上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2020 年第 9 卷第 4 期

拉海尔作品《几何学寓言》(1649)

《上海HPM通讯》编委会名单

刊首新语

以史为线，串联知识

张佳淳 纪妍琳

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

随着一系列 HPM 课例的开发与发表，将数学史融入数学教学的实践越来越受到人们的关注。现有 HPM 视角下的教学案例大多针对某一个特定的数学概念、命题或公式，在教学中融入相关数学史。然而，数学史是一座巨大的宝藏，借助有些数学史料，可以将中学数学课程中多个不同知识点串联起来，用于不同学段、不同专题以及不同课型的教学。例如，古希腊三大几何难题及其相关解法就是中学数学知识的优质载体。学生在初中阶段就开始学习尺规作图，三大几何难题虽然属于不能用尺规作图解决的问题，但如果不严格限制于直尺和圆规，则有很多巧妙的方法，这些不同的解法涉及丰富多彩的中学数学知识。

所谓“化圆为方”问题，是指求作一正方形，使其面积等于一已知圆的面积。希波克拉底（Hipporates, 471B.C.? – 410 B. C.?）没有解决化圆为方的问题，但他解决了一个相关问题；安提丰（Antiphon, 480 B.C. – 411 B.C.）提出“穷竭法”，通过边数倍增的圆内接正多变形不断逼近圆面积，认为边数无限增加直至正多边形与圆重合，就可实现化圆为方；阿基米德（Archimedes，287B.C.-212B.C.）利用动点所成轨迹“阿基米德螺线”解决化圆为方；等等。

三等分角问题是指将任意一个角进行三等分。许多数学家借助已发现的平面曲线解决了三等分角问题。希皮亚斯（Hippias, 460 B.C. - 400 B.C.）通过构造割圆曲线实现了角的三等分；帕普斯（Pappus, 290? -350?）曾对两种用圆锥曲线解三等分角问题的方法给出了证明；阿基米德在圆中转化实现三等分角；帕斯卡（É. Pascal, 1588-1651）利用蜗线实现角的三等分；菲亚可夫斯基（Fialkowski, 19 世纪）则利用极限思想实现三等分角；等等。

倍立方问题是指求作一立方体，使其体积是一已知立方体的体积的两倍。希波克拉底将该问题归结为求两条已知线段的比例中项问题，许多希腊数学家沿着这一方向解决了倍立方体问题。例如，梅内克缪斯（Menaechmus, 380B.C.-320 B.C.）提出可以利用上述曲线的交点求得比例中项；毕达哥拉斯学派的阿契塔（Archytas, 428 B.C.-350 B.C.）用圆柱曲面、圆环曲面和圆锥曲面相交的方法求出任意两条线段的比例中项；等等。其中，较为简便实用的是柏拉图（Plato, 417 B.C.-347 B.C.）提出的用直角尺求得比例中项的方法。倍立方问题的研究促进了圆锥曲线理论的建立和发展。

所串联的内容可按知识所属类型分为概念、规则（包括公式、法则、性质、定理等）、思想、方法等，也可按不同专题分为代数、函数、几何、解析几何、三角函数、微积分、概率与统计等，适用的课型包括总结课、练习课、章头课等，还可利用诸如此类的数学史让学生绘制概念图或思维导图，这种方式既是对陈述性知识的提取，也是对相关范畴的认知结构的激活。

下面基于三大几何难题可串联的部分中学数学知识，为高三复习课创设从易到难，从熟悉到陌生的问题情境，复习高中不同课程主题中部分重要的内容。

情境 1：基本不等式

若将化圆为方的题目要求“面积相等”修改为周长相等的正方形、圆、任意矩形，则如何利用所学推导出三者的面积关系满足$S_{圆} > S_{正} \geq S_{矩}$？可由基本不等式推导出，涉及数形结合思想。

情境 2：几何概型

为了解决化圆为方问题，希波克拉底利用等面积法，证明了弓月形（两条圆弧围成的图形）面积等于等腰直角三角形面积，从而计算出曲边图形的面积，实现了把曲边图形转化成直边图形。借助这个图形设计几何概型问题的情境如下：套圈游戏中，若参与者站在直角三角形的直角顶点处抛出套环，奖品放置于弓月形中，则参与者在游戏中获得奖品的概率是多少？

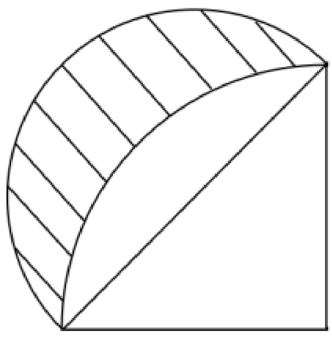


图 1

情境 3：数列与极限

为了实现三等分角，菲亚可夫斯基利用极限思想，如图 2，对$\angle TOT_0 = \alpha$，作出其角平分线 OT_1，则$\angle T_0OT_1 = \dfrac{\alpha}{2}$，依次作$\angle T_0OT_1$的角平分线 OT_2，$\angle T_1OT_2$的角平分线 OT_3，

$\angle T_2OT_3$ 的角平分线 OT_4，以此类推，无限地操作下去，则：

（1）写出 $\angle T_0OT_2$、$\angle T_0OT_3$、$\angle T_0OT_4$；

（2）$\angle T_0OT_n$ 的表达式是什么？

（3）为什么菲亚可夫斯的模型可以实现三等分角？

实际上，观察可得角的规律，通过数列求和可得：

$$\angle T_0OT_n=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{8}-\cdots+(-1)^n\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\alpha}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\angle T_0OT_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=\frac{\alpha}{3}$$

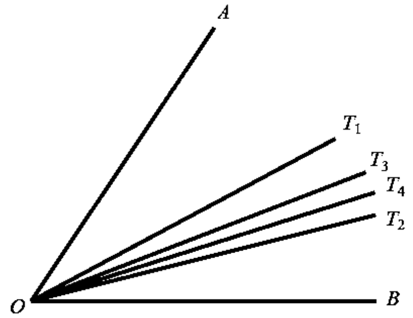


图 2

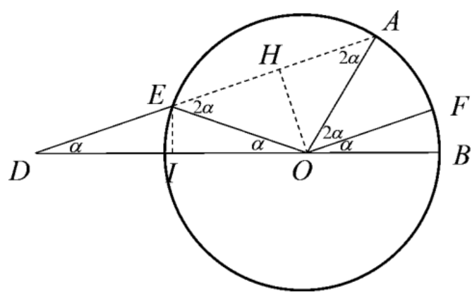


图 3

菲亚可夫斯基的解法中涉及角平分线、无穷递缩等比数列求和等中学数学知识和极限思想。

情境 4：三角函数

阿基米德则在圆中转化实现三等分角，如图 3，在单位圆 O 中，$DE=EO=OA$，且 $OF//AD$，则 $\angle D=\angle EOD=\angle FOB$，$\angle AEO=\angle EAO=\angle AOF=2\angle FOB$，如何利用图 3 推导二倍角的正弦公式？

过点 E、O 分别作 DO、EA 的垂线，垂足为 I、H，因为 $\Delta DEI\sim\Delta DOH$，则 $\dfrac{EI}{OH}=\dfrac{DE}{OD}$，即 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{1}{2\cos\alpha}$，则 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$。同理可得三倍角正弦公式，其过程涉及转化法、相似三角形的应用、三角函数等中学数学知识。

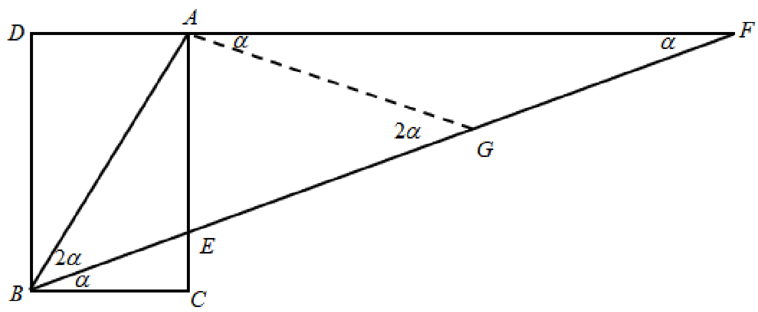
情境 5：圆锥曲线

不同于阿基米德在圆中转化，帕普斯选择在矩形中转化，他先通过代数关系找到三等分

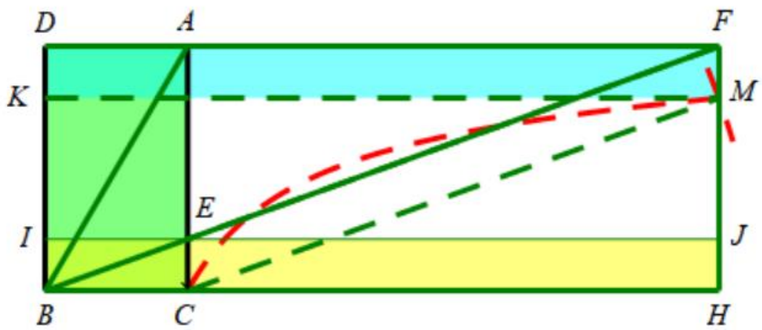
点，如图 4（1），假设 F 为三等分点，则 $\angle FBC=\dfrac{1}{3}\angle ABC$，四边形 $ADBC$ 为长方形，$AB=AG=GF=EG$，则 $\angle F=\angle FAG=\angle FBC$，$\angle AGB=\angle ABG=2\angle FBC$，从而实现三等分角。

接着寻求点 F 的作图方法，如图 4（2），通过 CM 平行且等于 $EF=2AB$ 确定点 M，再由 $CE=FM$ 确定点 F。若长方形 $ADBC$ 的面积不变为 m，A 点在 DF 上移动，周长改变，则点 C 点所成轨迹是什么？

利用“勾中容横，股中容横”原理，得到 $DA\cdot AC=DF\cdot FM$，以 DF 为 x 轴，DB 为 y 轴，则点 C、M 的坐标满足 $x\cdot y=m$，方程所表示的曲线为双曲线一支的一部分，从这个例子也可以知道双曲线不是只有标准方程一种形式。其中还涉及转化法、平行四边形性质、等腰三角形性质、勾中容横股中容直原理、双曲线、等面积法等中学数学知识。



（1）



（2）

图 4

倍立方问题同样与圆锥曲线有着非常紧密的联系。希波克拉底将问题归结为求两条已知线段的比例中项问题，即对一个棱长为 $2a$ 的立方体，在 a 和 $2a$ 之间确定 x 和 y，$a:x=x:y=y:2a$，用现在的数学语言来讲，就等同于同时解下列三个方程中的两个方程：

$x^2=ay$，

$y^2=2ax$ 和 $xy=2a^2$，前两个是抛物线方程，第三个是双曲线方程。

情境 6：相似三角形的应用

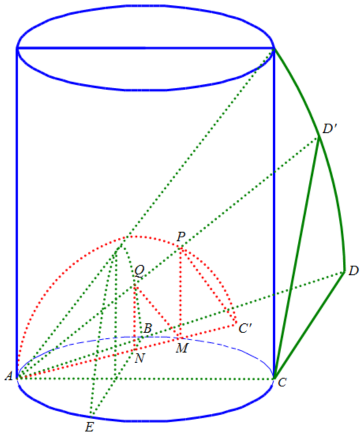


图 5

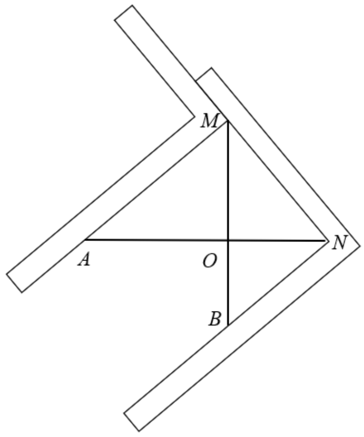


图 6

为了求得希波克拉底提出的比例中项，毕达哥拉斯学派的阿契塔用圆柱曲面、圆环曲面和圆锥曲面相交的方法求出任意两条线段的比例中项，如图 5，圆柱底面以 AC 为直径，AC=2a，取底面上一点 B 使得 AB=a，过点 C 作 CD 垂直于 AC 交 AB 的延长线于点 D，三角形 ADC 以 AC 为轴旋转一周则可得到圆锥曲面；垂直于平面 AEC、以 AC 为直径的圆绕 A 点所在的圆柱体的母线旋转一周得到圆环曲面。三个曲面交于点 P，如何证明 AP 为所求的比例中项？

点 P 在圆环曲面的截面 APC'上，则有$\angle APC'=90^\circ$，记点 P 在圆柱底面上的投影为 M，则$\Delta APC'\sim\Delta AMP$。过点 B 作圆锥曲面垂直于 AC 的截面 BQE，记点 Q 为半圆截面 BQE 与圆锥母线 AP 的交点，在面 BQE 中由射影定理可知$QN^2=BN\cdot EN$，在圆 $AECB$ 中由相交弦定理可知$BN\cdot EN=AN\cdot MN$，则$QN^2=AN\cdot MN$，再由勾股定理可证得$\angle AQM=90^\circ$，则易得$\Delta APC'\sim\Delta AMP\sim\Delta AQM$，则有$\dfrac{AC'}{AP}=\dfrac{AP}{AM}=\dfrac{AM}{AB}$，由 AC'=AC=2a，AB=a，可得 AM^3=2a^3，即 AP 为所求。阿契塔解决倍立方问题的过程中除了应用相似三角形的判定与性质，还涉及了射影定理、相交弦定理、勾股定理、圆锥、圆锥等中学数学知识。

柏拉图同样利用相似三角形的相关知识，用直角尺提出了更为简便实用的方法，如图 6，作线段 OA 与 OB 互相垂直，且使得 OA=2OB=2a，将两直角尺一边紧贴放置，移动两直角尺，使得顶点 M、N 分别落在 BO、AO 延长线上，此时比例中项是什么？

此时易得ΔAOM、ΔMON和ΔNOB两两相似，则有$AO:OM=OM:ON=ON:OB$，则$ON^3=2a^3$，OM、ON即为所求比例中项。

类似地，三等分角、二倍立方问题也可挖掘问题背景、不同的求解方法背后涉及的大量的中学数学知识，具体见表 1。

表 1 数学知识归类

三大难题	方法	中学数学知识	思想方法
化圆为方	改变问题的条件	基本不等式	数形结合
	希波克拉底转化法	三角形、圆面积 勾股定理 几何概型	等面积法
	安提丰穷竭法	三角形、圆面积	极限思想 化曲为直
	阿基米德螺线法	极坐标方程	轨迹思想
三等分角	帕普斯转化法	平行四边形性质 等腰三角形性质 “勾中容横、 股中容直”原理	转化法 等面积法
	阿基米德转化法	双曲线 相似三角形 三角函数	转化法
	菲亚可夫斯基	角平分线 等比数列求和	极限思想
二倍立方	希波克拉底转化法	等比数列	转化法
	梅内克谬斯	抛物线 双曲线	轨迹思想
	阿契塔	圆柱 圆锥 射影定理 相似三角形	轨迹思想
	柏拉图	相似三角形	—

因此，由某一主题的数学史料展开，将中学数学不同知识点串联起来，并应用于教学，可以为数学教学提供丰富的素材，有利于走出枯燥乏味、千篇一律、换汤不换药的题海战术的误区。学生能够在高度关联的情境中学习新知、应用知识解决问题，建立不同知识之间的纵向联系，从而加深对知识的理解；同时，数学课堂也因此散发文化的芬芳。

目　录

CONTENT

理论探讨

基于数学史的智能计算思维培养*

——以圆周率为例

李怡泉　朱树金

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

随着信息技术的迅速发展以及 21 世纪技能运动的普及，社会对人才的培养提出了新要求，智能计算思维（Computational Thinking，简称 CT）被视为 21 世纪的关键技能，是信息化社会中数字公民所应该具备的基本素养[1]，也是人工智能时代的独特能力要求[2]。许多国家十分重视智能计算思维的培养，国际教育技术学会（ISTE）和美国计算机科学教师协会（CSTA）认为，所有学生都应该在高中毕业时具备智能计算思维的基本技能，应将智能计算思维纳入正式教育[3]。国务院于 2017 年 7 月印发《新一代人工智能发展规划》，明确了新时代下人工智能发展的战略目标以及 AI 人才培养的竞争焦点[4]，这一文件的出台引发了教育界对于人工智能教学和编程教育下计算思维培养的关注，并将智能计算思维的培育从高等教育转向中等教育。

在过去的 20 年里，几乎所有与科学和数学相关的领域都出现了与计算相关的增长。例如生物信息学、计算统计学、化学计量学和神经信息学等越来越多的专业领域依赖复杂的计算机模拟和大量的数据分析来解决问题，这些学科在专业领域的迅速变化对数学提出了更高的要求[5]。智能计算在数学、科学以及技术、工程领域中重要性的提升已经得到了广泛的认可。将智能计算思维引入课堂将有助于学生对这些领域有更加深刻和广泛的认识，以及更好地为学生在这些学科领域工作求职做准备[6]。2016 年，蔡金法和徐斌艳首次提出将智能计算思维作为数学核心素养纳入数学课堂教学之中[7]。《普通高中数学课程标准》（2017 年版）指出，要培养学生的计算能力，让学生探究运算思路，设计运算程序，求得计算结果[8]。而智能计算思维与此核心能力有着密切相通之处，上述文件的出台为数学课堂培育智能计算思维提供了

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中如何落实立德树人根本任务的研究”（A8）系列论文之一。

理论上的支撑与实践层面的引领。

从教育学的角度来看，学生熟练地掌握计算工具和技能将有助于对数学学科内容的理解。反过来，数学的学习又为智能计算思维的应用提供了有意义的环境[9]。两者之间相互促进的关系，是将智能计算思维的培育与数学的学习结合在一起的核心[10]-[11]。这与将智能计算思维作为数学课程的一部分，单独进行教学有着明显的区别，学习的材料要与现实问题、生活应用相联系，充分利用数学的现实情境来丰富智能计算思维的学习。

2 数学中的智能计算思维

智能计算思维作为一个流行的术语在 20 世纪 80 年代开始广泛使用，Rapert 于 1996 年首次提出了智能计算思维的定义，然而在当时却并未引起研究者的注意，直到 2006 年，Wing 的论文发表以后，CT 才重新被研究者重视起来。Wing 认为，智能计算思维是利用计算机科学的基本概念解决问题、设计系统和理解人类行为[11]。对于 Wing 来说，智能计算思维被看成一种分析思维，涵盖了用来解决问题的数学思维[12]。英国皇家学会认同这种基于计算机科学的定义，将其定义为：识别我们周围世界中计算的各个方面的过程，并应用计算机科学的工具和技术来理解和推理自然信息系统和人工信息系统的过程[13]。

在此之后，Cuny 等研究者提出了一种新的定义：计算思维是在提出问题及其解决方案时所涉及的思维过程，使解决方案以一种可以由信息处理代理有效执行的形式表现出来[14]。Guzdial、Aho、Mannila 等也认为智能计算思维是像计算机一样的思考方式[15]- [17]。在类似的观点下，Voogt 等人认为，智能计算思维可以被视为解决问题的思维过程，包括将这一过程推广并应用于其他领域的不同问题[18]。此时智能计算思维的定义不再局限于实践中是否需要计算机的应用，而强调是一个思维过程。美国国际教育技术协会（ISTE）与计算机科学教师协会（CSTA）通过借鉴现实世界中计算思维的实例，提出了一个具体的、可操作的定义，为这个术语的含义提供清晰和具体的解释，此时智能计算思维的定义还强调要通过抽象和概括的方式将问题转化为更加一般问题进行求解[19]。

已有的智能计算思维的概念往往是基于计算机科学提出，很少有专门针对数学或者是数学教育提出的定义。Weintrop 通过大量的文献分析、专家访谈、数学课堂教学观察及其编码分析，提出了基于数学和科学的智能计算思维的定义，并且对这一概念所包含的要素进行了更为具体的划分。他认为，CT 可以分为系统思维的实践、数学模拟的实践、数据实践和基于计算机的问题解决四个维度，并对每个维度的诸要素进行了界定[20]，见表 1。

表 1 数学中智能计算思维的要素分类

数据实践	数学模拟的实践	基于计算机的问题解决	系统思维的实践
收集数据	使用计算模型理解概念	为计算解决方案转化问题	整体上考察复杂系统
构造数据	使用模型寻找和检验方案	计算机编程	理解系统内部关系
操作数据	评估计算模型	选择有效的计算工具	分层思维
分析数据	设计计算模型	评估不同的解决方案	交流系统信息
可视化数据	构建计算模型	开发求解模块	定义系统和管理复杂性
		生成计算抽象	
		故障诊断和调试	

数据实践是指收集、构造、操作、分析和可视化数据。主要表现为运用计算机或者其他工具来收集数据；对于一些不容易观察或测量的现象，用计算机来模拟生成数据；为了使数据更有意义，需要用计算机对数据进行人为的处理，包括对数据进行分类、筛选、标准化等；使用计算机分析数据并得出相应的结论；使用计算工具将得出的结论或信息可视化呈现，促进信息的分享。

数学模拟的实践是指使用计算模型理解概念、使用模型寻找和检验方案、评估、设计、构建计算模型。主要表现为使用模型来促进学生对于数学概念的理解；通过计算模型发现、测试和证明特定解决方案；建立模型之后需要对其进行评估，比如现象的哪些方面被模型建构了，哪些方面被简化或者忽略了；设计的模型是对现象的简化，可能需要大量的决策，决定模型应该涵盖什么、忽略什么，设计的模型要能够确保完成最初设定的目标；用计算机可以理解的方式对模型特性进行编码。

基于计算机的问题解决是指为计算解决方案转化问题、计算机编程、选择有效的计算工具、评估不同的解决方案、开发求解模块，生成计算抽象、故障诊断和调试。主要表现为将问题构造成可以利用计算工具解决的形式；以计算机能够执行的方式对指令进行编码；权衡各种计算工具的利弊，选择最有效的计算工具；当存在多种解决问题的方案时，要根据问题的需求和现实的约束条件来评估方案；问题的解决需要很多个步骤时，要开发模块化、可重复使用的组件帮助完成解决方案；用更一般的术语表示问题解决的过程，能够将这一过程应用到其他领域的不同问题；模型设计好以后，要对故障进行排除，调试模型，使模型能按照预期运行。

系统思维的实践是指整体上考察复杂系统、理解系统内部关系、分层思维、交流系统信

息、定义系统和管理复杂性。一个系统可以看成许多相互关联的元素组成的实体，对于某些问题而言，要研究整个系统是如何工作，并非研究每个单独的元素；而有些问题则需要了解系统中各个组件是如何交互的；有时候还需要从不同的角度理解和分析系统，从系统中最小元素的微观级别到将系统看成一个整体的宏观层次；还需要对系统特性进行优先级排序，突出系统中最重要的方面，用直观的方法来表示它，便于他人的理解；创建的系统必须包含所有必要元素，这样能够限制其大小、复杂性同时实现预期目标。

3 基于数学史的课堂活动设计

如何通过课堂教学培养学生的智能计算思维能力是各学科教学所面临的共同问题。在许多学科中，已经体现出了对学生智能计算思维能力的培养。Lye、Koh 等通过编程的课程来培养学生的智能计算思维[21]。类似地，Moreno-Leon、Robles 通过系统地分析关于 Scratch 编程教学和相关技能开发的论文，发现在发展学生智能计算思维上，9 篇文章中有 7 篇认为学生通过学习编程来发展他们的问题解决能力、逻辑思维和创造力[22]。Brown 借助游戏《愤怒的小鸟》使用视频转录软件和计算分析工具来帮助学生理解动量守恒、计算引力常数等，培育学生的智能计算思维[23]。

已有的研究往往基于计算机、科学课程培育学生的智能计算思维，缺少基于数学课程对学生智能计算思维的培育。事实上，无论是在课堂教学的具体环境中，还是使用交互式软件进行学习，某一个特定的任务或者问题很难同时覆盖到智能计算思维能力的四个维度[24]，只能侧重于某一个或者几个维度。Wing 认为，CT 中最重要和高层次的思维过程是数学抽象[12]，类似的，Aho、Selby 等认为，数学抽象与计算模型的建构处于 CT 的中心[16][25]。这正与数学培养学生的核心能力有着相通之处，数学史上影响深远的算法、数学家抽象问题的方式、数学家对于模型的建构为我们培养智能计算思维提供了很好的素材。因此，将数学史融入数学教学，是培育 CT 的理想途径。

我们以圆周率为例，说明如何根据数学史来设计教学活动，以达到培养学生智能计算思维的目的。

3.1 史料分析

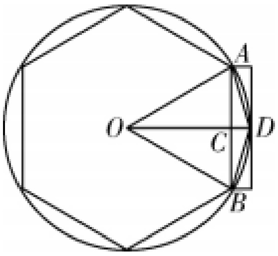
3.1.1 割圆术

我国汉代以前，圆周率往往取“周三径一”，东汉时期，张衡从圆的外接正方形入手研究

圆周率，魏晋时期，刘徽首创“割圆术”，得到了更为精确的圆周率近似值。如图 1，在半径为 R 的圆中作圆的内接正六边形，以正六边形的每一边为底，分别作顶点在圆周上的等腰三角形，得圆内接正十二边形。再以正十二边形的每一个边为底，作圆内接正二十四边形，以此类推。设圆内接正 n 边形的面积和周长分别为 A_n 和 C_n，边长 $AB=a_n$，$AD=a_{2n}$，则有

$$a_{2n}=\sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2+\left(R-\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}\right)^2}$$

$$A_{2n}=\frac{1}{2}na_nR=\frac{1}{2}C_nR$$



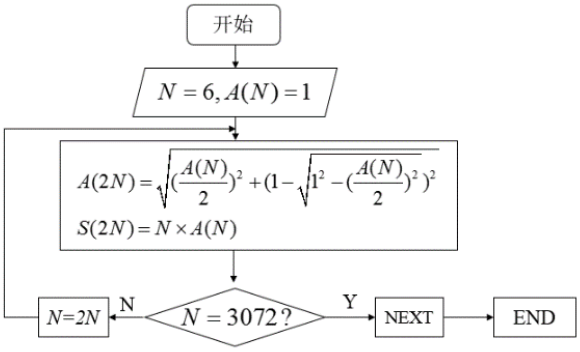


图 1 刘徽割圆术示意图　　　图 2 计算圆周率的程序框图

当圆内接正多边形的边数越来越大时，其面积 A_n 越来越逼近圆的面积 A。刘徽说：“割之弥多，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣。”用今天的符号来表达，即

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}C_nR=\frac{1}{2}CR=\pi R^2。$$

刘徽从 $a_6=R=1$，依次计算 a_{12}，a_{24}，a_{48} 和 a_{96}，相应计算 A_{12}，A_{24}，A_{48}，A_{96} 和 A_{196}，得到圆周率近似值 $\frac{157}{50}$。

割圆术在计算圆周率的过程中，运用了循环结构。图 2 是计算到 3072 边形的程序框图，割圆术也可以很方便地用计算机语言实现(PYTHON 3)：

```
import numpy as np
def liuhui(n)：
        a = np.zeros(n+2)
        a［0］= 1
```

```
        for k in range(n+1):
    a［k+1］=np.sqrt(2-np.sqrt(4-a［k］＊＊2) )
        return(print( '圆的内接正 6* 2^n 边形的边长为: ',
    a［n］)，print( '圆周率的近似值为: '，3* 2＊＊n* a［n］) )
```

3.1.2 布丰投针实验

布丰投针问题是 1777 年由法国数学家布丰（G. Buffon, 1707-1788）出，第一次运用概率的方法求出了 π 的近似值，后来这种方法发展成为利用计算机模拟解决数学和物理问题的重要方法之一—蒙特卡罗法（MC）。在布丰投针问题中，平面内有等距的平行线，假设平行线之间的距离 d，然后多次地将一根长为 a 的针随机投掷在纸上（$a<d$），记录并计算针与平行线相交的频率 $\frac{n}{N}$。布丰通过几何概型证明：针与平行线相交的概率为 $P=\frac{2a}{d\pi}$。当实验次数很大时，频率 $\frac{n}{N}$ 就接近于概率 p，由此就可计算出 π 的近似值了。

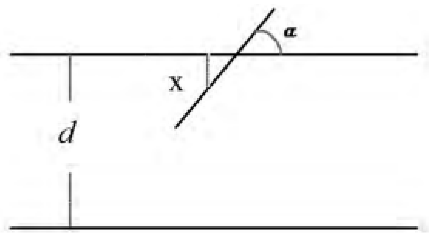


图 3 布丰投针示意图

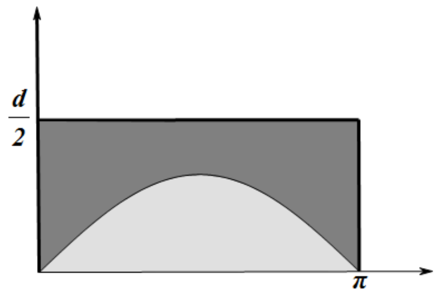


图 4 面积之比示意图

设将长度为 a 的针投向一组距离为 d 的平行线中（如图 3），用 x 表示针的中点到一条最近的直线的距离，其夹角为 α，则 (α,x) 可以看成矩形区域，$S=\{0\le\alpha\le\pi,0\le x\le\frac{d}{2}\}$，$x\le\frac{1}{2}a\sin\alpha$ 为相交条件，按这个条件在矩形区域 S 画出一块区域 G。布丰投针实验是将每一次实验都看成是在矩形 S 中的一次随机落点，而落点恰好在区域 G 之内的概率，即区域 G 与区域 S 的面积之比（如图 4），记为 P。

$$P=\frac{S_G}{S_S}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{1}{2}a\sin\alpha d\alpha}{\frac{d\pi}{2}}=\frac{2a}{d\pi}$$

设投针的次数为 N，相交的次数为 n，根据大数定律，当实验次数很大时，针与平行线相交的频率 $\frac{n}{N}$ 就接近于这个理论概率值 $\frac{n}{N}\approx\frac{2a}{d\pi}$，于是投针实验就和圆周率联系起来了，如果 $d=2a$，则有

$$\pi \approx \frac{1}{P} = \frac{N}{n}$$

布丰投针实验也可以很方便地用计算机来实现（R 语言）：

```
buffon<-function(n,a,L){
  m<-0
  for (i in 1:n) {
    x<-runif(1)*a
    theta<-runif(1)*pi
    if(L*sin(theta)>=x){m=m+1}
  }
  #估算概率
  p<-m/n
  #估算 pi
  pie<-2*L/(a*p)
result<-c('估计概率'=p,'pi 估计值'=pie);result
}
buffon(10000,1,0.8)
```

3.2 问题情境

教师呈现问题情境：在日常生产活动中，人们需要知道在车轮直径一定的情况下，要用多少长度的木条才能做出符合要求的轮子，久而久之，人们知道了轮子转一圈的长度和其直径之间有着某种联系。“周三径一”，此记载最早见于《周髀算经》。三国时代，魏晋数学家刘徽创造割圆术，割圆的目的是求圆的面积，通过等分圆周，构造圆内接正多边形，在不断增加圆内接正多边形的边数基础上，用圆内接正多边形的面积逼近圆的面积。

在 18 世纪中叶的某一天，法国博物学家、数学家布丰在请人做客时，将一张画着一组等距离平行线的纸铺在桌子上，让客人把一堆每根长为平行线距离一半的小针一根根往纸上扔，最后，数出扔针 2212 次，其中与平行线相交 704 次，$2212 \div 704 \approx 3.142$，由此得到了圆周率的估计值。

教师带领同学们思考刘徽和布丰是如何计算出圆周率的估计值。

3.3 分解问题

在经过一段时间的思考后，部分学生已经有了自己的答案和解决问题的办法。在学生操作的过程中，无论采取何种方法，都先会将问题进行分解。对于刘徽的割圆术，学生可能对会从圆内接正四边型开始，也有的同学可能会选择从圆内接正三角形开始，通过倍增圆内接正多边形的边数，用圆内接正多边形的面积逼近圆的面积，从而求得圆周率的近似值，随后教师介绍刘徽的割圆术原理。

在这个环节最重要的将问题进行分解以后循环结构的建立，即通过正六边形的周长推导正十二边形的面积，通过圆内接正六边形的边长推导圆内接正十二边形的边长等。这样分解以后的每一个小步骤、小目标可以更好的被理解，可以通过自动化、简单的算法解决。智能计算思维要求学生能够设计算法和程序来解决问题，但这种“算法”更多是代表一种“规则”和“程序”。即使数学课堂不教授算法、编程，只需要让学生明白算法代表的是一种“程序”和“规则”，学生运用现有的递推关系，就可以一步一步求得结果。

3.4 建立算法与程序

教师带领学生，将上一个步骤中的递推关系抽象成循环语句，并用程序框图表示，随后教师将源代码发给学生，让学生在计算机上进行操作，最后求得圆周率的近似值。

智能计算思维常被用于解决那些由于人类思维的局限性所造成的无法独立解决的问题。用割圆术求圆周率，很显然完全凭借人类思维不可能算出圆周率的精确值，也没有必要，但是我们可以通过计算机轻松的算出近似值，想通过这个活动使学生认识到人的思维过程与计算机的自动化过程之间的共性与差异。教师还可以引导学生思考，在人工智能的时代，计算机可以帮助我们干很多事情，那么到底哪些任务是我们人必须要做的，哪些我们可以借助机器完成。

介绍完古典法求圆周率以后，教师介绍用布丰投针实验的原理（不做要求），随后教师利用 R 语言编写的小程序，现场模拟投针实验（如图 5）。在程序中，按空格来反复投针，用 y 来结束实验，可以观察到当试验次数增加，估计值也随之接近真值。

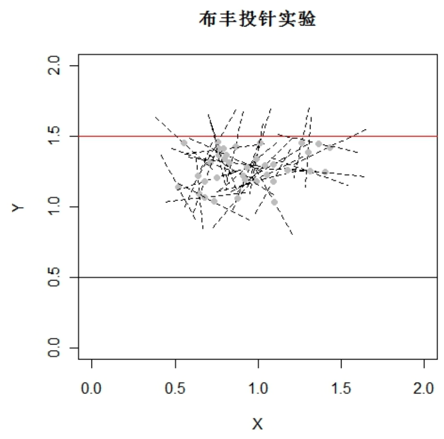


图 5 布丰投针模拟实验

对于概率的教学而言，建立模型可以直观、生动的显示出模拟过程，及时的统计并显示出相关数据，突出现象的本质特征。现场模拟投针实验后，教师将源代码发给学生，学生自己在电脑上进行模拟操作。在传统数学教学中，学生往往要学过微积分和概率论等相关知识，才能够理解布丰投针实验的基本原理。但是在智能计算思维的概念下，可以依据学生当前的知识储备，帮助学生对一个数学概念形成该知识储备应有的理解。如果学生没有学过概率论与微积分，在此环节，可以进一步的将这个过程抽象为“$\pi \approx$总投针的次数$\div$相交的次数”这样的数量关系，利用电脑来模拟上千次的实验，通过实验结果对问题进行描述。

智能计算思维的教学与传统数学教学相结合，让原本不易理解和接受的数学知识、概念，通过数据模拟、建模、算法编写、计算机的实现一系列活动更好的被学生掌握，反过来，教学活动的开展又为智能计算思维的应用提供了有意义的环境，培育了学生各个维度下智能计算思维的能力。

3.5 智能计算思维能力分析

数据实践维度，布丰投针实验中，通过利用小程序模拟投针实验，使用计算机收集模拟的数据，使用计算机分析发现，当实验次数逐渐增加时，得出圆周率π的估计值越来越接近真值，最后将模拟的整个过程以图像的形式可视化呈现。体现了收集、构造、分析和可视化数据四个方面的能力。

数学模拟的实践维度，在布丰投针实验中，通过建模将投针实验与圆周率联系起来，演示投针实验现象的模型，加深学生对于概率内容的深入理解。在建立布丰投针实验的数学模型时，只涵盖必要的元素，并用 R 语言对其编码。体现了使用计算模型理解概念、设计、构建计算模型三个方面的能力。

基于计算机的问题解决维度，无论是刘徽的割圆术还是布丰投针实验，我们最终都将问

题构造成可以利用计算工具解决的形式，通过编写程序，利用计算机辅助我们解决问题。在刘徽的割圆问题上，我们运用了模块化、可重复使用的组件——循环结构，体现了为计算解决方案转化问题、计算机编程、开发求解模块三个方面的能力。

系统思维的实践，对于刘徽的割圆术，我们不仅进行了数学建模，还将边长和面积的递推关系用流程图进行表示。布丰投针实验中，我们将投针和圆周率之间的关系建立数学模型，编写成直观、容易理解的小程序，用可视化的手段突出了整个系统中最重要的部分，方便他人理解。与此同时，我们建构的模型只涵盖了问题解决的必要元素，即控制了整个系统的复杂程度又能实现预期目标。体现了交流系统信息、定义系统和管理复杂性两个方面的能力。

4 结语

在课堂教学中，智能计算思维的培养不应该独立于正常的教学内容之外，可以采取与传统数学教学相结合的方式。通过数据模拟、建模、算法编写、计算机的实现一系列的活动促进学生对于数学学科内容的理解，在实际操作过程中发展学生的智能计算思维。这种培养模式为传统数学课堂中智能计算思维的培育，提供了一个很好的思路。

数学史为学生智能计算思维的培育提供了很好的素材，但是目前用于培育智能计算思维的史料还比较少，期待未来有更多相关的数学史研究。我们有理由相信，通过深入挖掘和恰当运用合适的数学史料，可以更好地培育学生的智能计算思维能力。

参考文献

[1] Freeman, A., Adams Becker, S., Cummins, M., Davis, A., & Hall Giesinger, C. NMC /CoSN Horizon Report: 2017 K-12 Edition. Retrieved November 12, [DB/OL]. https://cdn.nmc.org/media/2017-nmc-cosn-horizon-report-k12-EN, 2020-03-23.

[2] 王本陆，千京龙，卢亿雷，张春莉. 简论中小学人工智能课程的建构[J]. 教育研究与实验, 2018(4): 37-43.

[3] ISTE. CT leadership toolkit[DB/OL]. http://www.iste.org/docs/ctdocuments/ct-leadershipt-toolkit.pdf?sfvrsn=4, 2020-03-23.

[4] 国务院. 2017-07-20. 新一代人工智能发展规划[EB/OL]. http: //www.gov.cn/zhengce/content/2017-07/20/content_5211996. Htm, 2020-03-23.

[5] Bailey, David H. and Jonathan M. Borwein. Exploratory experimentation and computation[J]. *Notices of the American Mathematical Society*, 2011, 58(11): 1410-1419.

[6] Augustine NR. *Rising Above the Gathering Storm: Energizing and Employing America for a*

Brighter Economic Future[M]. Washington, DC: National Academies Press, 2007.

[7] 蔡金法，徐斌艳. 也论数学核心素养及其构建[J]. 全球教育展望，2016(05): 3-12.

[8] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版）[M]. 北京：人民教育出版社, 2018.

[9] Wilensky U, Brady C, Horn M. *Fostering computational literacy in science classrooms*[M]. Communications of the ACM 2014(08):17–21.

[10] Sengupta P, Kinnebrew JS, Basu S, Biswas G, Clark D. Integrating Computational Thinking with K-12 Science Education using Agent-Based Computation: A Theoretical Framework[J]. *Education and Information Technologies*, 2013, 18(2): 351-380.

[11] Hambrusch S, Hoffmann C, Korb JT, Haugan M, Hosking AL. A multidisciplinary approach towards computational thinking for science majors[J]. *SIGCSE bulletin*, 2009, 41(1): 183-187.

[12] Wing, J. M. Computational thinking and thinking about computing[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2008, 366(1881): 3717–3725.

[13] The Royal Society. Shut down or restart? The way forward for computing in UK schools[DB/OL]. http://royalsociety.org/uploadedFiles/ Royal_ Society_Content/education/policy/computing-in-schools/2012-01-12-Computing-in-Schools, 2020-03-23.

[14] Wing, J. M. Computational Thinking: What and Why?[J]. *Link Miagazine*, 2010.

[15] Guzdial, M. Education: Paving the way for computational thinking[J]. *Communications of the ACM*, 2008, 51(8):25–27.

[16] Aho, A. Computation and computational thinking[J]. *The Computer Journal*, 2012, 56(7): 832–835.

[17] Mannila, L., Dagiene, V., Demo, B., Grgurina, N., Mirolo, C., Rolandsson, L., & Settle, A. Computational thinking in K-9 education[J]. *Proceedings of the working group reports of the 2014 on innovation & technology in computer science education conference*, 2014(06):1-29.

[18] Voogt, J., Fisser, P., Good, J., Mishra, P., & Yadav, A. Computational thinking in compulsory education: Towards an agenda for research and practice[J]. *Education and Information Technologies*, 2015, 20(4): 715–728.

[19] ISTE & CSTA. Computational thinking teaching in K-12 Education: teacher resources, s econd edition [DB/OL]. (2011). http://csta.acm.org/ Curriculum/sub/CurrFiles/472. 11CTTea cher Resources_2ed-SP-Vf, 2020-03-23.

[20] Weintrop D, Beheshti E, Horn M, Orton K, Jona K, Trouille L & Wilensky U. Defining computational thinking for mathematics and science classrooms[J]. *Journal of Science Education and Technology*, 2015, 25(1): 127-147.

[21] Lye, S. Y., Koh, J. H. L. Review on teaching and learning of computational thinking through programming: What is next for K-12?[J]. *Computers in Human Behavior*, 2014(41): 51–61.

[22] Moreno-León, J., Robles, G., & Román-González, M. Comparing computational thinking

development assessment scores with software complexity metrics[C]. *IEEE Global Engineering Education Conference, EDUCON,* 2016, 10-13:1040-1045.

[23] Brown D, Tracker: video analysis and modeling tool (Version4.82)[DB/OL]. http://www.cabrillo.edu/*dbrown/tracker, 2020-03-23.

[24] 蔡金法, 刘启蒙. 课堂评估: 智能计算思维的评估[J]. 小学数学教师, 2018(Z1): 5-11.

[25] Selby, C. Computational thinking: The developing definition[A]. Paper presented at The 18th Annual Conference on Innovation and Technology in Computer Science Education, Canterbury, UK[C]. 2013.

历史研究

美英早期三角学教科书中的“解三角形”应用问题*

彭思维

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

三角形是最基本的几何图形，三角形中的数量关系是最基本的数量关系，有着极其广泛的应用。解三角形的应用问题（全文均指“平面三角学的解三角形应用问题”）是把三角形的理论知识与生产实际、科学实验、生活实际联系起来的一道桥梁，解答这些问题，对培养数学建模、数学抽象、数学运算素养，分析问题和解决问题的能力有很大的作用。

解三角形是人教 A 版高中数学（2019）必修二第六章的内容。这一章是在以学习三角形、三角函数和解直角三角形知识的基础上，利用向量对任意三角形边角关系进行研究，发现并掌握三角形中的边长和角度之间的数量关系——正弦定理和余弦定理，以及运用它们解决一些与测量和几何计算有关的实际问题。[1]教材在对解三角形的应用举例这一节，先从测量距离、高度、角度三个方面介绍实际测量中的应用，再用三个例子介绍利用正余弦定理解决三角形的面积计算和三角恒等式的证明问题。

以“解三角形”为关键词，在知网上搜索中文核心期刊的相关文章，发现现有的研究集中在解三角形中“知三求三”[2]、解的个数[3][4]等问题，主要集中在解三角形在数学中的应用，对解三角形在其他方面的应用研究的比较少。但是解三角形不仅能在数学中广泛运用，在天文学、物理学、测量学等其他学科领域也有广泛应用。因此，本文试图通过对美英早期三角学教科书的考察回答如下问题：早期教科书呈现了解三角形的哪些应用？有关应用问题有何特点？对今日三角学的教学有何启示？

2 研究方法

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中如何落实立德树人根本任务的研究”（A8）系列论文之一。

2.1 研究对象

笔者首先详细阅读有关数据库中出版于 1800-1955 年间的美国和英国三角学教科书的目录部分，目录中涉及“解三角形”应用问题的标题可以分为以下几类：

第 1 类：平面三角学在几何问题中的应用

第 2 类：距离和高度的度量

第 3 类：在航海、测量、物理学上等学科的应用

第 4 类：解直角三角形和斜三角形

第 5 类：平面图形与多边形的测量

再根据每本书的目录阅读“解三角形”应用问题在教科书中的具体内容。对于同一作者在不同时期出版的内容相同的教科书，视为同一种，最终确定 99 种，以 40 年为一个时间段，则 99 种三角学教科书的分布情况如图 1 所示。

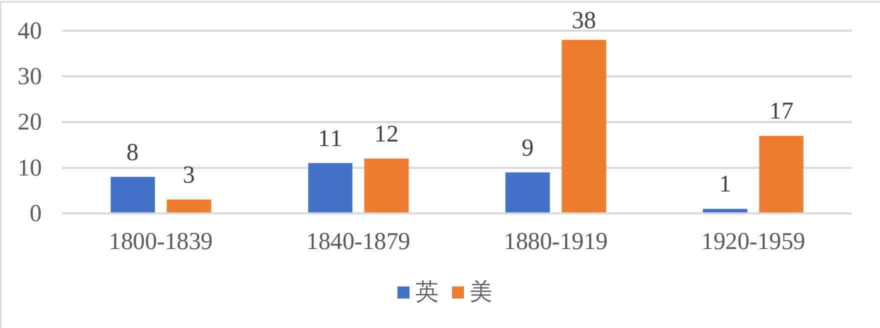


图 1 教科书出版年份及出版国家分布情况

2.2 分类框架

人教 A 版（2019）中，解三角形的应用涉及测量距离、高度、角度三个方面，主要集中在测量方面。在所考察的 99 种教科书中，“解三角形”包括解直角三角形和解斜三角形，其中解直角三角形主要利用勾股定理进行求解，解斜三角形利用正弦定理和余弦定理进行求解。表 1 给出了应用的类型及具体内容。

表 1 解三角形的应用及其所属类型

类别	解三角形的应用问题
数学	几何问题中的应用、平面图形的面积
测量	高度和距离
航海	四种航海问题
物理	力的合成、机械运动、小船行驶的方向
天文	地球和行星、太阳和行星的距离

3 “解三角形”的应用

3.1 数学中的应用

解三角形在数学上的应用，主要体现在解决几何问题上。几何学是三角学的基础，有些几何问题用纯几何的方法求解，往往比较困难，如果利用三角形的边角关系，借助于解三角形的方法求解，也能很好的解决问题。问题主要包括求三角形的面积[5]，进而可以求平面图形的面积；求三角形内切圆、外接圆和旁切圆的半径[6]；简化三角恒等式的证明[7]三个方面。下面从以上三个方面依次呈现早期教科书中比较经典的几个例子。

3.1.1 三角形的面积

已知ΔABC的两边 a，b 及其夹角 A，我们有$S=\frac{1}{2}bc\sin A$；若已知三个角 A、B、C 及$\angle C$的对边 c，我们有$S=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$。若已知三角形三边 a，b，c，因

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}}$$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\quad\left(\text{其中}s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

故有

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{bc}{2}\times\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\text{。}$$

这也是我们熟悉的海伦公式，利用正弦定理和余弦定理推导公式会比海伦的纯几何方法要简单很多。

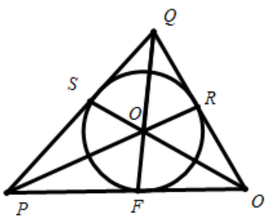


图 2 内切圆

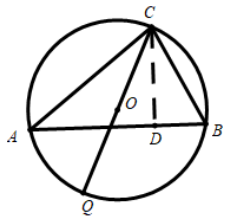


图 3 外接圆

3.1.2 内切圆、外接圆、旁切圆半径

如图 2，已知三角形的三边 a，b，c，$\odot O$ 为内切圆，设其半径为 r。由$S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}=S_{\triangle ABC}$可得：

$$r=\frac{S_{\triangle ABC}}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

如图 3，已知三角形的三边 a，b，c，$\odot O$ 为外接圆，设其半径为 R。[6]过 C 作 $CD\perp AB$，Q 为直线 CO 与圆的交点，由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CD\times AB=\frac{1}{2}AC\times BC\times\sin C$ 可得：$CQ\times CD\times AB$ $=AC\times BC\times\sin C\times CQ$，即 $2R\times 2S_{\triangle ABC}=abc$，于是有

$$R=\frac{abc}{4S_{\triangle ABC}}=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}。$$

如图 4，已知三角形的三边 a，b，c，$\odot O$ 为其中一个旁切圆，分别与 AC、AB 的延长线相切于点 E、F，与 BC 切于点 D[7]。设旁切圆的半径为 r_1。由 $S_{\triangle AOB}+S_{\triangle AOC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle OBC}$ 可得 $\frac{1}{2}cr_1+\frac{1}{2}br_1=S_{\triangle ABC}+\frac{1}{2}ar_1$，于是得 $r_1=\frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{c+b-a}{2}}$，即

$$r_1=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}。$$

另外两个旁切圆的半径同理可得 $r_2=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-b}$，$r_3=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-c}$。

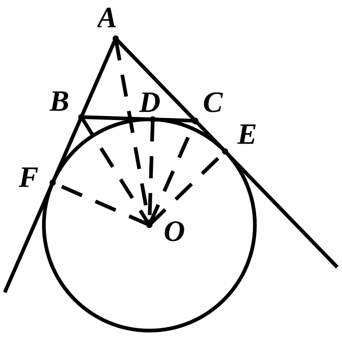


图 4　旁切圆

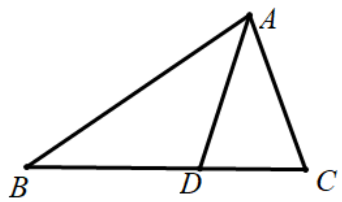


图 5 角平分线定理

已知三边，内切圆、外接圆和旁切圆半径都可以求解。教师还可以将上述三种情况的条件与结论互换，改成已知内切圆、外接圆半径，求三角形三边的问题。除此之外，因为平面图形中的所有直边图形都可以划分为小三角形，还可以用来求解圆内接正多边形、圆外切正多边形、凸四边形等图形的面积或对角线等问题。

3.1.3 简化证明

借助正弦定理与余弦定理，Harding[7]指出：用解三角形的相关知识，可以通过较简单的

方式，解决一些恒等式的证明问题，下面举一个例子进行说明。

如图 5，AD 为$\angle BAC$ 的角平分线，证明：$\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}$。

证：在 ΔADC 中，有 $\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{\sin\angle DAC}{\sin\angle ADC}$；在 ΔABD 中，有 $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}$。由于 $\angle DAC=\angle DAB$ 且 $\angle CDA=180^\circ-\angle BDA$，则 $\sin\angle DAC=\sin\angle DAB$，$\sin\angle CDA=\sin\angle BDA$。因此 $\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DC}{AC}$。

若图 5 中的 D 为 BC 的中点，则有 $2AD^2+2BD^2=AB^2+AC^2$。进一步推广，若点 D 满足 $mBD=nDC$，则有 $mAB^2+nAC^2=mBD^2+nDC^2+(m+n)AD^2$。

3.2 测量中的应用

测量问题是三角学最常见的实际应用，早期教科书中主要集中于三角学在测量高度、距离等问题中的一些应用[8]-[10]。在这些应用问题中，测量者可以借助经纬仪和卷尺进行测量。在不同的情境下，采取的测量方式也不同，这就需要对具体问题进行分析，选择合适、简洁、易操作的测量方法。下文从高度和距离的测量两方面举例说明。

3.2.1 高度的测量

对某一物体高度的测量可以分为可到达的物体和不可到达的物体测量，测量时所处的平面可以分为在水平面测量和在斜面上测量。

（1）在水平地面上测量可到达的垂直物体高度[8]。如图 6，BC 为需要测量的物体高度，我们可以在水平地面找到一点 A，并测出 AB 的距离，以及$\angle CAB$ 的大小，则 $BC=AB\times\tan\angle CAB$。

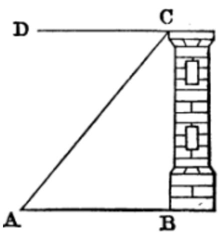


图 6 测量可到达的垂直物体高度

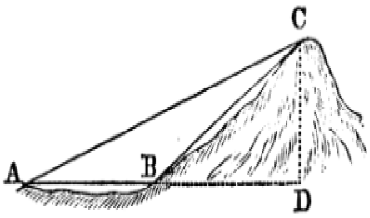


图 7 测量不可到达的垂直物体高度（1）

（2）在水平地面上测量不可到达的垂直物体高度[8][9]。可以分为两种情形，第一种如图 7 所示，CD 为需要测量的物体高度。我们可以选取水平地面上的点 A，再选取 AD 线段上的点 B，AB、$\angle A$ 和$\angle CBD$ 都可测，则 $CD=\dfrac{AB\times\sin\angle A\times\sin\angle CBD}{\sin(\angle CBD-\angle A)}$。

第二种情形如图 8 所示，要在河的另一侧测量物体 CD 的高度，可以在河的另一侧随意

选取点 A、B，测量 AB 的距离，$\angle CBA$、$\angle A$ 和$\angle DBC$ 可测，则 $CD=\dfrac{AB\times\sin\angle A\times\tan\angle DBC}{\sin(180^\circ-\angle CBA-\angle A)}$。

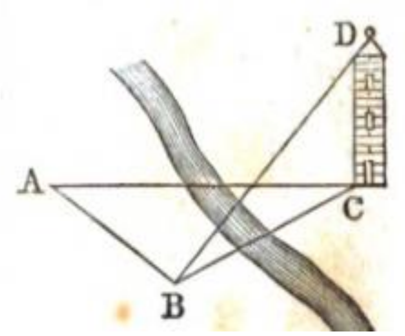


图 8 测量不可到达的垂直物体高度（2）

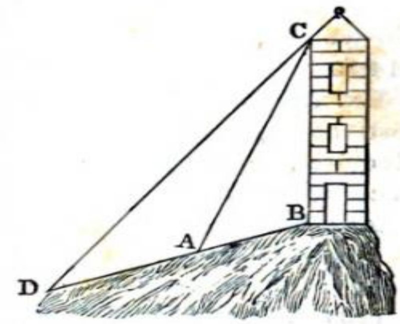
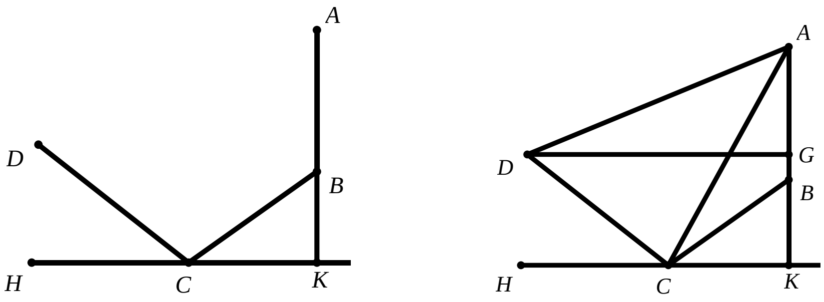


图 9 倾斜平面上测量可到达的垂直物体高度

（3）在倾斜平面上测量可到达的垂直物体的高度[9]。如图 9，建立斜三角形模型，AD、AB、$\angle CAB$ 和$\angle D$ 可测，则 $AC=\dfrac{AD\times\sin\angle A}{\sin(\angle CAB-\angle D)}$，在$\Delta ABC$ 中，由余弦定理即得 BC。

（4）在倾斜平面上测量不可到达的垂直物体高度[10]。如图 10（1），HK 为水平面，要在斜坡 CD 上测量垂直物体 AB 的高度。建立模型如图 10（2），并作 $DG\perp AB$ 于 G，则在图中，CD、$\angle ACK=\gamma$、$\angle BCK=\delta$、$\angle DCH=\alpha$、$\angle ADG=\beta$可测。在ΔACD 中，$AC=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\gamma-\beta)}\times CD$；在$\Delta ACB$ 中，$AB=\dfrac{\sin(\gamma-\delta)}{\cos\delta}\times AC$。



（1）　　　　（2）

图 10 倾斜平面上测量不可到达的垂直物体高度

3.2.2 距离的测量

（1）测量无法到达的物体和自身所在地的距离[9]。如图 11 所示，CA 为所要测量的距离，在 A 侧找任一点 B，则在ΔABC 中，AB、$\angle A$ 和$\angle B$ 可测，$AC=\dfrac{AB\times\sin\angle B}{\sin(180^\circ-\angle A-\angle B)}$。

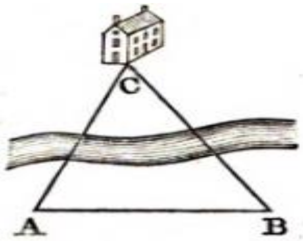


图 11 测量无法到达的物体的距离

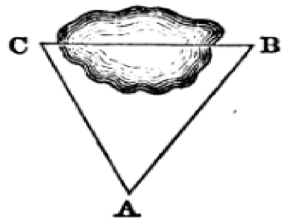


图 12 测量被隔开了的两物体距离

（2）测量被隔开了的两物体距离[9]。如图 12 所示，BC 为所要测量的距离，任找一点 A，则在ΔABC 中，AC、AB 和$\angle A$ 可测，则 $BC=\sqrt{AC^2+AB^2-2AC\times AB\times\cos\angle A}$。

（3）测量无法到达的两点间的距离[8]。如图 13 所示，若点 C、D 不可到达，则可建立四边形 $ABCD$ 模型，其中 AB 可测，$\angle CAD$、$\angle CAB$、$\angle ABD$ 和$\angle CBD$ 可测，那么可以求解 CD。

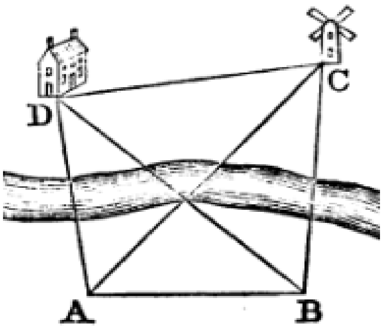


图 13 测量无法到达的两点间的距离（一）

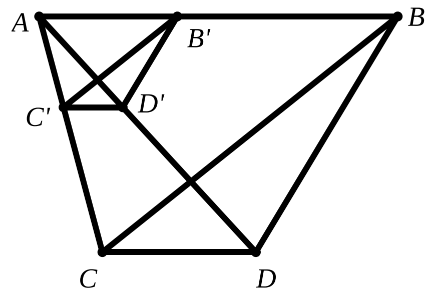
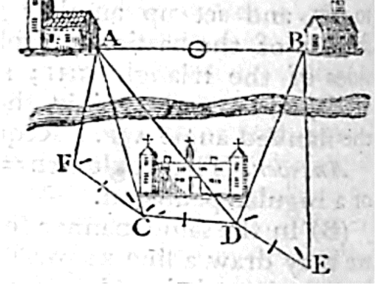


图 14 测量无法到达的两点间的距离（二）

还可以变换上述情形，若 CD、$\angle CAD$、$\angle CAB$、$\angle ABD$ 和$\angle CBD$ 可测，那么如何求解 AB？我们可以设 $AB=x$，将问题转化为已知 AB 求 CD 的问题，再求解出 x 就可以了。但古人不是这么做的，在《平面和球面三角学》（1816）一书中，Gregory[8]采用了相似的方法，如图 14，作一个和四边形 $ABCD$ 相似的小四边形 $AB'C'D'$使得 $C'D'$=1,则可得到 AB'，再利用相似图形的相似比$\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AB}{AB'}$，可以求出 AB。

(5) 测量无法到达的、无法处于同一视野内的两点间的距离。如图 15、图 16，存在障碍物使得无法同时望见 A、B 点[8]。

且无观测点可以同时望见两物体



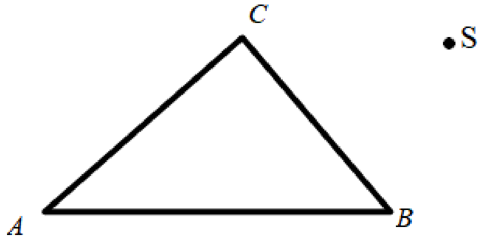


图 15 测量方案　　　　　　　　图 16 确定位置

如图 15 建立模型，首先任意找两点 CD，使得在点 C 能看见 A，在点 D 能看见 B。再取 $CF=CD$，$DE=CD$，使得在点 F 能看见 A，在 E 能看见 B。则$\angle F$、$\angle ACF$、$\angle ACD$、$\angle BDE$、$\angle E$ 和$\angle BDC$ 可测。在ΔACF 中，已知一边及以它为边的两角，可求 AC，则在ΔACD 中，可求 AD；同理可求 BD。则在ΔADB 中，AD、DB 和$\angle ADB$ 已知，由余弦定理可知 AB。

（6）在同一平面上给出三点的位置，确定相对于给定点的其他点的位置。[10]如图 16 所示，在平面中，已知点 A、B、C 的位置，以及$\angle ASC$、$\angle CSB$ 和$\angle ASB$，请确定点 S 的位置，并计算 SA、SB、SC.

点 A、B、C 若在同一条直线上，以及 S 与其中两点在同一条直线上比较容易确定 S 的位置，接下来主要以 S 与点 A、B、C 所构成图形的外部为例来说明如何确定 S 点的位置。

方法一：如图 17，作$\angle EBA=\angle ASC$，$\angle EAB=\angle BSE$，通过 A、B、E 三点作圆。连接 EC 并延长，与圆交于另一点，这个点就是要找的点 S，即图中的点 D。

在ΔABC 中，已知三边，可求出$\angle BAC$；在ΔAEB 中，已知$\angle EBA$，$\angle EAB$ 和 AB，可求出 AE、BE；在ΔAEC 中，已知 AC、AE 和$\angle EAC=\angle BAE+\angle BAC$，可求出$\angle AEC$；在$\Delta AES$ 中，已知$\angle AES$，$\angle ASE$ 和 AE，可得出 AS。同理在ΔAES 中可得 BS；在ΔACS 中可得 CS。

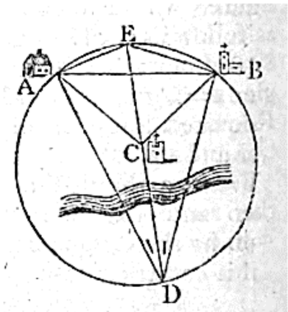


图 17 确定位置的方案一

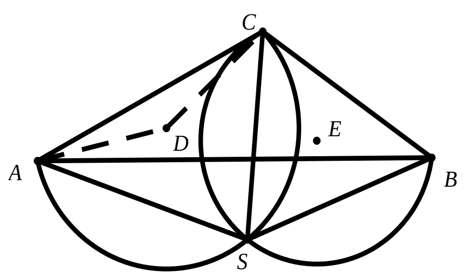


图 18 确定位置的方案二

方法二：如图 18，已知$\angle ASC=\alpha$，则ΔASC 的外接圆$\odot D$，AC 所对的圆心角$\angle ADC=2\alpha$，则可求出$\angle CAD=\angle ACD=\dfrac{180^\circ-2\alpha}{2}$、由此可以作出$\angle CAD$ 和$\angle ACD$，且相交于点 D。以 D 为圆心，AD 为半径画圆；同理，可以找到以 BC 为弦的圆心 E，以 E 为圆心，EB 为半径画圆，交点（除去点 C）即为要找的点 S。

Scholfield（1845）还对上述问题进行了拓展：已知点 A、B、C 的位置，有点 D、E。D 能看见 A、C、E，但看不见 B；E 能看见 B、C、D，但看不见 A，请你找出 D、E 的位置。[10]这类问题教科书中并没有给出图形，学生需要根据题意来判断哪些是可以测量的，哪些是需要求解的，进而设计相应的作图办法，找出点 D、E，再利用三角学进行求解。

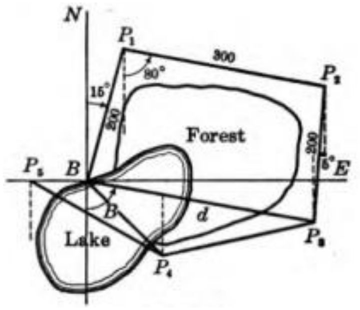


图 19 实际情境中的测量问题

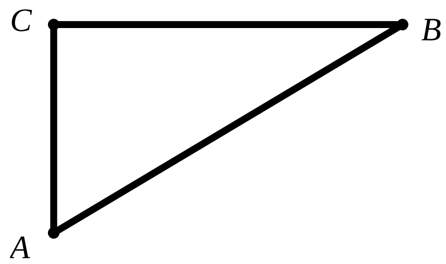


图 20 平面航行情形一

此外，早期教科书中还将解三角形的应用放入到实际情境中，让学生设计方案进行求解。如图 19，有湖和森林的阻挡，要怎样才能测出 P_3P_5 的距离呢？[12]教学时，教师也可以根据实际情况来改变问题的情境，将测量的问题放在日常生活中，拉近与学生的距离，也培养学生在实际情境下解决问题的能力。

3.3 航海中的应用

三角学在航海有很重要的作用，水手们可以利用航海指南针帮助确定航向，利用每次航行的航向确定自己的航线，所在的经纬度等。航海问题主要分为平面航行（plane navagation）、曲线航行(traverse navagation)、同纬度航行（parrallel sailing）、中纬度航行（middle latitude sailing ）、墨卡托航行（Mercatoer's sailing）等。Peirce（1835）、Loomis（1848）等都对四类航行的计算问题做了说明。

3.3.1 平面航行

如图 20，当航海家从 A 航行到 B 时，AB 称为为航行的距离。作 $AC \perp BC$，AC 为航行的纬度差（latitude，下文用 lat.表示），BC 为航行的东西距离(departure，下文用 dep.表示)。

当航行的距离足够小时，可以忽略地球的曲率，看成如图 20 所示的直角三角形来计算航行的纬度差和东西距离: $AC = AB\cos A$、$BC = AB\sin A$；当距离很大时，如图 21，Peirce[13]指出：可以将 AB 分成很多小段，每一小段都可以用图 22 的情况来计算，于是有

$$AC = AC_1 + C_1C_2 + \ldots + C_nC = AB\cos A，$$

$$BC = B_1C_1 + B_2C_2 + \ldots + B_nC_n + BP = BC\sin A。$$

因此 $AC = AB\cos A$、$BC = BC\sin A$ 适用于任何距离的航行。

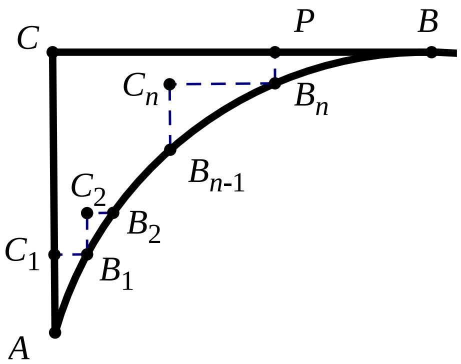


图 21 平面航行情形二

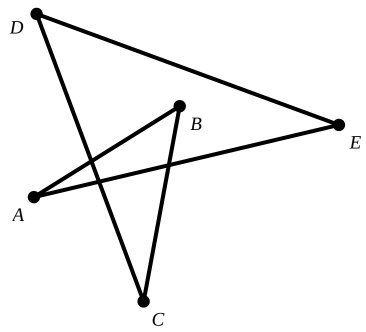


图 22 曲线航行

3.3.2 曲线航行

曲线航行的问题目的是通过平面航行原理来解决的。但曲线航行只能在航行距离小到可以将地球表面视为平面的时候使用。曲线航行是指将一艘船的几条连续航线减少到一条；也就是说，通过在多个连续的轨道上航行，找到通向该船实际到达的地点的最短轨道[13]。如图 22 所示，假设一艘船从点 A 出发，航行到点 B，再从点 B 点航行到点 C，从点 C 航行到点 D，从点 D 航行到点 E，则可以根据每次航行的距离，利用平面航行的原理，求出点 A 与点 F 的纬度差和经度差。

3.3.3 同纬度航行

同纬度航行是指船在同一纬度航行，只向东或向西航行[13]。一艘船从 A 航行到 B，所在纬度为α，如图 23 所示，若地球的半径 $A'D = \mathrm{R}$，$AE = r$，则有

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{EA}{DA'} = \frac{EA}{DA} = \frac{r}{R}$$

在ΔADE 中，$\angle DAE = \angle ADA' = \alpha$ ，则 $r = R\cos\alpha$。若记经度的变化为$\Delta long.$，则

$$\Delta long. = \frac{dep.}{\cos\alpha}$$

此外，还有中纬度航行（middle latitude sailing ）、墨卡托航行（Mercatoer’s sailing）等航行的测量方式[13][14]，由于这几种航行涉及的地理知识比较丰富，是对测量精度的改进，在这里就不做过多介绍。

3.4 物理中的应用

在物理学的某些问题中，也常常需要三角学来解决问题。比如力的合成与分解、合运动与分运动、合速度与分速度，要解决这类问题，首先是应用物理学的平行四边形法则，力的

平衡原理等，用正余弦定理解三角形。除此之外，还有物理学中机械运动的问题，也需要解三角形，Dresden [15]在《平面三角学及其应用》一书中举了许多物理上的应用。图 26 是曲柄机械装置示意图，设连杆 AP 的长是 l，曲柄 OA 的长是 r，当曲柄从 OB 旋转角度α到达 OA 时，求：（1）连杆 AP 与曲轴 OQ 之间的夹角β；（2）求滑块 P 的位移。

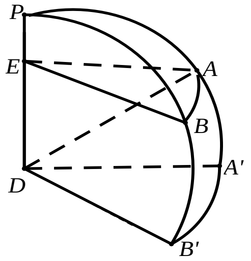


图 23 同纬度航行

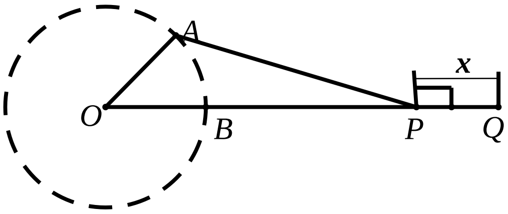


图 24 曲柄机械装置

解：（1）在ΔAOP 中，由正弦定理有：$\dfrac{r}{\sin\beta}=\dfrac{l}{\sin\alpha}$，即$\sin\beta=\dfrac{r\sin\alpha}{l}$。

（2）在 ΔAOP 中，根据射影定理，有 $OP=r\cos\alpha+l\cos\beta$。因 $x=OQ-OP=l+r-OP$，故有 $x=r+l-(r\cos\alpha+l\cos\beta)$。

除此之外，在物理学中，小船行驶的速度与方向等都需要利用解三角形的知识求解[16]。但由于这些问题在物理和数学教科书中都有出现，这里就不再赘述了。

3.5 天文中的应用

Emerson（1749）在《三角学的要素》一书中断言："没有三角学，Urania（掌管天文的缪斯女神）的儿子们将丢弃它们的工具、书和表，人们将对这个美丽的世界一无所知。"[17] 利用三角学，可以计算某个时刻行星到地球的距离，从而预测日、月食等问题。

Olney（1870）建立如图 25 所示的模型[18]，同一经线上的两个天文台 N 和 N'，P 为行星，测出$\angle ZNP$ 和$\angle Z'N'P$。CN 和 CN'为地球半径，NN'已知，则可求$\angle NCN'$，进而可求$\angle CNN'$和$\angle CN'N$。在$\Delta CNN'$中，已知CN、$\angle CNN'$和$\angle CN'N$，可求得 NN'。在$\Delta PNN'$中，由$\angle PNN'$、$\angle PN'N$ 和 NN' 可得 PN 和 PN'；最后在ΔPNC 中，可以解出 PC，即为行星到地球的距离。

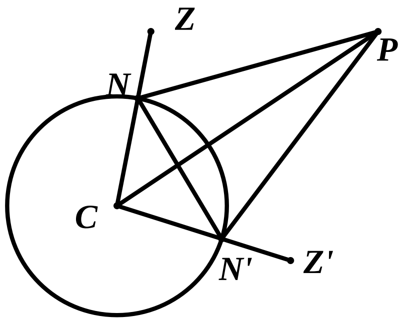


图 25 行星到地球的距离

4 若干启示

英美早期教科书中解三角形的应用举例主要是利用正余弦定理，建立三角形模型，解决几何、测量、航海和物理这四大类问题。在阐述这四类问题时，教科书大都采用文字叙述问题，不提供任何的数学符号或图形，只有在求解时才会出现相应的图形，这都给予我们一些教学启示。

（1）用三角学知识去证明学生熟悉的几何定理、公式等，揭示三角学的优越性以及三角学与几何学之间的密切联系。例如海伦公式，很多学生在初中就已经知道它，但有的学生不知道是如何推导得到的，或只知道几何方法。教师不妨在讲解完正余弦定理后让学生试着推导海伦公式，并与几何方法的证明相比较，让学生感受三角学的魅力。

（2）用文字语言叙述问题，将建模的机会留给学生。比如在距离测量的问题 5 中：设计一种测量方案测量两个不可到达的物体 A、B 之间的距离，你所在的地点没有任何位置可以同时望见 A、B 两点。学生就需要准确理解题意，并根据题意假设相关条件，分析哪个角度、哪个距离是可以进行测量的，直到可以进行求解。当学生已经熟练掌握了正余弦定理，在应用时教师可以进行这样的尝试，能锻炼学生的阅读理解、分析问题、解决问题的能力，促进数学建模素养的达成。

（3）将问题置于实际应用中，采用尽量真实的数据，让学生感受三角学在实际应用的工具性。在教学中，我们大多数都采用特殊角（如 30°、60°等），注重学生的运算能力，这当然是有必要的。可是在古代的实际测量中，角度往往不是这些特殊角，测量的长度也往往不是整数，测量员们是采取适当的办法得到可测量角度与长度，再通过查表和简单的计算得到需要的测量结果。所以教学中可以适当的给出一些真实的测量数据，学生在建模求解时，可以查找三角函数表，将三角学当成一门工具来解决问题。

（4）可以尝试开展 STEM 教育。三角学具有极强的实用价值，可以帮助天文学家了解行星与地球的距离及他们的运行规律、预测日食和月食；水手可以在海上画出航线；地理学家确定地点的经纬度、国家的大小和位置、山脉的海拔高度、河流的流向等。这些都是需要用到解三角形的相关知识。因此，教师可以在解三角形的应用教学中开展 STEM 教育，将三角学与科学、技术、工程联系起来。

参考文献

[1] 人民教育出版社. 普通高中教科书必修二[M]. 人民教育出版社, 2019: 42-54.

[2] 张国坤. 编制以三角形为载体的三角问题[J]. 数学通报, 2016, 55(9): 31-34.

[3] 齐新发, 连春兴. 解三角形的“探究与发现”[J]. 数学通报,2011, 50(9): 41-44.

[4] 杨询. 一类解三角形问题的代数解释[J]. 数学通报, 1995(3): 17.

[5] Abbott.R. *The Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: Thomas Ostell & Co., 1841: 50-52.

[6] Todhunter.I. *Trigonometry for Beginners*[M]. London and Cambridge: Macmillan &Co., 1866: 106-113.

[7] Harding.A. M. & Turner. J. S. *Plane Trigonometry*[M]. New York: G. P. Putnam’s Sons, 1915: 139-140.

[8] Gregory.O. *Elements of Plane and Spherical Trigonometry*[M]. London: Baldwin, Cradock & Joy, 1816: 61-78.

[9] Durell.F. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: Merrill, 1910: 131-141.

[10] Scholfield.N. *Higher Geometry and Trigonometry*[M]. New York: Collins, Brother &Co., 1845: 120-129.

[11] Sprague.A. H. *Essentials of Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1942: 138.

[12] Peirce.B. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*[M]. Cambridge & Boston:James Munroe & Co., 1835:57-76.

[13] Loomis.E. E*lements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Happer &Brothers, 1848: 111-120.

[14] Wilczynski.E. J. *Plane Trigonometry & Applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914:7

8-80+128-129.

[15] Dresden.A. *Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1921: 24-25.

[16] Moritz.R.E. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915:150-156.

[17] Emerson.E. *The Elements of Trigonometry*[M]. London: W. Innys, 1749: iii-vi.

[18] Olney.E. *Elements of Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York & Chicago: Sheldon & Co., 1870: 62.

美英早期解析几何教科书中的抛物弓形问题*

秦语真

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

《抛物线弓形求积》是古希腊数学家阿基米德（Archimedes，公元前 287 年-公元前 212 年）的一部重要著作。书中，阿基米德得到抛物线弓形的面积为以其顶点为顶点的内接三角形面积的$\frac{4}{3}$。阿基米德首先用力学方法得出上述结果，然后通过“穷竭法”对其进行严格的证明[1]。没有微积分，没有极限工具，阿基米德的这一结果超越时代，令人惊叹；同时，它也是物理方法用于数学研究的精彩范例。

从 1965 年至今，高考数学卷上常常出现涉及抛物线弓形的问题。近年来，抛物线弓形的有关性质受到了高中一线教师的关注。在教科书中，人教 A 版 3-1 数学史选讲中介绍了阿基米德利用杠杆原理求抛物线弓形面积。还有教师还编制抛物线弓形的相关问题，并将其融入日常教学和考试中[2]-[4]。长期以来，有不少教师先后对抛物线弓形面积做过研究[5]-[9]，还有教师将抛物线弓形的面积问题融入导数起始课中[10]。已有文献表明，抛物线弓形的证明方法较为单一，有关抛物线弓形的教学设计少之又少。

翻开历史的画卷，我们可以看到抛物线弓形的推导方法精彩纷呈，归纳、提炼相关方法，可以为今日教学和习题编制提供素材。为此，我们就抛物线弓形这个主题，对 1830-1969 年间出版的 18 种美英解析几何教科书（其中 17 种出版于美国，1 种出版于英国；12 种出版于 19 世纪，6 种出版于 20 世纪）进行考察，试图回答以下问题：早期解析几何教科书是如何求抛物线弓形面积的？这些方法对今日解析几何教学有何启示？

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中落实立德树人的研究”（A8）系列论文之一。

2 特殊抛物线弓形的面积

2.1 内外兼顾，寻求比例

有 3 种教科书采用如下方法来求抛物线弓形的面积[11]-[13]。如图 1，点 $A\left(x_0, y_0\right)$ 是抛物

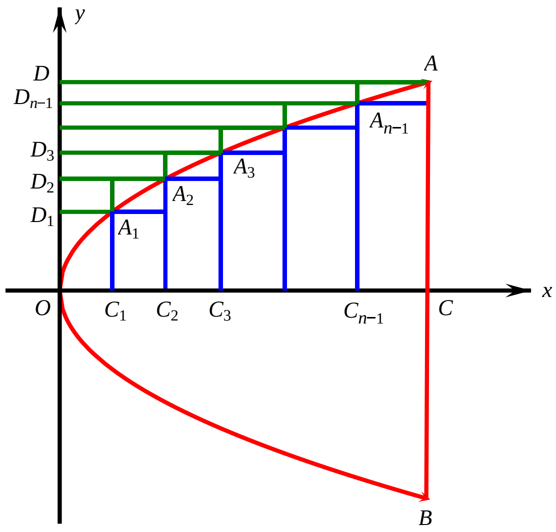


图 1 比例法

线 $y^2=2px$ 上一点，AB 为垂直于 x 轴的弦，AB 与 x 轴交于点 C，O 为抛物线的顶点。在点 O 和 A 之间取 $n-1$ 个点 A_1，A_2，…，A_{n-1}，使得各点的纵坐标 y_1，y_2，…，y_{n-1}，y_0 依次构成等比数列，并设

$$\frac{y_2-y_1}{y_1}=\frac{y_3-y_2}{y_2}=\cdots=\frac{y_0-y_{n-1}}{y_{n-1}}=q$$

过各点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，垂足分别为 C_1，C_2，…，C_{n-1} 和 D_1，D_2，…，D_{n-1}，又过点 A 作 y 轴的垂线，垂足为 D。

$$\frac{S_{\text{矩形}A_1C_2}}{S_{\text{矩形}A_1D_2}}=\frac{y_1\left(x_2-x_1\right)}{x_1\left(y_2-y_1\right)}=\frac{y_1\cdot\dfrac{1}{2p}\left(y_2^2-y_1^2\right)}{\dfrac{1}{2p}y_1^2\left(y_2-y_1\right)}=\frac{y_2+y_1}{y_1}=2+q$$

同理可得

$$\frac{S_{\text{矩形}A_2C_3}}{S_{\text{矩形}A_2D_3}}=\frac{y_2\left(x_3-x_2\right)}{x_2\left(y_3-y_2\right)}=1+\frac{y_3}{y_2}=2+q,$$

$$\frac{S_{\text{矩形}A_3C_4}}{S_{\text{矩形}A_3D_4}}=\frac{y_3\left(x_4-x_3\right)}{x_3\left(y_4-y_3\right)}=1+\frac{y_4}{y_3}=2+q\text{，}$$

…………………

$$\frac{S_{\text{矩形}A_{n-1}C}}{S_{\text{矩形}A_{n-1}D}}=\frac{y_{n-1}\left(x_0-x_{n-1}\right)}{x_{n-1}\left(y_0-y_{n-1}\right)}=1+\frac{y_0}{y_{n-1}}=2+q\text{，}$$

故

$$\frac{S_{\text{矩形}A_1C_2}+S_{\text{矩形}A_2C_3}+\cdots+S_{\text{矩形}A_{n-1}C}}{S_{\text{矩形}A_1D_2}+S_{\text{矩形}A_2D_3}+\cdots+S_{\text{矩形}A_{n-1}D}}=2+q \qquad (1)$$

当所取得点越来越多，即 n 越来越大时，q 逐渐趋向于零。此时，等式（1）左边的分子趋向于曲边三角形 OAC 的面积，分母趋向于曲边三角形 OAD 的面积，即

$$\frac{S_{\text{曲边三角形}OAC}}{S_{\text{曲边三角形}OAD}}=2\text{，}$$

于是，曲边三角形 OAC 的面积等于矩形 $DOCA$ 的$\frac{2}{3}$，或 RtΔOCA 的$\frac{4}{3}$。因此得抛物线弓形 AOB 的面积等于ΔAOB 面积的$\frac{4}{3}$。

2.2 经典重现，删繁就简

阿基米德在《抛物线弓形求积》中利用一系列内接三角形逐步逼近抛物线弓形，借助穷竭法证明抛物线弓形面积。在我们所考察的教科书中，有 1 种采用了类似的方法[14]。如图 2，AOB 为抛物线弓形，弦 AB 垂直于 x 轴，抛物线方程为 $y^2=2px$。我们选取抛物弓形的

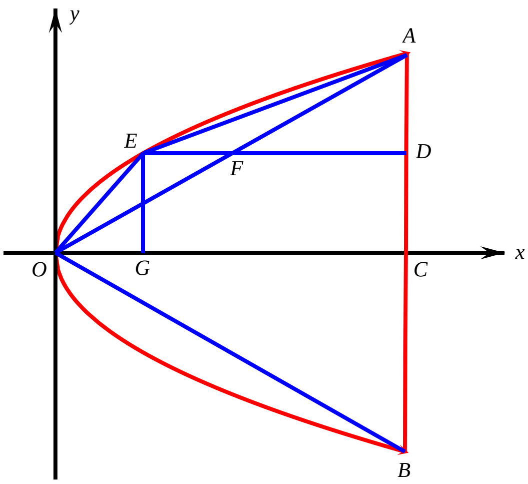


图 2 阿基米德法

一半来进行研究，取 AC 的中点 D，过 D 作 x 轴的平行线，交抛物线于点 E，交线段 AO 于点

F，过点 E 向 x 轴引垂线，垂足为 G，联结 AE、OE。

因 $EG=\frac{1}{2}AC$，故 $OG=\frac{1}{4}OC$，从而得 $ED=GC=\frac{3}{4}OC$；又因 FD 为$\triangle AOC$ 的中位线，故得 $FD=\frac{1}{2}OC$，从而得 $EF=\frac{1}{4}OC=\frac{1}{2}FD$。因此有

$$S_{\triangle OEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle OFD}，\quad S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle AFD}，$$

即

$$S_{\triangle EOA}=\frac{1}{2}S_{\Delta AOD}=\frac{1}{4}S_{\triangle AOC}。$$

再过 AD 和 CD 的中点，作 x 轴的平行线，分别交抛物线于点 J 和 K，由上述结论知，$\triangle AEJ$ 和$\triangle OEK$ 的面积之和为$\triangle EOA$ 面积的$\frac{1}{4}$，即$\triangle AOC$ 面积的$\frac{1}{16}$。以此类推，记 $S_{\triangle AOC}=a$，则有：

$$S_{\text{抛物线弓形}AOB}=2\left(a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4^2}a+\frac{1}{4^3}a+\cdots\right)=\frac{8}{3}a=\frac{4}{3}S_{\Delta AOB}$$

虽然教科书作者采用了阿基米德的思路，但由于摈弃了穷竭法，因而求抛物弓形面积的过程要简洁得多。

2.3 借助切线，内外比较

有 4 种教科书利用抛物线切线的性质来研究抛物线弓形面积问题[15]-[18]。首先证明抛物线切线的一个重要性质。如图 3，设 $A(x_0,y_0)$ 和 $A_1(x_1,y_1)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 上的不同两点，过点 A 和 A_1 分别作抛物线的切线 AT 和 A_1T_1，其方程分别为：

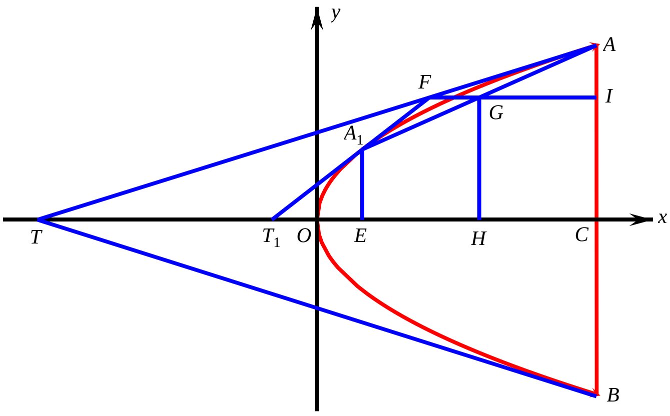


图 3 切线法

$$yy_0=p(x+x_0)，$$

$$yy_1=p(x+x_1)，$$

易知交点 F 的纵坐标为 $y=\dfrac{y_0+y_1}{2}$。因此，抛物线上任意不同两点处的切线交点的纵坐标是这两点纵坐标的算术平均值。

现取抛物线弓形 AOB 的一半作为研究对象，连接 AA_1，过点 F 作 x 轴的平行线，分别交 AB 和 AA_1 于 I 和 G，则点 G 的纵坐标为 $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$，即 G 为弦 AA_1 中点，再过 A、G 和 A_1 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 C、H 和 E。由切线方程可知 $OT=OC$，$OT_1=OE$，故得 $TT_1=CE$，于是，梯形 $ECAA_1$ 的面积为

$$S_1=\frac{1}{2}\left(CA+EA_1\right)\cdot CE=GH\cdot CE$$

ΔFTT_1 的面积为

$$S_2=\frac{1}{2}GH\cdot TT_1=\frac{1}{2}GH\cdot CE$$

故得 $S_1=2S_2$。

若在点 A 和 O 之间取抛物线上的一系列点，过各点作 x 轴的垂线，其中相邻两点连线、对应的两条垂线与 x 轴围成一个梯形，抛物线在这两点处的切线与 x 轴围成一个三角形。由上面的证明可知，梯形面积是相应三角形的两倍。因此，所有梯形面积之和等于所有三角形面积之和的两倍。在抛物线上所取点数越多，梯形面积之和越接近曲边三角形 OAC 的面积，三角形面积之和越接近曲边三角形 OAT 的面积。故有

$$S_{\text{曲边三角形}AOC}=2S_{\text{曲边三角形}AOT},$$

于是得

$$S_{\text{曲边三角形}AOC}=\frac{2}{3}S_{\triangle ATC}=\frac{4}{3}S_{\triangle AOC},$$

即抛物线弓形 AOB 的面积是其内接三角形 AOB 的 $\dfrac{4}{3}$。

2.4 矩形划分，以直代曲

有一本教科书用 n 个小矩形来逼近抛物线弓形的面积[19]。如图 4，OPM 为一抛物线弓形，其面积为

$$S_{\text{抛物弓形}OPM}=S_{\text{矩形}PQMN}-2S_{\text{曲边三角形}OPQ}。$$

故只需求出曲边三角形 OPQ 的面积。在 OQ 上插入 $n-1$ 个分点，将 OQ 等分成 n 段，每一段长度为 Δx，$OQ=n\Delta x$；过每一个分点分别作 x 轴的垂线，与抛物线交于点 $P_i\left(i\Delta x,\dfrac{\left(i\Delta x\right)^2}{2p}\right)$

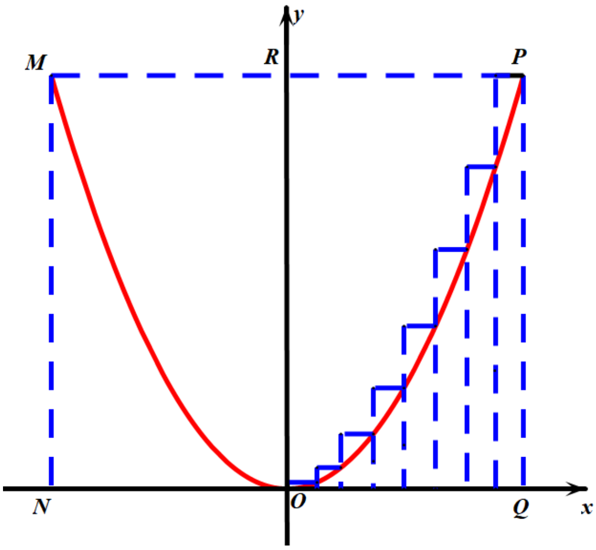


图 4 分割矩形法求抛物线弓形面积

$(i=1,2,\cdots,n-1)$，相应得到 n 个矩形。设曲边三角形 OPQ 的面积为 S，点 P 的坐标为 (x_n,y_n)，其中 $x_n=n\Delta x, y_n=\dfrac{(n\Delta x)^2}{2p}$，则有：

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2p}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)(\Delta x)^3$$

$$=\frac{1}{12p}\lim_{n\to\infty}\left(2n^3+3n^2+n\right)(\Delta x)^3$$

$$=\frac{1}{12p}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)(n\Delta x)^3$$

$$=\frac{1}{6p}(n\Delta x)^3$$

$$=\frac{1}{3}x_n y_n$$

故抛物弓形 OPM 的面积是矩形 $MNQP$ 的$\frac{2}{3}$。

此外，有 6 种教科书利用定积分直接给出计算公式[20]，这里不再赘述。

3 一般抛物线弓形的面积

少数教科书还解决了弦不垂直于 x 轴的一般物线弓形面积问题。所采用的方法与上文 2.2 节所呈现的方法类似。如图 5，A、B 为抛物线 AOB 上的任意不同两点，弦 AB 的中点为 F，平行于 AB 的切线的切点为 O。取 AF、FB 的中点为 E、G，过 E、G 分别作 OF 的平行

线，交抛物线于 C、D，过点 C 作 AB 的平行线交 OF 于 J，则 $CJ=EF=\frac{1}{2}AF$，$OJ=\frac{1}{4}OF$，于是得 $CE=JF=\frac{3}{4}OF$。又因 ME 为△AOF 的中位线，故 $ME=\frac{1}{2}OF$，从而得 $CM=\frac{1}{4}OF$ $=\frac{1}{2}ME$，于是有 $S_{\triangle CAM}=\frac{1}{2}S_{\triangle MAE}$，$S_{\triangle COM}=\frac{1}{2}S_{\triangle MOE}$，即 $S_{\triangle COA}=\frac{1}{4}S_{\triangle AOF}$。同理可得 $S_{\triangle DOB}=\frac{1}{4}S_{\triangle BOF}$。

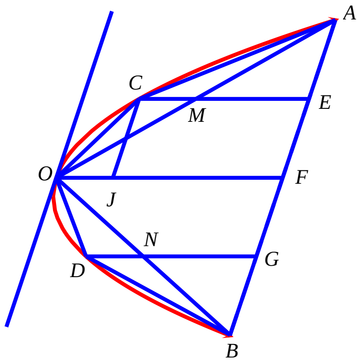


图 5 一般抛物线弓形的面积

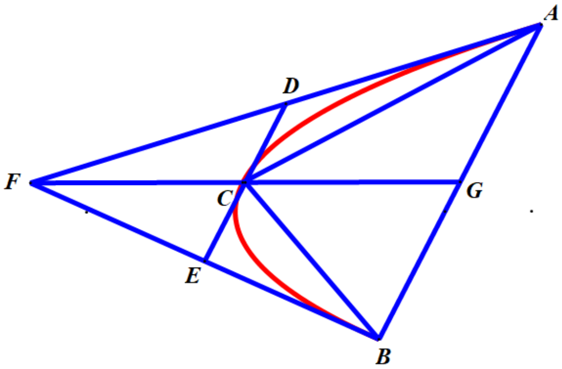


图 6 抛物线弓形的一个性质

分别再取 AE、EF、FG 和 BD 的中点，并作 OF 的平行线，交抛物线于 P、Q、R、S 四点，根据上面的结论，四个三角形 APC、CQO、ORD 和 DSB 的面积之和为△AOB 面积的 $\frac{1}{16}$。以此类推，记 $S_{\triangle AOB}=a$，我们可以得到：

$$S_{弓形AOB}=\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)S_{\Delta AOB}=\frac{4}{3}S_{\Delta AOB}$$

此外，还有教科书给出了抛物线弓形与切线段和弦所构成三角形之间的面积关系。如图 6，AB 为抛物线的弦，其中点为 G。过 A、B 分别作抛物线的切线，交于点 F，则 $S_{抛物线弓形ACB}=\frac{2}{3}S_{\Delta AFB}$ [21]。

4 教学启示

以上我们看到，早期解析几何教科书呈现了抛物线弓形面积的多种求法，其中的矩形分割方法或定积分方法对今日学过微积分的读者来说并不陌生，但另外一些方法对于我们今日高中解析几何教学中有关抛物线问题的编制提供了素材和思想启迪。

以第一种方法（比例法）为例。如图 7 所示，设抛物线方程为 $y^2=2px\ (p>0)$。在抛

物线上取三点 $A_1(x_1,y_1)$，$A_2(x_2,y_2)$ 和 $A_3(x_3,y_3)$，其中 $y_i>0 \quad (i=1,2,3)$。过 A_i 分别作 x 轴和 y 轴的垂线，垂足分别为 C_i 和 D_i。记矩形 A_1C_2 和 A_2C_3 的面积为 S_1 和 S_2，矩形 A_1D_2 和 A_2D_3 的面积为 T_1 和 T_2，

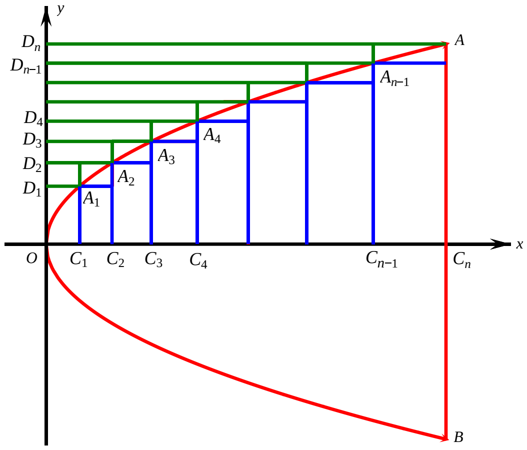


图 7　抛物线弓形问题之一

（1）若 y_1、y_2 和 y_3 构成等差数列，试比较 $\dfrac{S_1}{T_1}$ 和 $\dfrac{S_2}{T_2}$ 的大小；

（2）若 $\dfrac{1}{y_1}$，$\dfrac{1}{y_2}$ 和 $\dfrac{1}{y_3}$ 构成等差数列，试比较 $\dfrac{S_1}{T_1}$ 和 $\dfrac{S_2}{T_2}$ 的大小；

（3）若 y_1、y_2 和 y_3 构成等比数列，试比较 $\dfrac{S_1}{T_1}$ 和 $\dfrac{S_2}{T_2}$ 的大小；

（4）若抛物线与直线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 交于点 A（异于原点），在抛物线上，在点 O 和 A 之间取 $n-1$ 个点 $A_i(x_i,y_i)$（$i=1$，2，…，$n-1$），使得其纵坐标与点 A 的纵坐标（记为 y_n）依次构成等比数列。过 A_i 和 A 分别向 x 轴和 y 轴作垂线，垂足分别为 C_i 和 D_i（$i=1$，2，…，n），记矩形 A_iC_{i+1} 的面积为 S_i，矩形 A_iD_{i+1} 的面积为 T_i（$i=1,2,\cdots,n-1$），试求 $\dfrac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{T_1+T_2+\cdots+T_{n-1}}$，由此你能得出什么结论？

又以第三种方法（切线法）为例，如图 8，仍设抛物线方程为 $y^2=2px$，A_1、A_2 为抛物线上不同的两点（均位于第一象限），过 A_1、A_2 分别作抛物线的切线，交于点 B，分别交 x

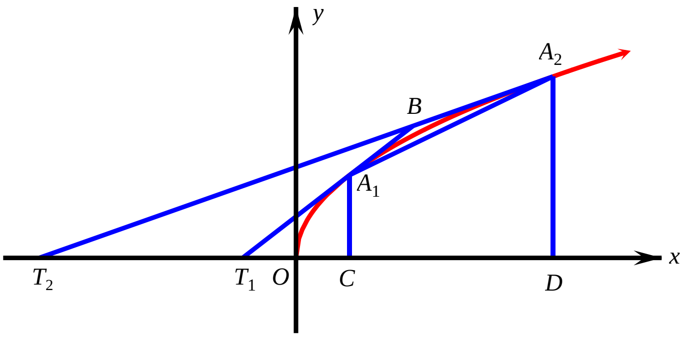


图 8 抛物线弓形问题之二

轴于点 T_1 和 T_2。又过 A_1、A_2 分别作 x 轴的垂线，垂足为 C 和 D。求梯形 A_1CDA_2 与 ΔBT_1T_2 的面积之间的关系，等等。

从上述问题可以看出，借鉴早期教科书中抛物线弓形面积求法所提出的问题，可以很好地将高中数学不同领域的知识融合起来，体现了很强的综合性，适合于高三复习课的教学。图 9 呈现了抛物线弓形的概念图。

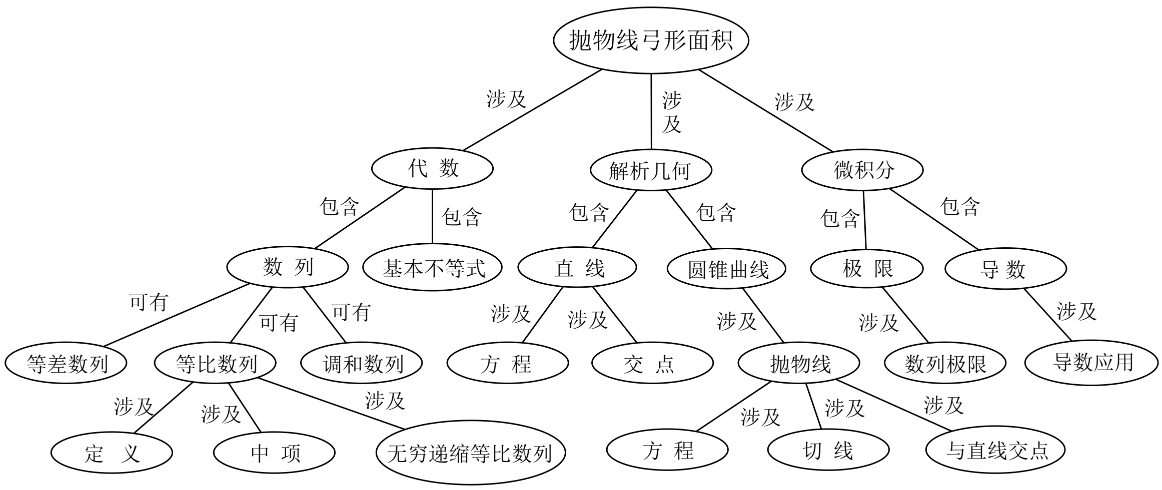


图 9 抛物线弓形概念图

历史是一个宝藏，其中蕴含着取之不尽、用之不竭的教学素材和思想养料，抛物线弓形面积的历史只是无数例子中的一个而已。这启示我们，教育取向的数学史研究是 HPM 视角下课堂教学研究和基于数学史的问题提出研究的基础。未来，HPM 研究者和一线数学教师在该领域必将大有可为。

参考文献

[1] Heath, T. L. *The Works of Archimedes* [M]. Cambridge: The University Press, 1897.

[2] 覃淋, 李秀萍. 对 2018 年一道高考数学文化试题的评析[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2019(9): 20-22.

[3] 王端祥. 抛物线“弓形三角形面积”及变式问题[J]. 中学数学, 2014(14): 92-94.

[4] 李世臣, 王艳. 二次函数两点式与抛物线弓形面积[J]. 数学教学, 2016(2): 14-17.

[5] 甘大旺. 教科书中阿基米德的抛物线弓形面积的证法补遗及拓展探究[J]. 数学通报, 2016, 55(11): 31-32+35.

[6] 杜瑞芝. 古希腊学者的求积法——定积分思想的萌芽[J]. 数学通报, 1986(12): 38-40+43.

[7] 尤兆桢. 从阿基米德关于抛物线弓形面积的算法谈到圆弓形面积近似公式[J]. 数学通报, 1958(8): 1-6.

[8] 陈伟侯. 抛物线弓形面积的阿基米德算法[J]. 数学通报, 1999(10): 23-24+18.

[9] 羽辉. 抛物线弓形的性质和阿基米德的杠杆术[J]. 数学教学, 1983(5): 28-30.

[10] 王剑. 基于数学史的导数章节起始课教学构想[J]. 数学教学通讯, 2019(36): 26-28.

[11] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry* [M]. New York: Wiley & Long, 1836, 161-163.

[12] Loomis, E. *Elements of analytical geometry and of the differential and integral calculus*[M]. New York: Harper & Brothers; 1851, 76-79.

[13] Biot, J. B. *An elementary treatise on analytical geometry*[M]. Philadelphia: C. Desilver; 1860, 150-153

[14] Docharty, G. B. *Elements of analytical geometry, and of the differential and integral calculus*[M]. New York: Harper & brothers, 1865, 60-62.

[15] Hymers, J. *A treatise on conic section*[M]. Cambridge: Printed at the University press, for J. & J.J. Deighton: 1845, 95-97.

[16] Church, A. E. *Elements of analytical geometry*[M]. New York: G. P. Putnam: 1851, 124-125.

[17] Robinson, H. N. *Conic Sections and Analytical Geometry.* [M]. New York: Harper & Brothers, 1865, 44-45.

[18] Robinson, H. N. *Conic Sections and Analytical Geometry* [M]. New York: Ivison, Blakeman,1860, 61.

[19] Ziwet, A. *Elements of Analytic Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company; 1916, 109-115.

[20] Woods, F. S. *Analytic Geometry and Calculus* [M]. New York: The Macmillan Company, 1916, 146.

[21] Wood, D. V. *The elements of coördinate geometry* [M]. New York: J. Wiley, 1903, 61.

教学实践

HPM 视角下的轨迹概念同课异构课例分析*

张佳淳 汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

“轨迹”是沪教版初中数学教科书八年级上第 19.6 节的内容，在此之前，学生已经学过圆、线段的垂直平分线，以及角平分线的性质定理及其逆定理。本节课学生将把定理同化为三种基本轨迹，进一步学习轨迹的概念与探求。现有教学设计大多先利用实例形成表象认识，再结合字面剖析轨迹概念，接着辨析三个基本轨迹，最后探求轨迹图形[1]-[3]。虽然在该课题上，人们已经做过一些教学研究，但还存在些许教学问题，如：教师不明确教学目的，对为什么要教轨迹心中无数[1]；学生也不明白轨迹学习的必要性。另一方面，教师对于轨迹概念的历史知之甚少，HPM 视角下的轨迹概念教学设计更是付之阙如。

鉴于此，HPM 工作室开展了“轨迹概念”的课例研究。执教者为教师 A 和教师 B（以下简称 A、B），他们的教龄均超过 10 年。尽管 A 和 B 采用了 HPM 的视角，也同样经历了选题与聚焦、研讨与设计、实施与评价的课例研究过程，但由于学校文化、教师旨趣、学生基础、史料选择、教学目标、教学设计等方面的差异，最终形成了效果不同、各具特色的两个课例。本文关注的问题是：两位教师如何选择和使用数学史？数学史在两节课中各体现了什么教育价值？两节课各有何特色？为了回答上述问题，我们采用 HPM 课例评析框架[4]对两节课进行比较分析，以期通过两节课的得与失，为未来的轨迹概念教学以及 HPM 课例研究提供借鉴。

2 历史素材

“大漠孤烟直，长河落日圆。”唐代诗人王维的诗句恰好说明，人们在现实生活中会见到各种直线和圆的形象。实际上，直线和圆正是这些形象经过抽象而成的几何概念，欧几里得（Euclid）在《几何原本》中给出两者的静态定义。古希腊人使用尺规来作图，甚至三大几何

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目“数学课程与教学中如何落实立德树人研究”（A8）系列论文之一。

难题也仅局限于用尺规来完成。很可能，正是在尺规作图的动态过程中，古希腊人感悟到静态的直线和圆，其实是通过点的运动而形成的两种轨迹。也即是说，再现尺规作图的过程，就产生了轨迹的概念。另外，现实世界物体的运动、天体的运动、流星等现象也必然会促进他们对轨迹的认识。到了公元前 4 世纪，古希腊数学家阿契塔（Archytas）明确提出“曲线是点的轨迹”的观点[5]。

在利用尺规解决三大几何难题遭遇失败后，古希腊数学家开始创用新的轨迹来解决这些问题。公元前 5 世纪，辩士学派的希皮亚斯（Hippias）利用正方形相邻两边的运动构造了一种新的轨迹——割圆曲线[6]；公元前 3 世纪，阿基米德（Archimedes, 公元前 287 年-公元前 212 年）则构造了沿射线运动的一点当射线本身绕端点沿逆时针方向旋转时的轨迹——阿基米德螺线[7]。割圆曲线和阿基米德螺线都可用来解决三等分角问题。

欧几里得《几何原本》中的一些命题与轨迹也有着密切的联系。第一卷命题 37：“同底且同位于两条平行线之间的三角形彼此相等”，第一卷命题 39：“同底同侧且相等的三角形同位于两条平行线之间”[8]，这两个命题分别对应于直线轨迹的纯粹性和完备性：

- 给定底边，则以底边的一条平行线上任一点为顶点的三角形面积彼此相等；
- 给定底边，则面积彼此相等的所有同侧三角形的顶点都位于底边的一条平行线上。

第三卷命题 21：“在一个圆中，同一弓形中的（圆周）角彼此相等”，第三卷命题 31 的一部分：“半圆上的（圆周）角为直角”[8]，对应的是圆弧轨迹的纯粹性：

- 以圆的弓形底边为底边，圆弧（不含底边的端点）上的点为顶点的所有三角形的顶角都彼此相等；
- 以圆的直径为底边，半圆（不含直径的端点）上的点为顶点的所有三角形的顶角都是直角；

如果我们相应地补充完备性，就分别得到：

- 给定底边，顶角相等的所有三角形的顶点都位于同一圆弧（不含底边的端点）上；
- 给定底边，顶角为直角的所有三角形的顶点都位于同一半圆（不含直径的端点）上。

公元前 3 世纪，古希腊数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius）在《平面轨迹》中证明了一系列平面轨迹命题[9]，其中与本节课联系密切的有：

- 到两条已知直线（平行或相交）的距离之比等于已知数的动点轨迹为直线；
- 到两定点距离之比等于已知数的动点轨迹为直线或圆；
- 到 n 个定点的距离的平方和等于已知数的动点轨迹为圆。

17 世纪，法国数学家费马（P. de Fermat, 1601-1665）用运动来刻画轨迹：取一条固定直线及其上一固定点，当一条变线段的一个端点沿直线移动时，另一端点的运动即形成了轨迹[10]。类似地，同时代法国数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）通过建立坐标系（单轴、斜坐标）来研究轨迹问题。费马和笛卡儿成了解析几何的创始人。有了解析几何这一新工具，人们得以用代数方法来研究动点的轨迹。法国数学家拉希尔（P. de La Hire, 1640-1718）在《圆锥曲线新基础》中将椭圆定义为平面上到两定点距离之和等于常数的动点轨迹[11]，这个定义也可以改编为与三角形相关的轨迹命题："给定底边，周长相等的所有三角形的顶点都位于一个椭圆上。"荷兰数学家舒腾（F. van Schooten, 1615-1660）还设计了椭圆的多种机械作图工具。

在开展"轨迹概念"课例研究之初，教师 A 和 B 都研读了上述史料，并将部分史料用于教学设计。

3 宏观比较

课堂教学的基本要素包括教学目标、内容和行为[12]。本文先从教学重难点、教学目标及教学流程上对 A 和 B 的教学进行宏观比较。

3.1 教学重难点及教学目标

A 和 B 所拟定的教学重难点基本一致。

教学重点：（1）点的轨迹的意义；（2）轨迹的完备性和纯粹性。

教学难点：运用基本轨迹和描点法画出符合条件的轨迹，并能用数学语言或文字语言准确描述轨迹。

为了突出重点，突破难点，A 和 B 对教学目标的定位如下：

（1）依据实际生活中的轨迹形象，理解点的轨迹的概念与现实意义；

（2）经历轨迹的探究活动，会用运动的观点看待数学图形，会从完备性与纯粹性的角度分析轨迹，能够运用基本轨迹和描点法画出轨迹，在此过程中提高逻辑推理素养、直观想象素养以及数学表达能力；

（3）通过数学史，了解古代数学家的轨迹思想，提升学习数学的兴趣，激发研究数学的信心。

但在目标（3）中，B 还增加了："借助数学史，感受古人在研究中的智慧，体会数学的理性精神。"

3.2 教学流程

表 1 给出了 A 和 B 的教学流程。由表中可见，两位教师的教学过程都包含六大环节，但进度和安排彼此不同。A 的设计与已有教学设计类似，前两个环节通过创设情境引入轨迹概念，第三个环节直接给出三个基本轨迹并进行纯粹性和完备性（以下简称“二性”）辨析，第四个环节重在习题训练，第五个环节从数学的轨迹上升到人生的轨迹。

B 采用了翻转课堂的形式。学生在前一天已利用 HPM 微视频进行自学，所以对轨迹概念已有一定的认识，但他们的理解不一定正确，于是 B 在第一个环节通过对照不同学生的回答，强调运动与集合的观点，以纠正部分学生对轨迹概念存在的错误认识。在第二个环节，学生进入基本轨迹和二性辨析的学习，不同于 A 的直接讲授，B 在此环节中使用几何画板，辅助学生直观理解关于二性的辨析过程；在第三个环节让学生学会运用基本轨迹解决问题；第四个环节学生以小组为单位进行习题探究；第五个环节进行小结。另外，在布置作业环节，B 布置了基于数学史提出的、难度相对较大的轨迹问题。

表 1 两位教师的教学流程对比

环节	教师 A	环节	教师 B
情境引入	行星运动轨迹的动画演示，感受轨迹的动态定义；国庆阅兵中，喷气式飞机表演时留下轨迹，感受轨迹之美。	检查自学	列举生活实例引入轨迹，学生表述自学后对轨迹概念的理解；初识费马及其轨迹思想。
概念探究	1. 结合情境，辨析“轨道”、“路线”、“印迹”与“轨迹”的联系，揭示“轨迹”定义； 2. 播放 HPM 微视频，让学生了解历史上数学家对轨迹的研究。	回顾理解	1. 通过几何画板，分析三个基本轨迹的纯粹性和完备性； 2. 组内交流基本轨迹； 3. 介绍基本轨迹来源于阿波罗尼奥斯的《平面轨迹》。
初步应用	1. 呈现三个基本轨迹，并从纯粹性和完备性上加以解释说明； 2. 例 1：底边为定长的等腰三角形的顶角顶点的轨迹； 例 2：经过定点 A 且半径为 1cm 的圆的圆心的轨迹。	解决问题	例题 1：以 AB 为底边的等腰ΔABC 的顶点 C 的轨迹； 例题 2：以 AB 为腰的等腰ΔABC 的顶点 C 的轨迹； 例题 3：与两条相交直线 l_1、l_2 距离相等的点的轨迹。

变式拓展	习题 1：到两个定点 A、B 距离相等的点的轨迹； 习题 2：$AB = 3\text{cm}$，到两个定点 A、B 距离之和为 3cm 的点的轨迹； 变式：到两个定点距离之和为 4cm 的点的轨迹； 介绍数学家拉希尔和舒腾。	探究轨迹	已知：以线段 AB 为一边的ΔABC， 习题 1：画出使ΔABC 面积保持不变的顶点 C 的轨迹； 习题 2：画出使得 $AC \perp BC$ 的顶点 C 的轨迹。
课堂小结	学生自主小结在本节课中的收获、感想与困惑，思考成长的轨迹中需要努力奋斗。	课堂小结	学生总结收获，并思考：在生活中只有点有轨迹吗？
布置作业	配套练习册。	布置作业	1. 探究阿波罗尼奥斯《平面轨迹》一书中的问题：①到两条定直线的距离之比等于 1 的点的轨迹；②到两条定直线的距离之比等于 2:1 的点的轨迹。 2. 以线段 $AB = 3\text{cm}$ 为一边的ΔABC，画出使得 $AC + BC = 4$ 的顶点 C 的轨迹。

两位教师都使用了 HPM 微视频。A 在第二个环节中利用 HPM 微视频介绍轨迹的部分历史，主要包括阿契塔、阿波罗尼奥斯、阿基米德的研究成果，并展示了生活中的轨迹实例。B 让学生利用 HPM 微视频课前自学，视频主要呈现了生活中的轨迹形象（如流星），介绍了三大基本轨迹以及费马的轨迹思想，归纳了轨迹探求的常见方法。

4 微观比较

我们从史料的适切性、方式的多样性、融入的自然性和价值的深刻性四个维度，对两节课进行微观比较。

4.1 史料的适切性

数学史料的选取需要遵循趣味性、科学性、有效性、可学性、人文性五项原则[13]，两位执教者在各教学环节所用历史素材对比见表 2。

A 和 B 所选用的史料都是 HPM 专业学习共同体的共享资源，源于原始文献或专业数学

史研究文献，符合科学性。但 A 在“概念探究”环节中介绍阿波罗尼奥斯的《平面轨迹》一书时，使用了圆锥曲线的配图。在古希腊数学中，平面轨迹只涉及直线和圆，圆锥曲线属于立体轨迹，因此 A 配图不恰当。

本节课的落脚点是轨迹问题的探求，A 在“初步应用”和“变式拓展”环节中、B 在“解决问题”和“布置作业”环节中，都根据阿波罗尼奥斯关于平面轨迹的命题和拉希尔的椭圆定义，提出有别于教科书和传统教辅书中的轨迹问题，都能促进学生掌握运用基本轨迹和描点两种方法，同时认识轨迹表达的精准性要求，从而实现本节课教学目标，符合有效性。另外，B 在“探究轨迹”环节还选择了《几何原本》中的有关命题。

表 2 两节课例中所用历史素材对比

环节	教师 A	环节	教师 B
情境引入	无	检查自学	费马的画像与生平； 费马的轨迹思想。
概念探究	阿契塔关于轨迹的观点； 阿波罗尼奥斯的《平面轨迹》； 阿基米德螺线。	回顾理解	阿波罗尼奥斯的画像与生平； 阿波罗尼奥斯的《平面轨迹》和《圆锥曲线论》。
初步应用	阿波罗尼奥斯关于平面轨迹的命题	解决问题	阿波罗尼奥斯关于平面轨迹的命题
变式拓展	阿波罗尼奥斯关于平面轨迹的命题； 拉希尔的椭圆定义； 拉希尔的画像； 舒腾的椭圆作图工具（动画演示）。	探究轨迹	《几何原本》中的有关命题
布置作业	无	布置作业	阿波罗尼奥斯关于平面轨迹的命题； 拉希尔的椭圆定义。

阿波罗尼奥斯关于平面轨迹的命题是初中数学中三个基本轨迹的来源，对应学生在上节课所学的三个几何定理及其逆定理；《几何原本》中的有关命题则对应学生此前学过的平行线的性质（两平行线间的距离处处相等）、圆周角的性质（直径上的圆周角等于 90°）。两则史料均符合学生认知基础，并有助于加深学生对轨迹的理解，符合可学性。但前者基本局限于三个基本轨迹，后者不仅牵引出其他轨迹，而且以三角形为背景，在问题解决过程中，学生需要注意排除三角形底边端点，做到“不多不漏”，因此 B 的问题更有助于引发学生的认知冲

突，加强学生对二性辨析的意识。

教科书和已有教学设计一般仅从生活实例出发，让学生感受几何中的运动与变化，而 A 在“概念探究”环节采用了阿契塔关于轨迹的观点、阿基米德螺线以及在“变式拓展”环节舒腾椭圆作图工具的动画演示，B 在“检查自学”环节介绍了费马的轨迹思想，都使学生感受到运动对轨迹生成的重要性，同时领悟轨迹形成过程中存在着不变的关系，这是生活实例所无法呈现的效果。既生动有趣，又非老生常谈，符合趣味性。

A 和 B 都展示了相关数学家的画像与数学贡献，B 还介绍了费马对数学研究的热衷与勤勉、阿波罗尼奥斯在轨迹研究上的执着与创新，激励学生努力上进，符合人文性。

4.2 方式的多样性

A 利用 HPM 微视频介绍轨迹概念的历史片段，旨在让学生了解轨迹的源与流；在课堂实施过程中，介绍拉希尔给出的椭圆轨迹定义以及舒腾发明的椭圆作图工具。这些都是通过展示相关数学家的画像、讲述其数学成就的方式呈现数学史，属于附加式。

B 展示了费马和阿波罗尼奥斯的画像与生平，也属于附加式。B 还通过几何画板动态呈现费马的轨迹思想，以激发学生对运动与轨迹生成的理解。先是展示变线段长度固定且垂直于定直线时表示匀速运动的直线轨迹，即费马轨迹思想中的一类情况，接着调节变线段的变化规律，得到两种不同的曲线轨迹（如图 1），再使变线段与定直线成固定角度，同样可以得到直线或曲线轨迹（如图 2）。B 在上述教学过程中借鉴史料并适当对其加以改编，重现费马的轨迹思想的同时，融入了自己的理解，属于顺应式。

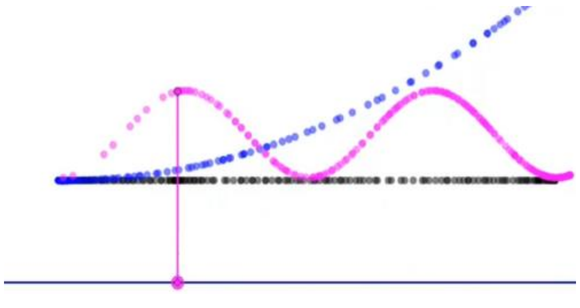


图 1 变线段垂直于定直线所成轨迹

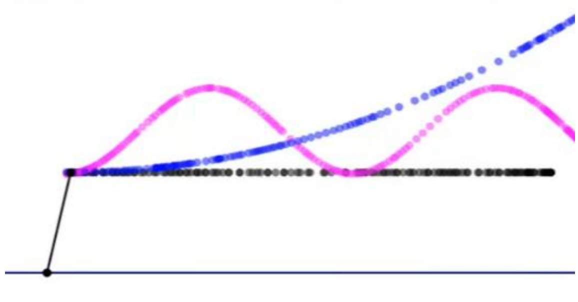


图 2 变线段与定直线成一固定角所成轨迹

两位教师都根据历史材料编制了轨迹问题，属于顺应式。A 的例题 1、习题 1、习题 2、变式题和 B 的 8 个问题均源于数学史料，具体改编方式见表 3。

表 3　A 和 B 如何根据史料编制轨迹问题

数学史料	出处	改编策略	形成问题
到两定点距离之比等于常数的动点轨迹为直线或圆。	《平面轨迹》	将条件特殊化，取距离之比为 1:1，且增加ΔABC 的情境	A：例题 1、习题 1 B：例题 1
到 n 个定点的距离的平方和等于已知数的动点轨迹为圆。	《平面轨迹》	将条件特殊化，到定点的距离等于给定线段的长度，且增加ΔABC 的情境	B：例题 2
到两条已知直线的距离之比等于已知数的动点轨迹为直线。	《平面轨迹》	将条件特殊化，两直线相交，取距离之比为 1:1	B：例题 3
		将条件特殊化，取距离之比为 1:1 和 1:2	B：作业题 1
同底且同位于两条平行线之间的三角形彼此相等；同底同侧且相等的三角形同位于两条平行线之间	《几何原本》	将条件一般化，不要求三角形在同侧，保持目标不变	B：习题 1
在一个圆中，同一弓形中的（圆周）角彼此相等；半圆上的（圆周）角为直角。	《几何原本》	以ΔABC 为情境，将命题的条件与目标互换	B：习题 2
拉希尔的椭圆轨迹定义	《圆锥曲线新基础》	改变条件和目标	A：习题 2
		以ΔABC 为情境，改变史料中的条件	A：变式 B：作业题 2

由表 3 可见，B 更灵活多样地编制新问题，一方面基于一则史料能形成难度差异较大的不同问题，另一方面问题基本都以ΔABC 为背景，部分问题之间具备关联性和递进性，体现了史料顺应式应用的创新性。

另外，A 和 B 都没有采用复制式和重构式。

4.3 融入的自然性

在 HPM 视角下的数学教学中，数学史主要充当改善教学的工具，教师需要分析数学知识点的逻辑序、历史序以及学生的心理序，只有将三者统一起来，才能达到自然无痕的教学境界。

根据前面的历史分析，平面轨迹概念的历史大致分成以下几个阶段：

- 萌芽阶段：数学外部的因素（物体的运动轨迹）和内部因素（尺规作图、问题解决）促进了轨迹概念的产生；
- 形成阶段：静态曲线和动态轨迹有机统一，个别平面轨迹的纯粹性和完备性研究；
- 发展阶段：平面轨迹的系统研究和应用。

关于萌芽阶段的历史融入，A 和 B 的教学都从数学外部因素切入以引入抽象的纯数学概念，既遵循上述历史序，也符合教科书所呈现的逻辑序（从生活实例到三种基本轨迹）。但 A 和 B 都未涉及数学内部因素，未能真正解释轨迹概念诞生的历史动因，更无法指出概念学习的必要性，因而不足以激起学生强烈的学习动机。

关于形成阶段的历史融入，虽然 A 和 B 都采用了根据数学史料改编而成的轨迹问题，但教师未能进行古今联系，也影响了数学史融入的自然性。实际上，虽然在轨迹概念的形成阶段，古希腊数学家在个别轨迹上呈现了纯粹性和完备性，但多数情况下，他们往往只关注纯粹性而忽略完备性，甚至将两者等价起来。A 和 B 的课堂上也有学生出现了类似的错误，这种错误具有明显的历史相似性。如果教师在学生出现错误时，提及古希腊数学家类似的疏忽，数学史的应用就变得水到渠成、自然而然了。

A 和 B 选用的数学史基本集中于前两个阶段，但不必严格按照历史发生的顺序呈现。弗赖登塔尔认为，教学不必原原本本地按照历史发展的历程在学生身上重现[14]。整体上看，A 将主要的史料按时间顺序排列，“打包式”地浓缩在一个微视频中，但只是叙述“流水账”，学生在看完视频后不了了之。B 没有完全将历史的发展顺序作为课堂教学的逻辑顺序，而是视教学需要融入历史，在环节一剖析轨迹概念后，链接费马的轨迹思想，在环节二讲解三个基本轨迹后进行提问：“那么这三个基本轨迹大家知道是哪个数学家研究出的吗？”，适时地引入相关史料，构建起史料与知识之间的联系。但 B 只选用了一处关于轨迹概念本身的史料，且各史料间彼此独立，无法让学生认识到概念的发展过程和数学家在其中起到的突破性作用。如果教师能使用发生教学法，重构轨迹的演变进程，并注重史料与所学内容之间的对应，会更符合学生的心理序，使学生更自然地接受数学史。

4.4 价值的深刻性

A 和 B 都根据史料改编了难度不同的轨迹问题，为学生提供了探究机会。学生仿佛穿越时空，与古代数学家一起数学问题的探究过程。B 更是通过小组合作，让学生在交流与讨论中暴露数学思维。轨迹问题的探究是演绎推理的过程，有助于逻辑推理素养和直观想象素养的培养，因而数学史帮助教师实现了“能力之助”。两位教师都利用 HPM 微视频展示轨迹的历史片段；B 还再现了费马的轨迹思想，因而 A 和 B 的教学都部分体现了数学的“文化之魅”。

课堂中融入数学文化的根本目的在于育人，本节课的价值还在于德育之效。一来是对学生数学学习信念的培养。数学史的融入给学生创设机会，学生得以穿越时空与数学家对话，想数学家所想，给学生以自信，他们也能解答古希腊数学家费尽心思研究的问题，阿波罗尼奥斯可以视为课堂中一名额外的学生[15]。而从事律师工作的费马喜欢数学，他利用业余时间始终坚持自己的兴趣，在数学研究上作出了杰出的贡献，费马成功的人生轨迹的起点正是他对数学的兴趣与痴迷，以此激发学生对兴趣的坚持和对学术研究的向往之心。二来是培养学生良好的道德品质，例如，B 指出费马为人谦逊敦厚、公正廉明，引导学生养成谦虚、正直等重要品质。

5 结论与教学启示

从两节课的比较分析来看，各有特色。共性在于，A 和 B 在史料的选取上，都符合科学性、有效性、可学性、趣味性和人文性；运用数学史的方式都为附加式和顺应式；在数学史的教育价值上，两节课都体现了探究之乐、能力之助、文化之魅和德育之效；但两位执教者都未采用重构式重现知识的发生历史，没能揭示“轨迹”在历史长河中的嬗变过程，缺乏数学史于“知识之谐”方面的价值，在融入的自然性上也有待改进。差异在于，A 借鉴历史多而广，所选历史素材的数量更多，相较于 B 而言更为多元地展现了不同数学家对轨迹概念的认识与解释；B 借鉴历史少而精，将数学史与信息技术巧妙整合，使得数学史直观化、可视化，又多次借助数学家的生平趣事调动学生学习积极性，同时充分利用数学史提出诸多锐意创新的轨迹问题。

通过 HPM 视角下“轨迹概念”同课异构的比较与分析，得到启示如下：

（1）重视史料的剖析消化，构筑概念的学习动机。教师往往只看到史料的表面内容，而缺乏深度剖析的意识。深究轨迹概念的历史素材可知，轨迹概念产生的历史动因是数学内外

部的需要，即解决几何难题和研究生活实例。现如今学习轨迹概念除了解决数学内部问题，更有助于我们更好地研究现实中的轨迹，譬如，在对太空的奥秘进行探索时，要精确地把握行星的运行轨迹，这样才能实现太空遨游和嫦娥登月[16]。

（2）拒绝史料的生硬添加，追求三序的和谐统一。数学史的角色不是“花拳绣腿”，史料融入的自然性既要顾全历史的全局结构，又要顾及知识深化的各环节，还要联系学生发生数学知识的心理过程。历史序、逻辑序、心理序的统一才能实现有效的数学史融入课堂教学，教师需要做好引入史料前的铺垫和融入史料后的联系新知。

（3）关注史料的多元价值，提供学习的多种渠道。教科书作为知识讲述型材料，呈现的是静态的事实概要，模糊了动态的认识论过程，造成了“事实”在首位的错觉[17]。这些材料的稳定供应掩盖了科学的试探性、数学概念历史发展的曲折性以及不同数学家对其解释的多样性。而数学史能克服以上缺陷并且具有多元教育价值。但教师觉得一来是史料较多，二来是例如希皮亚斯发现割圆曲线的史料对于初中学生理解起来有一定难度，直接扼杀了学生了解史料的机会。实际上可以通过其他方式，例如印发阅读材料，提供学生自主学习的机会，相信学生有能力有兴趣了解知识之源。

（4）营造课堂的探究氛围，致力系统的问题设计。A、B 都通过练习给学生巩固知识的机会，B 更注重在探究过程中的同伴辅导与教师反馈。从教学效果上看，B 的课堂也更有生气，学生的解题方法和数学思维也更好。但两位教师所用的题目缺乏系统性，没有完整的逻辑线。可以基于数学史编制问题串，一是借助问题串重构知识的发生过程，二是给学生更清晰地探究思路，并在探究完成后进行系统总结，而不是就题解题。

（5）彰显多样的数学之美，孕育无穷的文化魅力。数学的文化之美令数学教育充满人文气息，张奠宙先生曾说：“在形式化了的数学背后，有生动活泼的思维过程，朴素无华的思想方法，乃至令人深思的人生故事。”轨迹的概念教学既有形式化了的基本轨迹，又有基于二性辨析的思维过程，还有分类讨论等数学思想，更有费马、阿波罗尼奥斯等数学家的故事，是传递数学美的理想课题。

参考文献

[1] 潘关崇. 我如何讲解初中平面几何的轨迹问题[J]. 数学通报, 1955(7): 39-43.

[2] 蔡兆生. 增设认知情节,化解思维障碍——《点的轨迹》探究性教学设计[J]. 数学教学研究, 2003(5): 21-23.

[3] 杨冰. 初中“轨迹”概念教学的难点剖析与突破策略[J]. 中国数学教育, 2018(23): 38-41.

[4] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(1): 35-41.

[5] 何思谦. 数学辞海第一卷[M]. 太原: 山西教育出版社, 2002: 159.

[6] Merzbach U. C., Boyer, C. B. *A History of Mathematics* [M]. New Jersey: Wiley, 2011: 62-63.

[7] Heath, T. L. *The Works of Archimedes* [M]. New York: Dover Publications, 1959: 165.

[8] Heath T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1908.

[9] Heath T. L. *A History of Greek Mathematics* [M]. Oxford: Clarendon Press, 1921: 185-189.

[10] 汪晓勤, 柳笛. 平面解析几何的产生（二）——费马与解析几何[J]. 中学数学教学参考, 2008(1-2): 122-122.

[11] 王鑫, 汪晓勤, 岳增成. 基于数学史的数学探究活动设计课例分析[J]. 中学数学月刊, 2018 (10): 54-58.

[12] 施良方, 崔允漷. 教学理论(课堂教学的原理策略与研究)[M]. 华东师范大学出版社, 1998, 138.

[13] 陈晏蓉, 汪晓勤. 数学史料的选取原则与案例分析[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(12): 37-43.

[14] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 上海: 上海教育出版社, 1995, 3.

[15] 岳增成, 刘轩如. 课堂中一名额外的学生——数学史融入“两位数被一位数除”的教学[J]. 小学数学教师, 2017 (Z1): 89-93.

[16] 王克亮. 高中数学文化教育在引言课中的实施策略初探——以“平面解析几何引言课”为例[J]. 数学通报, 2019, 58(12):19-22.

[17] Goldman, S. R., Pellegrino, J. W. Research on Learning and Instruction: Implications for Curriculum, Instruction, and Assessment [J]. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, 2015, 2(1): 33-41.

HPM 视角下的排列教学*

方倩

（华东师范大学第一附属中学，上海 200086）

1 引 言

“排列”是沪教版第 16 章第 2 小节的内容，教科书用生活中具体的例子引入，利用树状图计算结果，接着运用乘法原理（前一节内容）解释结果并推导排列数公式。对教师和学生的调查表明，学生对于排列组合的学习困难如下：（1）对排列概念的理解不透彻；（2）机械套用教材中的排列组合的公式；（3）公式的使用和计算易出错；（4）通过记忆解题方法来解题，缺乏思考；（5）对同一问题的不同解法掌握得较差。[1]

在资料搜集的过程中发现，排列的新课教学设计屈指可数，教师一般都按照书本内容展开教学，运用乘法原理对排列数公式作出证明。排列组合内容的学习对学生的逻辑推理能力、数学抽象能力、分析问题和解决问题的能力有较高的要求，基于学生的学习困难，作为排列的第一课时，希望结合数学史加深学生对排列概念的理解，寻求历史上合适的排列数公式的推导方法，进一步理解排列数公式，培养学生的数学思维能力，同时，也让学生在课堂上经历排列知识的演进历程。

由此，本节课拟定的教学目标为：（1）理解排列、排列数的概念；（2）掌握排列数公式的证明方法，感受数学的方法之美，领会其背后的数学思想；（3）了解排列知识在历史上的演进过程，培养动态的数学观，感悟数学文化的多元性。

2 数学史料的运用

2.1 排列公式的出现

历史上早就出现了排列组合问题。公元前 7 世纪，中国《易经》的六十四卦图即是阴爻“--”和阳爻“—”的重复排列，共 2^6 种卦象[2]。古希腊天文学家希帕恰斯（Hipparchus，前 190？~前 120？）和哲学家克里西普（Chrysippus，前 280？~前 207？）尝试计算 10 个公理

* “上海高校立德树人人文社会科学重点研究基地”之数学教育教学研究基地项目——数学课程与教学中如何落实立德树人任务的研究（A8）系列论文。

的不同排列数，但未求出准确结果。[3]

公元前 300 年左右，印度耆那教的文献中已提及相关的排列问题，并且当时已知晓 3 个排列数 P_n^1, P_n^2, P_n^3。印度教中的哈利神（Hari）四只手中分别拿着铁饼、狼牙棒、贝壳和莲花，根据 4 样物品的排列不同，哈利神就有不同的名字，共有 4！种[4]。

在犹太数学文献《创造之书》（不迟于 8 世纪）中，作者给出了 22 个希伯莱字母的全排列[3]。公元 8 世纪，一位印度的词典编纂者卡利勒·伊本·艾哈默德（717-791）对阿拉伯语中的单词进行分类，他计算了由阿拉伯文的 28 个字母中取 2,3,4 或 5 个字母组成的单词的个数。12 世纪，印度数学家婆什迦罗在他的《丽罗沃蒂》中给出一次从 n 件物品中取 r 件的（可重复或不重复）排列数的算法。13 世纪初，艾哈默德·伊本·穆恩伊姆（Ahmad Ibn Mun’im）在处理排列问题时得出结论：不管一个单词有多长，它的字母的排列数是 1 乘以 2 乘以 3 乘以 4 乘以 5 等等，直至该词的字母数[5]。

公元 10 世纪，多诺罗在注释《创造之书》时证明了 n 个字母的全排列数。13 世纪末，阿拉伯数学家伊本·阿尔巴拿（Al-Banna）给出并证明了全排列数及排列数公式 P_n^r。[3]

2.2 排列公式的证明

2.2.1 热尔松的证明

在 14 世纪，法国犹太数学家本·热尔松（L. ben Gerson, 1288~1344）在其代表作《数之书》（*Maassei Choscheb*）中证明了 n 个元素的全排列数 $n!$，作者首先证明了[3]：

命题 1：如果 n 个不同元素的排列数为某个固定的数，那么 $n+1$ 个不同元素的排列数为该数与 $n+1$ 的乘积。

设 n 个元素为 a，b，c，d，…，e，它们的排列数为 t。在 n 个元素的每一种排列前插入第 $n+1$ 个元素 f，可得 t 个不同的排列；以 f 代替 e，则 a，b，c，d，…，f 的排列数为 t。在每一个排列前插入 e，得到 t 个不同的排列。类似地，将每一个元素放在第一个位置，都得到 t 个不同的排列。因此，a，b，c，d，…，e，f 的排列数为 $(n+1)t$。热尔松由此命题证得 n 个元素的全排列数。

类似地，热尔松又证明了

命题 2：n 个不同元素中一次取 2 个排列数为 n 与 $n-1$ 的乘积；

命题 3：如果 n 个不同元素中一次取 $r(r<n)$ 个的排列数为 h，那么 n 个不同元素中取 $r+1$ 个的排列数为 h 与 $(n-r)$ 的乘积。

热尔松在证明了上述 3 个命题之后，通过命题 2 和命题 3 推出排列数公式 $P_n^m=(n-m+1)(n-m+2)\cdots n$。

2.2.2 早期教科书中的证明方法

1881 年，美国数学家温特沃斯（G. A. Wentworth, 1835-1906）在其《代数学基础》中对排列数公式作了证明，所用方法与今日教科书一致，即通过分步乘法计数原理进行证明[6]。1897 年，英国数学家鲍尔（W. W. R. Ball, 1850-1925）在其《初等代数》中则采用了热尔松的证明方法[7]。

1899 年，美国数学家费歇尔（G. E. Fisher, 1863-1920）等在《代数学基础》中给出了如下的证明方法：将从 n 个物体中取 r 个的排列数记为 P_n^r，观察树状图，利用枚举法可得 $P_4^1=4, P_4^2=12, P_4^3=24, P_4^4=24$，已知 $P_n^1=n$，对于 n 个物体，一次性选两个的排列数等于一次性选一个的排列数乘以剩下的数，即 $P_n^2=(n-1)P_n^1=n(n-1)$；一次性选三个的排列数等于一次性选两个的排列数乘以剩下的数，即 $P_n^3=(n-2)P_n^2=n(n-1)(n-2)$；同理，可推出 $P_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$[8]。

我们采用重构式进行整节课的教学设计。首先，通过哈利神的例子引入排列的概念（复制式），将艾哈默德对阿拉伯语中的单词分类问题改编为简单的字母问题（顺应式），加深学生对排列概念的理解。其次，利用三种证明方法推导出排列数公式（复制式）。最后，介绍了排列知识的发展过程（附加式）。

3 教学设计与实施

3.1 课题引入

师：同学们，我们来看他手上的 4 个东西分别是什么？（PPT 展示图片，见图 1）

生：琅琊榜、铁饼、贝壳和莲。

师：他是公元前 300 年左右印度教中的哈利神，他手上拿的东西顺序不一样，他的名字就不一样，那么他总共有多少种名字呢？

生：小声议论（有部分学生说 4 的 4 次方）。

图 1

3.2 概念生成

师：公元 8 世纪，一位印度的词典编纂者艾哈默德对阿拉伯语中的单词进行分类，他计算了从 28 个阿拉伯字母中取 2、3、4 或 5 个字母组成单词的个数。我们用英文字母来代替阿拉伯文，英文字母 a,b 可构成多少种二元单词？

生：两种：ab 和 ba。

师：(追问）英文字母 a,b,c 可构成多少种二元单词？

生：6 种，ab,ac,ba,bc,ca,cb（有极少数学生说 3 种)。

师：听到有同学说 3×2，是如何得到的？

生 1：第一个位置有 3 个，第二个位置有 2 个。

师：很好！你已经找到了比列举法更简便的方法，那么请大家思考，英文字母 a,b,c,d 可构成多少种三元单词？

生：(列举了其中的某些)。

师：我们一起来列举一下，首先，首字母是 a，那么第二位有 3 种选择 b,c,d，如若第二位是 b，那么第三位只能选 c 或 d，因此有 2 种情形；同理，第二位是 c 或 d，分别有两种选择，因此首字母为 a 的三元单词共有 $3\times 2=6$ 种。同理，首字母为 b,c 或 d 的三元单词有 6 种，因此三元单词共有 $4\times 6=24$ 种。

（教师板书，画出图 2 所示的树状图)。

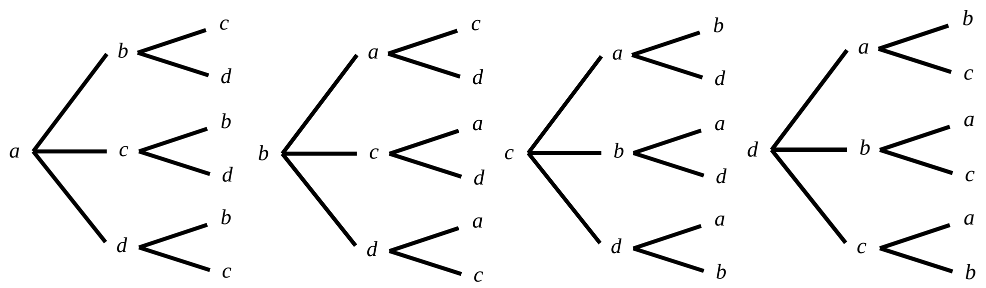


图 2

师：之前我们学习集合的时候，也会将集合的元素列举出来，这和集合元素有什么区别呢？

生：这个有顺序，集合的元素没有顺序。

师：我们上面组成的二元和三元单词，在数学上我们把它叫做一个排列。排列是指从n个不同元素中取出$m(m \le n)$个元素按照一定的次序排成一列，叫做从n个不同元素中取出m个的一个排列。结合上述例子，可以发现排列有什么特征？

生：元素不重复。

师：排列的特征是元素不重复且按照一定的顺序排列，也就是说排列的问题与位置相关。那么如果两个排列相同，可以得到这两个排列有什么关系？

生：元素一样，顺序也一样。

师：现在请同学们来说说生活中排列的例子有哪些呢？

生 2：学号、座位。

师：可见排列问题在我们生活中经常遇到，同学们刚刚举了很多种排列，比如学号等。那学号总共有多少种排列的方法呢？我们把这个称为排列数。排列数是指从n个不同元素中取出$m(m \le n)$个元素的所有排列的个数，叫做从n个不同元素中取出m个元素的排列数，用符号P_n^m表示，P是排列数的符号，是排列英文单词 Permutation，n是指元素的总数，m是指取出的元素个数。

师：下面用排列数的符号表示上述例题。

生：（1）P_2^2。

师：元素的总数是 2，取出的元素个数也是 2，因此为P_2^2。第二题呢？

生：P_3^2，元素的总数是 3，取出的元素个数是 2。

师：同理，第三题就是P_4^3，那么排列数的具体值又该如何计算呢？

生 3：值为 24，刚刚计算过了。

生 4：第一个有 4 种，第二个有 3 种，第三个有 2 种，所以乘起来就是 24 种。

3.3 证明方法探究

师：刚刚我们用树状图将其列举求出，但是当数值很大的时候，计算量就会很大。除此之外，我们可以从另一个角度理解第三题的三元单词由 3 个元素组成，第一个位置可以从 4 个字母中任选一个，第二个位置可以从剩下 3 个的字母中任选一个，最后一个位置只能从剩下的 2 个中选择，我们将其分成 3 步完成，运用乘法计数原理可得 $P_4^3=24=4\times3\times2$。

3.3.1 乘法计数原理法

师：分步乘法原理是指如果完成一件事需要 n 个步骤，第 1 步有 m_1 种不同的方法，第 2 步有 m_2 种不同的方法，第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1m_2\cdots m_n$ 种不同的方法。那么，请问从 $a_1,a_2,a_3\cdots,a_n$ 中取出 m 个的排列数为多少？

生 5：$P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$。

师：那你给大家解释一下公式是怎么得来的？

生 5：总共有 m 个位置，先画 m 个方格，第一个方格有 n 种，第二个有 $n-1$ 种，一直到最后有 $n-m+1$ 种选择，将所有的相乘得到 $P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$。

师：为什么最后一个方格是 $n-m+1$。

生 6：从第一个到最后一个找规律可以得到。

师：我们用分步乘法原理计算，总共可分为 m 个步骤，相乘即可。我们也可将 P_n^m 写成阶乘的形式即 $P_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，一个正整数的阶乘是指所有小于及等于该数的正整数的积，自然数 n 的阶乘写作 $n!$。规定 $0!=1$。（板书推导排列数公式）

师：我们观察排列数的公式，m 与 n 之间有什么大小关系呢？

生：n 大于 m，因为我们是从 n 个中选出 m 个。

师：那可以等于吗？

生：可以。

师：因此 n 大于等于 m，且为正整数。当 $m=n$ 时，$P_n^m=P_n^n$，此时，$n-m+1=1$，则

$P_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$，这种排列我们就称为全排列，我们把$n$个不同元素全部取出的一个排列，叫做$n$个元素的一个全排列。

3.3.2 热尔松证明法

师：刚刚我们同学用分步乘法计数原理的方法证明了排列数公式，也是教科书中的证明方法。那我们一起看看历史上有什么证明方法，早在 14 世纪，法国犹太数学家本·热尔松在其代表作《数之书》中也证明了n个元素的全排列数$n!$。为了证明排列数公式，他分别用了 3 个命题来说明。

热尔松首先证明第一个命题：如果n个不同元素的排列数为某个固定的数，那么$n+1$个不同元素的排列数为该数与$n+1$的乘积。我们用现代的数学语言表述一下：n个不同元素的排列数，即P_n^n；$n+1$个不同元素的排列数，即P_{n+1}^{n+1}，原命题就等价于证明$P_{n+1}^{n+1} = (n+1)P_n^n$，请同学自己动手证明一下。

生 6：画$n+1$个小方框，第$n+1$个元素可以放在$n+1$个小方框中的任何一个当中，剩下的n个元素有P_n^n种排法，所以就是$(n+1)P_n^n$。

师：说得很好！这位同学对$n+1$个元素的全排列是分两步完成，第一步，先将第$n+1$个元素在$n+1$个位置中挑选一个排好，第二步，剩下的n个元素全排列，运用分步乘法原理可证明上述公式。

师：热尔松是这么证明的。设n个元素为a，b，c，$d,\ldots$，它们的排列数为t。在n个元素的每一种排列前插入第$n+1$个元素f，可得t种新的排列f，a，b，c，$d,\ldots$；如果说最开始n个元素是f，b，c，$d,\ldots$，插入第$n+1$个元素a，也可得n种新的排列a, f，b，c，$d,\ldots$，即：交换f与a的位置，同理，f可与b，c，$d,\ldots$交换，因此$n+1$个元素的排列数为$(n+1)t$。然后，热尔松说全排列的公式即可证明。显然，同学们的证明比热尔松的证明更简洁！

师：通过上述推理，是否有同学可以证明全排列公式呢？

生 7：用累乘法证明，$P_{n+1}^{n+1} = (n+1)P_n^n$，则$P_n^n = nP_{n-1}^{n-1}\cdots P_2^2 = 2P_1^1 = 2\cdot 1$，将所有等式两边的左边相乘等于等式右边相乘，约掉相同的项可以得到全排列数公式。

师：很好！累乘法在这里也可以直接运用等式的迭代，$P_n^n = nP_{n-1}^{n-1}$，则

$P_{n-1}^{n-1}=\left(n-1\right)P_{n-2}^{n-2}$，即 $P_n^n=n\left(n-1\right)P_{n-2}^{n-2}$，以此类推，若一直迭代下去，会得到全排列数公式。

师：类似地，热尔松又证明了以下两个命题：n 个不同元素中一次取 2 个排列数为 n 与 $n-1$ 的乘积；如果 n 个不同元素中一次取 $r(r<n)$ 个的排列数为 h，那么 n 个不同元素中取 $r+1$ 个的排列数为 h 与 $\left(n-r\right)$ 的乘积，同样地，我们将它翻译成数学语言，即 $P_n^{r+1}=\left(n-r\right)P_n^r$。（PPT 展示）

师：这部分递推关系的推导同学们可以课下探讨研究，那么根据递推公式 $P_n^{r+1}=\left(n-r\right)P_n^r$，类似于上面我们证明全排列公式的步骤，我们运用迭代法或者累乘法即可推导得出排列数的公式 $P_n^m=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots\left(n-m+1\right)$。

3.3.3 归纳法

师：国内教科书大多是运用分步乘法原理，那么在 19 世纪中叶到 20 世纪初的西方早期教科书中主要流行 3 种证明方法，这 3 类方法运用程度不分伯仲。一是分步乘法原理法，二是热尔松的证明方法，还有第三种归纳法。

师：从 n 个物体中取 r 个的排列数我们记为 P_n^r，已知 n 个元素取一个，有 n 种选择，即 $P_n^1=n$；对于 n 个物体，一次性选两个的排列数等于一次性选一个的排列数乘以剩下的数，即 $P_n^2=\left(n-1\right)P_n^1=n\left(n-1\right)$；一次性选三个的排列数等于一次性选两个的排列数乘剩下的数，即 $P_n^3=\left(n-2\right)P_n^2=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)$；同理，可推出 $P_n^r=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots\left(n-r+1\right)$ 以此类推就可得到排列数公式。

生 8：感觉最后一种方法和热尔松的思路差不多。

师：很聪明！两种方法都运用了迭代法（累乘法），区别在于热尔松递推关系的推导主要是等价转化的思想，而早期教科书主要是归纳的思想，书本中是有顺序地运用分步乘法进行计算。

师：学完排列数公式后，我们一起来看看哈利神总共有多少名字？

生：$P_4^4=4\times3\times2\times1$。

3.4 知识巩固

教师在 PPT 中依次给出排列相关的 3 道例题，例 1 求解具体数字的排列数，强调运用分

步计数原理来计算排列数的方法；例 2 让学生板演，加强学生对排列数公式的运用能力；例 3 帮助学生深刻理解排列的概念，解决简单的实际问题。

例 1.计算：P_{10}^{4}。

例 2.求证：$P_n^m + mP_n^{m-1} = P_{n+1}^m$。

例 3.全班 35 名同学两两互发一条微信，共发了多少条微信？

3.5 课堂小结

介绍排列内容的历史演进历程，由学生自由发言，引导学生回顾本节课的主要内容。

教师进一步总结：1）知识层面：排列的概念，排列数公式的三种证明方法；2）思想层面："从特殊到一般"和"归纳递推"的数学思想方法；3）情感层面：学生想出与古人类似的方法，且更方便快捷，超越古人，每个人都是一名当之无愧的数学家，激励学生学习数学的热情。

4 学生反馈

课后，笔者对两个班级 79 名学生作了问卷调查，其中的 2 名学生作了访谈。

4.1 问卷调查结果

问卷结果显示学生对数学史融入数学教学的接受程度较高，甚至有一部分同学是非常喜爱的。为了了解学生对排列知识的掌握程度，在问卷中设计了 3 道填空题和一道简答题：

（1）写出从 a，b，c，d，e 五个元素中任意取两个元素的所有排列为____；（2）10 名同学排成一排照相，总共有____种不同的排列方式；（3）有 5 本不同的书，要分别包上包书纸，现有花色不同的包书纸 6 张，每张包书纸只能包一本书，共有_____种不同的包法；（4）请你写出排列数的公式以及推导过程。

上述 4 题正确率分别为 96.2%，93.7%，92.4%和 82.3%。其中第 1 问有 3 位将排列写成了组合；第 2 问有 5 位未能给出正确的答案，1 位空白，1 位写了"不会做"，3 位给出了排列数公式正确，但结果错误；第 3 问有 2 位列出了排列数的公式，但未给出计算结果，有 3 位排列数正确，但是排列数公式用错，还有 2 位计算错误。第 4 问所有的学生都作答了此题，其中有 12 位未给出推导过程，2 位推导过程错误。可以看出绝大多数的学生掌握了排列数公式及其推导，另外，值得惊喜的是，有 2 位运用了热尔松的证明方法。

对于问题：提及"排列"会想到什么？主要有下列 4 类回答：（1）数学史相关，如数学

家名字、哈利神等；（2）排列知识相关，如全排列，树状图等；（3）数学方法，如枚举法，归纳法等；（4）与其他学科领域的联系，如生物遗传，同分异构体等。

对于问题：这节课中印象最深的是什么？主要有下列 4 类回答：（1）公式的推导，学生认为学习不同的推导方法，给出了新的思路；（2）数学史相关内容，数学家、哈利神的引入让学生印象深刻；（3）课堂内容：排列数公式等；（4）其他，如教学方式、授课形式等。

4.2 学生访谈结果

从学生访谈中可以发现与上述调查问卷的情况基本吻合，学生对数学史融入数学教学持有积极的态度，在高考的大背景下，学生希望能在课堂知识掌握的情况下，了解数学史内容让课堂不枯燥，能激发学生的学习兴趣。另外，学生喜欢能使数学知识变得简单易懂的史料，如一些巧妙的解题思路与方法。

5 结 语

借鉴数学史可以更深切地体验历史上数学家的智慧，从史料中获得灵感，融入于教学设计之中，开发新的课例。从问卷结果看，本节课基本完成了教学目标，绝大多数同学掌握了排列数公式的推导方法，对数学史融入课堂教学表示认可，对于排列数的三种证明方法表现出了强烈的兴趣。排列数公式的三种证明方法，一是运用教科书中的乘法计数原理，在分步的过程中加强学生对排列有序性的理解；二是热尔松的证明方法，运用递推、等价转化的思想先对全排列公式进行详细的证明，再通过类比得到排列数公式；三是早期教科书中的归纳法，与热尔松之法思路相似，通过两种方法的对比，引导学生正确地理解运算对象，合理地选择运算方法，有助于培养学生的数学抽象与逻辑推理能力。

本节课中引入部分运用哈利神的例子，学生对改编的字母编排问题的积极讨论，让学生感受数学的“探究之乐”。三种方法层层递进式地进行讲解，让证明的过程清晰化，培养学生的数学思维能力，拓宽学生视野，展现数学的“方法之美”，也让学生了解到数学公式的证明在不同时期是不同的，随着人类的进步，数学也在不断地完善中，培养学生勇于探索的精神，体现了“德育之效”的价值。最后，课堂上呈现排列概念的历史演进过程，让学生感受知识的源与流，也看到不同时空数学家在排列数公式上的贡献，从而感受数学的“文化之魅”。

参考文献

[1] 胡海霞, 汪晓勤. 影响高中生组合推理的因素[J]. 数学教育学报, 2009, 18(6): 26-29.

[2] Katz, V. J. *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*[M]. The Mathematical Association of America, 2000, 191-200.

[3] 汪晓勤, 韩祥临. 中学数学中的数学史[M]. 北京: 科学出版社, 2002, 81-85+210-215.

[4] 刘建军. 组合学思想的东方起源[J]. 西北大学学报（自然科学版）, 2001, 31(5): 458-460.

[5] Katz, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction* [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004, 208-211.

[6] Wentworth, G. A. *Elements of Algebra* [M]. Boston: J. S. Cushing & Co, 1881, 320-331.

[7] Ball, W. W. R. *Elementary Algebra* [M]. Cambridge: The University Press, 1897, 386-391.

[8] Fisher, G. E., Schwatt, I. J. *Elements of Algebra* [M]. Philadelphia: Fisher and Schwatt, 1899, 408-410.

他山之石

如何通过访谈研究教师数学史观

——“教师的数学史观”一文评介

张佳淳

（华东师范大学教师教育学院　上海 200062）

1 相关背景

1.1 来源出版物简介

《Recent developments on introducing a historical dimension in Mathematics education》一书收录了 24 篇来自数学史与数学教学关系国际研究小组会议（HPM 小组）和欧洲暑期大学之数学教育中的历史与认识论国际会议(ESU)的参会者根据会上发言提交的论文（来自 13 个国家），旨在呈现 HPM 小组包罗万象的研究成果，并为教师们提供许多新的想法，促使不同教育阶段的教师将数学史融入到教学中。《Teachers' Conceptions of History of Mathematics》[1]收录于该书第三部分“数学史在教师教育中的运用”。

1.2 作者简介

Bjørn Smestad 是挪威奥斯陆大学学院的教师教育家,1998 年成为教师教育工作者后，主要研究兴趣：数学教育中的数学史以及数学教育中的技术，特别是数学史在挪威学校中的地位。自 2000 年始，一直是 ESU 和 HPM 会议的定期参与者和贡献者，2004 年以来，一直是 HPM Newsletter 的编辑。

2 文章评介

在这篇论文中，作者描述了一个关于挪威教师数学史观的访谈研究，内容包括背景、研究问题、研究方法、研究对象的选择、研究结果等。

2.1 背景

2.1.1 挪威教育背景

挪威的小学、初中阶段在 1997 年启用新课程，数学史被放在一个突出的位置，在《挪威 10 年义务教育课程文件》中数学六大主要目标之一就是让学生深入了解数学的历史和它在文

化与科学中的作用，另外在几个年级的具体目标中也提到了数学史。然而，与新课程匹配的教科书中涉及数学史的内容并不多，部分内容既无法激发学生进行探究，还存在一些错误，且大多由枯燥的生平信息(如出生年份和原籍国)组成，很少涉及概念的发展、数学家研究数学的动机或数学在历史上是如何被使用的[2]。高中阶段的情况则有所不同，多年来教科书都包括数学史，且高中数学教师大多来自大学数学系，而小学和初中教师来自师范院校。

根据 TIMSS 在 2003 年的研究结果显示，挪威很多小学和初中老师数学学分低，蕴含在其中的数学史内容更少[3]，而且教师的在职培训课程中不包含数学史[4]。

2.1.2 国际教育背景

截至作者发文时，国际上没有关于数学史是如何被纳入数学教育的研究综述。

一项 TIMSS 在 1999 年视频研究的分析显示，来自 7 个不同国家的 638 节数学课中，只有 3%包含了一些数学史。即使在这些课程中，分配给数学史的平均时间也只有 3 分钟，而且主要是课堂讲授，而不是以活动为基础，数学史内容也通常由传记信息组成[5]。

为了帮助教师深入了解历史和数学教学的结合领域，部分地区和国际上已经有了一些努力，例如美国的历史模块、意大利的资料本、台湾的师资培训和英国的师资合作；同时也出现了一些衡量数学史影响的实证研究。

2000 年 ICMI 的研究也指出教师可能存在的问题。关于尝试改变教学的研究表明，在讨论如何加强数学史在学校的应用时，深入了解教师的观念可能是有用的[6]。关于教师一般观念的研究很多，也有研究调查哪些使用数学史的方式可能影响教师的数学观或数学教学，而关于教师数学史观的研究却不多。有研究收集了教师对数学史有关材料的看法，大多数老师都觉得这些材料很有用，既可以用来激励学生，也可以用来教授重要的概念，但有相当一部分人认为占用的时间过多[7]；有研究对职前教师在教学前后进行问卷调查，发现职前教师更欣赏数学史的激励作用，而不是概念目的[8]；有研究列出了老师不使用数学史的原因[9]。

2.2 研究设计

2.2.1 研究问题与方法

研究问题是“数学教师对数学史的观念是什么，为什么?”，包括教师关于数学史的经历、对数学史的态度和看法。作者强调，他所感兴趣的是教师的数学史观和基于这个观念在课堂上的表现，旨在寻找各种不同的观点。

这项研究是通过访谈 4 位教师收集数据的案例研究；作者分别于在 2000 年和 2004 年对教科书[2]和课程[5]进行研究，已经了解教师（和教科书编写者）对数学史的看法，所以这项访

谈研究的分析会引用已有研究，也作为对先前两项研究发现的补充。

2.2.2 可推广度和信效度

这项研究并不追求很大的推广，而是注重于存在证明。例如，作者证明了受到一天讲座启发从而对数学史感兴趣的老师是存在的，但并没有试图说明有多少这样的教师存在。在案例研究中，研究者应该生产和分享信息，但是信息的接受者应该自行决定它是否适用于自己的情况[10]。案例研究可能被用来扩展和丰富从业者和其他人可用的社会建构体系;换句话说，它可能有助于形成问题，而不是找到答案[11]。所以，这项研究可以看做是开始记录对教师可能存在的数学史观，以丰富未来的讨论。

信度的保证通过两方面：一是，避免引导性问题。与研究结果的可靠性相关的一个问题是引导性问题，通过在提问准备好的问题之前询问老师自己的经历减少了引出问题的风险。但作者反思自己，一开始就询问关于数学史的问题，可能已经影响了老师。二是，相信转录的可靠性高。因为声音从来都不是问题，并且有机会一遍又一遍地检查以确保转录是正确的。

对于效度，首先，在访谈过程中，当不确定如何解释时，作者先问一些后续的问题。其次，在访谈结束时，向受访者提供了一个简短的总结，包括翻译（应该是指作者对受访者回答的理解），让受访者有机会发表评论。再次，通过解释学的螺旋分几个步骤分析文本，并且作者通过在一些会议上提出初步调查结果得到了反馈，也将其纳入分析中。

效度测试的另一种形式是教师对自己的数学史观的评价。当一个老师声称自己是一个数学发烧友时，他可以通过大量具体的例子来证明他是如何在他的教学中使用数学史的。如果他声称自己是个狂热分子，但又无法举出任何例子，那么他的说法就会更加令人怀疑了。

2.2.3 受访者的选择

受访者的选择主要有三项标准：不同学段、年龄和教育背景，四位受访者都是男性，作者没有对性别的要求，或许是方便抽样或者认为性别无影响，对四位教师的情况简介见表 1。

表 1 受访者概况表

教师	年龄	学段	教龄	备注
T1	40 岁	初中	10 年	自己和学生对数学史都不感兴趣
T2	40 岁	高中	20 年	受讲座启发
T3	60 岁	高中	40 年	从小就对数学史感兴趣
T4	50 岁	初中	10 年	受书启发，对不同文化很感兴趣，认识到文化之魅和德育之效

其中，T4 的班上有不同种族的学生，最开始运用数学史的目的是为了改变学生“所有的数学来自西方世界”的迷思概念，体现文化之魅；通过讨论和计算金字塔、非洲的圆形小屋、爱斯基摩人的冰屋等的面积，让学生意识到非洲人小屋比西方的好，由此增强非洲学生的自尊和自信，让他们知道在自己的文化中，祖先们建造更智能的房子，体现德育之效。

关于研究伦理的说明，作者通过联系学校和询问愿意参与的老师来招募参与者并且不强调要对数学史感兴趣。这四次访谈都是在几年的时间里进行的，所以作者通过分析之前的访谈，不断在接下来的采访中完善访谈指南。例如，前两次访谈，先询问在教学中加入数学史的原因，而另外两次访谈先询问每一位受访者上一次在教学中使用数学史是什么时候。

2.3 研究结果

文中分为 9 个关键问题讨论教师的不同之处：

①数学史是什么?

②教师们是如何获得他们的数学史观的?

③教师们对数学史感兴趣吗？

④教师们如何在教学中融入数学史？

⑤教师们在讲授数学史时的目标是什么？

⑥教师们如何看待学生们的反应?

⑦教师们认为他们需要什么样的资源?

⑧这些教师如何看待其他数学教师的数学史观?

⑨数学史应该列入课程吗?

例如对于问题 5 教师们的回答如下：

T1：“要激发这个年龄的学生并不容易，我认为学生们必须再大一点才能理解(数学史)的重要性。”

T2：“对一些人来说，这只是一个小小的消遣，是一种精神上的放松，但对另一些人来说，它可能更有助于精神上的成长，为进一步的研究提供建议，或者作为挂钩把它与他们学到的其他东西联系起来”。他还强调，数学史可以解释数学的重要性，并将“这门学科置于我们的文化和其他文化中”。

T3：“我曾试着用一些历史段落来增加教学的趣味性。我能举的主要例子是激励学生学习那些看起来枯燥乏味的话题。”但他也提到他用例子来激发更深层次的理解，比如他提到了 d'Alembert's misconception。

T4：他的目的既在于通过数学的历史让学生了解文化，也在于通过参考他们自己的文化来激励他们。

根据已有文献[12]，融入数学史的目标主要有两种，结合访谈结果作者再具体化并得出每个教师的观点，见表 2。

表 2 融入数学史的目标

种类	history as a tool	history as a goal
解释	指在理解数学(数学概念、理论等)时，利用历史作为辅助手段，致力于消除迷思概念。从这个意义上说，历史在动机、情感和认知方面都是有帮助的。	历史的主要目的不是作为一种辅助手段，而是作为一种目的本身。数学的演变和发展的问题，例如这种演变的内在和外在驱动力，或者数学及其历史的文化和社会方面。
具体化	conceptual、motivational	multicultural
代表教师	T1、T2、T3、T4	T2、T3、T4

最终的研究结论是："在挪威，将数学史纳入课程并没有起到很好的效果。一个重要的原因是没有考虑到教师的数学史观。似乎有这样一种想法，一旦它被纳入课程，老师们就知道该怎么做了。我的研究清楚地表明这个想法是错误的。教师们对以下几方面的认识都是不同的：什么是数学史以及在课程中加入数学史的意义；以不同的方式和程度在课堂上融入数学的历史；热情程度；对学生对数学史的看法；在教学中加入更多的数学史知识的必要性。由于这些差异只在一项只有四名参与者的研究中被揭示出来，人们可以推测教师群体作为一个整体可能存在哪些概念的广度。在挪威全国的数学教学中重新纳入数学史，应考虑这些不同的因素。"

3 反思借鉴

这篇论文篇幅不大，对信效度的追求值得借鉴。质的研究不强调证实事物，不认为事情能够以完全同样的方式重复发生，因此有些研究者认为质性研究中可不讨论信度问题[13]。但作为严谨的研究者，还是有必要追求信效度的保障。作者通过多种方式验证，包括：

（1）三角印证：多渠道收集数据，包括受访者在别的地方讲的话，个人认为还可以利用受访者的课堂教学表现来印证，例如陈倩、梁贯成通过关注声称的和实施的信念两个方面，研究了 3 个中国教师的数学信念[14]；

（2）转录细致：省略号表示思考，括号补充心理状态，方括号补充主语；

（3）避免诱导性很强的问题：在正式提问之前先询问老师自己的经历，减少引出问题的风险；文中将其归为信度的保障，但避免诱导性强的问题，是为了不让受访者受问题先入为主的影响，从而得到想要的访谈数据，应该归属于效度；

（4）受访者检验和同伴检验：采访后提供一个简短的总结，让受访者有机会发表评论，以及教师对自己数学史观的评价；在会议上提出初步调查结果得到同行反馈。

另一方面，这篇文章争议之处在于样本数少，文中也没有给出访谈提纲和文本分析的具体步骤。作者在文中表示，由于时间限制，采访的只有 4 位教师，更多的老师会给出更广泛的观点。细品发现，4 位教师还是有一定代表性，而且可以根据讨论部分的 9 个关键问题推敲出大概的访谈问题，对我们想通过访谈得到教师数学史观有一定的参考价值。

参考文献

[1] Smestad, Bjørn, 2011, Teachers’ Conceptions of History of Mathematic, in *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*: 231-240.

[2] Smestad, Bjørn, 2002, *Matematikkhistorie i grunnskolens lerebøker: en kritisk vurdering, HF-rapport 2002:1*.[Alta]: Høgskolen i Finnmark Avdeling for nærings-og sosialfag.

[3] Gronmo, Liv Sissel, 2004, *Hva i all verden har skjedd i realfagene?: norske elevers prestasjoner i matematikk og natufag i TIMSS 2003*. Oslo: Institutt for leerutdanning og skoleutvikling, Universitetet i Oslo.

[4] KUF. 2004, *Plan for etterutdanning i matematikk*. Kirke-, utdannings- og for sknings departementet, 20.03.199711997 [cited 14.06. 2004]. Available from http://odin.dep.no/odinarkiv/norsk/dep/kuf/1997/publ/01 4005990176/dok-bu.html.

[5] ——, 2004, " History of mathematics in the TIMSS 1999 Video Study," in, *HPM2004 & ESU5*, Uppsala, Sweden.

[6] Fauvel, John, and Jan Van Maanen, 2000, *History in mathematics education*, An ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

[7] Fraser, Barry J., and Anthony J. Koop, 1978, "Teachers' opinions about some teaching material involving history of mathematics," *International journal of mathematical education in science and technology* 9 (2): 147-151.

[8] Gonulates, Funda, 2008, "Prospective teachers' views on the integration of history of mathematics in mathematics courses," Paper read at HPM 2008, at Mexico City.

[9] Siu, Man-Keung, 2004, "No, I do not use history of mathematics in my class. Why?" in. *HPM 2004*. Uppsala,Sweden: Uppsala Universitet.

[10] Kennedy, Mary M., 1979, "Generalizing from single case studies," *Evaluation Quarterly* 3 (4):661-678.

[11] Donmover. Robert. 1990. "Generalizability and the Single-Case Study" in Elliot W. Eisner and Alan Peshkin (eds.), *Qualitative Inquiry in Education: The Contimuing Debate*, New York: Teachers College Press, pp. 175200.

[12] Jankvist, Uffe Thomas, 2007, "Empirical research in the field of using history in mathematics education," *Nordic Studies in Mathematics Education* 12 (3):83-105.

[13] 陈向明. 质的研究方法与社会科学研究[M]. 北京: 教育科学出版社, 2000: 101.

[14] 范良火等. 华人如何教数学[M]. 江苏: 江苏凤凰教育出版社, 2017 : 401-429.

学术资讯

上海市双名工程高峰项目开展课堂教学评价预研究

沈中宇[1] 韩嘉业[2]

（1.华东师范大学数学科学学院，上海 200241; 2.华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

教育领军人才是教师队伍的标杆，是广大教师专业成长的目标，其规模与质量在一定程度上往往代表着当时当地教育水平的高下。领军人才的培养与锻造就成为各地关注的教师发展重点项目。“双名工程”承载着上海基础教育领军人才培养的重任，汇聚了上海市基础教育领域一批骨干校长和骨干教师。自 2005 年启动第一期“双名工程”以来，至今已走过十余个年头，进入了第四期培养阶段[1]。

王华老师领衔的《上海市中小学数学专家型教师课堂教学表征研究》就是本期“双名工程”高峰计划的一个研究项目，其研究内容包括数学专家型教师对课堂教学的认知状况、数学专家型教师课堂教学的特征以及数学专家型教师专业发展过程[2]。

其中，为了刻画数学专家型教师课堂教学的特征，首先，需要基于文献分析、专家论证和问卷调查构建课堂教学评价框架。接着，通过分析数学专家型教师的课堂录像，对制订的课堂教学评价框架进行修正。最后，利用成熟的课堂教学评价框架大规模评价数学专家型教师的课堂录像，从而得到数学专家型教师课堂教学的特征。

目前，已经初步产生了课堂教学评价框架，正在对评价框架进行修正，以下介绍具体的研究过程与研究进展。

1 评价框架的产生

1.1 已有的课堂教学评价框架

如今，课堂教学评价已经成为数学教育研究中的重要研究课题[3]，项目组查阅了目前国际上常用的课堂教学评价框架[4]，其中包含了加州教师表现评估系统(Performance Assessment for California Teachers, PACT)、语言艺术教学观察评估系统(Protocol for Language Arts Teaching Observations, PLATO)、数学教学质量评估系统(Teaching for Robust Understanding, TRU)、教师教学观察评估系统(UTeach Teacher Observation Protocol, UTOP)、课堂互动评估系统(Classroom Assessment Scoring System, CLASS)、教师专业发展评估模型(A Framework for Teaching, FfT)、

教学质量评估系统(Instructional Quality Assessment, IQA)和数学教学质量评估系统(Mathematical Quality of Instruction, MQI)。

经过分析发现其中专门针对数学课堂的教学评价框架包括数学教学质量评估系统（TRU）、教学质量评估系统（IQA）和数学教学质量评估系统（MQI）。经过项目组的分析，教学质量评估系统（IQA）较为强调课堂讨论、数学教学质量评估系统（MQI）比较强调课堂中数学语言的准确性，而数学教学质量评估系统（TRU）则兼顾了课堂讨论与数学语言，最终选取 TRU 课堂教学评价框架为本项目的主要参考评价模型。

1.2 TRU 课堂教学评价框架

数学教学质量评估系统（Teaching for Robust Understanding, TRU）是美国加州大学伯克利分校的雄菲尔德教授（Alan H. Schoenfeld）开发的一套用于课堂教学评价的框架[5]。该框架自 2013 年发布以来，还在经历不断修改完善的过程。TRU 课堂教学评价框架包含 5 个评价维度：数学本质（Mathematical Focus, Coherence and Accuracy.）、认知需求（Cognitive Demand）、学习机会（Access）、学生表现（Agency, Authority and Accountability）、教学评价（Uses of Assessment）。TRU 课堂教学评价框架的每个评价维度分为 3 个水平等级，并且根据 4 种不同类型的课堂活动来打分，课堂活动类型有：全班活动（Whole Class Activities）、小组活动（Small Group Work）、学生展示（Student Presentations）、个体活动（Individual Student Work）。运用 TRU 课堂教学评价框架的步骤分为 3 步：1. 观看课堂实录，将课堂教学按照 4 种不同类型的课堂活动进行切片，保证每个切片的时长不超过 5 分钟；2. 再次观看课堂实录，对每个切片进行 5 个维度的打分；3. 用合理的计算方法汇总所有的分数。

下面简要说明 TRU 课堂教学评价框架的 5 个评价维度的含义：1. 数学本质：与基础概念相关的数学内容被解释得清晰、准确和合理的程度；2. 认知需求：课堂互动在为学生营造具有认知挑战性的学习氛围方面的程度；3. 学习机会：针对不同程度的学生，课堂活动的组织在多大程度上吸引或支撑他们积极地参与到课堂中来；4. 学生表现：学生有机会做出数学上的猜想、解释和论证，并且围绕课堂内容发表自己的观点；5. 教学评价：教师诱发、挑战和精炼学生思考的程度。

1.3 课堂教学评价框架初版

在深入解析 TRU 课堂教学评价框架后，项目组结合“上海经验”提出了课堂教学评价框架的初版，包括 5 个一级指标和 20 个二级指标（每个一级指标下设 4 个二级指标）。针对每

个一级指标和二级指标，项目组给出了详细的含义界定和三级水平划分。另外，项目组制定了打分的步骤：1. 观看课堂实录，每 5 分钟作为一个片段，每个片段从 20 个二级指标进行打分；2. 用特殊的加权平均数汇总所有的分数。

下面简要说明课堂教学评价框架的 5 个一级指标和 20 个二级指标之间的对应关系，以及 20 个二级指标的含义：

（a）本质呈现：1. 清晰：知识的必要性、来龙去脉；2. 准确：知识的科学性；3. 合理：符合学生认知基础；4. 深刻：高观点、系统性；

（b）认知需求：5. 情境：教学活动具有情境；6. 结构：教学活动诸要素完整且具有联系；7. 练习：教学活动中，运用知识或巩固知识的问题设计；8. 实验&技术：教学活动中能够营造和保持较好学习氛围的方法；

（c）学习机会：9. 师生交流：课堂提问、质疑辨析、练习辅导；10. 生生交流：学生讨论、提问、质疑、辨析；11. 小组合作：有角色分工，解决问题；12. 自我交流：对内容的总结、概括、拓展提升等正确的个性表述（包括数学日记、课后总结、预习呈现）；

（d）学生表现：13. 回答：回答老师和学案上的问题；14. 延伸：对所学内容的拓展；15. 论证：学生表达自己想法的同时，能够以说理和解释的方式论述理由；16. 练习：课堂练习的正确性；

（e）评价运用：17. 学生回应：教师如何对待学生的回应；18. 课堂练习：教师如何评价学生课堂练习；19. 课堂活动：教师如何通过课堂活动促进数学理解；20. 生生交流：教师如何评价学生之间的交流。

2 评价框架的修正

2.1 第一轮修正

在基于文献分析和专家论证构建了初版的课堂教学评价框架之后，项目组分析了教师 A 的课堂录像，课题为函数的奇偶性，其中每个一级指标分别安排两位项目组成员打分以检验一致性，经过分析之后，对初版的课堂教学评价框架进行了第一轮修正，具体的修正情况如下。

在本质呈现这一指标中，原先的二级指标分类均比较合适，在具体内涵方面，需要在合理这一二级指标中增加对于引入时长的考虑。同时，对于深刻这一指标的打分起伏较大，需要对高观点和系统性有进一步的解释。

在认知需求这一指标中，原先的二级指标分类比较合理，但在具体内涵方面还需要进一步改进，在情境这一指标中增加对有效性和挑战性的界定。在练习这一指标中，练习的正确率方面的考察容易与后面的指标相混淆。实验与技术这一指标在课堂中很少出现，因此指标的制订还有待商议。

在学习机会这一指标中，原先的二级指标分类较为合理，在具体内涵方面需要进一步改进，其中生生交流这一指标的具体内涵还需要进一步明确，小组合作这一指标在课堂中出现的较少，自我交流这一指标的操作性还较差。

在学生表现这一指标中，原先的二级指标分类基本合理，在具体内涵方面，回答、延伸和论证的内涵还有所重叠，需要进一步完善修正，练习这一指标的操作性不够强，很难看出学生的正确率。

在评价应用这一指标中，原先的二级指标分类上不够清晰，因此决定将这一指标的二级指标修正为学生陈述、全班练习、小组活动与个人作业。各个二级指标重新界定内涵与划分水平。

2.2 第二轮修正

在这之后，项目组继续分析了教师 B、C、D、E 的四节课的课堂录像，课题分别为充分必要条件、函数的奇偶性、不等式的基本性质和基本不等式，其中每个一级指标分别安排两到三位项目组成员打分以检验一致性，经过分析之后，对课堂教学评价框架进行了第二轮的修正，具体的修正情况如下。

在本质呈现这一指标中，原先的二级指标分类较为合理，但在二级指标的水平划分上还需要调整，在清晰这一指标中，需要将清晰的水平 1 修改为对知识的必要性略有讲解。其他二级指标和水平的界定则较为合理。

在认知需求这一指标中，原先的二级指标分类比较合适，在二级指标的界定方面，在教学活动的挑战性方面的界定还需要进一步明确，在实验与设计这一指标上，含义为营造和保持良好的学习氛围，因此对其水平的划分中还需要进一步体现其含义。

在学习机会这一指标中，原先的二级指标分类中，原先的小组活动指标较少出现，因此将其修改为资源利用，其含义为学生与学习材料（包括教材）之间的交流，水平划分根据起含义分为学生与学习材料之间略有交流、有一定和交流和有彻底和深入的交流。

在学生表现这一指标中，原先的二级指标分类较为合理，但是在实际的课堂录像评价中，延伸和论证的打分容易出现不一致，因此，需要进一步明确在延伸和论证的含义一级相应的

水平界定。

在评价应用这一指标中，原先的二级指标分类中，在实际的课堂录像评价中发现，小组活动指标出现的次数较少，因此，这一二级指标需要进一步修正，同时，在个体陈述中，在水平 3 的描述中需要进一步加入教师对自我的评价。

3 评价框架的初步研究结果

本研究中，利用初版的课堂教学评价框架，项目组先后对教师 B、C、D、E 的四节课的课堂录像进行了评分，当同一指标的评分出现不一致时，将会征求大家的建议，统一评分标准，以下通过对这四节课的评分，得到的初步研究结果如下表所示，其中各项指标为 3 分制，总分为百分制。

表 1 四节课评分结果

教师	课题	本质呈现	认知需求	学习机会	学生表现	评价应用	总分
B	充分必要条件	2.94	2.84	2.50	1.38	2.67	82.16
C	函数的奇偶性	2.66	2.75	2.56	2.81	2.83	90.72
D	不等式的基本性质	1.78	2.44	2.47	2.04	1.96	71.31
E	基本不等式	2.62	2.91	2.28	2.73	2.77	88.71

首先，我们可以分析数学专家型教师的课堂教学特征，由于教师 D 非数学专家型教师，因此将其数据剔除，计算每一项的平均分，从而可以发现数学专家型教师的课堂教学特征中，体现的最明显的为认知需求（2.83），其次为评价应用（2.76）和本质呈现（2.74），在学习机会（2.45）和学生表现（2.31）上的特征不是很明显。说明数学专家型教师最注重课堂环境的设置，并且注重对学生的反馈和对数学内容的呈现。

接着，分析每一位教师的教学风格，可以发现，教师 B 在本质呈现和认知需求方面表现最为出色，其次为学习机会和评价应用，在学生表现方面表现较弱，在课堂录像分析的过程中，项目组对于教师 B 在本质呈现方面的表现印象深刻。教师 C 在学生表现和评价应用方面表现最好，其次为认知需求、本质呈现和学习机会，在课堂录像中，教师 C 给了学生充足的表现机会，同时也兼顾了其他方面，因此教师 C 的综合评分在四位教师中最高。教师 D 属于年轻教师，他在学习机会、认知需求方面表现较好，其次为学生表现和评价应用，但在本质呈现方面表现得不如人意，在课堂录像分析中，项目组的成员也指出了教师 D 在数学内容呈

现方面的多个问题。教师 E 在认知需求方面表现最好，其次为评价应用、学生表现和本质呈现，但在学习机会方面表现稍差，在实际分析的过程中，项目组也指出其在认知需求方面设计较好，设计的学习情境具有连贯性。

当然，由于目前分析的样本较少，以上只是初步的研究结果，如果需要得到更加深入的结论，需要进一步修正课堂评价框架，扩大研究样本。获得数学专家型教师课堂教学的特征对于理论与实践有着重要的意义，上海市双名工程高峰项目的课堂教学评价研究还在不断的深入开展中，且让我们期待更多的研究成果。

参考文献

[1] 上海市师资培训中心“双名工程”项目管理组. “双名工程”: 上海教育现代化的动力引擎[J]. 中小学管理, 2019 (1): 9-13.

[2] 王华. 期盼明白致远的中小学数学教育——顾泠沅先生访谈录[J]. 数学教学, 2020 (2): 1-5.

[3] Bostic, J., Lesseig, K., Sherman, M., & Boston, M. Classroom observation and mathematics education research[J]. Journal of Mathematics Teacher Education, 2019. doi:10.1007/s10857-019-09445-0.

[4] Schoenfeld, A. H., Floden, R., El Chidiac, F., Gillingham, D., Fink, H., Hu, S., Sayavedra, A. Weltman, A. Zarkh, A. On Classroom Observations[J]. Journal for STEM Education Research, 2018(1): 34-59.

[5] Schoenfeld, A. H., Classroom observations in theory and practice[J]. ZDM: Mathematics Education, 2013, 45(4): 607–621.

初中 HPM 网络研修班定期在线研讨

孙丹丹

（华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

为给全国初中数学教师专业发展提供新的推力，拓宽教师知识结构，促进教师教学反思，依托于上海市“立德树人”数学教育教学研究基地，2019 年 8 月初中 HPM 网络研修班正式开启。从 2019 年 8 月至 2020 年 2 月间 64 位一线初中教师围绕 9 个研修主题，阅读学习了近 90 则教育取向的数学史素材，除相关主题的数学史外，教师们还学习了 9 个主题 HPM 视角下的教学设计。通过这一阶段的学习，教师们基本对 9 个主题的数学史有了比较系统的了解，对如何将数学史用于数学教学也有了初步体会。

2020 年 2 月至 2020 年 6 月是初中 HPM 网络研修第二阶段，不同于第一阶段重心是相关数学史的学习，本阶段的主要目的是探索数学史在数学教学中的应用，切实增强教师基于数学史进行教学设计的能力。研修班大部分老师在基于数学史进行教学设计方面鲜有尝试，为了弥补教师个人经验不足，充分利用高校一线专业共同体的集体力量，该阶段主要采取了“分层研讨”的基本思路，从 2020 年 2 月初至 2020 年 4 月底，研修班累计进行了 21 场线上讨论，具体时间如下表所示。

表 1 初中 HPM 网络研修班定期研讨时间表

	1 组-有理数乘法	2 组-等腰三角形	3 组-三角形内角和	4 组-无理数	5 组-用字母表示数	6 组-函数概念	7 组-相似三角形
小组讨论	2.12	2.13	2.20	2.22	2.23	2.28	3.28
修改	2.16	2.27	2.28	2.27	3.15	3.15	4.9
集体讨论	2.18	2.29	3.7	3.14	3.21	3.24	4.11
修改	2.27	3.10	3.20	3.27	4.10	4.3	4.17
高校研讨	3.1	3.15	3.22	3.29	4.12	4.5	4.19
修改	3.15	4.2	4.5	4.5	4.20	4.10	4.25

该阶段的研修主要针对第一阶段 9 个主题的其中 7 个展开，进入研修第二阶段的 42 位老师分为 7 个研修小组，每个小组 5 至 7 人，聚焦一个研修主题。小组讨论围绕开课教师个人所做教学设计进行，形式由各小组自行确定，有的小组用微信群文字交流，有的选择文字和语音互相补充，也有的小组选择微信语音或腾讯会议等语音交流平台。通过小组内部想法

的交流，每位教师都会对自己小组的课题有更加深入的认识，开课教师也可以整合自己组其他老师的想法修改教学设计，以待进一步讨论。

例如， 2010 年 2 月 28 日，6 组的 7 位老师围绕函数概念进行了小组讨论，讨论前几天，3 位老师已经跟同组老师分享了自己基于历史的教学设计，老师们提前进行了阅读思考。讨论一开始就有老师抛出了如何基于数学史进行函数概念教学的问题，3 位老师分别简介了自己设计思路，大家结合老师们的设计，围绕多个问题交流了自己想法，例如，变量和常量与函数概念两个课时合并为一个是否合适？课上直接给出函数概念是否妥当？如何更充分地运用新冠疫情相关数据？等，老师们还讨论了某些设计中存在的课时容量过大的问题及调整方法，讨论了函数发展微视频的时长、内容、播放的时机、希望体现的价值等，讨论了选取函数实例的注意事项，如综合考虑不同表征形式和难度等。老师们还提出了一些很有价值的比较上位的问题，如这节课教学目标是什么？如何用数学史？数学史在这节课中能发挥什么作用？讨论最后，老师们整理了自己的收获和感受，有老师根据大家意见总结了自己设计中存在的问题，有老师提出了若干值得进一步思考的问题。老师们表示在思想碰撞中找回了读大学的感觉，被“团体精神”感染。

集体讨论围绕经过小组讨论修改后的教学设计进行，集体讨论和高校研讨均使用腾讯会议平台，一线教师的想法在集体讨论中得以交流碰撞。集体讨论某主题前，其他 6 个小组首先在自己组内讨论，由一位教师代表整合组内老师的想法，在集体讨论时跟大家分享。除一线教师外，HPM 网络研修委员会的栗小妮博士和上海建平远翔学校的贾彬老师也参与了集体讨论。

例如，2020 年 3 月 24 日，研修班教师进行了函数概念的集体讨论，在 3 位课例设计教师简要介绍了自己设计思路后，大家分享了自己对 3 位教师设计及函数教学的看法。例如，教学目标方面，有老师指出体会函数是刻画两个变量关系的模型应当是本节课的目标之一，也有老师指出数学史的运用应该与所要达成的教学目标密切结合起来。教学过程方面，有老师提出可否一以贯之地采用解析式、图象、表格等不同形式呈现疫情期间的变量关系，可否用变量关系预测疫情发展，以充分体现函数的应用价值；有老师就是否有必要经历函数发展的三个阶段的问题提出了自己想法，认为函数解析式说和变量依赖说本就是学生很可能持有的看法，如果给学生表达机会，这就是自然而然的探究；有老师指出可以点明初中学习函数定义，高中大学也会学习函数定义，这都是不同历史时期的函数定义，为将来的学习埋下种子，也让学生感受动态发展的数学。老师们还谈到了数学史的运用方式的问题，单独插播一

段历史介绍固然是一种选择，但对学生的影响比较有限，是否可以考虑重构式的应用等。

最后一层研讨是高校研讨，围绕经过集体讨论修改后的教学设计进行，从 3 月初至 4 月底，每周日下午华东师范大学汪晓勤教授、硕博士团队及贾彬老师与研修班教师聚焦一个主题，共话数学教学。高校研究者视角的加入可以给教学设计带来新的活力，进一步促进教师思考，不断完善课例。

高校研讨第一场——有理数乘法于 3 月 1 日进行，左培培老师和孙琳老师简要介绍了自己的教学设计思路及存在的困惑，该主题特邀教师上海市西中学王进敬老师就左老师的提到的为什么负负可以相乘发表了自己的看法，王老师还指出要注意负数乘以负数的二维性，适当处理司汤达老师的“简单粗暴”、给学生充分的思考时间等，栗小妮博士重点阐述了孙老师引入的看法，一是正数的乘法意义推广到负数，二是正数乘以-1 的意义推广到负数乘以-1，两者看起来逻辑清晰，其实也是一种推广，栗老师还分享了个人偏好的模型及原因。贾老师就如何运用司汤达的故事培养学生质疑求证的精神分享了自己的处理方法，并指出负数意义的理解对负数运算的学习有重要影响，还提到了课前抛出问题，课上讨论学生想法的设计思路。汪老师最后指出，基于数学史进行设计时一定要关注教学目标，要考虑有没有数学史的差别在哪，并从数学史六个维度的价值方面具体剖析了基于数学史进行有理数乘法课例设计可能达成的目标。

高校研讨第二场——等腰三角形性质于 3 月 15 日进行，胡永强老师和刘志峰老师分享了自己的教学设计，之后，汪晓勤教授、委员会栗小妮博士和贾彬老师、该主题特邀教师上海长桥中学汤雪川老师、研修班姜鸿雁老师等就两位老师设计分享了自己的想法，例如，栗小妮博士认为借等腰三角形性质渗透数学公理化思想或许可以作为拓展课或数学小课题，将部分问题前置。汤老师认为教师围绕一个主题汇编材料，学生课前阅读，师生课上交流讨论的形式值得尝试。孙丹丹博士强调了以问题促进学生探究中问题设置的重要性。姜老师认为这节课可以带领学生领会图形研究的方法，从定义到认识基本元素，再到性质、判定。汪老师强调要避免为历史而历史，基于数学史进行教学设计要适应课堂实际情况，多思考有没有数学史的区别在哪里，可以达成何种教学目标。

高校研讨第三场——三角形内角和于 3 月 22 日进行，毛文奇老师和姜鸿雁老师简要介绍了自己的教学设计思路及存在的困惑，该主题特邀教师上海市西中学王进敬老师指出要注意方法与方法之间的连接与最后的归纳，要让学生感知平行线在三角形内角和中不可或缺的地位。栗小妮博士指出毛老师的课堂上应该更开放一点，将问题前置，以便充分把握课堂，

姜老师的设计很好，对教师的数学史水平要求很高，教师可以将数学史自然的引入到课堂。研修班方海艳老师指出课堂上进行三个探究时间可能会有点紧，可以借助几何画板节约时间。研修班胡永强老师指出数学实验可以给我们猜想，也可以为演绎证明提供思路。汪老师最后指出，知识点的出现背后一定有他的动因，三角形内角和最直接的动因就是铺地砖问题，汪老师还联系视错觉图形说明了演绎证明的必要性，眼见不一定为真，并分享了克莱罗发现橡皮筋法的小故事。

高校讨论第四场——无理数于 3 月 29 日进行，研讨开始后陶醉老师和周福荣老师简要介绍了自己的教学设计思路及存在的困惑，接下来研修班委员会老师上海建平中学贾彬老师就两位老师的教学设计分享了自己的看法，指出无理数的概念教学可以$\sqrt{2}$为载体，分为认识$\sqrt{2}$、在数轴上画出$\sqrt{2}$、证明$\sqrt{2}$是无理数这三个阶段来进行。栗小妮博士就怎么在课堂上运用无理数的数学史进行了分享，强调了微视频内容的趣味性以及与课堂内容的连贯性。孙丹丹博士表示赞同贾老师和栗博士的看法，并且她认为老师们必须要思考怎么把无限不循环小数和不能表示为整数之比更好地整合起来。接着研修班的成员教师姜鸿雁老师、胡永强老师分别交流了自己的看法。最后，汪老师对今天的研讨做了总结，从“Why、How、What”三个角度阐述了数学史融入无理数教学，提出该课题值得一线教师和高校研究人员共同做进一步研究。

高校研讨第五场——字母表示数于 4 月 12 日进行，刁瑞阳老师和沈克老师简要介绍了自己的教学设计思路，沈老师还分享了线上实施课例的学生反馈。栗小妮博士重点阐述了问题衔接的问题，恰当的问题衔接可以自然推动课堂活动进行，有助于学生感受符号代数的发展，体会符号代数的价值和必要性，需要精心设计。贾彬老师提出让学生在学习中感受到冲突，以体会学习字母表示数的必要性是很重要的。就刁老师设计中的莱因德纸草书问题，贾老师建议课前只提出有挑战性的问题，课堂上展示学生的不同方法，讨论用字母表示数的必要性。姜鸿雁老师充分强调了用字母表示数的重要地位，并以自己的教学设计为例分享了如何让学生经历从具体到抽象的过程。汪老师最后指出这节课的教学应该让学生领会用字母表示数在代数学的重要地位，感受数学语言的简洁性、培养学生数学抽象能力、欣赏数学美，并结合该主题阐述了重构式的数学史运用方式。

高校研讨第六场——函数概念于 4 月 5 日进行，吴秀燕老师和王媛媛老师首先简要介绍了自己的教学设计思路及存在的困惑，并在正式研讨前先向汪老师请教了一些有关函数概念知识方面的疑问，之后 HPM 团队的硕士生刘思璐，博士生沈中宇、李卓忱、栗小妮、孙

丹丹对两位老师的教学设计提了一些修改建议以及可进一步思考的问题，其中栗小妮博士结合从学生的认知基础、数学史使用目的、数学史教育价值等方面阐述了自己的看法。接着研修班胡永强老师、研修班指导老师贾彬老师也给出了自己的一些建议。汪老师最后指出，重构式的教学设计要做好“符合学生认知基础”和“激发学生学习动机”这两点，另外要借鉴历史关键步骤、搞清历史演变动因，以达成数学史六大教育价值。

高校研讨第七场——相似三角形的应用于 4 月 19 日进行，曹嘉芮老师针对相似三角形应用的活动课，聂海波老师则针对初三测量主题的综合复习课，两位老师首先分享了自己的教学设计思路，汪晓勤教授、委员会的栗小妮博士和贾彬老师、研修班的肖文娟老师、姜鸿雁老师、刘志峰老师、胡永强老师都分享了自己对这两节课的一些想法，例如，栗小妮博士建议曹老师小结的时候说明可测数据类型不同，解决问题方法就不同，为锐角三角比埋下伏笔，贾老师与大家讨论了渗透数学阅读必要性的问题，肖老师分享了一种引导学生利用重差术进行测量的方法，姜老师认为这节课要突出数学与生活之间的联系，汪老师最后给出了解三角形应用的一个分类框架，以融通不同条件下的测量问题，并给出这节课微视频设计可参考的思路及目标等。

从 2 月初至 4 月底，通过小组、集体和高校三层 21 场线上讨论，充分促进了教师个体的思考，推动了教师群体的交流，凝聚了集体智慧。4 月底课例陆续进入实施阶段，期待教师实施经验和学生反馈分享。

2020 年春季学期高中数学联盟教研活动举行

刘思璐 邵爱娣

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

按照华东师范大学基础教育学科教研联盟的整体安排和工作部署，根据当前疫情防控形势下教育教学的具体情况，2020 年 4 月 15 日下午，华东师范大学基础教育学科教研联盟高中数学学科组的指导专家和联盟校的老师们，以在线会议的形式开展了高中数学联盟第五次集中教研活动。本次活动由华东师范大学教师教育学院数学教育研究所汪晓勤教授主持，研究主题为数学史融入高中数学课堂教学的课例研究：函数的概念，来自于华东师范大学基础教育联盟成员校的 100 余位教师参加了活动。虽然大家身处祖国各地，但通过线上会议的方式，实现了高效的教研学术交流。

图 1 华东师大联盟校老师们的参与线上教研活动

首先，汪晓勤教授简单回顾了之前教研活动的相关内容和此次教研活动的目的，介绍了针对此次线上教研活动的主题：函数的概念。希望通过本次活动的主题报告（历史分析和课例研究）、互动交流和总结点评等环节，老师们可以进行经验分享和教学讨论，促进对函数的概念这个教学主题的理解。

接下来，进入本次教研活动的主题报告环节。第一个报告是由华东师范大学教师教育学院硕士生刘思璐带来的“英美早期代数教科书中函数的概念”。刘思璐简单回顾了上次教研活动中华东师范大学教师教育邹佳晨老师讲的函数概念的历史内容，接着从数学教育史的角度出发，介绍了 1810 年到 1969 年英美代数教科书中函数定义的分类、各类代表性的函数定义和相应的函数例子，揭示了早期代数教科书中函数定义的演变规律，特别是从“变量”到

“对应关系”的变化。

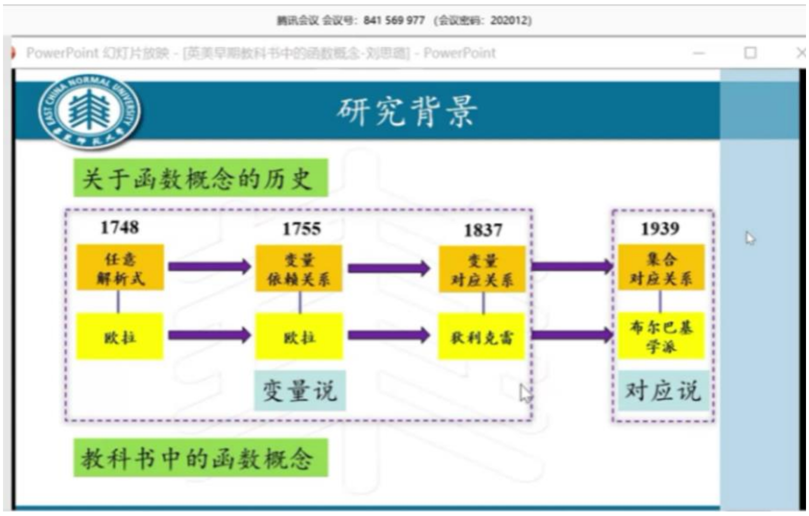


图 2 刘思璐的分享

第二个报告是由上海市建平中学的杜金金老师带来的“课例报告：函数的概念”。杜老师介绍了自己加入数学史与数学教育（HPM）工作室的成长与收获，形象地用函数符号 $f(0)$ 到 $f(101)$，表示了自己在 HPM 视角下函数概念课例形成中的成长过程，其中不乏汪晓勤教授、上海市正高级教师、特级教师虞涛老师以及 HPM 工作室研究团队给自己的指导与帮助，并举例说明了自己教学设计的修改过程和教学实施的思考过程，最后杜老师分享了这次课例研究和课堂教学的一些感悟与思考。

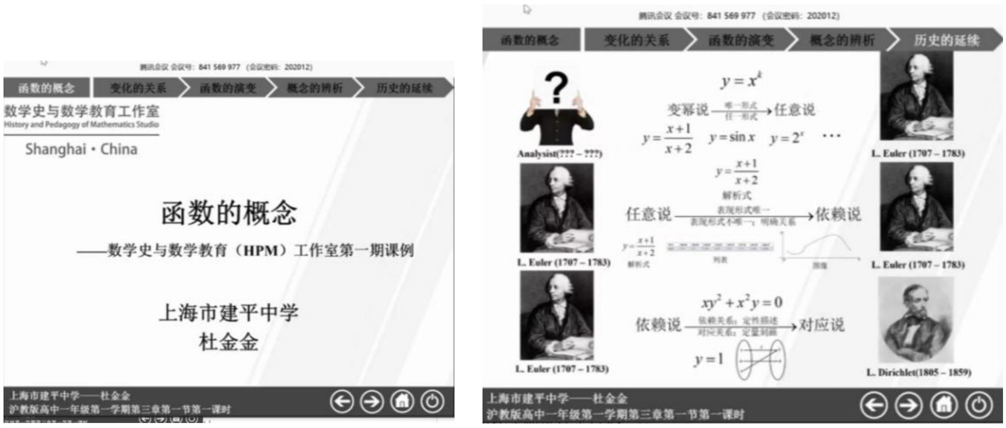


图 3 杜金金老师的分享

之后是互动交流环节，高中数学联盟的的指导专家和联盟校的老师们聚焦函数的概念这个主题进行讨论。有的老师针对函数概念的外延及内涵与杜老师进行了讨论；有的老师提出了从变量和集合角度看初高中函数的概念，继而和其他老师讨论了初中函数和高中函数的区别与联系；有的老师提出了函数概念教学中“对应”这个概念在引入方面对学生来说可能存

在一定的困难，并和其他老师进行了交流。

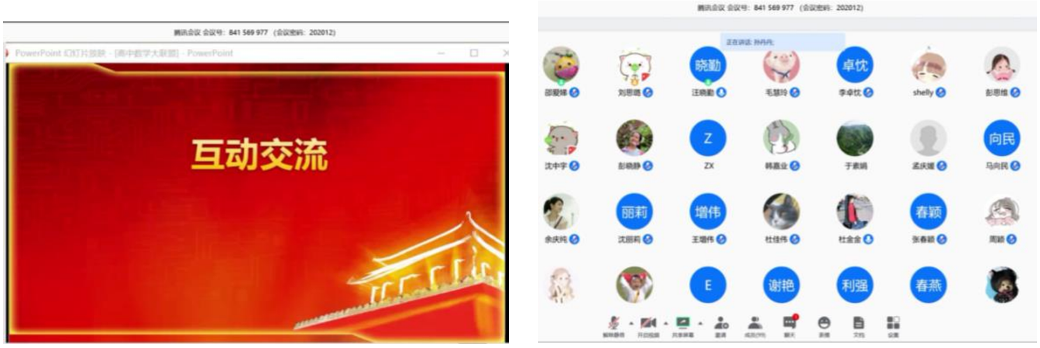


图 4 互动交流

最后，汪晓勤教授总结了此次活动各个环节的内容和重点，并展望了未来学科教研联盟高中数学教研活动借助线上活动实现不同地域共同研讨的前景，并简单介绍了之后的工作推进计划，欢迎各成员校轮流承办联盟主题教研活动，鼓励各成员校的老师们积极参与联盟的教研活动。

图 5 汪晓勤教授总结点评