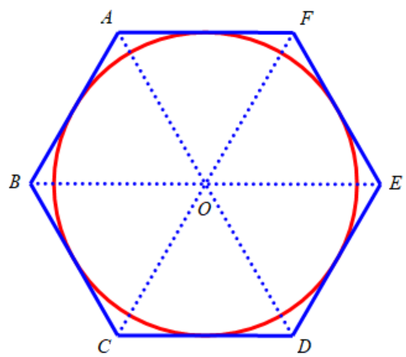


图 15 圆外切等角多边形

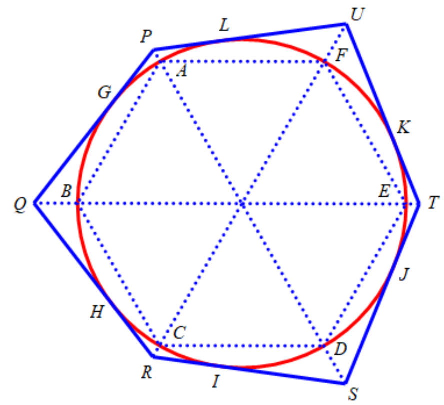


图 16 圆外切等边多边形

那么，一个圆外切等边多边形满足什么条件才同时是等角的呢？克拉维斯接着证明了三个命题：

命题 11 角数为奇数的圆外切等边多边形是等角的；

命题 12 角数为偶数、但有两个邻角相等的圆外切等边多边形是等角的；

命题 13 角数为偶数、但在两个等角之间有偶数个角的圆外切等边多边形是等角的。

4 讨 论

以上我们看到，克拉维斯在注释欧几里得的命题时，发现了新命题、新方法和新课题。那么，他又是如何在传承中作出创新的呢？爱因斯坦（A. Einstein, 1879-1955）曾经说过："提出一个问题往往比解决该问题更重要。解决一个问题，可能只不过是一种数学或实验技能；但要提出新的问题、新的可能性，从新视角看旧问题，需要创造性的想象力，这标志着科学的真正进步。"正是由于能够提出新的问题、猜想新的可能性以及从新视角看旧问题，克拉维斯才能做出创新工作。

4.1 发现新命题的策略

克拉维斯采用了两种发现新命题的策略。第一种策略是"否定属性"。虽然美国学者布朗和华尔特与 20 世纪 80 年代提出这种策略，但实际上它在历史上早已有之。克拉维斯在《几何原本》命题的基础上发现新命题的基本流程如图 17 所示。

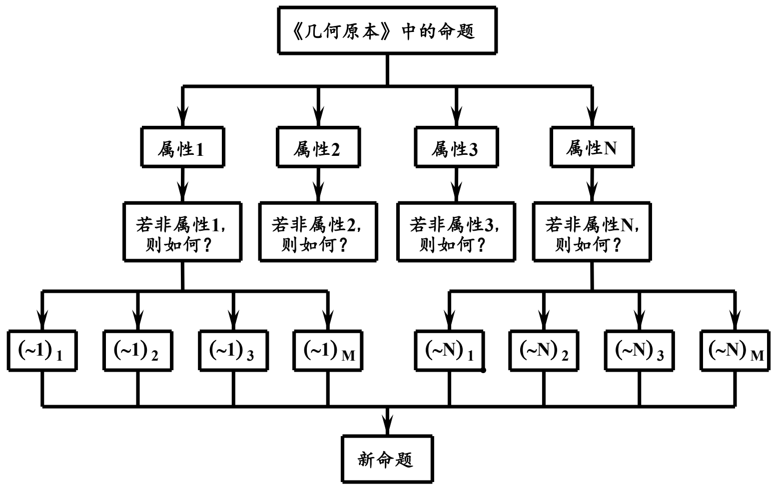


图 17 克拉维斯发现新命题的过程

《几何原本》命题 I.16 可以重新表述为:“若一个多边形的边数为 3,则其任一外角均大于其不相邻的内角。”该命题所蕴含的部分属性是:(1)多边形的边数为 3;(2)研究的目标是多边形的外角与不相邻内角之间的大小关系。克拉维斯否定属性 1 而保留属性 2,即提出问题:如果边数不是 3,结果又如何?将多边形的边数改为 4,对外角和内角的关系进行探究,就得到新命题 1。

命题 I.35 可以重新表述为:“若两个平行四边形具有相同的底边,且位于同样两条平行线之间,则两者面积相等。”该命题所蕴含的部分属性是:(1)研究对象为两个平行四边形;(2)它们有一条公共底边;(3)它们位于两条平行线之间;(4)研究的目标是面积关系。克拉维斯否定属性 1 而保留属性 2-4,即提出问题:如果不是平行四边形,结果又如何?将平行四边形换成“梯形”这一新属性,克拉维斯得到新命题 2。类似地,改变命题 I.36 的一个属性提出新问题,对问题的探究导致新命题 3 的发现。

命题 I.43 可以重新表述为:“在任意平行四边形中,过对角线上任意一点,作两条邻边的平行线,则位于该对角线两端的两个平行四边形的补形相等。”该命题蕴含的部分属性是:(1)已知的多边形是平行四边形;(2)所取的点在对角线上;(3)所取得点数为 1,或对角线两端的两个平行四边形具有一个公共顶点;(4)研究的目标是两个补形之间的关系。克拉维斯否定属性 3,提出问题:若在对角线上所取点数不是 1,或者对角线两端的两个平行四边形没有公共顶点,则结果又将如何?对该问题进行探究,导致新命题 4 的发现。

第二种策略是“互换属性”,即将原命题中的条件和结论互换,探究逆命题是否成立,从

而发现新命题。在《几何原本》中，欧几里得同时给出了部分原命题及其逆命题，如“大边对大角”（I.18）和“大角对大边”（命题 I.19），勾股定理（命题 I.47）及其逆定理（命题 I.48），“等边对等角”（命题 I.5）和“等角对等边”（命题 I.6），等等。但在很多命题的逆命题上，他为后人留了白，命题 III.22 的逆命题就是克拉维斯补白的结果。

实际上，我们可以证明欧几里得很多命题的逆命题也是成立的。仍以命题 I.16 为例，将命题的条件与结论互换，得到新命题：“如果平面凸多边形的任意一个外角均大于其不相邻的内角，那么该多边形为三角形。”设 $A_1A_2\cdots A_n$ 为一平面凸 n 边形，每一个内角所对应的外角大小分别记为 α_1，α_2，$\cdots$，α_n，由 $\alpha_i > A_j$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ j\neq i$）得

$$(n-1)\alpha_1 > A_2 + A_3 + \cdots + A_n,$$

$$(n-1)\alpha_2 > A_1 + A_3 + \cdots + A_n,$$

$$\cdots\cdots$$

$$(n-1)\alpha_n > A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1},$$

诸式相加得

$$(n-1)(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n) > (n-1)(A_1+A_2+\cdots+A_n),$$

即

$$2\pi > (n-2)\pi,$$

于是得

$$n<4,$$

故得 $n=3$。

4.2 发现新方法的策略

克拉维斯发现新方法的策略是“更换步骤”，如图 18 所示。

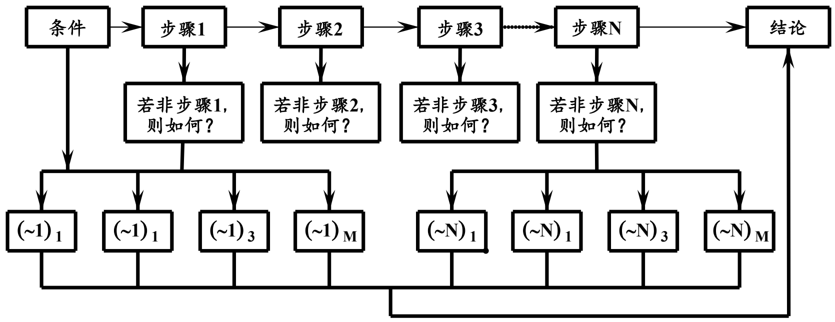
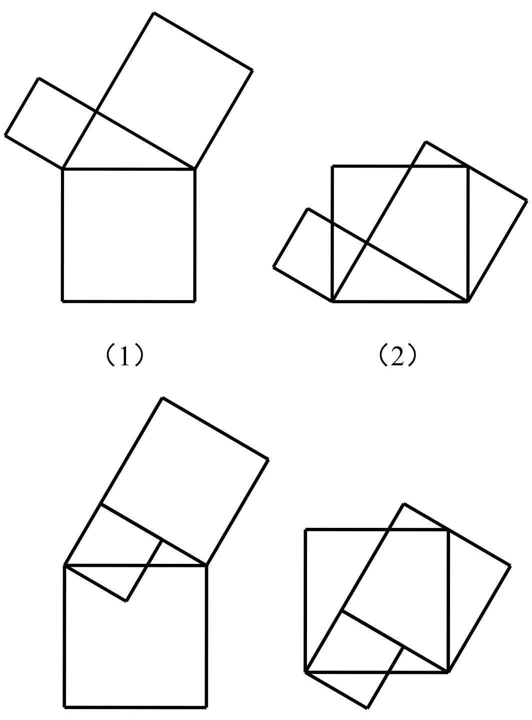


图 18 克拉维斯发现新方法的过程

关于 n 边形内角和定理，普罗克拉斯证明的第一步是过多边形的某个顶点，用对角线将其分割为 $n-2$ 个三角形，若不用对角线来分割多边形，结果会如何呢？克拉维斯用多边形内部一点和诸顶点的连线代替对角线，得到了新的证明方法。

类似地，在勾股定理的证明中，欧几里得的第一步是根据命题 I.46 分别在直角三角形三边的外侧作正方形，即斜边上的正方形与直角边上的两个正方形分别位于斜边的两侧，若斜边上的正方形与直角边上的两个正方形不位于斜边的同侧，结果会如何？图 19 呈现了三个正方形的 8 种不同作法，欧几里得选择了第一种，而克拉维斯则选择了第二种。



（1） （2） （3） （4）

（5） （6） （7） （8）

图 19 直角三角形三边上正方形的不同作法

随着证明第一步的改变，第二步中的沟通正方形和长方形的媒介也发生了改变，两者不同的媒介对应了克拉维斯的两种新证明。

如果选择第三和第四种作图法，可以得到中国晚清数学家华蘅芳（1833-1902）的两种证明，如图 20 所示。

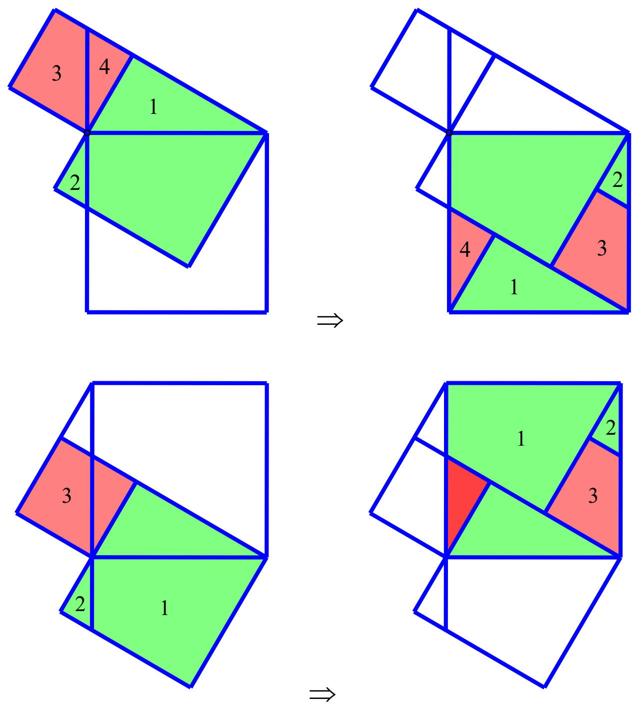


图 20 华蘅芳关于勾股定理的两种证明

4.3 发现新课题的策略

克拉维斯在《几何原本》基础上发现新课题的策略是“倾听古人”，这种策略可以分解为四步：倾听、质疑、设问和探究。

对于平面凸多边形，欧几里得很清楚“等边”和“等角”是不等价的。他在第 1 卷中定义了等角不等边的四边形（矩形）和等边不等角的四边形（菱形），由此很容易发现，圆内接等角四边形不一定是等边的，圆外切等边四边形不一定是等角的，如图 21 所示。因此，欧几里得在第 4 卷的相关命题中，始终将“等边”和“等角”这两个条件并列。这是克拉维斯“倾听古人”所获得的信息。但“等边”和“等角”真的毫无关系吗？这是克拉维斯的质疑。有了质疑，克拉维斯就提出了具体的问题：在什么条件下等边多边形一定是等角的？在什么条件下等

角多边形一定是等边的？于是，一个新的课题诞生了。

在《几何原本》命题中寻找欧几里得默认而未曾作过证明的结论，据此展开深入研究，得到许多新的命题。“等边”和“等角”的关系是欧几里得为后世留下的十分精彩的课题。

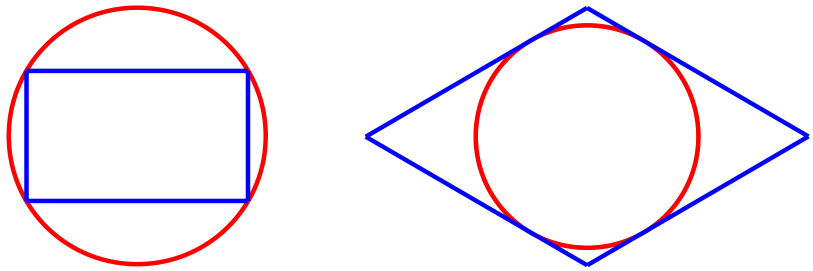


图 21 从圆内接矩形和圆外切菱形看等边和等角的不同

5 结 语

克拉维斯发现新命题、新方法和新课题的策略为留白创造式教学提供了参照。

首先，从克拉维斯的注解中，可以发现《几何原本》所蕴含的若干留白形式：发现之白、论证之白、方法之白和问题之白，这些形式为教师在课堂上留什么白提供了参照：可以为学生发现新知、论证命题、运用新法和提出问题提供思维空间和探究机会；

其次，从克拉维斯的注解中，可以发现若干具体的留白策略：否定属性、互换属性、更换步骤、倾听古人，这些策略为教师在课堂上如何留白提供了参照：毫无线索的留白可能导致“白留”，而有线索的留白则更为高效，可以引导学生运用“倾听”策略去补“发现之白”，运用“否定属性”和“互换属性”去补“问题之白”，运用“更换步骤”策略去补“方法之白”。

留白有形，留白有方，数学的历史是数学教学的思想源泉。

目 录

CONTENT

专题研究

美英早期几何教科书中的三垂线定理

苗湘晗，沈中宇

（苏州大学数学科学学院学院，苏州 215000）

1 引 言

三垂线定理是在线面垂直的基础上研究线线垂直的一个重要定理，揭示了平面的垂线、平面的斜线及平面内的直线之间的垂直关系，在传统几何研究中占据重要地位[1]。虽然最新修订的 2017 年版《普通高中数学课程标准》未对三垂线定理作出明确要求，但沪教版、人教 B 版、苏教版以及鄂教版教科书中仍然保留了三垂线定理的相关内容[2]。

沪教版将三垂线定理安排在空间直线与平面一章中，前接直线与平面垂直、平面与直线所成的角，后续二面角、平面与平面垂直，起到了承上启下的作用。人教 B 版和苏教版将三垂线定理放置在例题的环节，而鄂教版将其作为一道练习供学生思考。由此可见，目前三垂线定理在教科书中仍然占据着比较重要的地位。但在实际教学中，三垂线定理一直是令教师头疼的“难点”，其原因在于三垂线定理在证明过程中需要添加大量辅助线，而教师往往难以在一节课内合理地解释其原理，由此就会使得学生对三垂线定理的理解不够深入，从而导致应用上的困难[1]。同时，在课程改革背景下，如何在三垂线定理的教学中培养学生的核心素养、渗透数学学科德育，也成为教师在教学过程中需要考虑的问题。

为了解决以上问题，我们需要了解三垂线定理的历史。三垂线定理在数学教科书中的演变过程反映了人们在认识上逐渐完善的过程。同时，参考早期教科书，也是站在前人肩膀上，可以帮助我们从更高的视角来更好地讲授三垂线定理。

基于此，本文聚焦三垂线定理，对 1798-1954 年出版的 61 种美英早期立体几何教科书进行考察，尝试回答以下问题：早期美英三角学教科书是如何表述和证明三垂线定理的？三垂线定理又有哪些应用？从而对今日教学提供启示。

2 研究对象

本文以相关数据库中 1798-1954 年出版的 61 种美英早期立体几何教科书为研究对象，以 20 年为一个时间段，它们的出版时间分布如图 1 所示。对于出自同一作者且内容无明显差异的教科书，视为同一种，并以出版最早的版本为准。

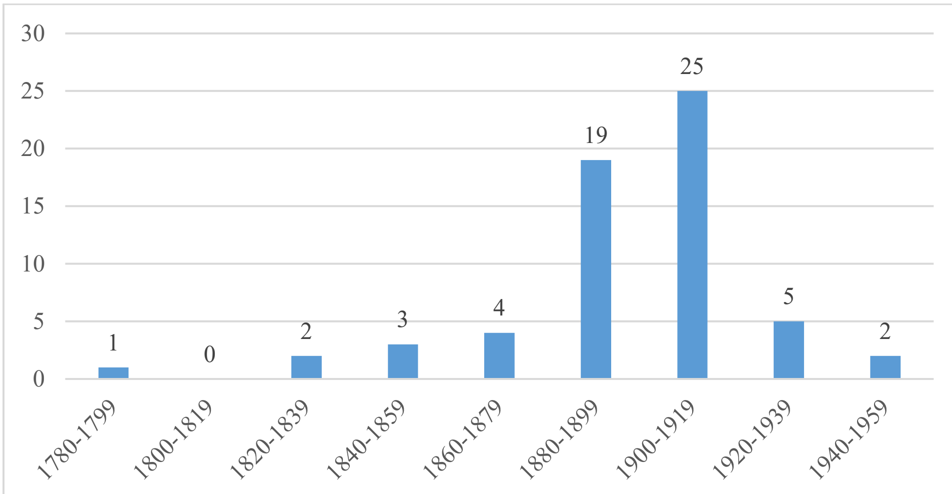


图 1 61 种美英早期立体几何教科书的出版时间分布

在 61 种教科书中，三垂线定理出现在正文和习题中。在更为早期的教科书中，三垂线定理多以定理的形式出现，随着时间的推移，越来越多的教科书选择将该定理安排在习题中。

3 三垂线定理的表述

虽然 61 种教科书中都涉及三垂线定理，但定理表述方式互有不同，大致可以分为关系表述、投影表述、正逆定理表述三类。

3.1 关系表述

54 种教科书给出了关系表述。法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）在其《几何基础》（1798）中，首次给出了三垂线定理：一条直线垂直于已知平面，如果通过这条直线的垂足在平面上作一条直线，与平面上的已知直线垂直，那么连结这两条线的交点及平面垂线上的任意一点，这条新的直线垂直于平面上的已知直线[3]。

以上描述中蕴含着四条直线，勒让德结合图形做了进一步的解释。如图 2，直线 AB 垂直

于平面 S，过垂足 B 的一条直线 BC 垂直于平面上一直线 DE，连结直线 BC 和直线 DE 的交点 C 以及垂线 AB 上的任意一点 P，则 PC 垂直于 DE[3]。

另外 53 种教科书对三垂线定理的表述与勒让德大致相同，只是在语序、用词上略有差别。例如，Wentworth（1879）将“一条直线垂直于已知平面”表述成“一条直线与平面上任何直线都垂直”，两种表述是等价的[4]。

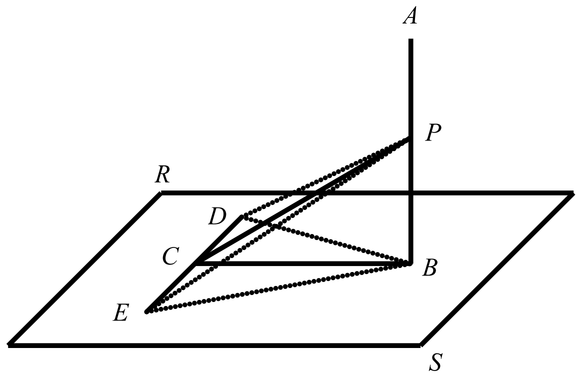


图 2 三垂线定理的关系表述

3.2 投影表述

三垂线定理的关系表述，虽然准确，但不够简洁和美观。投影表述就是应用投影这一概念去描述三垂线定理，从而使定理更加简洁明了。

三垂线定理的投影描述最早出现在 Newcomb（1884）中：作已知平面的斜线，在斜线与平面的交点处，若有平面上的一条直线垂直于这条斜线的投影，则这条直线垂直于斜线自身[5]。简单地说，就是垂直于投影则垂直于斜线，这与我们今天所熟知的表述已经非常接近了。

Newcomb 同样也结合图形对三垂线定理进行了进一步的阐述。如图 3，已知线段 OD 是平面 MN 的一条斜线，且线段 OD 交平面 MN 于点 O，线段 OA 是 OD 在平面 MN 上的投影。若平面上一条直线 PQ 垂直于直线 OA，则 PQ 也垂直于直线 OD[5]。

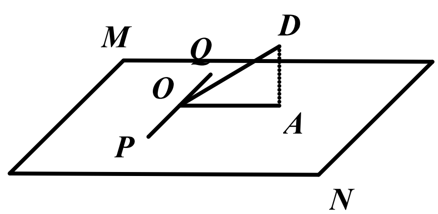


图 3 三垂线定理的投影表述

在 Newcomb（1884）之后，一些教科书开始沿用投影概念表述三垂线定理[6-7]。

3.3 正逆定理共同表述

众所周知，三垂线定理的逆定理成立。Smith（1913）将三垂线定理及其逆定理放在一起叙述：一直线与其在某一平面上的投影相交，那么平面上过其交点的直线如果垂直于这两者中的任一条，则垂直于另一条[7]。

我们可以结合图形对这一定理进行进一步的阐述。如图 4，BE 是 AE 在平面 MN 上的投影，且 BE 和 AE 交于点 E。若平面上过 E 的直线 CD 垂直于 BE 或 AE 中的任意一条，则也垂直于另一条。

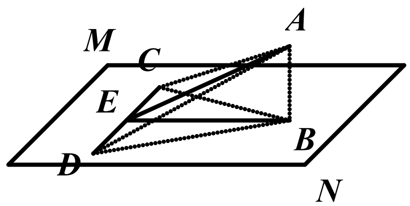


图 4 正逆定理共同表述

这种表述方式应用了投影的概念，且将三垂线定理及其逆定理一同进行叙述，不仅内容上更加丰富，形式上也显得更加简洁。Betz & Webb（1916）、Schultze & Sevenoak（1922）关于三垂线定理的表述与 Smith（1913）基本一致，不再赘述[9-10]。

3.4 三垂线定理表述方式的演变

以 40 年为一个时间段，三种表述方式的分布情况如图 5 所示。

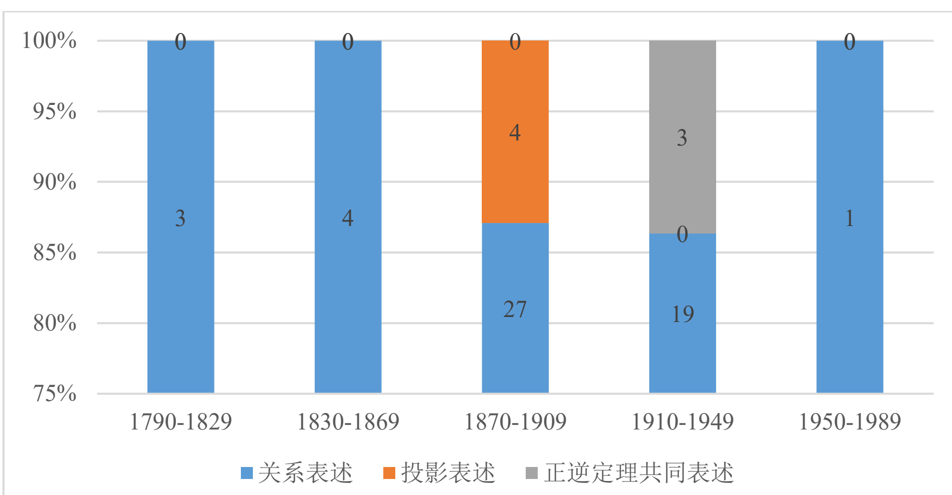


图 5 61 种美英早期立体几何教科书中三垂线定理表述方式的演变趋势

由图可见，第一类表述方式始终占据美英早期立体几何教科书的主体，但占据比例有所下降；第二类表述方式集中在 1870-1909 这一时间段，其他时间段内均未涉及；第三种表述方式最早出现在 1906 年，在 1910-1949 这一时间段占据比例最大。

整体来说，随着时间的推移，用投影表述以及正逆定理共同表述这两种类型的比例增大。关于投影表述在 1910-1949 及 1950-1989 这两个年段占比较小，推测其原因在于后期三垂线定理多以习题的形式出现，而投影表述的三垂线在定理证明时需要添加较多辅助线，从而证明难度较大。总体上看，三垂线定理的表述方式是一个由繁到简、由单一到丰富的进化过程。

4 三垂线定理的证明

61 种教科书中，有 44 种给出了三垂线定理的证明，证明方法可分为全等法、斜线长定理法以及线面垂直法三类。

4.1 全等法

全等法是数学中一种极为重要的证明方法，在三垂线定理的证明中，我们依然可以通过构造全等的方式进行证明。

这里以 Newcomb（1884）的证明为例。

如图 6，已知斜线 OD 交平面 MN 于点 O，OA 是 OD 在面 MN 上的投影，POQ 是平面 MN 上一条与 OA 垂直的直线。

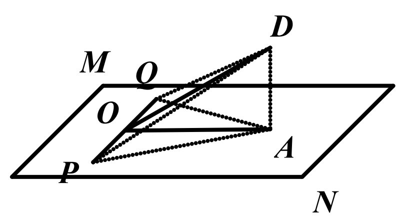


图 6 全等法

取 $OP = OQ$，因 $OA \perp PQ$，故 OA 是 PQ 的中垂线，于是知 $AQ = AP$，$\triangle DAQ \cong \triangle DAP$，从而得 $DQ = DP$，由等腰三角形性质得到 $OD \perp PQ$[5]。

除 Newcomb（1884）之外，还有一些教科书也应用了全等的方法进行证明，只是在一些细微的地方有所差别。例如，Edwards（1895）并没有通过中垂线性质，而是通过$\triangle AOP \cong \triangle$

AOQ 得到 $AQ = AP$[8]。

整体来说，全等法证明是一种非常基础、实用性很强的证明方式。

4.2 斜线长定理法

那么三垂线定理只能借助全等法进行证明吗？还有更加简洁有效的方法呢？经过研究发现，很大一部分教科书在讲述三垂线定理之前，都会先对斜线长定理进行叙述，而斜线长定理就具有简化三垂线定理证明过程的“显著功效”。

Perkins（1855）将斜线长定理描述为，过平面外一点作平面的垂线及斜线，那么如果两条斜线与平面的交点到垂线垂足的距离相等，则这两条斜线长度相等（这里的斜线长度指的是从平面外已知点到斜线与平面交点的线段长度）[11]。

Perkins 结合图形更为直观地解释了这一定理。如图 7，过平面外一点 O 作平面 MN 的垂线 OP 及斜线 OA、OA'，那么如果 $AP=A'P$，则 $OA=OA'$。

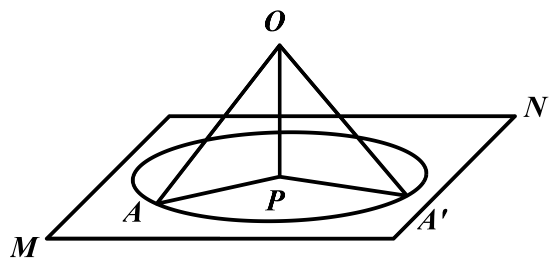


图 7 斜线长定理

由此，我们就明确了什么是斜线长定理，这对于证明三垂线定理大有帮助。

我们仍然以 Perkins（1855）中的证明为例。如图 8，直线 PB 垂直于平面 S，过垂足 B 的一条直线 BC 垂直于平面上一直线 DE，现要证明直线 DE 也垂直于斜线 PC。

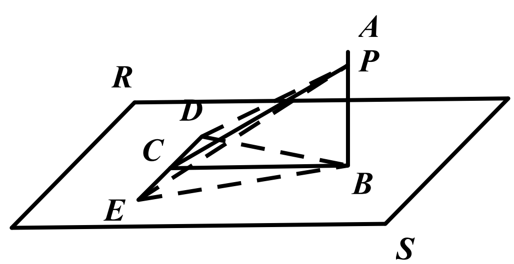


图 8 斜线长定理法

首先，我们取 $CE=CD$，并连接 PE、PD、BE、BD。因为 $BC\perp DE$，而 $CE=CD$，因此

BC 是线段 *DE* 的中垂线，由中垂线的性质知 *BE*＝*BD*，再由通过斜线长定理得 *PE*＝*PD*，最后，通过证明△*PEC*≌△*PDC*，得∠*PCE*=∠*PCD*，从而证得 *PC*⊥*DE*[11]。

除了 Perkins 之外，还有 Benjamin、Robinson 等人都运用了这一方法[12-13]。

由此可见，用斜线长定理大大简化了证明步骤。

4.3 线面垂直法

除了运用全等法及斜线长定理法证明之外，还有部分数学家运用线面垂直法进行证明。

Dupuis（1893）采用的正是这种方法[6]。如图 9，已知 *PN*⊥平面 *U*，线段 *ON* 是线段 *OP* 在平面 *U* 上的投影，*OB*⊥*ON*。那么，我们可以通过证明 *OB*⊥*ON* 和 *OB*⊥*PN* 得出 *OB*⊥平面 *OPN*，从而得出 *OB*⊥*OP*[6]。由此，我们就用线面垂直证明了三垂线定理。

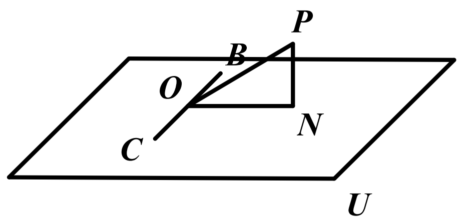


图 9 线面垂直证明

这种方法为我们开辟了新的思路，通过证明线面垂直来证明线线垂直，这也不失为一个很好的的方法。

4.4 三垂线定理证明方法的演变趋势

至此，我们将三垂线的证明方法分成了三类，即全等法、斜线长定理法、线面垂直法。以 40 年为一个时间段，三种证明方式的分布情况如图 10 所示。

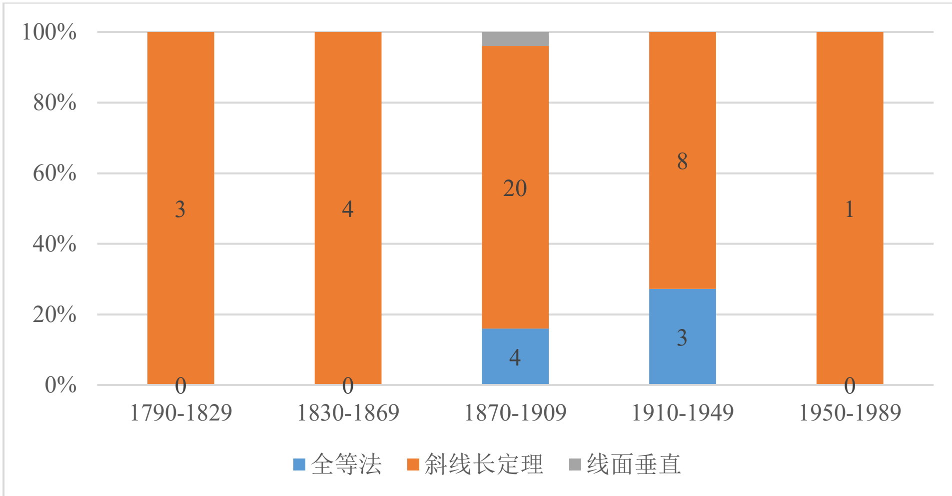


图 10 61 种美英早期立体几何教科书三垂线定理证明方法演变趋势

不难发现，斜线长定理法在不同时期都占据主流地位；全等法主要出现在 1870-1909 以及 1910-1949 的时间段；线面垂直法的应用范围较小，仅在 1870-1909 的时间段出现过一次。整体来看，这三种方法的演变并没有非常明显的趋势。单纯从证明的简洁性来说，运用斜线长定理进行证明最为方便快捷，这也是其长期占据主流地位的重要原因。

5 三垂线定理的练习

三垂线定理具有较强的应用性，美英早期教科书中也有较多与三垂线定理相关的习题。经过研究，我们将这部分习题分为直接证明三垂线定理、证明三垂线定理的逆定理、三垂线定理及其逆定理的简单应用三部分。

5.1 直接证明三垂线定理

有些教科书选择将三垂线定理直接作为一道证明题放置在课后习题中。

以 Thompson（1896）为例：过点 A 作平面的一条垂线，交平面于点 B。过 B 点在平面上作平面上已知直线的垂线，两直线交于点 C，试证直线 AC 垂直于平面上的已知直线[14]。

Richardson、Hobbs 等人与 Thompson 所叙述的基本一致。这种习题较为直观地展示了三垂线定理[14-16]。

5.2 证明三垂线定理的逆定理

部分教科书选择先叙述三垂线定理，然后将三垂线定理的逆定理放置在习题中讲解。

这一类情况以 Betz & Webb（1916）最为典型。如图 11，*AB* 垂直于平面 *MN*，交平面 *MN* 于点 *A*，过点 *B* 作一条直线与平面上直线 *CD* 交于点 *E*。如果 *BE* 垂直于 *CD*，求证 *AE* 垂直于 *CD*。

我们可以借鉴三垂线定理的证明思路，取 *DE*=*CE*，则 *BE* 是 *CD* 的中垂线，从而有 *BC*=*BD*。通过证明△*ABD*≌△*ABC*，可以得到 *AD*=*AC*，从而△*ACD* 是等腰三角形，由等腰三角形的性质可以得到 *AE*⊥*CD*[9]。

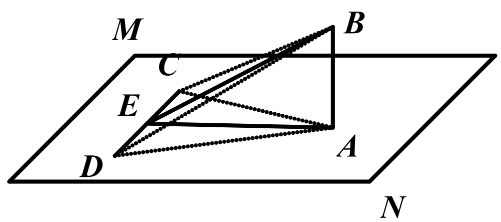


图 11 证明三垂线定理逆定理

这一种类型的习题直接证明了三垂线定理的逆定理，在早期教科书中也较为常见。

5.3 三垂线定理及其逆定理的简单应用

除此以外，还有部分教科书在习题中对三垂线定理及其逆定理进行简单的应用。

Edwards（1895）给出如下习题。试证明：现有两个平面相交，有一条直线垂直于其中一个平面，那么这条直线在另一平面上的投影一定垂直于这两个平面的交线[8]。

如图 12，平面 *NA* 与平面 *MA* 交于直线 *AB*，现有 *CD*⊥面 *AN*，现要证 *CD* 在平面 *AM* 上的投影垂直于交线 *AB*。

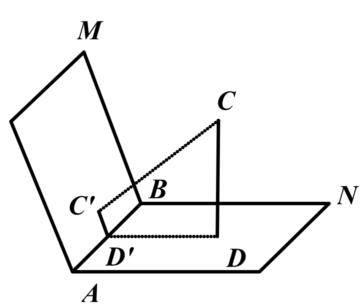


图 12 三垂线定理及其逆定理的简单应用之一

由于 $CD\perp$面 AN，而 AB 是面 AN 上的直线，故 $CD\perp AB$。接下来我们可以分两种情况进行讨论：当平面 NA 与平面 MA 相互垂直，则 CD 在平面 AM 上的投影显然垂直于 AB；当平面 NA 与平面 MA 不相互垂直，则 CD 为面 AM 的斜线，那么由三垂线定理的逆定理：CD 垂直于平面上的一条直线 AB，则其在平面 AM 上的投影也垂直于 CD，故得证[8]。

Durell（1917）也给出了三垂线定理的简单应用。如图 13，直线 AB 垂直于平面 MN，过垂足 B 的一条直线 BF 垂直于平面上一直线 PQ，已知 BF 垂直于 PQ，$AB=6$，$AF=8$，$AQ=10$，求 QF、BQ、BF[17]。

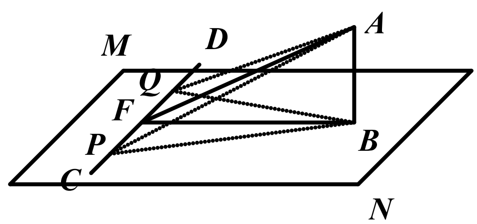


图 13 三垂线定理及其逆定理的简单应用之二

首先，由三垂线定理知，AF 垂直于 PQ，故三角形 AFQ 为直角三角形。于是，可以根据勾股定理求解得出。

由此可见，在早期教科书中，三垂线定理及其逆定理的应用十分广泛。

6 结论与启示

综上，我们将三垂线定理的表述方式分为三类，即关系表述、投影表述、正逆定理共同表述。在三垂线定理不断演化地过程中，其表述方式经历了从复杂到简明的过程。关于三垂线定理的证明方法，我们同样将其分为三类，即全等法、斜线长定理法、线面垂直法，从中我们看到了证明方法的多样性。除此之外，早期教科书中关于三垂线定理的习题也非常多样。这些都为我们今日的课堂教学提供了启示。

其一，构建知识之间的联系。在早期教科书中，三垂线定理有多种证明方法，既可以通过斜线长定理法、全等法去直接证明线线垂直，也可以先证明线面垂直，然后得到线线垂直。三垂线定理将线线垂直与线面垂直紧密联系起来，是沟通线线垂直与线面垂直的桥梁。由此可以看出，数学不是割裂的一个个知识点，而是相互联系、环环相扣的一个整体。因此，教师在进行教学活动时，需要注意知识与知识之间，甚至是学科与学科直接的联系，立足整体进行教学。

其二，培养数学核心素养。通过研究美英早期教科书中的三垂线定理的表述方法，我们发现其反映了平面的斜线、平面的垂线、平面内直线三者之间的垂直关系，这蕴含着直观想象的核心素养。在当前的教科书中，更多的是使用向量去描述研究异面直线之间的垂直关系。这样的方法固然方便快捷、易于使用，但也因其过分“代数化”，因而或多或少地减少了对于直观想象素养的培养。因此，教师在进行日常教学时，需要下意识地加强对直观想象素养的培养，促进学生全方面发展。此外，早期教科书中有三垂线定理的不同证明方法，体现了逻辑推理素养，同时也给了我们很大的启发，在进行定理证明时，并不只有一种方法是最好的，方法可以是百花齐放、各有千秋。学生在教师的引导下找出不同的证明方法，这对培养学生的逻辑推理能力有极大的帮助。

其三，渗透数学学科德育。早期教科书中三垂线定理的表述方法经历了由简到繁、由单一到丰富的进化过程，证明方法也是多姿多彩、层出不穷，这离不开一代代数学家的探索和努力。因此，教师可以采用制作微视频等方式，向学生展示三垂线定理的演化过程，让学生充分体会数学家的探索精神，从而激励他们不断探索、不断创新。

参考文献

[1] 王亚男, 陈丽敏. 高中立体几何中删除三垂线定理的利弊分析[J]. 中国数学教育, 2010(Z3): 15-16.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 21.

[3] Legendre, A. M. *Elements of Geometry*[M]. Cambridge, N. E.: The University Press, 1794: 164-165.

[4] Wentworth, G. A. *Elements of Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Heath, 1879: 258.

[5] Newcomb, S. *Elements of Geometry*[M]. New York: Henry Holt & Company, 1884: 311-312.

[6] Dupuis, N. F. *Elements of Synthetic Solid Geometry*[M]. New York: Macmillan & Company, 1893: 12-13.

[7] Smith, E. R. *Solid Geometry Developed by the Syllabus Method*[M]. New York: American Book Company, 1913: 260-261.

[8] Edwards, G. C. *Elements of Geometry*[M]. New York: Macmillan & Company, 1895: 183-184.

[9] Betz, W., Webb, H. E. *Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1916: 364-365.

[10] Schultze, A., Sevenoak, F. L. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1922: 331.

[11] Perkins, G. R. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: D. Appleton & Company, 1855: 141-143.

[12] Benjamin, G. *Elements of Geometry*[M]. Boston: Robert S. Davis & Company. 1859: 171-172.

[13] Robinson, H. N. *Elements of Geometry, Plane & Spherical Trignometry Geometry*[M]. Cincinnati: Jacob Ernst, 1850: 157-158.

[14] Thompson, H. D. *Elementary Solid Geometry and Mensuration Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1896: 50.

[15] Richardson, S. F. *Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1914: 34-35.

[16] Hobbs, C. A. *Solid geometry*[M]. Cambridge, G.H. Kent, 1921: 280.

[17] Durell, F., Arnold, E. E. *Solid Geometry*[M]. New York: Charles E. Merrill Company, 1917: 335-336.

美英早期几何教科书中的尺规作图问题

刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

尺规作图起源于古希腊的数学课题，其拥有悠久的历史渊源。早在公元前 5 世纪，阿那克萨哥拉（Anaxagoras, 前 499-前 428）就已开始着手研究三大几何作图问题，但最初在解决几何作图问题时对作图工具并无标准要求，直至雅典时期，天文学家、数学家伊诺皮迪斯（Oenopides, 约前 490-约前 420）才提出无刻度直尺和圆规的限制[1]。公元前 3 世纪，欧几里得（Euclid, 约前 325-约前 265）在《几何原本》中将尺规作图作为几何作图最基本的形式确定下来。

尺规和几何作图在中国产生的时间很早，夏朝便已出现了“规矩”一词[1]。春秋战国时期，孟子曰：不以规矩，不能成方圆，此时，“规”和“矩”就已被广泛地用于作图、制作器具等工作中，而由于我国古代的矩上已有刻度，因此使用范围较广且具有较大的实用性。

数与形是数学中最主要的研究对象，它们的发展是相辅相成的。尺规作图作为中学数学平面几何的重要学习内容，其对于培养学生的逻辑思维能力起到了至关重要的作用。《义务教育数学课程标准（2022 年版）》要求学生能用尺规构造等线段、等角、角平分线、垂直平分线以及垂线，利用已知条件构造三角形、三角形内切圆以及外接圆和圆内接正方形等，并要求学生了解作图的原理[2]。

在大力提倡素质教育的今天，教育观念要从应试教育转到素质教育上来。数学教学重在培养学生的运算力、思维力、逻辑推理力、观察力、空间想象力和创造力等多方面的能力，而在解决诸多尺规作图问题的过程中，正能提高学生的整体数学能力。因此，我们有必要了解更多不同类型的尺规作图问题及方法，而数学史则为我们提供了丰富的素材。本文拟聚焦尺规作图问题及其构造方法，对美英早期几何教科书进行考察，以期为今日教学提供思想养料。

2 早期教科书的选取

本文选取 1829-1948 年间出版的 78 种美英早期数学教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

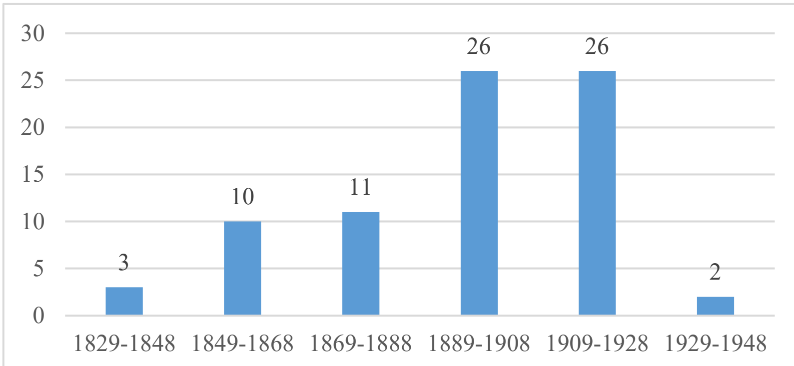


图 1 78 种美英早期数学教科书的出版时间分布

尺规作图问题分布在教科书的各个章节之中，主要包括“圆”“比例、相似多边形”“多边形的面积”“正多边形和圆”等章节中。在各个章节中，教科书编写者通常先集中列举定理，后集中列举与定理有关的尺规作图问题，问题在设计上也是层层递进的。从早期教科书中的尺规作图问题的数量上来看，平均每本教科书会出现 40 种不同的问题（不含练习部分），由此可见，几何教科书编写者对于定理的应用不局限于计算，而非常重视其在几何作图上的应用。

3 尺规作图的工具

在构造几何图形时，（无刻度）直尺和圆规可以帮助学生画出精确的图形。

Davies（1841）在教科书中率先展示了所要用到的直尺和圆规的插图[3]，所用直尺与今日的直尺并无两样，但此时圆规的使用需要让学生将食指放在 b 关节上，拇指和其他手指压在规脚上（图 2）。Wentworth（1911）给出的圆规插图也类似[4]，与此同时，他还假设学生没有圆规，则可以将绳子的一端固定在纸上，另一端绑上铅笔来作图（图 3）。

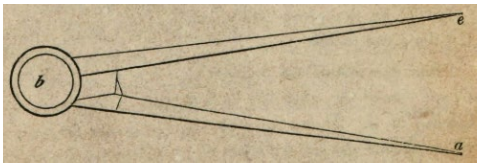


图 2 Davies（1841）中的圆规插图

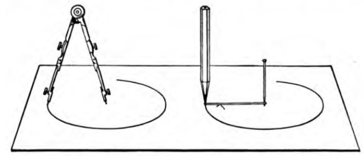


图 3 Wentworth（1911）中的圆规插图

Ford & Ammerman（1913）在教科书中也给出了圆规的插图（图 4）[5]，相较于之前教科书中的圆规插图，此时在圆规头部又额外加入了一段，这样可以方便学生日常握持使用。Stone & Millis（1916）在教科书中也采用了此类圆规插图（图 5）[6]。

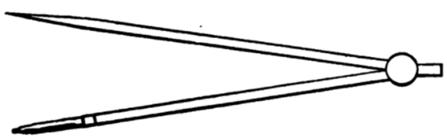


图 4 Ford & Ammerman（1913）中的圆规插图

图 5 Stone & Millis（1916）中的圆规插图

4 尺规作图问题及其构造方法

4.1 与圆有关的基本问题

在美英早期教科书中的“圆”和“正多边形与圆”这两个章节中，教科书编写者给出一系列与圆有关的作图问题，主要问题可以分为平分问题、位置问题和多边形构造问题三类。

4.1.1 平分问题

平分给定线段、给定角及给定弧是 78 种几何教科书中常见的尺规作图问题，而不同的教科书编写者对此也给出了不同的构造方法。

问题 1：平分给定线段。

如图 6，分别以点 A、B 为圆心，以超过线段 AB 一半的长度为半径作弧，于是两弧交于 C、D 两点。连结 CD，交线段 AB 于点 E，此时有 $AE=EB$[7]。与此同时，运用这一作法所得到直线 CD 还是线段 AB 的垂直平分线。

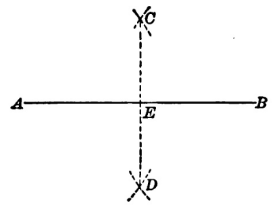


图 6 问题 1 方法 1 图

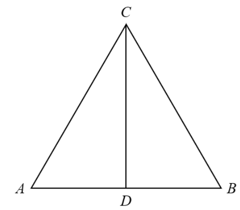


图 7 问题 1 方法 2 图

Playfair（1829）在给定线段 AB 上构造等边三角形 ABC，并作 $\angle ACB$ 的角平分线 CD，由等腰三角形三线合一知，直线 CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，即 $AD=DB$（图 7）[8]。Phillips & Fisher（1897）过点 A 作 $CA\perp AB$，垂足为 A，过点 B 作 $DB\perp AB$，垂足为 B，且 $CA=DB$，连结 CD，交直线 AB 于点 O，由全等三角形判定定理知，$\triangle CAO\cong\triangle DBO$，则 $AO=OB$（图 8）[9]。

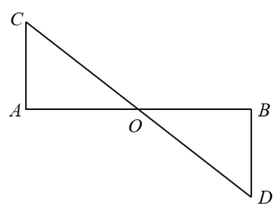


图 8 问题 1 方法 3 图

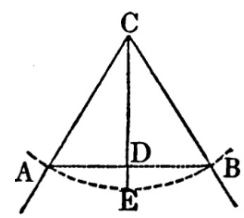


图 9 问题 2 方法 1 图

问题 2：平分给定弧或给定角。

若给定以点 C 为圆心的 $\overset{\frown}{AEB}$，连结 AB，过点 C 作 $CD\perp AB$，垂足为点 D，延长 CD 交 $\overset{\frown}{AEB}$ 于点 E，此时 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$。若给定 $\angle ACB$，则以点 C 为圆心，任取线段 BC 长为半径作 $\overset{\frown}{BA}$，于是再作直线 CD 平分 $\overset{\frown}{BA}$，此时直线 CD 也平分 $\angle ACB$（图 9）[7]。

Playfair（1829）再次利用等边三角形，在 $\angle ACB$ 两边截取 $CE=CD$，连结 ED，并以 DE 为一边构造等边三角形 DEF，连结 CF（图 10）。由 $\triangle CDF\cong\triangle CEF$，故直线 CF 平分 $\angle ACB$[8]。

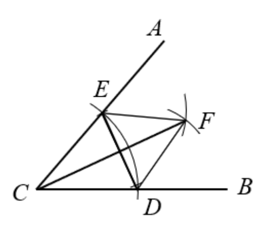


图 10 问题 2 方法 2 图

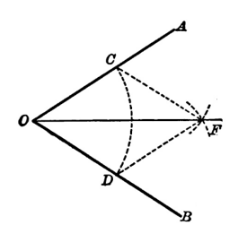


图 11 问题 2 方法 3 图

Grund（1830）以点 O 为圆心，以任意长的 OC 为半径作 $\overset{\frown}{CD}$，交 $\angle AOB$ 的两边于点 C、D，分别以点 C、D 为圆心，以超过线段 CD 一半的长度为半径作弧，两弧交于点 F，连结 OF，此时，OF 是 $\angle AOB$ 的角平分线（图 11）[10]，此方法与现行教科书中构造角平分线的方法相契合。

与此同时，Davies（1841）运用同样的构造方法，得到了 $\overset{\frown}{CD}$ 的平分线 *OF*[3]。Wentworth（1880）则是先构造线段 *CD* 的垂直平分线，这条中垂线平分给定弧[11]。

问题 3：三等分直角[10]。

三等分角是古希腊三大几何问题之一，同时也被并列为古代数学的三大难题之一，如今数学上已证实了这个问题无解。而利用尺规来三等分一个特殊角，诸如直角，则容易实现。数学家格兰德（F. J. Grund, 1804—1863）在《几何学基础》（1830）一书中提出了这一问题。

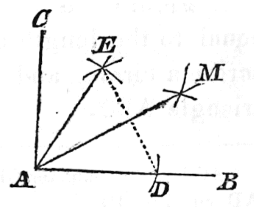


图 12 问题 3 图

如图 12，给定∠*CAB*=90°。在直线 *AB* 上任意截取线段 *AD*，以 *AD* 为边长构造等边三角形 *AED*，此时∠*CAE*=30°及∠*EAD*=60°。作∠*EAD* 的角平分线 *AM*，于是∠*CAE*=∠*EAM*=∠*MAD* =30°。

问题 4：*n* 等分任意给定线段。

以将给定线段 *AH* 五等分为例。Legendre（1863）过点 *A* 作射线 *AG*，取 *AI* 等于任意合适长度的线段，在射线 *AG* 上截取点 *I*、*K*、*L*、*M*、*B*，使得 *AI*=*IK*=*KL*=*LM*=*MB*。连结 *BH*，分别过点 *I*、*K*、*L*、*M* 作 *IC*//*BH*、*KD*//*BH*、*LE*//*BH*、*MF*//*BH*，交线段 *AH* 于点 *C*、*D*、*E*、*F*，根据比例线段的性质，此时有 *AC*=*CD*=*DE*=*EF*=*FH*（图 13）[7]。

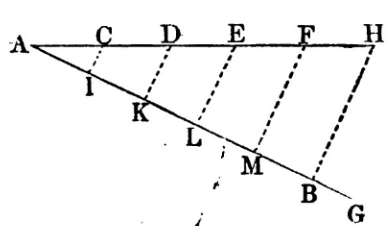


图 13 问题 4 方法 1 图

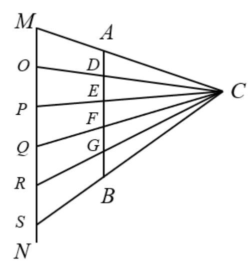


图 14 问题 4 方法 2 图

Grund（1830）在给定线段 *AB* 外作直线 *MN*//*AB* 且 *MN*>*AB*，在直线 *MN* 上依次截取 *MO*=*OP*=*PQ*=*QR*=*RS*，连结 *MA*、*SB*，直线 *MA* 和 *SB* 的延长线交于点 *C*，连结 *CO*、*CP*、*CQ*、*CR*，交线段 *AB* 于点 *D*、*E*、*F*、*G*，于是 *AD*=*DE*=*EF*=*FG*=*GB*（图 14）[10]。

4.1.2 位置问题

在同一平面内，直线与直线的位置关系包括平行、相交（包括垂直、不垂直）和重合，直线与圆的位置关系包括相交、相切和相离。在此基础上，教科书编写者设计了一系列关于线线垂直、线线平行和线圆相切的尺规作图问题。

问题 5-1：过直线上一点作给定直线的垂线。

最常见的作法类似于 Legendre（1863）给出的构造方法。给定直线 *AB* 和直线上一点 *C*，在直线 *AB* 上截取 *CD*=*CE*，分别以点 *D*、*E* 为圆心，以超过线段 *DE* 一半的长度为半径作弧，两弧交于点 *F*，连结 *CF*，此时 *CF*⊥*AB*（图 15）[7]。

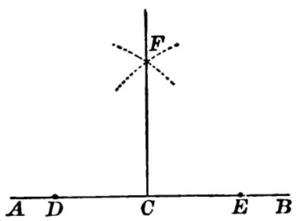


图 15 问题 5-1 方法 1 图

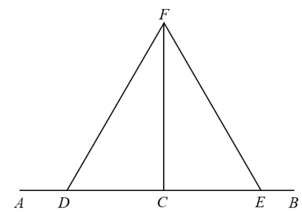


图 16 问题 5-1 方法 2 图

Playfair（1829）则在线段 *DE* 上构造等边三角形 *DEF*，连结 *CF*，于是有 *CF*⊥*AB*（图 16）[8]。Legendre 和 Playfair 在构造方法上不同点在于得到的△*DEF* 分别是等腰三角形和等边三角形，而相同点是直线 *CF* 始终是△*DEF* 的中线，由等腰三角形三线合一，有 *CF*⊥*AB*。

若给定直线上一点 *C* 靠近直线 *AB* 两端，Grund（1830）又给出了不同的构造方法。在直线 *AB* 外任取一点 *O*，*O* 到直线 *AB* 的距离 $d<OC$。以 *O* 为圆心，*OC* 为半径作圆，⊙*O* 与直线 *AB* 交于点 *C*、*D*，连结 *DO* 并延长，交⊙*O* 于点 *E*，连结 *CE*，有 *CE*⊥*AB*（图 17）[10]。

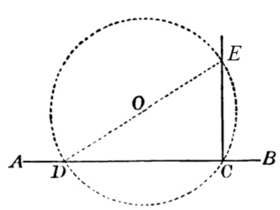


图 17 问题 5-1 方法 3 图

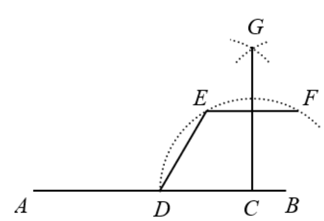


图 18 问题 5-1 方法 4 图

Bradbury（1877）在给定直线 *AB* 上截取线段 *CD*，并以点 *C* 为圆心，*CD* 为半径作 $\overset{\frown}{DEF}$，在 $\overset{\frown}{DEF}$ 上截取 *DE*=*CD*、*EF*=*CD*。分别以点 *E*、*F* 为圆心，以超过线段 *EF* 一半的长度为半径作弧，两弧交于点 *G*，连结 *CG*，此时 *CG*⊥*AB*（图 18）[12]。

问题 5-2：过直线外一点作给定直线的垂线。

如图 19，以给定直线 AB 外一点 C 为圆心，以任意长 CD 为半径作 $\overset{\frown}{DE}$，交直线 AB 于点 D、E。随后 Grund（1830）作 $\angle DCE$ 的角平分线[10]，又或者利用 Legendre（1863）或 Playfair（1829）在问题 5-1 中的构造方法，即可得到垂线 CF[7-8]。

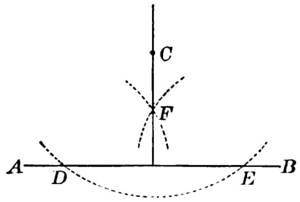


图 19 问题 5-2 方法 1 图

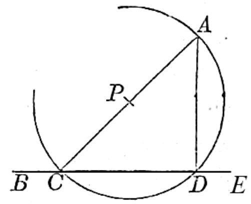


图 20 问题 5-2 方法 2 图

Davies（1841）类比 Grund（1830）的构造方法，假设直线外一点 A 靠近给定直线 BE 的两端，在直线 BE 上任取一点 C，连结 AC 并平分 AC 于点 P。以点 P 为圆心，CP 为半径作 $\overset{\frown}{CDA}$，交 BE 于点 C、D，连结 AD，于是 $AD\perp BE$（图 20）[3]。

问题 6：构造一个角等于给定角。

Legendre（1863）以点 B 为圆心，任意 BG 长为半径作 $\overset{\frown}{FG}$，交给定 $\angle ABC$ 的两边于点 F、G，连结 FG。在给定直线 DE 上，以点 D 为圆心，BG 为半径作弧，交 DE 于点 H，再以点 H 为圆心，FG 为半径作弧，两弧交于点 J，于是 $\angle JDE=\angle ABC$（图 21）[7]。

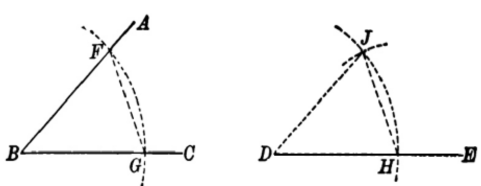


图 21 问题 6 方法 1 图

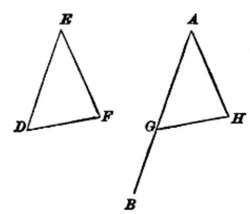


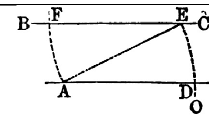
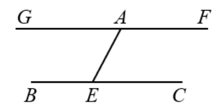
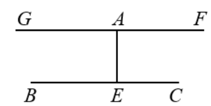
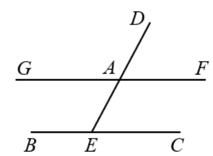
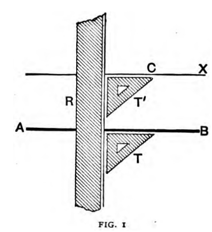
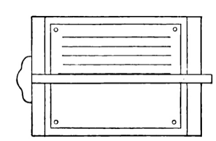
图 22 问题 6 方法 2 图

Playfair（1829）在给定 $\angle DEF$ 的两边截取任意长 ED 和 EF，连结 DF。此时在给定直线 AB 上作 $\triangle AGH$，使得 $\triangle AGH\cong\triangle EDF$，于是 $\angle GAH=\angle DEF$（图 22）[8]。

问题 7：过直线外一点，作给定直线的平行线。

给定一条直线 BC 及直线外一点 A，构造过点 A 的平行线的方法包括构造平行四边形、利用内错角或同位角相等以及利用其它工具三类。表 1 给出了构造平行线的多种方法。

表 1 构造给定直线外一点的平行线的方法

类别	构造方法	图像	教科书
构造平行四边形	在 BC 上任取一点 E，并以点 A 为圆心，AE（AE>点 A 到直线 BC 的距离）为半径作 $\overset{\frown}{OE}$。再以点 E 为圆心，AE 为半径作 $\overset{\frown}{AF}$，交 BC 于点 F。在 $\overset{\frown}{OE}$ 上取 $\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{AF}$，连结 AD，此时 $AD//BC$。[7]		Legendre（1862）
利用内错角或同位角相等	在直线 BC 上任取一点 E，连结 AE，作$\angle AEC=\angle GAE$，延长 GA 至点 F，则 $GF//BC$。[8]		Playfair（1829）
	过点 A 作 $AE\perp BC$，垂足为 E。再过点 A，作 $GA\perp AE$，延长 GA 至点 F，于是 $GF//BC$。[13]		Tappan（1864）
	在直线 BC 上任取一点 E，连结 EA 并延长至点 D，作$\angle DAF=\angle DEC$，延长 FA 至点 G，于是 $GF//BC$。[14]		Macnie（1895）
利用其它工具	由一根直尺和两块三角板平移得到。[9]		Phillips & Fisher（1897）
	利用丁字尺作平行线。[15]		Wells & Hart（1916）

问题 8：过给定一点作给定圆的切线。

若给定点 A 在$\odot C$上。连结 AC，过点 A 作 $AC\perp AD$，于是 AD 即为所求切线（图 23（a））。若给定点 A 在$\odot C$外。连结 AC，平分 AC 于点 O，并以点 O 为圆心，OC 为半径作圆，$\odot O$ 和$\odot C$交于点 B、D，连结 AB、AD，则直线 AB、AD 即为所求切线（图 23（b））。[7]

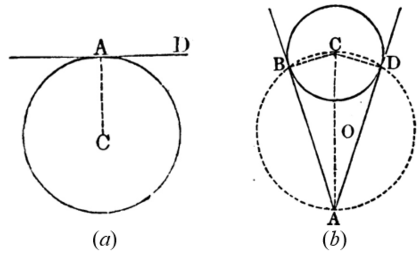


图 23 问题 8 法 1 图

Sharpless（1879）给出了过圆外一点作给定圆切线的另一种方法，此方法也是欧几里得在《几何原本》中给出的一种方法[16]。给定$\odot E$及圆外一点 A，连结 AE，交$\odot E$于点 D，以点 E 为圆心，AE 为半径作圆。过点 D 作 $AE\perp HF$，交大圆于点 H、F，分别连结 EH、EF 交小圆于点 K、B，连结 AK、AB，于是直线 AK 和 AB 为所求切线（图 24）。

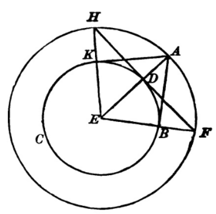


图 24 问题 8 方法 2 图

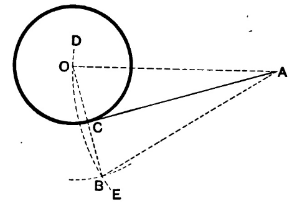


图 25 问题 8 方法 3 图

Sanders（1903）以点 A 为圆心，AO 为半径作 $\overparen{DE}$，再以点 O 为圆心，$\odot O$ 的直径为半径作弧，两弧交于点 B，连结 OB，交$\odot O$于点 C。连结 AC，于是直线 AC 是$\odot O$的一条切线（图 25）[17]。

问题 9：画出两个给定圆的公切线。

给定半径为 r_1 和 r_2 的$\odot A$和$\odot B$（$r_1<r_2$）。连结 AB，以点 B 为圆心，r_2-r_1 为半径作圆，过点 A 作该圆的切线 AE，连结 BE 并延长，交$\odot B$于点 D。过点 A 作 $AC//BD$，交$\odot A$于点 C，连结 CD，直线 CD 即为两圆的一条外公切线（图 26（a））[10]。

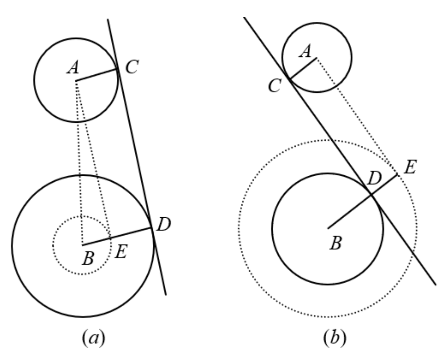


图 26 问题 9 方法 1 图

同样我们还需要作⊙A和⊙B的两条内公切线。以点 B 为圆心，r_2+r_1 为半径作圆，过点 A 作该圆的切线 AE，连结 BE，交⊙B于点 D。过点 A 作 $AC//BE$，交⊙A于点 C，连结 CD，直线 CD 即为两圆的一条内公切线（图 26（b））[10]。

Sanders（1903）利用比例线段的性质作出两圆的公切线。如图 27（a），设⊙A和⊙B的半径分别为 r_1 和 r_2，连结 AB，在线段 AB 中取一点 C，使得 $\frac{AC}{CB}=\frac{r_1}{r_2}$，过点 C 作⊙B的切线 CD，连结 BD。延长 DC，交⊙A于点 E，有 $AE\perp DE$。于是 DE 即为两圆的一条内公切线[17]。

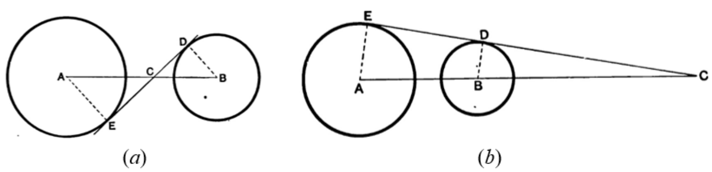


图 27 问题 9 方法 2 图

此时，对于两圆的外公切线，连结 AB 并延长至点 C，使得 $\frac{CB}{CA}=\frac{r_2}{r_1}$，运用同样的方法可以得到直线 CE 是两圆的一条外公切线（图 27（b））[17]。

4.1.3 三角形及四边形的构造问题

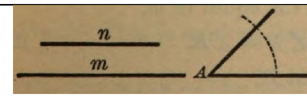
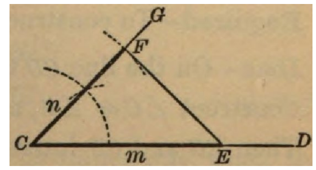
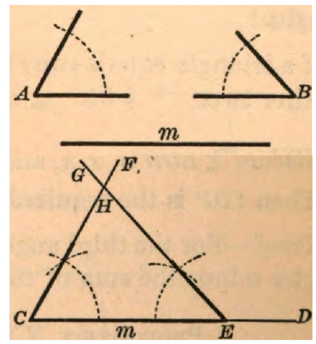
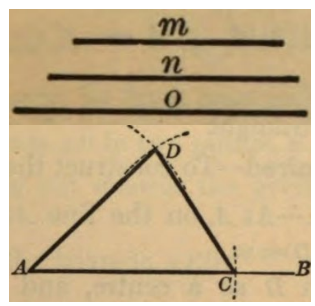
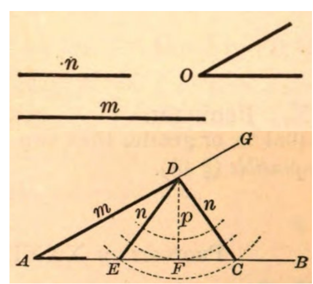
问题 10：给定三角形中的两个内角，作第三个内角[7]。

容易知道三角形内角和为 180°，即三角形三个内角可以组成一个平角。于是构造一条直线，以这条直线为始边构造一个角，再过这个角的顶点并以这个角的终边为始边构造另一个角，此时这条直线上剩余的一个角即为三角形的第三个内角。

问题 11：给定三角形三条边或三个角中的某三个条件，构造三角形。

在给出三角形构造问题的几何教科书中，构造方法均与 Hull（1897）所做类似，这里以 Hull 的方法为例[18]。表 2 给出了四类常见的三角形构造问题及方法。

表 2 三角形构造问题及方法

条件	构造方法	图像
两边及其夹角	给定∠A 及线段 m、n。在射线 CD 上作∠DCG=∠A，在射线 CD 和 CG 上分别截取 $CE=m$、$CF=n$，连结 EF，△CEF 为所求。	 
两角及其中一边	若给定两角及其夹边。在射线 CD 上截取 $CE=m$，分别以 C、E 为顶点作∠FCE=∠A、∠GEC=∠B，于是射线 CF 和 EG 交于点 H，△CHE 为所求。 若给定两角及一角的对边，可以利用问题 10 的方法作得一边相邻的两个角，随后运用上述方法即可构造三角形。	
三边	给定线段 m、n、o。在射线 AB 上截取 $AC=o$，以点 A 为圆心，n 为半径作弧，以点 C 为圆心，m 为半径作弧，两弧交于点 D，此时△DAC 为所求。	
两边及一边所对的角	在射线 AB 上作∠A=∠O，在射线 AG 上截取 $AD=m$，以点 D 为圆心，n 为半径作弧。记点 D 到 AB 的距离为 p。若 $n>p$，可以得到两个三角形，若 $n=p$，可以得到一个三角形，若 $n<p$，无法构造三角形。	

运用上述构造方法即可构造一些特殊的三角形，例如等边三角形、给定底边及腰的等腰三角形、给定斜边及直角边的直角三角形和给定直角边及其中一个锐角的直角三角形。

问题 12：给定平行四边形的两条邻边及其夹角，构造平行四边形。

Legendre（1863）在射线 AB 上作∠EAB=∠O，并在射线 AB 和 AE 上截取 $AC=m$、$AD=n$。利用问题 7 中的方法，分别过点 C、D 作 $CF//AE$、$DF//AB$，直线 CF 和 DF 交于点 F，于是四

边形 $ACFD$ 为平行四边形（图 28）[7]。

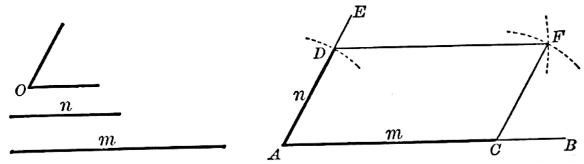


图 28 问题 12 图

Hull（1897）则分别以点 C、D 为圆心，线段 n、m 的长度为半径作弧，两弧交于点 F，此时，四边形 $ACFD$ 即为所求的平行四边形[18]。利用上述两种方法，在给定四边形的邻边和内角的情况下，也可以构造一些特殊的四边形，例如菱形、矩形和正方形。

4.2 内切及外接问题

所谓内切及外接问题主要包括构造多边形的内切及外接圆、圆的内接及外接多边形，在早期几何教科书中，最常见的问题则是构造三角形的内切圆和外接圆。

问题 13：构造给定三角形的内切圆和外接圆[7]。

作给定△ABC 三个内角的角平分线，角平分线 AE 和 BD 交于点 O，点 O 到三角形三边的距离相等。过点 O 作直线 AB 的垂线 OF，以点 O 为圆心，OF 为半径作圆，于是⊙O 为△ABC 的内切圆（图 29）。

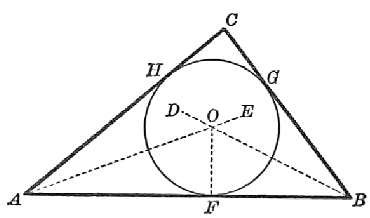


图 29 问题 13 图之一

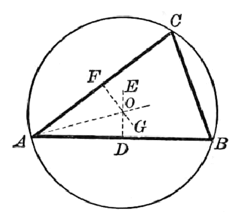


图 30 问题 14 图之二

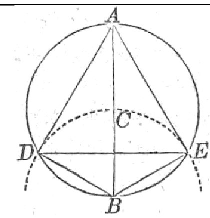
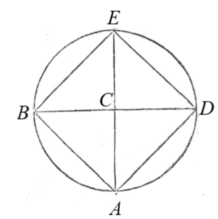
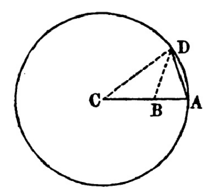
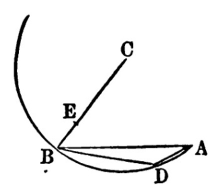
作给定△ABC 三条边的垂直平分线，垂直平分线 DE 和 FG 交于点 O，点 O 到三角形三个顶点的距离相等。以点 O 为圆心，AO 为半径作圆，于是⊙O 为△ABC 的外接圆（图 30）。此方法还可以用于寻找给定圆（弧）的圆心或过不在同一直线上的三点作圆。构造三角形内切圆和外接圆的方法也启发着学生去构造任意正多边形的内切圆和外接圆。

问题 14：在给定圆中内接正 n 边形。

早期教科书编写者主要让学生在给定⊙C 中作内接等边三角形、正方形、正十边形及正十五边形。通过对弧进行等分，可以构造圆内接正 $3\cdot 2^n$ 、$4\cdot 2^n$ 、$5\cdot 2^n$ 及 $15\cdot 2^n$ （$n\in \mathbf{N}$）边形。

表 3 给出了圆内接等边三角形、正方形、正十边形及正十五边形的构造方法。

表 3 圆内接等边三角形、正方形、正十边形及正十五边形的构造方法

类别	构造方法	图像	教科书
圆内接等边三角形	过圆心 C 作直径 AB，以点 B 为圆心，CB 为半径作 $\overset{\frown}{DCE}$ 交 $\odot C$ 于点 D、E，连结 AD、DE、EA，$\triangle ADE$ 即为所求三角形。[3]		Davies（1841）
圆内接正方形	过点 C 作直径 AE、BD，使得 $AE\perp BD$，连结 AB、BE、ED、DA，四边形 $ABED$ 即为所求正方形。[3]		Davies（1841）
圆内接正十边形	在半径 CA 上取一点 B，使得 $CA:CB=CB:BA$，在圆上截取 $CB=DA$，此时有 $CA:DA=DA:BA$，于是 $\triangle ACD\backsim\triangle ADB$。计算可得 $\angle ACD=36°$，所以 AD 是圆内接正十边形的一边。[13]		Tappan（1864）
圆内接正十五边形	在半径 CB 上取一点 E，使得 $CB:CE=CE:BE$，在圆上截取 $BD=CE$ 以及 $BA=BC$，连结 DA，于是 DA 为圆内接正十五边形的一边。[19]		Robinson（1868）

4.3 比例及相似多边形问题

在早期教科书中，比例问题通常被教科书编写者所关注，常见的几类问题包括构造比例线段、构造几何平均数以及定比分线段三类。

问题 15：分割给定线段，使得分割后得到的线段之比等于任意多条给定线段之比[11]。

此问题的构造方法类似于 Legendre（1863）在 n 等分给定线段时所采用的方法，Wentworth（1880）以三条线段为例，给定线段 AB 和 m、n、o，过点 A 作射线 AX，在射线 AX 上截取 $AC=m$、$CE=n$、$EF=o$。连结 BF，分别过点 C、E 作 $CH//BF$、$EK//BF$ 交线段 AB 于点 H、K，根据比例线段的性质，此时有 $AH:HK:KB=m:n:o$（图 31）。

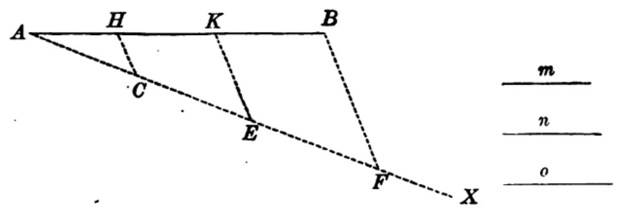


图 31 问题 15 图

继续利用这一方法，还可以构造给定三条线段的第四比例项、给定两条线段的第三比例项以及调和分割给定线段。

问题 16：构造两条给定线段的平均比例（几何平均数）[7]。

作射线 AE，在 AE 上截取线段 $AB=m$、$BC=n$ 并以 AC 为直径作半圆。过点 B 作 $BD\perp AC$，直线 BD 交半圆于点 D，此时 $BD=\sqrt{mn}$，于是线段 BD 即为所求（图 32）。

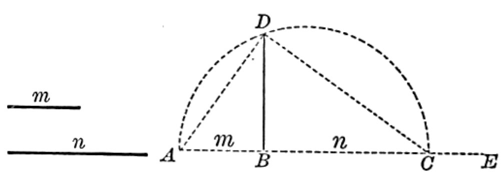


图 32 问题 16 图

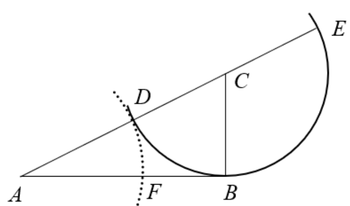


图 33 问题 17 图

这一想法将代数与几何之间建立起联系，例如令 $m=1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $BD=\sqrt{n}$，此时可以从几何上作出一段长度等于无理数的线段。

问题 17：把给定线段分成两条线段，使得长线段是整条线段和短线段的平均比例[7]。

给定线段 AB，作 $BC\perp AB$ 且 $BC=\frac{1}{2}AB$。以点 C 为圆心，CB 为半径作半圆，交射线 AC 于点 D、E。再以点 A 为圆心，AD 为半径作弧，交 AB 于点 F，此时线段 AF、FB 即为所求（图 33）。由切割线定理可知 $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AB}$，于是 $\frac{AB-AD}{AD}=\frac{AE-AB}{AB}$。又因为 $AD=AF$、$AB-AD=AB-AF=FB$ 及 $AE-AB=AE-DE=AD$，所以 $\frac{FB}{AF}=\frac{AF}{AB}$，即 $AF=\sqrt{FB\cdot AB}$。

所谓相似多边形问题通常是让读者在给定直线上构造与给定多边形相似的多边形，我们知道，一个 n 边形可以分割成 n-2 个三角形，于是问题转化为构造相似三角形。

问题 18：在给定直线上构造一个多边形，使其与给定多边形相似[7]。

给定多边形 $ABCDE$ 以及线段 FG。过点 F 作 $\angle HFG=\angle CAB$，过点 G 作 $\angle HGF=\angle CBA$，于是 $\triangle FGH\backsim\triangle ABC$，按照同样的方法还可以构造 $\triangle FHK\backsim\triangle ACD$ 及 $\triangle FKL\backsim\triangle ADE$。于是多

边形 *ABCDE* 与多边形 *FGHKL* 相似（图 34）。

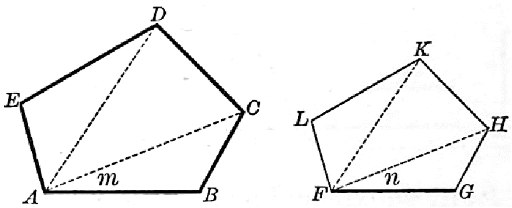


图 34 问题 18 图

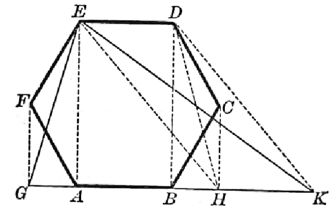


图 35 问题 19 图

4.4 面积问题

4.4.1 等面积问题

所谓等面积问题，即给定一个多边形，然后构造一个与之面积相等的多边形，构造平行线及比例线段是解决这一问题的主要想法。

问题 19：构造一个面积与给定多边形相同的三角形[7]。

给定多边形 *ABCDE*。连结 *BD*，过点 *C* 作 *CH*//*DB*，连结 *DH*，此时 $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle BHD}$，于是 $S_{多边形ABCDEF}=S_{多边形AHDEF}$。连结 *EH*，过点 *D* 作 *DK*//*EH*，连结 *EK*，此时 $S_{\triangle EHD}=S_{\triangle EHK}$，于是 $S_{多边形AHDEF}=S_{多边形AKEF}$。最后，连结 *AE*，过点 *F* 作 *FG*//*EA*，连结 *EG*，此时 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle AEG}$，于是 $S_{多边形AKEF}=S_{\triangle GKE}$，故△*GKE* 为所求三角形（图 35）。

从构造方法上可以看出，逐步降低 *n* 边形的边数，使其与 *n*-1 边形的面积相等，最后就可以得到一个与多边形面积相同的三角形。

问题 20：构造一个面积与给定三角形相同的正方形[7]。

给定三角形 *ABC*。由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot CD$，构造线段 *AB* 和 $\dfrac{1}{2}CD$ 的平均比例 *GH*，因为 $GH^2=\dfrac{1}{2}CD\cdot AB$，于是以 *GH* 为边长构造正方形 *KLMN*，此时 $S_{\triangle ABC}=S_{\square KLMN}$（图 36）。

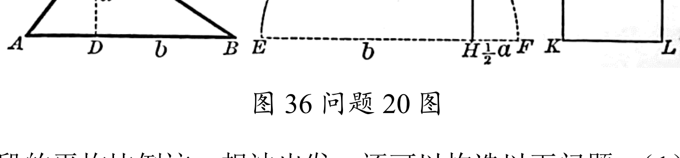


图 36 问题 20 图

从找到两条线段的平均比例这一想法出发，还可以构造以下问题：（1）构造一个面积与给

定平行四边形相同的正方形；（2）构造与给定矩形面积相同的正方形。

问题 21：在给定直线上构造与给定矩形面积相同的矩形[20]。

给定矩形 *ABCD* 及线段 *EF*。由问题 14 中构造比例线段的方法，为了使 $S_{\square ABCD}=S_{\square EFGH}$，只要构造第四比例项 *FG*，即使得线段 *FG* 满足 *EF:AB=BC:FG* 即可。

从构造第四比例项或第三比例项的想法出发，还可以在给定直线上构造与给定正方形面积相同的矩形。除此以外，早期教科书中构造等面积图形的问题还包括：构造面积与给定三角形相同的等腰三角形、平行四边形或矩形。

问题 22：给定正方形面积及矩形邻边之和或差，构造与给定正方形有相同面积的矩形[21]。

给定正方形 *ABCD* 及线段 *KL*。如图 37（*a*），以 *KL* 为直径作半圆，过点 *K* 作 *KN*⊥*KL* 且 *KN*=*AB*，过点 *N* 作 *NP*//*KL*，直线 *NP* 交半圆于点 *P*。再过点 *P* 作 *PM*⊥*KL*，垂足为 *M*，于是以 *KM*、*ML* 为邻边的矩形面积等于 $S_{\square ABCD}$ 且 *KM*+*ML*=*KL*。

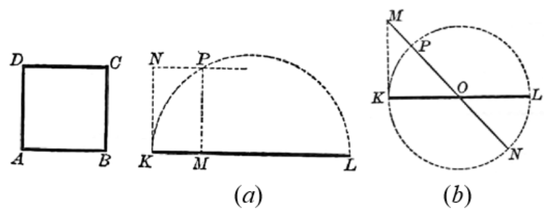


图 37 问题 22 图

如图 37（*b*），以 *KL* 为直径作圆，过点 *K* 作 *KM*⊥*KL* 且 *KM*=*AB*，连结 *MO* 并延长，交⊙*O* 于点 *P*、*N*，由切割线定理可知，$KM^2=MP\cdot MN$，于是以 *MP*、*MN* 为邻边的矩形面积等于 $S_{\square ABCD}$ 且 *MN*-*MP*=*NP*=*KL*。

4.4.2 面积和差问题

面积和差问题主要是指构造一个多边形，使得这个多边形的面积等于给定多个多边形面积之和或差，并且与给定多边形相似。其中，构造正方形在早期教科书中最为常见。

问题 23：构造一个正方形，使得其面积等于两个给定正方形面积之和或差[7]。

如图 38，给定两个正方形的边长 *m*、*n*（*m*>*n*），于是构造直角三角形 *ABC*，使得 *CB*=*m*、*AC*=*n*，由勾股定理可知 $m^2+n^2=AB^2$，于是以 *AB* 为边长构造的正方形等于两个给定正方形面积之和。同理，作射线 *EF*，过点 *E* 作 *DE*⊥*EF* 并且取 *DE*=*n*，以点 *D* 为圆心，*m* 为半径作

弧，交射线 EF 于点 G，于是以 EG 为边长构造的正方形等于两个给定正方形面积之差。

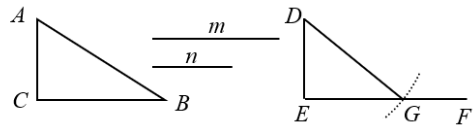


图 38 问题 23 图

与此同时，早期教科书中的面积和差问题还包括：（1）构造多边形，使其与两个给定的相似多边形相似，并且面积等于两个多边形面积之和；（2）给定两个多边形，构造与其中一个多边形相似的多边形，并且面积等于两个多边形面积之和或差。

4.4.3 面积比问题

对于两个相似多边形，其面积之比等于两个多边形相似比的平方，由此，构造面积对应成比例的相似多边形问题即可转化为构造比例线段的问题。

问题 24：构造一个正方形，使得其与给定正方形面积之比等于两条给定线段之比[22-23]。

给定线段 m、n 及以 AE 为边长的正方形。在直线 BC 上截取线段 $BD=m$、$DC=n$，以 BC 为直径作半圆，并过点 D 作 $AD\perp BC$，垂足为 D，连结 AB、AC。若 $AB<AE$，则延长 AB 至点 E，若 $AB>AE$，则在直线 AB 上截取线段 AE。过点 E 作 $EF//BC$，由比例线段的性质可知，$\frac{m}{n}=\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{AE^2}{AF^2}$，于是以 AF 为边长的正方形即为所求（图 39）。

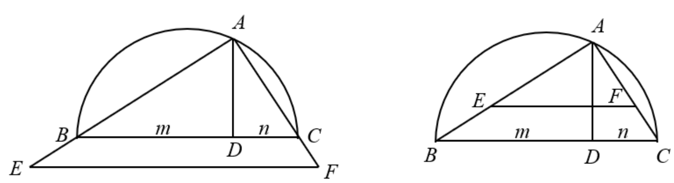


图 39 问题 24 图

构造一个多边形，使得其与给定多边形相似，并且与给定多边形面积之比等于给定两线段之比这一问题也是早期教科书中所提到的，这里不再赘述。

5 结论与启示

综上所述，尺规作图问题贯穿于美英早期几何教科书中的各个板块，问题包括平分线段、弧、角以及构造圆内接多边形、比例线段、相似多边形等。早期教科书为我们提供了诸多尺规作图问题及解决这些问题不同的构造方法，上述内容均为今日尺规作图的教学提供了诸多启示。

其一，不同的尺规作图问题不应看作一个个孤立的个体呈现在学生的面前，而应当考虑将这些问题的前因后果关系串联起来，形成知识串。我们知道，任何知识都不是从天而降的，都有其自然发生、发展的历史[24]。例如，在构造角平分线的教学设计中，教师可以从欧几里得、林肯的故事入手激发学生探究的欲望，随后向学生介绍欧几里得作图法，最后让学生尝试解决三等分角问题。问题由浅入深、由点到面、由面到体不断铺开，让学生了解知识的来龙去脉，此时知识的产生不再显得突兀，而是水到渠成的，有助于构建知识之谐。

其二，充分挖掘尺规作图问题中的思想方法，开阔学生思维。不同的尺规作图问题之间具有一定的联系，因而在解决这些问题时，不同的构造方法都可以达到殊途同归的效果，教师不应局限于课本中的方法，应鼓励学生多样的想法，并总结最优化方法，这会对培养学生的数学观和数学创造能力起到举足轻重的作用。教师也要善于挖掘构造方法中隐含的数学思想，例如，构造直线外一点的垂线中蕴含类比思想，构造两线段平均比例中蕴含数形结合思想，构造等面积图形中蕴含化归思想等，这些精彩的思想方法，无疑为数学课堂渗透了数学抽象、逻辑推理、直观想象等数学素养，有助于彰显方法之美、实现能力之助。

其三，以尺规作图问题为主线，贯穿定理、公式教学。教师可以用尺规作图问题抛砖引玉，例如，在垂直平分线性质定理的教学中，首先提出如何作一条线段的垂直平分线或构造三角形的外接圆等问题，以操作问题引领学生学习数学定理。与此同时，数学教学中应加入让学生实际动手操作的活动，以小组为单位，在小组合作中培养合作力，在做数学中提高兴趣，在探究中收获成就感，更重要的是尝试解决尺规作图问题可以加深学生对于问题背后知识点的理解与记忆，这一过程有助于营造探究之乐。

其四，对于尺规作图问题的研究有着悠久历史，从西方到东方，从古希腊时期再到今天，数学家们从没有停下探索的脚步。因此，教师对此可以制作微视频，让学生感受到尺规作图的源与流，体现数学文化的多元性，展示文化之魅。

其五，三大几何作图问题是数学发展史上的重要篇章，是数学史界关注的问题之一，不同时空的数学家对此苦苦探寻，试图解开困扰人们几千年的三大谜题，体现了数学背后的理性精神。基于数学史的尺规作图问题的研究激发了学生学习的兴趣，树立学习数学的自信心。同时，中国古代数学家在尺规作图问题上的研究成果，也增强了学生的文化自信心与民族自豪感，最终达成德育之效。

参考文献

[1] 佘岩. 尺规作图的过往[J]. 中学生数学, 2020(12): 24-25.

[2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 64-67.

[3] Davies, C. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: A. S. Barnes & Company, 1841: 53, 55-58, 63-64.

[4] Wentworth, G. A. *Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1911: 8.

[5] Ford, W. B., Ammerman, C. *Plane and solid geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1913: 1.

[6] Stone, J. C., Millis, J. F. *Plane geometry*[M]. Chicago: B. H. Sanborn & Company, 1916: 5.

[7] Legendre, A. M. *Elements of Geometry and Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1863: 82-85, 88-90, 129-135.

[8] Playfair, J. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: A. Walker, 1829: 30-32, 38, 42.

[9] Phillips, A. W., Fisher, I. *Elements of Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1897: 20, 24.

[10] Grund, F. J. *Elementary Treatise on Geometry*[M]. Boston: Carter, Hendee & Co, 1830: 179-181, 186, 191-193, 198.

[11] Wentworth, G. A. *Elements of Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Heath, 1880: 109-110, 165.

[12] Bradbury, W. F. *An elementary geometry*[M]. Boston: Thompson, Brown, 1877: 114.

[13] Tappan, E. T. *Treatise on Plane and Solid Geometry*[M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864: 57, 155-156.

[14] Macnie, J. *Elements of Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1895: 97.

[15] Wells, W., Hart, W. W. *Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Company, 1916: 53.

[16] Sharpless, I. *The Elements of Plane and Solid Geometry*[M]. Philadelphia: Porter & Coates, 1879: 74.

[17] Sanders, A. *Elements of Plane and Solid Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1903: 120, 171.

[18] Hull, G. W. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: Butler, Sheldon & Company, 1897: 127-133.

[19] Robinson, H. N. *Elements of Geometry, Plane & Spherical Trignometry Geometry*[M]. New York: Ivison, Blakeman, Taylor & Company, 1868: 125.

[20] Benjamin, G. *Elements of Geometry*[M]. Boston: Robert S. Davis & Company, 1859: 134-135.

[21] Loomis, E. *Elements of Geometry and Conic Sections Geometry*[M]. New York: Harper & Brothers, 1849: 96-97.

[22] Robinson, H. N. *Elements of Geometry, Plane & Spherical Trignometry Geometry*[M]. Cincinnati: Jacob Ernst, 1850: 85-86.

[23] Wells, W. *The Elements of Geometry*[M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1886: 179.

[24] 汪晓勤. HPM 视角下的“角平分线”教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014(5): 29-32.

美英早期三角学教科书中的三角教育价值观

刘思璐[1]，沈中宇[2]，汪晓勤[1]

（1. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2. 苏州大学数学科学学院，江苏 苏州 215006）

1 引 言

算术的本质是处理数。代数的本质是执行算术运算的一种简写语言。几何学源于“土地测量”，后指研究图形的形状与测量。而三角学（trigonometry）源于三个希腊字母“*tri*”（three），“*gonia*”（angle）和“*metron*”（measure），指“三角测量”。三角学在上述数学分支中可能是最有趣的，它既使用着其他数学分支，又应用于数学所有分支。并且，如果没有三角学，物理、力学、航海、测量、工程、大地测量等其他学科都难以为继。[1]

三角学的历史表明三角学发展的动力源于其实用价值。希腊数学家喜帕恰斯（Hippparchus, 约前 190-约前 120）是观测天文学的创始人，为了更好地研究天文学，他建立了三角学，因此三角学在很长一段时间里都是作为天文学的一部分被研究。之后，古希腊天文学家托勒密（Ptolemy, 85-165）在其著作《天文学大成》（*Almagest*）中专门用一个章节讲述三角学，并改进了弦表。直到 15 世纪，德国数学家雷吉奥蒙塔努斯（J. M. Regiomontanus，1436-1476）在其著作《三角形》才把三角学从天文学中分离出来，并将其作为几何学的一部分。而三角学成为一门独立学科要归功于欧拉（L. Euler, 1707-1783），是他把三角学从天文学中分离，使其成为了数学的一个独立分支。[2]

立德树人是当今教育的重要目标与理念。《普通高中数学课程标准（2017 年版）》要求，引导学生感悟数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值[3]。三角学是一个重要的数学主题，在其教学中不仅要让学生学习相关的知识内容，还要让学生明白为什么要学三角学，而这需要教师先了解三角学的教育价值[4]。对于三角学的教学研究，目前主要有教科书中三角内容的分析研究[5-7]、学生对三角知识理解的实证研究[8-9]和教师探索三角主题的教学研究[10-11]。然而，对于三角教育价值的研究，目前国内外并不多见，仅有个别研究关注了三角函数的科学价值[11]以及三角学教科书中数学文化[12]。对于三角学教育价值的探讨，部分早期西方三角教科书中有所提及。为了帮助今天的教师更全面地了解三角学的教育价值，也为了给今日三角教

学和教科书编写带来启示。本文从数学教育史角度归纳了 19 世纪初至 20 世纪中叶美英早期三角教科书中的三角教育价值观，以期回答研究问题：早期三角教科书提出了三角学的哪些教育价值？这些价值在教科书中是如何体现的？

2 研究方法

本研究采用质性文本分析的主题分析法，分析过程包括选取重要文本、创建主要类别、初步编码数据、整理各类文本、决定二级类别、再次编码数据、主题分析与结果呈现[13]。

2.1 研究对象

在 HathiTrust 数字图书馆检索书名包含“trigonometry”且出版地为美英两国的三角教科书，阅读其前言与第一章，筛选出论及三角学价值的教科书作为研究对象。对于同一作者再版的教科书，若内容无变化，则将其和之前版本的教科书共视为一种教科书。最终确定 1810-1959 年共有 89 种三角教科书为研究对象，包括 69 种美国教科书和 20 种英国教科书。其中，有 55 种教科书在前言中论述三角教育价值的观点，有 26 种教科书在第一章介绍了三角学的教育价值，有 8 种教科书在前言和第一章中都阐明了三角学的教育价值。以十年分段，各教科书的分布情况如图 1 所示。

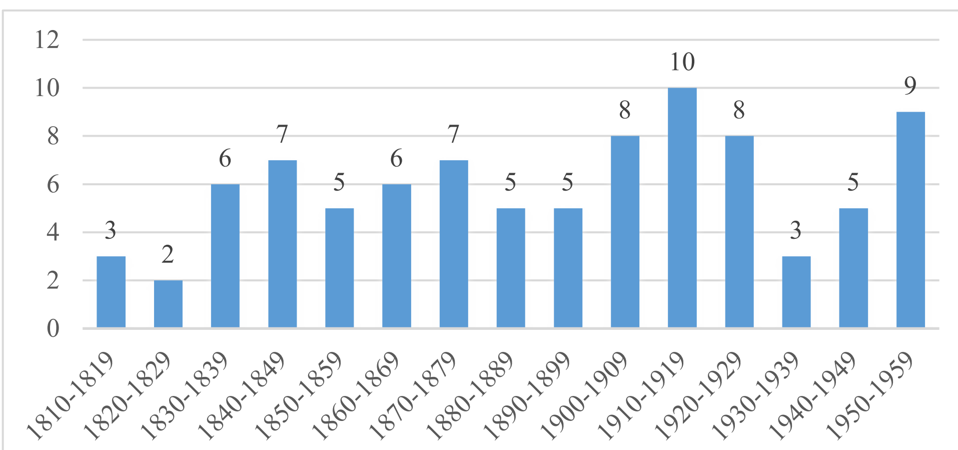


图 1 89 种美英教科书的时间分布

2.2 数据分析

根据主题分析法，研究者先在研究对象中选取重要文本，即摘录并翻译其中论及三角教育价值的相关文本内容作为一个独立的记录单元。接着，通读所有记录单元，通过归纳，初步建立三角教育价值分类框架的主要类别，包括学科基础、现实应用、能力培养、情感熏陶、学科优势和科学精神六类。然后，根据六个主要类别初步编码所有的记录单元。其次，整理每个主要类别的记录单元内容，产生主要类别的二级类别，比如学科基础的二级类别包括数学学科基础和其他学科基础。至此，完成分类框架的建立。

两位研究者根据分类框架重新背对背编码所有的记录单元，对于编码不一致的记录单元进行再讨论，直至全部一致。其中，共讨论了 27 条编码不同的编码带，占总编码数的 16.2%。例如，对于“直角三角的应用非常广泛，如在航海、测量、天文学等。”第一位研究者起初编码到了学科基础类，第二位研究者起初编码到了现实应用类，两位研究者讨论其核心思想是表达三角在各个领域的应用，故最终决定将其编码到现实应用类；再如，对于“人们相信，对三角学的历史发展，以及了解不同时代、不同种族的人推进这一学科的贡献，将会使那些正在从事这一学科研究的人产生兴趣并受到鼓舞。”第一位研究者起初认为这是在描述三角学历史的价值故未纳入编码带，第二位研究者认为这段话描述了情感熏陶类的三角价值，讨论后最终决定将其编码到情感熏陶类。

最后，得到基于类别分析的整理结果，回答研究问题一。根据主要类别，回顾教科书正文，整理其在教科书中的呈现方式，回答研究问题二。

3 三角教育价值观

美英早期三角教科书中三角教育价值主要包括学科基础、现实应用、能力培养、情感熏陶、学科优势和科学精神六类，每个主要类别都有其二级类别，详见表 1。

表 1 三角学教育价值的分类框架

主要类别	二级类别
学科基础	数学学科基础；其他学科基础
现实应用	天体测量、航海测量、土地测量、距离测量、职业需求
能力培养	逻辑思维能力、数学运算能力、数学建模能力、数学抽象能力

情感熏陶	兴趣激发、自信提升、文化价值
学科优势	问题解决
科学精神	独立思想、严谨细致、不畏困难、坚持不懈、追求真理、不畏牺牲、批判能力

有的三角教科书会涉及多类教育价值，故 89 种三角教科书的记录单元共有 167 条编码带，其分布如图 2 所示。其中 40 种教科书涉及 1 类教育价值，即这 40 种教科书只有 1 条编码带，27 种教科书涉及 2 类教育价值，15 种教科书涉及 3 类教育价值，7 种教科书涉及 4 类教育价值。

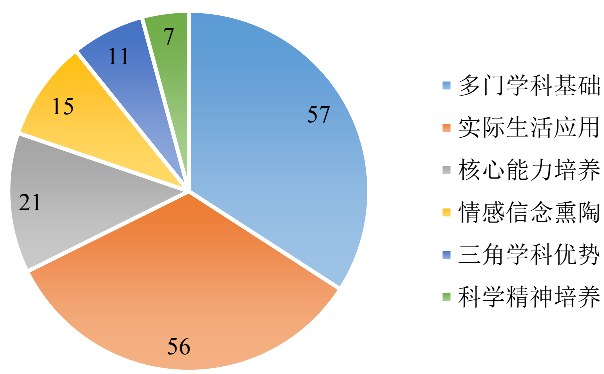


图 2 三角教育价值观的分布

由图 2 知，教科书中提到三角教育价值最多的价值类别是学科基础和现实应用，之后依次是能力培养、情感熏陶、学科优势和科学精神。

3.1 学科基础

共有 57 种教科书（书总数的 64.0%）提及三角知识作为学科基础的价值，具体可分为数学学科基础和其他学科基础，有的教科书甚至会论及这两类学科的价值。根据统计，有 37 种（41.6%）教科书论及三角作为数学学科基础的价值，包括三角可以作为几何、解析几何、微积分等其他的高等数学内容的基础；有 41 种（46.1%）教科书指明三角作为其他实用学科基础的价值，包括三角可作为天文学、地理学、航海术、物理、测量等其他学科的基础；有 2 种教科书并未直说是哪门学科的基础，只断言“对大多数学生来说，三角学只不过是达到更高境界的垫脚石[14]”。表 2 列举了三角作为学科基础的代表性观点。

表 2 学科基础的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
数学学科基础	如果没有三角函数的知识，学生就无法熟练掌握数学的高级分支。[15]	Nichols (1811)
	本课程的直接目标之一是为以后的解析几何和微积分的学习做准备。[16]	Holmes (1951)
其他学科基础	行星到太阳的距离、它们的运动、日食和其他现象都是用三角学计算出来的，地球上各个地方的距离和位置以及它们的经度和纬度也是用三角学计算的。因此，它可以被认为是天文学和地理学的基础。[17]	Keith (1810)
	三角学主要研究三角形中某些线的关系，并形成测量的基础，用于测量、工程、力学、大地测量学和天文学。[18]	Wentworth & Smith (1914)
数学+其他学科基础	如果没有它，像物理、力学、航海学、测量学、工程学、大地测量学以及几乎各种各样的测量等重要学科，会变得极其困难。学习三角函数，你将有机会学习更广泛的数学领域，以及数学在自然科学研究中的应用。[19]	Wentworth & Smith (1938)
	三角学这门学科最初发展起来是因为它在间接测量角度和距离方面很有用，尤其是在测量和天文学方面。三角函数是工程和物理科学中必不可少的工具。三角学的理论方面在纯数学和许多应用领域中都是不可或缺的。[20]	Hart (1954)

3.2 现实应用

Day（1848）是这样总结三角在现实应用中的价值：“很少有数学分支比三角学更重要、应用更广泛了。通过她，军舰在海上按自己的路径游弋；地理学家测定各地的经纬度、各国的幅员和地理位置、山高、河道等；天文学家计算天体的远近与大小，预测日、月食，度量恒星的光的运行。”[21]可见三角学对各种实际测量工作有着极其重要的价值。共有 56 种教科书（62.9%）描述了三角学在各种实际测量问题和工作需要中的价值，具体包括天体测量、土地测量、距离测量、航海测量和职业需求，表 3 给出了其代表性观点。

表 3 现实应用的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
天体测量	通过三角学，我们可以确定地球和行星的大小和恒星之间的相对位置，通过这些位置，我们可以用一个小罗盘来描绘天空的样子。[17]	Keith (1810)
	它为确定地面和天体的距离和高度提供了基本规则。如果没有这门科学（三角）的帮助，地球的形状和大小，天体的大小、距离、运动和日食将是完全未知的。[15]	Nichols (1811)

	利用三角函数，我们能够知道其他星球的巨大质量和速度，帮助我们描绘这些天体数世纪以来的运行轨迹，并预测其未来的运动。[22]	Rider & Davis (1923)
航海测量	书中还专门介绍了航海和航海天文学的原理，提出了一种非常简便的计算月距的方法，以确定海上经度。[23]	Young & Davies (1848)
土地测量	逐步引导学习者从比较简单的普通田野的测量，到运河和铁路的路线的测量，公共土地的测量，在纸上显示地球表面的等高线，市镇、县的地图的准备等，最后是确定地球周长的过程。[24]	Smyth (1852)
	埃及人利用某些三角函数规则在尼罗河沿岸重新建立每年被洪水破坏的边界标记和线。[25]	Sharp (1958)
距离测量	三角研究的最初目的是在不方便或不可能直接测量的情况下，用间接方法测量角度和距离。比如山的高度和水平宽度的确定，跨越的距离山谷或河流，或崎岖不平或无法通行的土地边界的长度。[26]	Kenyon & Ingold (1921)
	三角学的重要用途之一是找出无法方便测量的距离和高度。这样的距离可以是河流的宽度，可以是拟建隧道的长度，也可以是塔楼的高度。[27]	Rosenbach, Whitman & Moskovitz (1937)
职业需求	学生将毫无困难地预见这些计算方法对测量员、航海家和天文学家是多么不可或缺。[28]	Hudson (1862)
	三角学在培训陆军和海军某些部门军官和专家的理论指导上是头等重要的。在工业上，不仅仅是工程师，还有各类技术工人，都会发现三角学有用。[29]	Hart & Hart (1942)

3.3 能力培养

联系今天的课程标准提出的高中数学核心素养，发现共有 18 种教科书（20.2%）表明了三角在培养学生部分数学核心能力方面的价值，主要集中在培养学生的逻辑推理能力和数学运算能力，部分教科书编写者还指出三角可以培养学生解决实际问题的能力，例如 Newcomb（1898）提到“其目的不仅在于测试学生对常用计算方法的知识，还在于测试学生掌握这些方法并将它们在实际应用中以各种形式表现出来的能力。”[30]，Todhunter（1874）认为“希望他们学习扎实全面的平面三角学知识，同时还能随时运用这些知识解决问题。”[31]这说明三角学习的另一个目标是培养学生解决实际应用的能力，从而隐含了三角问题的解决过程中还有助于学生数学建模能力和数学抽象能力的培养。表 3 给出了培养逻辑推理能力和数学运算能力的代表性观点。

表 4 能力培养的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
逻辑推理能力	三角学是数学科学的一个重要分支：思辨的部分，就像欧几里得的《几何原本》一样，使人习惯于细心的、有理有据的推理。[17]	Keith (1810)
	它应该培养清晰而准确地思考的能力。它可以用来发展准确性、快速性和整洁性。准确，因为这是所有数学的基础；快速是因为它为得出结论和结果提供了捷径；整洁——没有整洁，其他优点常常化为乌有，因为在安排问题的解决方案时需要有序的形式。[23]	Rider & Davis (1923)
数学运算能力	在编写本书的过程中，作者有两个目的：首先，给学生三角学的基本知识；其次，让他练习计算的艺术。由于许多学生对近似数字的计算没有其他经验，因此这方面的问题得到了特别的重视。[32]	Durfee (1900)
	本课程的直接实际目标是在计算和表格的使用方面发展一定的能力，并为以后的解析几何和微积分的学习做准备。[16]	Holmes (1951)

3.4 情感熏陶

共有 15 种教科书（16.9%）认为，三角学习的过程有助于学生的兴趣激发和自信提升，而且具有无与伦比的文化价值。表 5 给出了情感熏陶类的代表性观点。

表 5 情感熏陶的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
兴趣激发	作者和教师都必须顺应时代的要求，明智地把抽象与具体、理论与实践结合起来，使学生感到他起初可能付出艰苦努力所学到的东西，将来可能会有重要的应用……他将受到鼓励，作出新的更大的努力，并最终获得对研究的喜爱。[33]	Robinson (1860)
	这些实际应用以最好的手段提供了推动三角学的原则，并使这门学科真正至关重要。学生将在任何时候都明白他为什么要做他正在做的事情，将真正尊重这个学科，并将对它产生真正的兴趣。[34]	Dickson (1922)
自信提升	研究这类工作会明显增加学习者对自己的信心，这种信心会随着他的进步而增强，并激励他继续数学研究，以便获得这些原理和方法，其影响和应用也会扩展到生活中的事物……在他未来的所有追求中，都是一个无穷无尽的资源和向导。[35]	Abbatt (1841)
文化价值	它理应在课程中占据最重要的位置，这不仅是因为它具有强烈的实用价值，还有它无与伦比的文化价值。[36]	Moritz (1915)

3.5 学科优势

共有 11 种教科书（12.4%）表达了三角作为一门特殊学科的优势，而三角这门学科的优势主要集中在对实际问题解决的应用性和便捷性。

例如，Hudson（1862）提到："三角学在其发展的早期阶段，专门用于测量三角形，并建立与三角形直接相关的命题。然而，它的方法现在得到了扩展和一般化，使它成为高等数学中最有价值的分析工具。在数学科学的所有基本分支中，它也许是实用效用最明显的一个分支。"[28]这强调了三角在所有学科中无与伦比的实用价值。再如，Palmer（1918）在书中直接指出："通过三角学，可以计算角度和边。许多这样的例子，说明三角学是比代数或几何更强大的工具。"[37]说明了三角作为工具在解决三角形问题时，比代数和几何更有效。还有，Sharp（1958）指出"数学的基本目的之一是提供一种符号语言，通过这种语言，物理世界中的事件可以被简明而优美地描述。因此，寻找一种可以表示周期运动的数学方案是很自然的。我们可能已经熟悉的代数思想并不很适合描述周期运动。随着这门学科的发展，三角函数表达式将特别适合于此目的。"[25]这揭示了三角在研究周期运动上的优势。

3.6 科学精神

任鸿隽先生于 1916 年在其文章中首次创用中文"科学精神"一词，指出"科学精神者何，求真理是已。"归纳其文所述之科学精神，为"追求真理"，为"崇实""贵确"，要发扬重实践、求创造、敢质疑之风气。[38]张奠宙先生则将科学素养与理性精神相联系，强调不迷信权威，要独立思考；不感情用事，要据理判断；不随波逐流，要坚持真理。[39]故将三角教科书中对于独立思想、严谨细致、不畏困难、坚持不懈、追求真理、不畏牺牲、批判能力等内容的描述归纳为三角学对科学精神培养的教育价值。共有 7 种教科书（7.9%）涉及该类教育价值，表 6 给出了描述科学精神的代表性观点。

表 6 科学精神的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
独立思想 严谨细致	努力培养学生的独立思想和精神主动性……在实际应用中，对图解解法和计算方法都给予了特别的重视。前一种方法是对后一种方法的一种检查，并提供了整洁和仔细绘图的练习。[40]	Murray (1899)

不畏困难坚持不懈	它们对学生具有真正的价值。提前预见困难，学习者的思想就会更容易克服它们。通过练习各组相关的公式，增加了学生在解决三角函数中最大的难题（恒等式）的能力，因为他已经获得了必要的技巧，一步一步地，运用他所学的公式。[41]	Robbins (1909)
追求真理不畏牺牲	当学生们了解那些为了把科学发展到完美境界而付出了毕生努力的大师们，思考那些耗尽一生却没有得到金钱补偿，也没有得到大众掌声的人们，只为分享建立抽象真理殿堂的成果时，会对真理本身有更好的认识，并在一定程度上有助于实现人类奋斗的更高目标。[36]	Moritz (1915)
批判能力	如果所处理的问题能够激发一些学生的批判能力，并培养他们对更深入分析的渴望，我将很高兴。[42]	Dresden (1921)

3.7 价值观的时间分布

以 10 年为单位，对上述三角学的六类教育价值观进行统计，得到 1810-1959 年六类教育价值观在时间上的分布，见图 3。

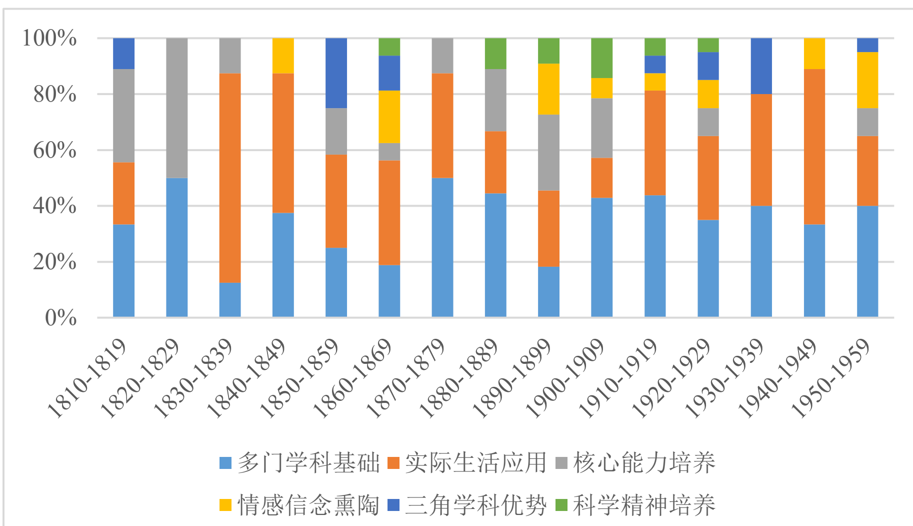


图 3 89 种教科书中三角教育价值观的分布

由图 3 知，首先，学科基础和现实应用这两类教育价值基本上一直是三角学重要且基本的教育价值；其次，核心能力的培养也是教科书编写者一直关心的价值之一；再次，情感熏陶、学科优势和科学精神也是部分时期三角学重要的教育价值。总体来看，各类三角教育价值观基本上都较为稳定的出现在各个时期。

4 三角教育价值观在教科书中的体现

4.1 概念引入

教科书编写者主要从数学内部和数学外部两个角度引入三角学相关的概念。例如，Young & Morgan （1919）从数学外部和数学内部先介绍对数的应用价值和数学运算上的学科优势："商业、科学和工程中所需要的大量数值计算被纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）发明的对数大大简化了。通过对数，我们能够用加法和减法来代替乘法和除法，我们都意识到这一过程比前两种方法更快。"接着才引出对数的概念 [43]。再如，McCarty（1921）从数学内部出发在直角三角形中直接定义三角比："为了区分不同的比率，每一个比率都是根据其角度所对应的线的位置来命名的。因此，在直角三角形 *AHB* 有边和角，如图 4 所示。其中，$\sin A=\frac{a}{h}$，$\cos A=\frac{b}{h}$，$\tan A=\frac{a}{b}$，$\cot A=\frac{a}{b}$" [44]

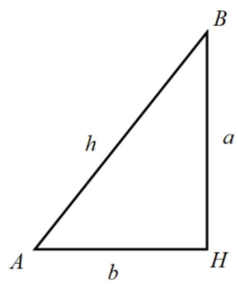


图 4 直角三角形 *AHB*

概念引入的内容体现了三角学在许多行业中的现实应用，在解决数学运算问题上的学科优势和从边角关系抽象出三角比的能力培养等多类教育价值。

4.2 定理证明

正弦定理和余弦定理是早期三角教科书中的重要定理，教科书的作者往往会对其进行证明。例如，Young 和 Morgan 证明余弦定理的过程为[43]：

如图 5 所示，考虑任意三角形 *ABC*，其中 *CD* 为从顶点 *C* 出发所作的高。

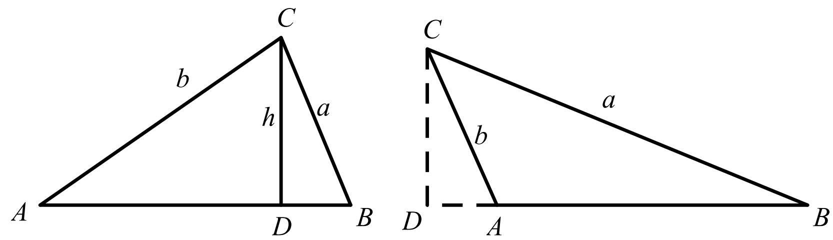


图 5 余弦定理的证明

在图 5（左）中有

$$AD = b\cos A, CD = b\sin A, DB = c - b\cos A\ ,$$

在图 5（右）中有

$$AD = -b\cos A, CD = b\sin A, DB = c - b\cos A\ ,$$

在图 5 的两个图形中都有

$$a^2 = DB^2 + CD^2\ ,$$

从而有

$$a^2 = c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A\ ,$$

$$= c^2 - 2bc\cos A + (\cos^2 A + \sin^2 A)b^2\ ,$$

因此

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\ ,$$

类似的

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B\ ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C\ 。$$

在定理证明的例子中，充分体现了三角学在培养逻辑推理能力和严谨细致的科学精神等方面教育价值。

4.3 公式推导

三角学教科书中介绍了许多公式推导的内容，包括诱导公式、和角公式、差角公式及其衍生公式的推导。Davison（1919）先通过边角关系证明了和角公式和差角公式，以和角公式的证明为例[45]：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\text{，}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\text{。}$$

根据图 6 的边角关系，其证法是

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{MP}{OP}=\frac{MK+KP}{OP}=\frac{HN+KP}{OP}=\frac{HN}{ON}\frac{ON}{OP}+\frac{KP}{PN}\frac{PN}{OP}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\text{，}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OM}{OP}=\frac{OH-MH}{OP}=\frac{OH-KN}{OP}=\frac{OH}{ON}\frac{ON}{OP}+\frac{KN}{PN}\frac{PN}{OP}=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\text{。}$$

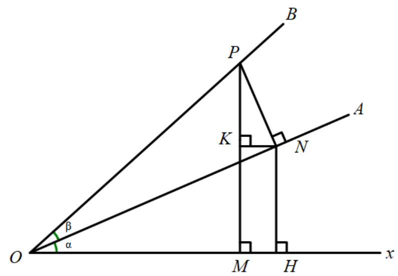


图 6 和角公式原型图

之后作者介绍了利用和角公式和差角公式推导一些其他的特殊公式，例如：

已知

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\text{=}\sin(\alpha+\beta),\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\text{=}\sin(\alpha-\beta)\text{，}$$

所以

$$2\sin\alpha\cos\beta\text{=}\sin(\alpha+\beta)\text{+}\sin(\alpha-\beta),2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\text{+}\sin(\alpha-\beta)\text{。}$$

再次

$$\cos\alpha\cos\beta\text{-}\sin\alpha\sin\beta\text{=}\cos(\alpha+\beta),\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\text{=}\cos(\alpha-\beta)\text{，}$$

所以

$$2\cos\alpha\cos\beta\text{=}\cos(\alpha+\beta)\text{+}\cos(\alpha-\beta),2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\text{。}$$

可见，教科书的编写者不仅要求学生知道这些公式，还要求严谨细致地推导它们。这体现了三角学在培养学生逻辑推理能力的价值。一环扣一环的公式推导，复杂多变而又逻辑严密，当学生一步一步地推导出来它们，正如 Abbatt（1841）所言[35]，他们将收获除了结果之外的东西，包括数学自信的逐步提升和不畏困难的科学精神。

4.4 定理应用

每种早期三角教科书中都介绍了许多需要运用三角定理解决的实际问题。例如，Keith

（1810）选取了使用正弦定理求两个物体之间距离的实际问题：“如图 7 所示，如果身处河的一侧，想要了解到河的另一侧的堡垒或其他物体之间的距离，假设已经测量得到河边一侧的线段 AB 的长度为 500 码，同时得到这条线段和物体之间的两个角的度数，即 $\angle CAB=74°14'$ 和 $\angle CBA=49°23'$，现在需要求点 A 和点 B 到堡垒 C 之间的距离。”[17]

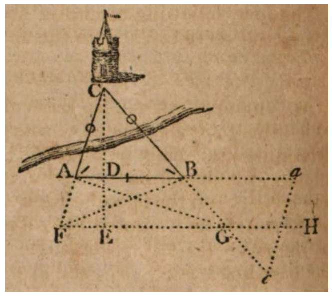


图 7 两个物体之间距离的实际问题

可见，无论是出于工作需要还是在实际生活中，三角都有着极大的应用价值。从工具性方面来说，它在解决那些不可直接测量的距离问题上，具有一定的学科优势。它还可以将现实的生活问题转化为有趣的数学问题，在培养学生数学抽象、数学建模和数学运算等核心素养的同时，让学生感受这门学科的重要性和实用性，从而激发他们的学习兴趣、提升解决问题的自信。

4.5 历史回溯

有 20 种教科书不同程度地介绍了三角学的历史。例如，Sharp（1958）介绍了三角起源于 2000 多年前的埃及和希腊人在土地调查和天文学中应用几何原理解决问题。在喜帕恰斯时代，希腊人已经发现地球是球形的，并通过几何学和三角学以惊人的准确性估计了地球的直径和月球的直径[25]再如，Perlin（1955）介绍了中世纪三角学的发展，包括奥地利天文学家佩尔巴赫（G. Peurbach, 1423-1461）计算正弦表，他的学生雷吉奥蒙塔努斯继续他的工作，约于 1464 年出版了一个完整的平面和球面三角著作，之后纳皮尔发明了对数，简化了三角函数表的使用从而省时省力。[46]

从历史回溯中可以感受到三角学科背后的人文价值和应用价值。这些不同时代、不同种族的数学家对三角学科的贡献，将会使那些从事该学科研究的人产生兴趣并受到鼓舞[40]。三角学的历史是漫长且曲折的，但是数学家们一直都未停止其探索的步伐，相信从他们身上，学生一定会感受到何为科学精神。

5 结论与启示

1810-1959 年 89 种美英早期三角教科书呈现了六类三角教育价值观，包括学科基础、现实应用、能力培养、情感熏陶、学科优势和科学精神。早期三角教科书主要从概念引入、定理证明、公式推导、定理应用和历史回溯五个方面呈现三角教育价值观。早期三角教科书中叙述的教育价值观及其体现方式对今天的三角教学和教科书编写具有一定的启示。

巩固学科基础，重视实际应用。许多美英早期三角教科书都强调了三角是数学学科和其他学科的基础，因此教师可以在教学实践中将三角与解析几何等知识相联系，设计数学、物理、地理等学科整合取向 STEM 教学[47]。而三角在实际生活中的应用也是大多数早期教科书关注的价值，这提醒今日的数学教师和教科书编写者在设计三角的教学内容和编写教科书时也应体现其应用价值，例如在引入和练习等环节加入具有文化价值的实际问题。

培养核心素养，养成科学精神。早期教科书还指出了三角学习过程对数学核心素养培养具有重要作用，教师应重视三角公式的推导、三角函数的计算，教科书也可设计三角在数学建模中应用的相关内容[48]，从而培养学生逻辑推理能力、数学运算能力和数学建模能力等。早期教科书中三角学的历史蕴含了数学家所具有的科学精神，同样今天的数学教师和教科书可通过介绍三角学的历史培养学生追求真理的科学精神。

发挥学科优势，激发学习兴趣。早期教科书提到了三角学解决问题时具有不同于几何与代数方法的独特优势，今天的教师和教科书也可设计数学任务，让学生在问题解决过程中体会三角学在间接测量上的有效性和便捷性。另外，三角学的推理和运算往往以枯燥乏味著称，为摆脱此困境，教科书可介绍三角学历史上有趣的测量问题和数学家在三角方面的数学成就[49]，教师也应在教学中落实学科德育，对学生进行适当的引导与鼓励，让其明白三角学习的价值，从而培养学生的学习兴趣和数学自信心。

参考文献

[1] Wentworth, G., Smith, D. Eugene. *Plane and spherical trigonometry and tables*[M]. Boston: Ginn, 1938: 1-2.

[2] Rider, P. R., Davis, A. *Plane trigonometry*[M]. New York: D. Van Nostrand, 1923: 2.

[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 5.

[4] 张海强. 基于 HPM 的《三角学序言课》教学设计[J]. 数学通报, 2018, 57(8): 23-26.

[5] 陈月兰. 中日三角比内容比较——以上海教育出版社和数研出版社出版的教科书为例[J]. 数学教育学报, 2013, 22(3): 57-62.

[6] 付钰, 张景斌. 中美数学教材三角函数习题的比较研究[J]. 数学教育学报, 2018, 27(3): 14-18.

[7] 刘冰楠, 代钦. 民国时期国人自编三角学教科书中“三角函数”变迁[J]. 数学教育学报, 2015, 24(3): 81-85.

[8] 佘丹. 高中三角函数内容深度的实证研究——基于大学数学专业的学习[J]. 数学教育学报, 2016, 25(6): 85-87, 92.

[9] 何忆捷, 彭刚, 熊斌. 高中生三角公式理解的实证研究——以上海为例[J]. 数学教育学报, 2016, 25(1): 51-56.

[10] 张龙军, 熊莉莉, 张景中, 李兴贵, 饶永生. 教育数学在农村初中首轮实验的探索与思考——“重建三角”在成都市青白江区祥福中学实验分析[J]. 数学教育学报, 2021, 30(5): 33-38, 65.

[11] 沈威, 曹广福. 高中三角函数教育形态的重构[J]. 数学教育学报, 2017, 26(6): 14-21, 71.

[12] 彭思维, 汪晓勤. 美英早期三角学教材中的数学文化[J]. 中国数学教育, 2020(Z4): 89-96.

[13] Kuckartz, U. *Qualitative text analysis: A guide to methods, practice and using software*[M]. Sage Publications Ltd, 2014: 70.

[14] Wheeler, H. N. *The elements of plane trigonometry*[M]. Boston: Ginn and Heath, 1877: iii-iv.

[15] Nichols, F. *A treatise of plane and spherical trigonometry*[M]. Philadelphia: F. Nichols, 1811: viii-ix.

[16] Holmes, C. T. *Trigonometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951: v.

[17] Keith, T. *An introduction to the theory and practice of plane and spherical trigonometry*[M]. London: Printed for the author[etc.], 1810: iii-iv, 56.

[18] Wentworth, G., Smith, D. E. *Plane trigonometry and tables*[M]. Boston: Ginn and Company, 1914: 1.

[19] Wentworth, G., Smith, D. E. *Plane and spherical trigonometry and tables*[M]. Boston: Ginn and Company, 1938: 1.

[20] Hart, W. L. *Trigonometry*[M]. Boston: Heath, 1954: 1.

[21] Day, J. *A treatise of plane trigonometry*[M]. New York: M. H. Newman and Company, 1848: 3.

[22] Rider, P. R., Davis, A. *Plane trigonometry*[M]. New York: D. Van Nostrand Company, 1923: 3-4.

[23] Young, J. R., Davies, T. S. *Elements of plane and spherical trigonometry*[M]. Philadelphia: E. H. Butler and Company, 1848: 4.

[24] Smyth, W. *Elements of plane trigonometry*[M]. Portland: Sanborn and Carter, 1852: 11.

[25] Sharp, H. *Elements of plane trigonometry*[M]. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1958: 1-2.

[26] Kenyon, A. M., Ingold, L. *Elements of plane trigonometry*[M]. New York: The Macmillan company, 1921: 1.

[27] Rosenbach, J. B., Whitman, E. A., & Moskovitz, D. *Plane trigonometry*[M]. Boston: Ginn and Company, 1937: 3.

[28] Hudson, T. P. *Elementary trigonometry*[M]. Cambridge: Deighton, Bell, and Company, 1862: 1.

[29] Hart, W. W., Hart, W. L. *Plane trigonometry, solid geometry and spherical trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath and Company, 1942: 1.

[30] Newcomb, S. *Elements of plane and spherical trigonometry*[M]. New York: Henry Holt and Company, 1898: iii-iv.

[31] Todhunter, I. *Plane trigonometry for the use of colleges and schools*[M]. London: Macmillan and Company, 1874: v-vi.

[32] Durfee, W. P. *The elements of plane trigonometry*[M]. Boston: Ginn and Company, 1900: iii-iv.

[33] Robinson, H. N. *Elements of geometry, and plane and spherical trigonometry*[M]. New York: Ivison, Phinney and Company, 1860: iii-iv.

[34] Dickson, L. E. *Plane trigonometry with practical applications*[M]. Chicago: B. H. Sanborn and Company, 1922: iii-iv, 1.

[35] Abbatt, R. *The elements of plane and spherical trigonometry*[M]. London: Thomas Ostell and Company, 1841: v-vii.

[36] Moritz, R. É. *Elements of plane trigonometry*[M]. New York, John Wiley and Sons, Inc, 1915: iv, vi-vii.

[37] Palmer, C. I. *Practical mathematics part IV: trigonometry and logarithms*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc, 1918: 36-37.

[38] 任鸿隽. 科学精神论[J]. 科学, 2015, 67(6): 13-14.

[39] 张奠宙, 马岷兴, 陈双双, 胡庆玲. 数学学科德育——新视角·新案例[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007: 4-7.

[40] Murray, D. A. *Plane trigonometry for colleges and secondary schools*[M]. New York: Longmans, Green, and Company, 1899: vi-vii.

[41] Robbins, E. R. *Plane trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1909: 5-6.

[42] Dresden, A. *Plane trigonometry*[M]. New York: John Wiley and Sons, inc, 1921: iii-iv.

[43] Young, J. W., Morgan, F. M. *Plane trigonometry and numerical computation*[M]. New York: The Macmillan Company, 1919: 50.

[44] McCarty, R. J. *Elements of plane trigonometry*[M]. Chicago: American Technical Society, 1921: 9.

[45] Davison, C. *Plane trigonometry for secondary schools*[M]. London: Cambridge University Press. 1919: 66-67, 99.

[46] Perlin, I. E. *Trigonometry*[M]. Scranton: International Textbook Company, 1955: 2.

[47] 张博. 国际 STEM 教育研究进展与启示——基于 SSCI 期刊《国际 STEM 教育期刊》载文的内容分析[J]. 数学教育学报, 2022, 31(2): 58-62, 81.

[48] 汪飞飞, 张维忠. 中国中学数学建模研究的历程与论题及其启示[J]. 数学教育学报, 2022, 31(2): 63-68.

[49] 王嵘. 数学文化融入中学教科书的内容与方法[J]. 数学教育学报, 2022, 31(1): 19-23.

教学实践

聚焦学生探究，构建留白课堂

——HPM 视角下异面直线间的距离同课异构课例分析

刘梦哲，邹佳晨，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

“异面直线间的距离”是新版沪教版“空间直线与平面”一章中的内容，该节内容综合了线线、线面及面面等多方面的知识，既能帮助学生回顾和运用前序知识，也为完善和发展学生的直观想象、逻辑推理等素养服务。同时，学生已经学习了异面直线所成角，为了准确刻画两条异面直线的位置关系，有必要进一步学习异面直线间的距离。

已有教学中，教师往往会关注“定义法”“转化法”“函数法”等常见计算方法的讲解和练习[1-2]，却没有说明为何将异面直线公垂线段的长度定义为两条异面直线的距离，这不免使学生在学习中产生困惑。为此，有的教师基于建构主义指导教学，先让学生运用铁丝构造异面直线的公垂线，进而证明公垂线具有存在性和唯一性，并说明公垂线段的最值性，再引导学生运用转化法计算正方体中异面直线间的距离[3]。虽然建构主义强调以学生为中心的教学理念，但教学中难免存在学生的构造方法单一、教师牵着学生思路走的问题。

数学史作为一座巨大的思想宝库，其中包含大量的教学素材，历史上数学家给出了异面直线公垂线的存在性和唯一性的多种证明方法，无疑能打开学生的思维、丰富教师的教学。此外，《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》强调学生“经历”“体验”“探索”数学的过程[4]，通过教师留白、学生补白的教学模式，可以为学生的“再创造”提供机会。鉴于此，两位来自上海市的教师 A 和 B 基于留白创造式的理念，各自实施了 HPM 视角下异面直线间的距离的教学，本文通过展示两位教师的教学，试图分析两节 HPM 课例与留白创造式教学间的关系，以期为今日教学提供有益参考。

2 两节课的教学过程

2.1 教学目标

教师 A 和 B 拟定的教学目标基本相同，都希望让学生经历探究的过程，以此掌握异面直线间距离的定义和求法，发展数学核心素养。具体如下：

（1）理解异面直线的公垂线（段）具有存在性、唯一性、最值性，掌握异面直线间的距离的定义，发展直观想象、逻辑推理素养。

（2）会初步运用定义法和转化法计算异面直线间的距离，发展数学运算素养。

（3）在探究、证明和应用数学概念的过程中，感悟类比、化归的数学思想，发展理性精神。

2.2 教学过程

在教学过程中，两位教师的教学过程主要包括新知引入、定理探究、小试牛刀、课堂小结四个环节，具体见表 1。

表 1 教师 A 和教师 B 的教学过程

教学环节	教师 A	教师 B
新知引入	由双杠模型抽象出两条异面直线，但仅由异面直线所成角并不能确定其位置关系，由此引出本节课的内容。	运用动图和 GeoGebra 展示小车经过限高 5 米的立交桥时，车上的麋鹿模型与高架桥相撞，由此抽象出本节课的内容。
定理探究	（1）类比平行线间距离的定义，猜想两条异面直线的距离的定义。 （2）学生小组运用小棒找出两条异面直线的公垂线，并证明。 （3）教师总结异面直线间距离的四步求解方法，并介绍数学史中存在性的其它证明方法。 （4）反证法证明异面直线公垂线的唯	（1）让学生归纳异面直线间距离的定义。 （2）课前先让学生构造与两条异面直线垂直且相交的直线，然后教师梳理不同方法，并用 GeoGebra 绘制出来，课上学生结合 GeoGebra 分步叙述构造方法。 （3）师生共同分析想到垂线法的思路，并总结构造公垂线的四步法，然后教师再分享交线法。

	一性。 （5）总结异面直线的公垂线定理。 （6）证明异面直线公垂线段的最值性。	（4）分类讨论证明异面直线公垂线的唯一性。 （5）总结异面直线的公垂线定理，回顾四步法，并抛出思考题。 （6）证明异面直线公垂线段的最值性，并渗透转化思想。
小试牛刀	计算正方体中两条异面直线的距离。	让学生在鳖臑中编制一道与异面直线间的距离有关的问题，并完成。
课堂小结	师生先从知识和方法两个层面进行总结，再分享对本节课的感受。	引导学生从数学知识、思想方法和情感态度三个维度进行总结。

在新知引入环节，教师 A 和 B 考虑到学习异面直线间的距离这一内容的必要性，故而从数学内部和数学外部两个角度引入教学。从数学内部看，学生已经学习了异面直线所成角，但仅由异面直线所成角并不能确定两条异面直线的位置关系，因此还需要学习异面直线间的距离。从数学外部看，生活中有许多与异面直线间距离相关的例子，教师 A 选取邹敬园获得东京奥运会男子双杠金牌的实例，教师 B 选取装有超高物体的小车与高架桥碰撞的实例，从实例中抽象出本节课的教学内容。

在定理探究环节，教师 A 和 B 的设计思路均是先让学生给出两条异面直线的距离的定义，然后探究异面直线公垂线（段）的存在性、唯一性和最值性。

两位教师均将探究公垂线的存在性视为本节课的重点，并以历史上数学家证明存在性的不同方法为参考系设计探究活动，但他们在活动设计上有所不同。教师 A 采取课上探究的方式，学生小组在课上运用小棒找出异面直线的公垂线；教师 B 采取课前探究的方式，学生在课前学习单中先画出与两条异面直线垂直且相交的直线，然后教师对不同的构造方法进行梳理，并运用 GeoGebra 将几种典型方法绘制出来，课上学生基于 GeoGebra 中的图形分享作法，此外，教师 B 还邀请学生共同分析想到垂线法的思路。最后，两位教师均总结出构造异面直线公垂线的四步法（亦称定义法），并分享了历史上存在性的其它证法。

对于唯一性的证明，两位教师的学生都给出了教科书中的反证法，教师 B 的学生还想到了两条公垂线有一点重合的情况。在证明存在性和唯一性后，两位教师总结了异面直线的公垂线定理，并引导学生发现、证明公垂线段的最值性，在此过程中，教师 B 还渗透转化思想。

在小试牛刀环节，教师 A 设计了计算正方体中异面直线间距离的问题，教师 B 则让学生在鳖臑中编制一道与异面直线间距离有关的问题，两位教师的学生通过直观感知或运用转化法、四步法可以对简单的问题进行求解。

在课堂小结环节，两位教师均引导学生从数学知识、思想方法和情感态度三个维度分享本节课的收获，同时，教师还分享了本节课对数学学习，乃至对人生的些许启思。

3 数学史与留白创造式教学

本节课教师 A 和 B 基于留白创造的教学理念设计教学[5]，主要为学生留出发现之白、方法之白、论证之白、问题之白和超越之白，并给予学生补白的空间，学生的创获促使两节 HPM 课堂精彩纷呈。

3.1 发现之白

任何数学概念、定理、公式都不是凭空产生的，都有其发生发展的过程，为此，教师可以给学生留出探索和发现新知的机会，于是，学生可以像数学家一样经历数学知识的"发现"过程。在本节课中，教师 A 和 B 设置了课上或课前的探究活动，让学生探究异面直线公垂线的存在性。

教师 A 在给出异面直线公垂线以及公垂线段的概念后提出问题"任意两条异面直线都有公垂线吗？"针对该问题，教师设置了小组探究活动。教师给予每个小组若干彩色小棒，学生可将其视为空间中的直线，以此从实验几何的角度找出两条异面直线的公垂线。

如图 1，对于异面直线 l_1 和 l_2，学生小组 1 首先过 l_2 上任意一点作直线 $l_3 // l_1$，则 l_2 和 l_3 确定一个平面 $\alpha // l_1$，然后过 l_1 作平面 $\beta \perp \alpha$，α 和 β 交于直线 l_4，l_2 和 l_4 交于点 A，最后在平面 β 中，过点 A 作 $AB \perp l_1$，由此可得公垂线 AB。

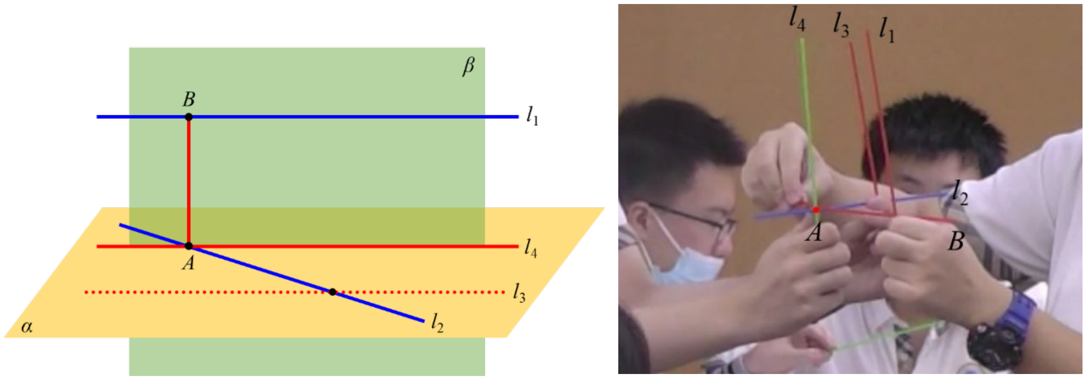


图 1 教师 A 的课堂中学生小组 1 的垂线法

如图 2，学生小组 2 按照同样的方法先作与直线 l_1 平行的平面 α，然后作 l_1 在 α 上的投影 l_4，l_2 和 l_4 交于点 A，最后过点 A 作 $AB \perp l_1$，交 l_1 于点 B。

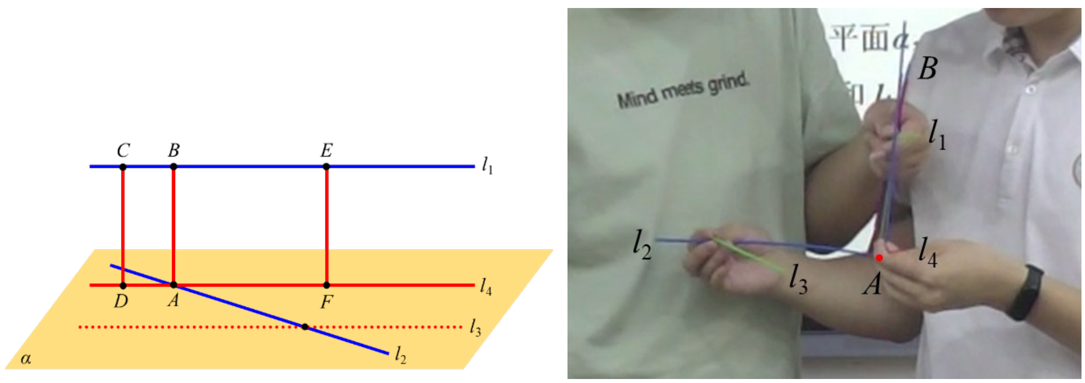


图 2 教师 A 的课堂中学生小组 2 的投影法

这两组学生运用小棒分步展示了两种构造异面直线公垂线的方法，而学生的这两种方法正对应于美国数学家尼贝里（J. A. Nyberg）给出的垂线法[6]和美国数学家霍尔斯特德（G. B. Halsted）给出的投影法[7]。

教师 B 将探究活动置于课前，先给学生发放课前学习单，让学生画出与两条异面直线垂直且相交的直线，并写出构造的步骤，然后教师梳理出学生的几种典型方法，课上，教师邀请学生上讲台逐一分享想到的方法。

图 3 是学生 1 给出的方法，其本质与尼贝里的垂线法相一致，只是过点 A 作 $AB \perp \alpha$，交 l_1 交于点 B（图 1 左），该方法与美国数学家凯勒（S. S. Keller）给出的垂线法不谋而合[8]，通过进一步思考，学生 1 还认为可以在平面 β 中，过点 A 作 $AB \perp l_4$，该方法则与美国数学家桑德斯（A. Sanders）给出的垂线法相同[9]。学生 2 等想到与美国数学家布什（W. N. Bush）和克拉克（J. B. Clarke）一样的方法[10]，其本质与霍尔斯特德的投影法相一致，只是过点 A 作 $AB \perp \alpha$，

交 l_1 交于点 B（图 2 左）。于是，教师 B 邀请学生 1 和 2 上台分享他们的方法。

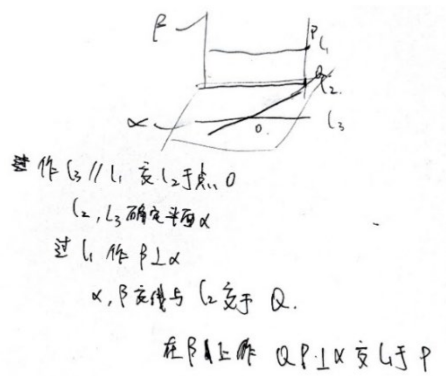


图 3 教师 B 的学生 1 的垂线法

此外，学生 3 还想到了一种历史上未见的方法。如图 4，分别过两条异面直线 l_1 和 l_2 作与另一条直线平行的平面 β 和 α，然后作两条异面直线在 α 和 β 上的投影 l_1' 和 l_2'，投影与异面直线交于两点 A 和 B，于是，两点的连线即为公垂线。虽然该方法未在课上分享，但我们依然惊讶于学生能够“创造”出新的方法，其与投影法具有异曲同工之妙。

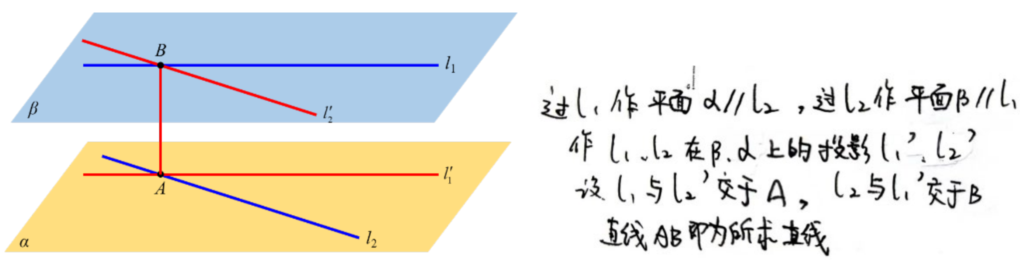


图 4 教师 B 的学生 3 的投影法

可见，两位教师留出了探究异面直线公垂线存在性的发现之白，大多学生能够发现垂线法和投影法，还有学生给出的方法甚至已经超出了教师的预设，这无疑说明学生能够很好地完成补白的过程。

3.2 方法之白

一个数学问题往往有多种不同的解法，如果教师敢于放手将探究问题、解决问题的机会留给学生，学生往往会给出对于一个问题更多精彩的回答。

本节课，当教师 A 和 B 让学生构造异面直线的公垂线时，学生给出的构造方法丰富多彩。教师 A 的学生通过课上小组探究，给出了垂线法和投影法，考虑到有限的教学时间，课上仅有两组学生分享了他们想到的方法，但我们认为，若能给予学生更多思考的时间，可能还会有

学生给出更多方法。为留给学生充分探究和思考的时间，教师 B 设置了课前学习任务，学生通过课前思考，亦给出了垂线法和投影法，笔者在梳理课前学习单时发现，学生间给出的垂线法略有不同，或者在 β 中过点 A 作 $AB\perp l_1$，或者在 β 中过点 A 作 $AB\perp l_4$，又或者过点 A 作 $AB\perp\alpha$（图 1），这些都是历史上数学家曾经给出的方法，甚至学生 3 还想到了投影法的变式，该方法笔者未曾见于美英早期几何教科书。可见，当学生对问题作了充分的思考，给出的方法之多、之好、之妙，将大大超乎教师的预期。

此后，通过古今对照，台上台下的学生都惊奇地发现自己的和历史上数学家的方法相一致，这不免对学生的内心有所触动。

3.3 论证之白

通过教师留白，学生可以通过补白发现数学定理、公式或其他数学结论，此时，教师还有必要继续留出论证之白，让学生对公式、命题或其它结论加以证明。

教师 A 和 B 在课上或课前设置了探究异面直线公垂线的活动，为学生留出发现之白，学生能够找到公垂线，接下来，学生还需要证明所构造的这条直线与两条异面直线垂直且相交。以垂线法为例，虽然两位教师均让学生给出存在性的证明，但留给学生论证的机会有所不同。

教师 A 通过一问一答的方式，让学生给出证明，但对于学生不完善的表述，教师往往会急于抛出思考问题，并对问题作自问自答，此时，学生证明的思路是以教师为中心。

【教师 A 的教学片段】

师：请你证明刚刚同学摆出的直线 AB 与两条异面直线垂直且相交。

生：如图 1，可以看到同学找到的公垂线确实和两条异面直线相交。又因为过一条异面直线 a 作平面 α 的垂面 β，且公垂线在垂面上，所以公垂线垂直于平面 α。

师：为什么公垂线垂直于平面 α?

师：由面面垂直，且公垂线垂直于交线，由此可以推出线面垂直。

生：由线面垂直，有 $AB\perp l_2$，又由 $AB\perp l_1$，所以 AB 垂直于两条异面直线。

教师 B 先让学生自己给出存在性的证明，然后再对学生的表述进行完善和升华，在学生证明的过程中，教师未对学生的思路作过多的干涉，只在学生叙述完成后，对其中重点的思想方法进行总结和提炼，由此，学生不会被教师牵着鼻子走。

【教师 B 的教学片段】

师：请你证明 AB 是两条异面直线的公垂线（图 1）。

生：因为所作的平面 $\alpha\perp\beta$，且 $AB\perp l_4$，即 AB 垂直于 α 和 β 的交线，所以 $AB\perp\alpha$，则 $AB\perp l_2$、$AB\perp l_3$，又因为 $l_1//l_3$，所以 $AB\perp l_1$。

师：非常好，该生从面面垂直推到了线面垂直，这里实际上用到了面面垂直的性质定理。

此外，在证明异面直线公垂线的唯一性和最值性时，教师 B 再次放手将论证的机会留给学生，其中，对于学生不完善的证明，其余学生则会予以补充。可见，当教师给学生留出论证之白，通过学生思考、集思广益，学生完全有能力给出问题的完整证明。

3.4 问题之白

问题是数学教学的核心，我们不仅要培养学生分析和解决问题的能力，更重要的是培养学生发现和提出问题的能力。为此，教师可以在 HPM 的课堂中留出问题之白，基于教师设置的问题、命题、情境、思想、方法、工具等，让学生提出新的数学问题。

鳖臑出自《九章算术》商功章，古人将其视为最基本的立体图形，作为中华优秀传统文化的鳖臑，无疑可以在立体几何教学中发挥独特的价值，于是，教师 B 设置了如下例题。

如图 5，在鳖臑 $A\text{-}BCD$ 中，底面 BCD 为直角三角形，$\angle BCD$ 为直角，$AB\perp$底面 BCD，$AB = BC = CD = 1$。编制一道与异面直线间的距离有关的问题，并完成。

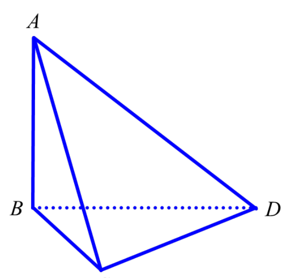


图 5 鳖臑 $A\text{-}BCD$

基于鳖臑模型，学生在课堂中依次提出了三道问题，且这三道问题的难度是循序渐进的。

问题 1：求 AB 与 CD 之间的距离。

问题 1 较为简单，学生能够由定义较快找到 AB 与 CD 的公垂线段 BC，进而得到两条异面直线的距离为 1。

问题 2： 求 AD 与 BC 之间的距离。

对于问题 2，有学生认为，在平面 ACD 中，过点 C 作 $CH\perp AD$，CH 是 AD 与 BC 的公垂线段，然而，假设 $CH\perp BC$，又由 $BC\perp CD$，得 $BC\perp$ 面 ACD，显然与事实不符。于是，教师将鳖臑放入正方体中再让学生进行思考（图 6），由此，学生取 BC 中点 F 和 AD 中点 E，找到并证明了公垂线段 EF。此外，教师还引导学生运用定义法构造公垂线段，或将两条异面直线的距离转化为 BC 到面 $AHDG$ 的距离。

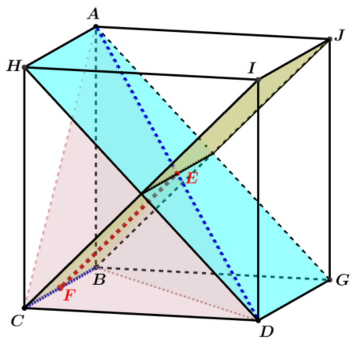


图 6 求 AD 与 BC 之间的距离

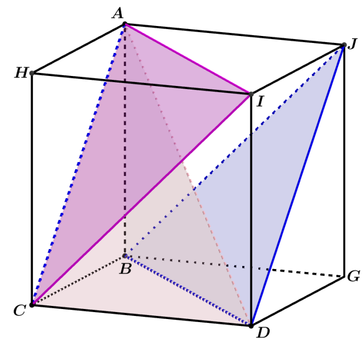


图 7 求 AC 与 BD 之间的距离

问题 3： 求 AC 与 BD 之间的距离。

问题 3 的难度较高，在教师的鼓励下，方有学生提出并尝试解答该问题。然而，大多学生未能通过定义法构造出公垂线段，于是，教师启示学生可以将该问题转化为求两个平行平面 ACI 和 JBD 间的距离（图 7），并让学生课后完成。

不难发现，学生提出的问题丰富多彩，不仅能让学生初步运用定义法或转化法计算异面直线间距离，回顾本节课所学的知识，同时，学生还能化身为小老师来出题和解题，活跃了课堂气氛，提高了数学学习的兴趣。此外，问题之白并没有因下课铃声的响起而结束，相反，学生还在课后继续完成问题 3（图 8）以及编制新问题（图 9），给学生以“食有尽而味无穷”之感。

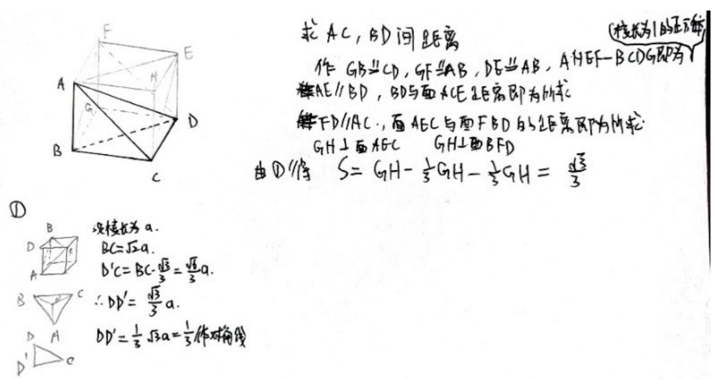


图 8 学生对问题 3 的回答

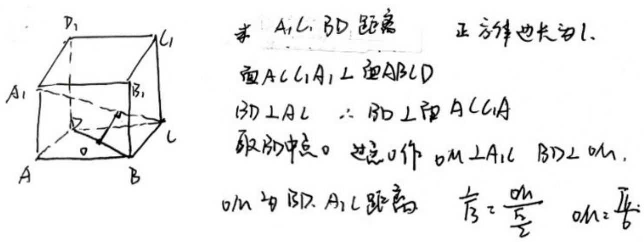


图 9 学生编制的新问题

在未来的教学中，教师可以有意识地设计课前、课中或课后的编题活动，给学生留出问题之白，以此培养学生的问题意识和能力。

3.5 超越之白

在数学教学中，教师不能仅仅满足于数学知识的传授，还需要将知识视为能力培养、思维训练、思想引领、精神哺育的载体，于是，教师可以将留白的内容延伸至数学知识背后的思想或精神，这既是对数学知识的升华，也承载着数学学科德育的目标。

在本节课中，教师 A 和 B 均在课堂小结环节留出超越之白。教师 A 把两条异面直线比作人生和梦想，虽然我们偶尔会觉得梦想遥不可及，但我们总会有距离梦想最近的时刻，以此鼓励学生要时刻胸怀理想，并向着更高的目标奋进。教师 B 分享了自己在学生时代学习异面直线间的距离的故事，表示当年只顾做题而忽视对方法的总结和思考，以此勉励学生能够在学习中勤加思考，以完善知识结构和人生。

两位教师还设计了数学写作作业，在课后留出超越之白，让学生从异面直线间的距离谈起，说说本节课学到的数学知识和思想方法，以及对今后数学学习的启示。对于教师 A 的学生，有学生感受到自己和先哲产生了微妙的联系，历史上的方法使其领略了逻辑的魅力，而数学家的探索精神给予其数学学习的动力，有学生表示小组探究活动让其意识到合作探究的重要性，还有学生表示为了追逐自己的梦想，努力的脚步要不断向前。对于教师 B 的学生，有学生表示通过借鉴历史上数学家的思想方法，有助于建立自己的数学体系，有学生表示可以运用信息技术进行数学探究，从而发现新的数学结论，还有学生表示数学学习中对知识的思考、转化和应用必不可少。

可见，学生能够体会到数学家的理性精神和创新精神，认识到小组合作、交流对数学学习的重要性，感悟到不同的人生哲理，这无疑补好了一项“超越之白”。

4 结论与启示

综上所述，在两节 HPM 课例中，教师以数学史为参照系，为学生留出发现之白、方法之白、论证之白、问题之白和超越之白，由此，学生能像数学家一样经历数学创造的过程，并出色地完成补白的过程。通过同课异构的课例比较与分析，我们得到以下启示。

其一，鉴史留白，设计探究活动。数学史为探究活动的设计提供了有效的切入口，以本节课为例，历史上数学家给出了多种构造异面直线公垂线的方法，于是，两位教师利用该内容设计探究活动，留出发现之白、方法之白和论证之白，学生或运用小棒找到公垂线，或在课前学习单上画出公垂线，最终学生通过实验几何给出多种构造方法，通过演绎几何给出存在性的证明。未来，教师可以有意识地基于不同的数学史料，设计不同的探究活动，为学生留出更多的白。

其二，放手留白，提供创造空间。在留白创造式教学中，教师可以基于学生的认知基础，为学生留出六白，而在补白的过程中，教师应切记补白的主体是学生而不是教师。为此，教师需要大胆放手，在抛出问题后，先耐心倾听学生对问题的理解，然后再对学生的表述进行完善或升华。我们相信，学生完全有能力回答教师提出的问题，甚至回答地比教师或历史上数学家更加精彩。

其三，问题留白，培养四基四能。在本节课中，教师 A 设计了封闭式问题，通过计算正方体中两条异面直线的距离，学生能够掌握异面直线间距离的定义，初步运用定义法和转化法计算异面直线间的距离，感悟类比、化归的数学思想，这将助力学生掌握基础知识、基本技能和基本思想方法，培养学生分析和解决相关问题的能力。然而，通过编题活动，教师 B 不仅达成了上述目标，还让学生积累了基本数学活动经验，培养了学生发现和提出问题的能力。可见，通过问题之白，有助于落实学生的四基四能。

其四，思想留白，启迪人生智慧。翻开历史的画卷，不同时空数学家往往对同一个主题都做出贡献，今天，我们将数学家的不同方法再现于课堂，不仅要让学生掌握其中的数学知识，更重要的是感悟知识背后所蕴含的思想方法，乃至人生哲理。例如，数学家追求卓越、不断创新，给出了异面直线公垂线存在性和唯一性的多种证法，体现了数学中的理性精神；将异面直线间的距离比作梦想，有助于给学生指引正确的人生方向。总之，教师可考虑以数学史或数学

知识为引，让学生在课上或课后思考内容背后的思想，即留出超越之白，这对于数学学科德育具有重要价值。

参考文献

[1] 杜方钰. 在求异面直线间距离的教学中培养学生的思维品质[J]. 数学教学研究, 1994(6): 7-9.

[2] 封家义. 强化思维 拓展思路——对求异面直线间距离的教学浅见[J]. 数理化学习, 2008(9): 11-13.

[3] 钱定国. 异面直线距离转化思路的形成——建构观指导下的一次教学实践[J]. 数学教学通讯, 2002(5): 36-37.

[4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 83.

[5] 汪晓勤, 邹佳晨. 数学史与留白创造式教学[J]. 数学通报, 待发表.

[6] Nyberg, J. A. *Solid Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1929: 312-313.

[7] Halsted, G. B. *The Elements of Geometry*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1885: 232-233.

[8] Keller, S. S. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1908: 144-145.

[9] Sanders, A. *Elements of Plane and Solid Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1903: 277-278.

[10] Bush, W. N., Clarke, J. B. *The Elements of Geometry*[M]. New York: Silver, Burdett & Company, 1905: 252.

他山之石

何时能够以少见多？探究无字证明中的补白

刘倩雯

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

Nelson 将无字证明定义为：隐含数学命题证明的图片或图形，可包括数学符号、记号与方程。图 1 是中国古代数学家刘徽关于直角三角形内切圆半径的无字证明，图中仅有图形、符号与方程，却隐含着关于直角三角形内切圆半径的证明。虽然大多数学者不承认无字证明是有效正式的证明方式，但是原文研究者认为无字证明是能够唤起学习者数学行为的学习资源。补白指的是学生为了意义建构对证明材料中感知到的空白添加信息的行为，本研究认为适当的空白可以刺激学生在证明建构中的数学参与。已有学者提出，在中学课堂上开展基于无字证明的活动可以培养学生的推理能力。基于此，研究者以补白理论为基础开展了为期 3 年的基于设计的研究，开发出基于无字证明的活动，并围绕“基于无字证明的活动是否能够促进中学生的证明建构”与“通过哪些设计原则能够使其促进证明建构”的问题对 144 名 10 年级为主的学优生进行了实证研究。

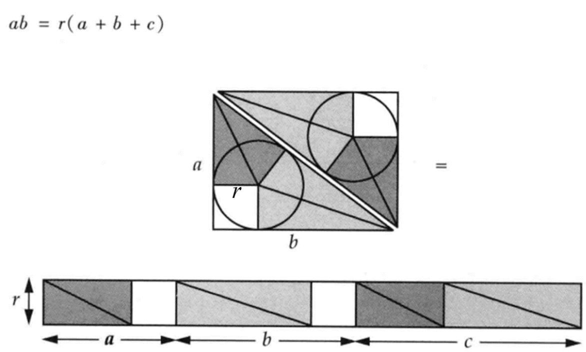


图 1 直角三角形内切圆半径的无字证明

1 研究问题

本研究在补白理论的基础上，通过回答以下研究问题来拓展关于无字证明潜力的研究：（1）中学生能否基于无字证明独立构造出证明？（2）学生识别和填补的空白有何特点？（3）无字

证明设计原则如何影响学生的补白行为？

2 研究方法

由于无字证明对证明的促进作用仍处于理论推测阶段，因此本研究采取基于设计的研究（Design-based research）范式以探究无字证明如何能够促进证明构造。具体而言，本研究设计了四个周期，每个周期由三个阶段构成。阶段一为设计教学实验，本阶段需要设定教学目标、选定无字证明、预设学生的结果、明确口头引导与相应的教学资源；阶段二为执行教学实验；阶段三为整理分析，本阶段需要分析学生的学习过程与结果，比较是否达成预期，再根据分析结果更新对理论与实际的猜想，并相应地计划下一周期。

本研究的研究对象如表 1 所示。

表 1 四个实验的参与学生

	教学实验 1	教学实验 2	教学实验 3	教学实验 4
人数	17	37	18	72
年级	10	10	11	10
特征	学优生（实验班）	学优生（实验班）	学优生（实验班）	学优生（分班后大部分分到实验班）

本研究中，证明的质量由识别与填补的空白数量刻画，对于不同的证明行为赋予不同的值。学生若识别并正确补白，则赋值为 1；学生若未识别空白，则赋值为 0；学生若部分识别空白或未正确补白，则赋值为 0.5。对于每一种空白，定义所有测试学生的补白分数的平均值为补白率。

3 研究结果

3.1 教学实验 1

在教学实验 1 中，研究者给予学生 5 个关于毕达哥拉斯定理的无字证明，并要求证出越多个越好，对于每个无字证明，小组交流讨论直至认为得出证明，再对下一个无字证明进行讨论。在实验中使用音视频记录，不要求学生书写完整证明。如果学生指出证明的中心思想，并在小组中达成共识，那么便认为该小组证明成功。

6 组学生对于 5 个无字证明的证明情况如下：6 组学生均成功证明“加菲尔德（Garfield）式无字证明（图 2）”；5 组成功证明“周髀算经（Chou Pei Suan Ching）式无字证明”；4 组成功证明“欧几里得（Euclid）式无字证明”；3 组成功证明“婆什伽罗（Bhāskara）式无字证明”；0 组成功证明“波彻（Böttcher）式无字证明”。因为加菲尔德式无字证明的可行性高，具备一定的挑战性，同时能够激发学生的补白行为，所以选定它作为后续研究对象。

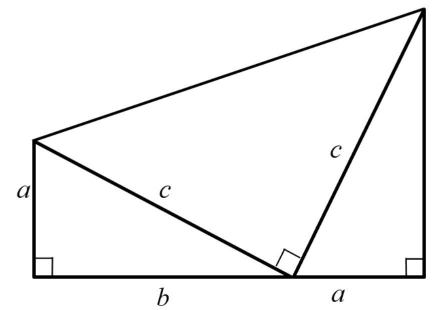


图 2 加菲尔德式无字证明

根据实验 1，建立起学生补白的行为列表，空白的类型主要包括：构造之白、图形性质之白、中心思想之白与一般化之白。具体的分析框架如表 2 所示，其中，G2 属于构造之白，G3、G4、G5 属于图形性质之白，G6、G7、G8 属于中心思想之白，G9 属于一般化之白。

表 2 期望学生在加菲尔德式无字证明中展现的补白行为

填白	补白行为的描述	填白组数
G1	识别出已知与待证命题	6
G2	阐述构造步骤（即梯形如何产生，可多种方法）	0
G3	证明两直角三角形全等（SSS/SAS）	6
G4	证明中间三角形为等腰直角三角形（计算角）； 若将中间三角形为等腰直角三角形视为条件，则要证明底边 a，b 共线	1
G5	证明整个图形为直角梯形（定义）	5
G6	意识到定理的证明可通过梯形面积的两种计算方式	6
G7	计算面积并写出等式	6
G8	化简得到结论	6
G9	解释基于这个特定图的证明可以被视为一般化的证明的原因	0

根据结果可以提出如下假设：（1）所有组都填补了证明的中心思想之白；（2）对于感受到

的不同图形性质之白，学生产生不同的证明行为；（3）学生未填补构造之白与一般化之白。

3.2 教学实验 2

教学实验 2 深入研究学生对加菲尔德式无字证明的补白行为，具体流程如下：首先，学生以小组形式合作交流，构造证明；其次，学生们独自撰写证明过程；最后，学生完成线上的无字证明在线测试。

由于在实验 1 中，学生将中间三角形为直角三角形视为给定条件，研究者猜测其原因是中间三角形的直角标记与已知条件的标记方式相同，因此在实验 2 中设置中间三角形直角标记为实线与虚线进行对照。同时，研究者担心学生过于专注中心思想而无时间处理细节的证明，因此设置了有无等式提示进行对照。基于此，实验 2 设置了四个版本的加菲尔德式无字证明，如图 3 所示。

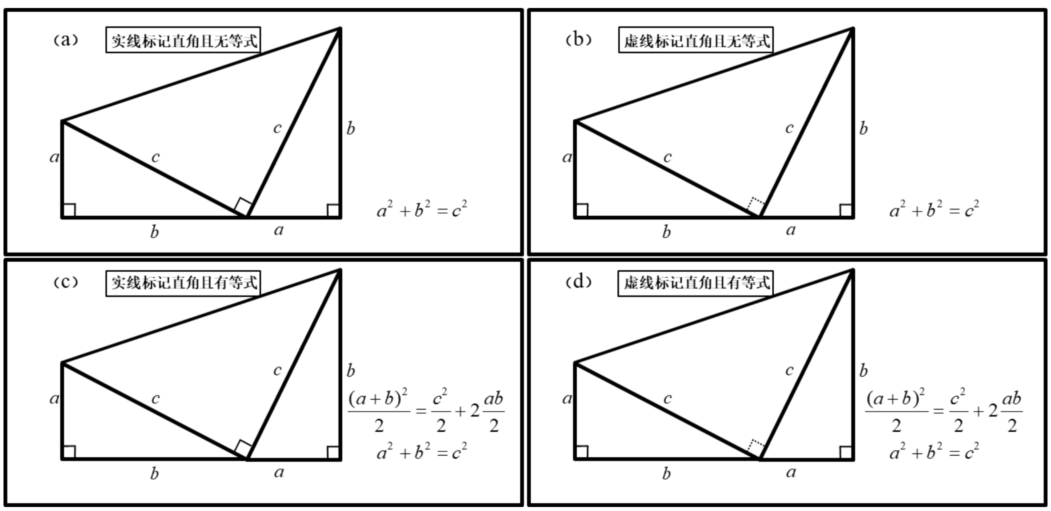


图 3 实验 2 中四版本的加菲尔德式无字证明

在执行了实验 2 后，发现学生在有等式提示版本中产生的细节性证明略少，但学生在四个版本中的补白率无显著差异。表 3 为学生在实验 2 中的平均补白率。根据表 3 可以得到学生对不同类型的空白的填补情况：（1）大多数学生填补中心思想之白；（2）约 20%的学生填补图形性质之白；（3）基本无学生填补构造之白；（4）无学生填补一般化之白。

表 3 实验 2 中的平均补白率

	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
实验 2 中的补白率（N=37）	0.02	0.17	0.18	0.24	0.92	0.89	0.78	0

研究者期望得到虚线标记直角版本的 G4，即为何中间三角形为直角三角形的补白率更高，但实际结果并不与期望相符。对此，研究者分析可能是因为虚实线区分度不够，因而进一步提出猜想：若不标记中间的直角，学生对于此图形性质的补白率是否会得到提高？

3.3 教学实验 3

前述实验得出猜想：学生更倾向于填中心思想之白，其次为图形性质之白，再次为构造之白，最后为一般化之白。为了探究学生补白特征的可推广性，实验 3 研究学生对波克（Burk）式无字证明（图 4）的证明情况。选择的原因有三点：第一，其展示了毕达哥拉斯的不同无字证明；第二，该证明的中心思想不同；第三，该证明显性地展现了一些构造过程。

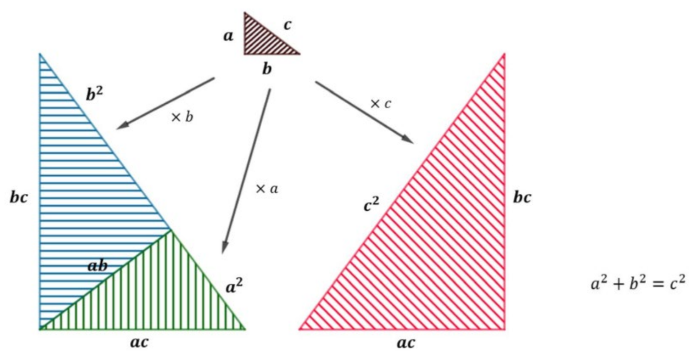


图 4 波克式无字证明

分析学生的补白率，发现学生仍然成功填补了中心思想之白，但未填补一般化之白。与前述实验结果不同的是，学生关于构造之白与图形性质之白的补白率都得到显著提高，对此得出无字证明的设计原则为：当无字证明未给出构造的步骤时，学生发现并填补构造之白的可能性较小，而当无字证明未展现出图形的性质时，学生发现并填补图形性质之白的可能性较大。

3.4 教学实验 4

基于前述 3 个实验得到的设计原则并结合相关文献，实验 4 重新设计加菲尔德式无字证明。具体而言，为了提高学生的补白率，在设计无字证明时要呈现构造过程、不凸显图形性质、改变并丰富图形语法（diagrammatic grammar），最终的设计成果如图 5 所示。

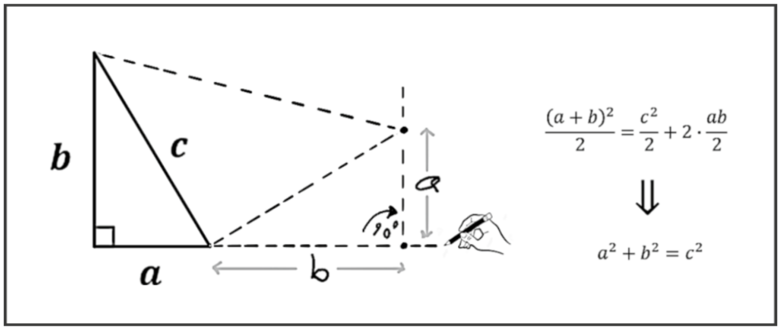


图 5 重新设计的加菲尔德式无字证明

比较实验 2 与实验 4 的平均补白率，得到的结果如表 4 所示。分析结果可知，部分补白率显著提高：当图形呈现构造步骤时，学生填补的构造之白更多；当图形不显性展现图形性质时，学生填补的图形性质之白更多，由此也验证了前述的两个设计原则。此外，值得注意的是，有学生在证明时采取了故事讲述的方式。

表 4 实验 2 与实验 4 的平均补白率

	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
实验 2 的平均补白率 (SD)	0.02（0.34）	0.17（0.23）	0.18（0.30）	0.24（0.43）	0.92（0.28）	0.89（0.24）	0.78（0.4）
实验 4 的平均补白率（SD）	0.34（0.48）	0.61（0.48）	0.50（0.47）	0.45（0.48）	0.94（0.22）	0.93（0.24）	0.91（0.25）
T 检验	$p<0.0001$	$p<0.0001$	$p<0.001$	$p<0.05$			
统计效应 Hedges' g	0.887	1.002	0.756	0.462	/	/	/

4 讨 论

文章讨论了三个问题，一是学生是否能够基于无字证明构造证明，研究发现：大多数学生都能够成功识别并填补无字证明的中心思想之白，但此结论可能局限于这一类无字证明。二是学生能够识别并填补的空白类型，研究发现：学生主要填补中心思想之白，但并未填补一般化之白，且当无字证明呈现构造之白时，学生更容易填补构造之白，而当无字证明不显性呈现图形性质时，学生更容易填补图形性质之白。三是无字证明的五个设计原则，包括：（1）中心思

想的可发现性，无字证明应提供必要且最少的能够体现中心思想的信息。若提供的信息过少，则会加大学生成功证明的难度；若提供的信息过多，则会剥夺学生自主探究、自主发现的机会。（2）条件已知与未知的可区分性，无字证明应区分证明的给定条件与其他条件。已有研究表明，如果一个证明的待证命题与该命题成立的条件未被明确表述，那么学生将不习惯该证明。本研究提出可以利用视觉上作图的不同方式来克服此困难，并通过实验 4 得到证实：当区分无字证明的条件时，学生关于构造之白的补白率得到提高。（3）构造的可视性，无字证明应包含构造步骤。已有研究提出，若不考虑图形是如何产生的，则无法将结论推广至一般，且本研究也证实了当呈现更多的构造信息时，学生更能够给出严格的证明。（4）图形性质的内隐性，无字证明不应该呈现或标记学生能够推出的图形性质。教师应该培养学生“自发”的智慧，而非“接受”的智慧，本研究证实了当无字证明中呈现的图形性质减少，学生更能发现并填补图形性质之白。（5）包含人类行为（Human agency），无字证明应该以人的数学活动形式展开。已有研究表明，抽象的、缺少人类行为的呈现方式会降低学生学习数学的兴趣，而包含人类行为的图形更容易激发学生的数学参与。

同时，本研究的价值体现于三个层面。在概念层面，本研究将基于无字证明的活动定义为一种新的证明活动，以促进学生的数学学习。在理论层面，本研究开发了补白的理论框架，以分析数学证明材料以及学生对其的表现。在教学设计层面，本研究基于补白理论阐述了五项无字证明的设计原则，以促进更多学生产生更详实的证明。

最后，文章提出关于无字证明与补白的未来研究方向。一是研究与补白相关的心理过程，二是探究可以确保学生识别空白的先决条件，三是研究补白行为在合作学习过程中的传播方式，四是探究后进生如何从无字证明活动中受益。

参考文献

[1] Marco, N., Palatnik, A. & Schwarz, B. B. When is less more? Investigating gap-flling in proofs without words activitie[J]. *Educ Stud Math*, 2022, 111(2): 271-297.

教师期望和教科书中的现实：应对法国新课程中的数学史及其对教师培训的影响

石 城

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

许多国际研究都关注将数学史融入数学教育。在过去的 20 年里，一些研究也提出了关于实施数学史与数学教育（HPM）课程和分析其教学有效性的理论。在 IREM（法国数学教育研究协会）内争论了数十年，数学史（HM）现在正式被引入法国课程。然而，这真的足以让教师养成在实践中运用数学史的习惯吗？为了回答这个问题，该研究首先展示了一份关于中学数学教师数学史运用现状的调查。这项调查想要比较教师的想法（“潜在的数学历史”）和课堂上的现实（“实际的数学历史”）。然后，作者聚焦法国高中数学教科书，描述了这些教科书中的数学史任务，探究它们作为引入历史视角的工具的有效性，重点是有关斐波那契的任务。最后，作者提出了一个从教科书出发，在数学教育中融入数学史的建议，旨在帮助数学教师重新设计教科书的任务，使其更有意义。

2 研究设计

2.1 研究背景

2019 学年年初，法国的数学教学经历了一次重要的教育改革。新的教学大纲首次明确和广泛地将数学史引入法国高中各年级的课程中，每一个教学部分都附有一段关于“数学史”的内容，为教师提供了一些历史元素。

该研究的作者 Marc Moyon 多年来一直在 IREM 框架内开设针对在职数学教师的数学史培训课程，这些培训课程的主要目的是通过引入历史的视角来帮助教师思考他们的教学问题。但现在面临新的挑战：如何说服所有高中数学教师在他们的教学中引入历史的视角？一旦他们被说服，就有必要向他们展示如何融入数学史要素。

2.2 研究问题

本研究的目的是探讨法国课程改革背景下数学史在数学教育的应用。以下三个问题给出了本文的结构。

（1）教师对于数学史主题的意图和教学现状是什么？

（2）课程改革对教科书中这些主题（特别是关于斐波那契）的设计有什么影响？

（3）如何使用和拓展教科书上的例子来支持教师的课程计划？

3 数学教师的表现与实践调查

为了更好地了解数学教师对数学史的理解情况，作者为数学教师建立了一份封闭式调查问卷，该问卷通过电子邮件分发给法国五大学校的初高中教师。该调查从 2019 年 3 月 1 日至 11 月，且与法国高中教育改革同时进行。该样本由 646 个教师组成，其中，初中教师 348 人，高中教师 298 人。

表 1 根据教师对问卷的回答，总结了教师在教学中融入数学史的频率。只有 16.2%的教师表示他们从未在教学中引入数学史（初中和高中教师之间的比例相当）。约 75%的教师（29.6%+44.9%）表示他们在一学年中将数学史引入教学 1-3 个小时。最后，9%的教师表示他们在每节课都引入了数学史。

表 1 数学史在数学教学中的应用频率

曾经在你的教学中应用数学史吗？	初中教师（N=348）（%）	高中教师（N=298）（%）	不区分学段（N=646）（%）
从不	14.9	17.8	16.2
偶尔，一年少于两节课	27.6	31.9	29.6
有时，一年两到三节课	48.3	40.9	44.9
总是，每节课	9.2	9.4	9.3

更进一步询问那些从未在教学中引入过数学史的教师（16.2%）时发现，近四分之三的人不希望跳过历史，不管他们是否对它感兴趣（如表 2）。数据不应被高估，因为关于数学史及其在数学教学中的应用的意见，教师知之甚少、没有经验，很可能只是表面结果。在所有被调查的教师中，只有略高于 4%（1.4% +2.8%）不希望在他们的教学中引入历史视角。教师对于

通过历史因素来思考教学方式是相当愿意的，甚至是热情的。但是课堂上的现实是什么呢？

表 2 从未在教学中介绍过数学史的教师的愿望和意图（N=105）

你对数学史感兴趣吗？你想在你的教学中介绍数学史吗？	从未在课堂上介绍过数学史的教师们（%）	占样本总体比例（%）
我不感兴趣，也不想要	8.6	1.4
我不感兴趣，但我想要	2.9	0.5
我感兴趣，但我不想要	17.1	2.8
我感兴趣，我也想要	71.4	11.6

如果问那些已经在课堂上介绍了数学史的教师的实践情况：80%的教师说他们从未让学生读过历史文本。84%的教师说，他们主要使用数学史作为引入教学的一部分，通过一个趣味故事让学生沉浸在历史背景中。数学史的其他用途可以忽略不计，即 6%用于历史问题，2%用于陈述或传记，1%用于家庭作业。他们都没有使用数学史建立证明来说明数学的有用性，或用于训练练习。

虽然数学教师愿意在教学中引入历史的视角是令人欣慰的，但事实上仍然还有很长的路要走。调查显示，部分教师对数学史的介绍似乎仅限于“历史片段”，而未能达到一定的教学深度。该文和一些 HPM 国际研究一样，都展示了教师的困难或他们的反对意见。根据反驳、反对或不情愿的性质，区分了以下三个主要类别。在这部分研究中，有 325 名教师没有提供回应。只有 321 名教师给出了答案，其中 164 名在初中工作，157 名在高中工作。表 3 按项显示了调查结果。

表 3 教师对关于 HPM 视角的不同命题的回答的分布（N=321）

	反驳、反对或不情愿	是	否	不确定
认识论：与数学的本质有关的反对意见	（E1）数学史不是数学	4.7	**86**	9.3
	（E2）数学史可能曲折和混乱的，而不是具有启发性的	14	43.3	42.7
	（E3）数学的进步是使解决困难的问题常规化：回顾没有帮助	3.4	**84.1**	12.5

教学：与 HPM 视角固有的困难有关	（D1）历史可能会滋生文化沙文主义和狭隘民族主义	3.1	**78.8**	18.1
	（D2）阅读原始文献是困难的。它并不能真正帮助学生理解数学	38.9	14.7	46.4
	（D3）没有足够的课堂时间来学习数学，更少有时间教数学史	48	35	17
	（D4）没有足够的、适当的资源和材料来帮助那些可能想要将数学史融入数学教学的老师	46.4	25.5	28.1
	（D5）教师缺乏信心源于缺乏在这方面数学教育的教学知识	51.4	17.8	30.8
一般的教学反驳和反对意见	（G1）许多学生不喜欢历史，因此不喜欢数学史	6	**66**	28
	（G2）许多学生认为历史与数学一样无聊	10.3	**52.3**	37.4
	（G3）学生需要更多的通史教育来理解历史背景下的数学实践和知识	12.8	**56.7**	30.5
	（G4）由于缺乏历史专业知识，教师缺乏信心	**74.2**	5.6	20.2
	（G5）在学生评价中没有明确涉及历史成分	35.2	39.6	25.2
	（G6）在数学课堂中运用历史并不能提高学生的学习成绩	12.1	**57**	30.9

从认识论的角度来看，教师对数学史有一致认识。首先，数学应该整合其自身的历史（E1）。然后作为推论，数学在教师看来显然是一门积累性的学科，它是在历史基础上构建的。因此，历史回顾对于构建知识是有用的（E3），即使历史的方法可能是曲折的（E2）。关于数学史的启发（E2），结果是不明确的（超过 40%的人不确定），这可能是因为存在教学困难。根据教师们自己的说法（D5 和 G4），超过一半的教师缺乏这方面的教学专业知识，近四分之三的学生缺乏历史知识。

从教学的角度来看，教师明确承认缺乏时间（D3）和资源（D4）去将 HPM 视角融入他们的实践中。对于在课堂上阅读原始文献的态度，几乎一半的人不确定，只有 15%的人认为，这种阅读可以帮助学生更好地理解数学，尽管这种活动第一眼看起来是困难的。被调查的教师认为，学生具有丰富的知识和技能，可以从数学史视角中获益（G1、G2、G3）。因此，将历

史思维引入数学教学，不存在与历史相关的先验障碍。然而，对学生的评估仍然是一个微妙的问题。即使教师普遍认为（57%）历史视角可以帮助学生提高他们的成绩（G6），其中三分之一的教师仍然对要构建的评估的性质感到困惑（G5）。

总之，似乎没有人提出对数学史真正的反对意见，更多的可以理解为不情愿和沉默。为了帮助教师深入理解数学史，该研究决定聚焦于教科书。

4 斐波那契：教科书中数学史的见证者

该研究对课程改革前后的法国教科书中的数学史任务进行先定量、后定性的研究，通过聚焦中世纪数学家斐波那契（13 世纪）和他的工作，揭示法国数学教育中关于数学史主题的新特征。

作者只考虑高中教科书（针对 16-18 岁的学生），这些教科书在法国高中数学课程改革前后修订过。改革前的教科书有 20 本（仅适用于有理科导向的学生），改革后的教科书有 35 本。

表 4 斐波那契的数学工作在数学教科书中出现的平均次数

	高一册平均（16 岁）	高二册平均（17 岁）	高三册平均（18 岁）	高中所有平均（16-18 岁）
改革前	0.5	2.83	1.62	1.5
改革后	1.2	2.8	1.53	1.8

该研究用 find function 扫描了电子文献库中所有教科书，在改革前的教科书中找到了 33 项与斐波那契有关的内容，在改革后找到了 63 项。为了比较改革前后数学教科书中斐波那契的存在情况，其将出现的次数除以所研究的教科书数量。表 4 给出了每种被研究的教科书的平均出现次数。在课程中融入数学史的要求似乎对斐波那契的例子没有显著影响，只在高中的第一年存在很大的差异。

表 5 六类任务及其属性

任务类型	属性结合
信息性的当前类型	联接现在+历史信息
作用于现在类型	联接现在+数学作用
信息性的过去类型	停留过去+历史信息

作用于过去类型	停留过去+历史信息+数学作用
个性化类型	停留过去+个性化+历史信息
提到类型	联接现在+个性化+数学信息+数学作用

作者进一步用定性的方法考虑数学史在数学教科书中的作用，运用修改后的 Schorcht 的分类方法，分析了所有相关片段（如表 5）。作者新添加了一种之前没有的类型——“提及”类型：只给出了一个名字（与现在有关），没有任何其他历史信息，它需要数学作用 （与数学建立联系）。因此，它明显与个性化类型不同。它联接现在，且需要数学作用，因而将被理解为作用于现在类型的一个子类别。

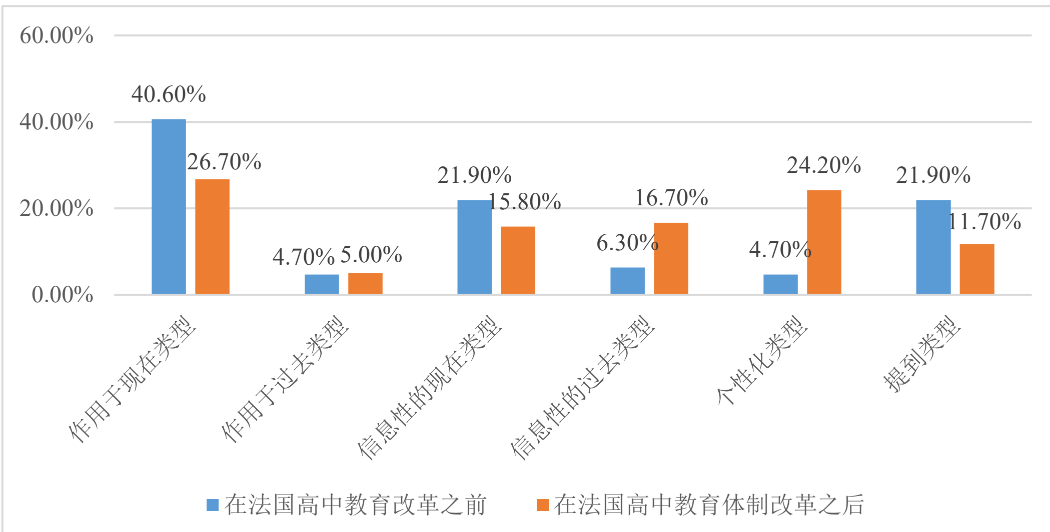


图 1 数学教科书中斐波那契相关任务的百分比比较

对于从教科书中提取的 96 项关于斐波那契的任务，根据表 5 对其进行了逐个分类，结果如图 1 所示。“提及”类型在课程改革前（21.9%）多于改革后（11.7%），这对“作用于现在”类型的数据有影响，前者包括在后者中。本研究表明，“作用于现在”类型的改革前 53.8%（改革后 43.7%）都是“提及”类型。在改革后，“提及”类型一般会转变为“个性化”类型（从 4.7%明显增加到 24.2%），这可能是由于作者愿意引入一些历史因素（传记或书目），直接在练习中或与之相关的特别附录中阐明历史元素。同样的想法也适用于“信息性的现在”类型，从 6.3%增加到 16.7%。比较“停留过去 （remain in the past）”和“联接现在（linked to the present）”两个属性发现，后者的数量明显提升。这一结果再次表明，作者希望在教学中引入更多的数学史，明确地将其与今天的数学或当前的公式联系起来。

5 向新的数学史任务的转变

作者继续考察教科书中的数学史任务，以便在数学课堂上融入数学史。作者寻求一种与当前科学史研究成果更相关的数学史，来达到更深层次的理解。通过这些例子，追求两个主要目标：促进数学的历史（history for promoting mathematics）、构建数学知识的历史（constructing mathematical knowledge）。

虽然斐波那契数和兔子问题在许多书中都有出现，但作者认为，它们被介绍得很糟糕，有时代错误。教科书给人的印象：斐波那契像今天的数学家那样思考和写作（如字母、数列和推理的使用）。为此作者提出两个转变。第一个转变，坚持阅读斐波那契的原始文本，并保留相关数学任务。第二个转变，通过引用其他历史资料，将斐波那契置于数学史和其他数学家之中，以呈现历史发展脉络。

作者设计了一个从中世纪手稿到现代数列概念的教学模块。以斐波那契为起点，遵循法国数学家爱德华·卢卡斯的历史探究，展示随着时间的推移，斐波那契的工作如何被继承和发展。学生可以更好地将数学思维和写作视为数学进化的工具。另一方面，通过提出斐波那契或卢卡斯等数学家在做什么，如何做、为什么做、在什么历史和文化背景下做，来帮助学生理解多样性在数学实践中的意义。

古埃及的荷鲁斯之眼是将一个分数分解为单位分数之和的例子，在《计算之书》中，斐波那契建立了一个将有理数分解为不同单位分数之和的算法。虽然斐波那契没有证明算法的有效性，但他给出了许多例子。

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{28}+\frac{1}{7}+\frac{1}{4},$$

$$\frac{5}{11}=\frac{1}{33}+\frac{1}{11}+\frac{1}{3},$$

$$\frac{11}{12}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}+\frac{6}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2},$$

$$\frac{7}{10}=\frac{2}{10}+\frac{5}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}。$$

可以在课堂上阅读斐波那契的原文，并向学生提出几个有关斐波那契算法的例子，难度逐渐提升。

在 19 世纪末，英国数学家詹姆斯·西尔维斯特进一步建立了他的方法：将有理数（在 0 到 1 之间）表示为有限个单位分数之和。它是六个世纪前斐波那契给出算法的一种现代表达方式。在他的文章中，西尔维斯特给出了两个例子，让学生尝试解答。

$$\frac{4699}{7320}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{60}+\frac{1}{3660},$$

$$\frac{335}{336}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{48}。$$

最后，在 1948 年，Erdős 和 Straus 推测：对于任何正整数 $n\geq 2$，每个分数 $\frac{4}{n}$ 可以写成三个正单位分数的和：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，其中 x，y，z 是正整数。这个猜想可以自然地扩展单位分数之和的工作。

单位分数、埃及分数、斐波那契-西尔维斯特算法、埃尔多斯-斯特劳斯猜想，这一发展轨迹展示了数学作为一种人类活动，是不断演进且活跃的（一个猜想必须作为一个未经证明的陈述呈现）。每个数学家都是建立在前人工作的基础上，改进结果，证明猜想，或提出新的问题。

6 结 论

作者对重写教科书的调查和建议确认了数学史的三个关键作用，即替代（replacement）、重新定位（reorientation）和文化理解（cultural understanding）。此外，作者提出，数学教师在根据教科书来融入数学史时所遇到的困难和挑战：数学教师在教育改革的背景下，如何能够利用教科书中的资源，适度对教科书中使用原始文献的任务进行转换；如何评价数学史融入数学教育的有效性。

因此，有必要向教师展示如何用经典材料（包括教科书）来教授数学史，并尽可能多地融入到他们的实践习惯中。采用以下职前和在职教师的培训模式是明智的：从培养在职教师使用数学教科书的教学习惯开始，教科书编写采用数学史原始文献，再让职前教师提出修改建议（从认识论知识和教学法的角度）。最后，根据所需的任务来设计融入数学史的教学材料。

参考文献

[1] Moyon, M. Desire of teachers and realities in textbooks: dealing with history of mathematics in the new French curriculum and its impact on teacher training[J]. *ZDM Mathematics Education,* 2022, 54(7): 1613-1630.

活动讯息

2022 年数学史与数学教育（HPM）工作室小学教研基地活动回顾

岳增成

（杭州师范大学经亨颐教育学院，浙江 杭州 311121）

经过为期一周的招募，HPM 工作室小学教研基地共招募到了来自 14 个省市的教研基地 33 个，覆盖了 200 余所学校的近 1000 余名教师，招募到了来自 18 个省市的网络研修基地成员 55 名。2022 年 4 月 30 日晚，教研基地启动仪式如期举行（图 1），工作室负责人汪晓勤教授就 HPM 的研究主题开展了讲座，各教研基地就如何开展小学 HPM 教研进行了讨论。

图 1 小学教研基地启动仪式

此前，10 个教研基地分两场活动对团队 HPM 视角下的实践研究活动进行了分享（图 2），此后教研基地开启了每两周一场的常态化教研活动，教研基地活动聚焦于专题研修，以线上的形式开展，每个专题有 2-3 个教研基地负责，各个团队分工合作对专题的历史、教材、学情进行系统分析，对核心知识点进行教学设计与教学，整个研修过程中，教研基地的专家与多个基地的名师全程参与指导，各个教研基地参与学习。目前 HPM 视角下的专题研修已开展 15 场（图 3），已对“小数的认识”“分数的认识与意义”“分数的分类与性质”“分数的运算”“比、比例”“圆”等六个专题进行了深度研修。

图 2 小学教研基地实践研究分享

图 3 HPM 视角下的专题研修

此外，多个教研基地开展了团队内部或更大层面的课例研究、课题研究等活动 100 余场（图 4-7），践行 HPM 理念的同时，传播了 HPM 理念。

图 4 杭州市 HPM 工作室小学教研基地基于数学史的“圆”的单元教研活动

图 5 长沙市一中金山桥学校数学文化节活动

图 6 长沙市一中金山桥学校数学史读书分享活动

图 7 合肥市新站区蔡辉小学数学名师工作室省级课题开题论证会