上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2017 年第 6 卷第 1 期

蒙蒂克拉

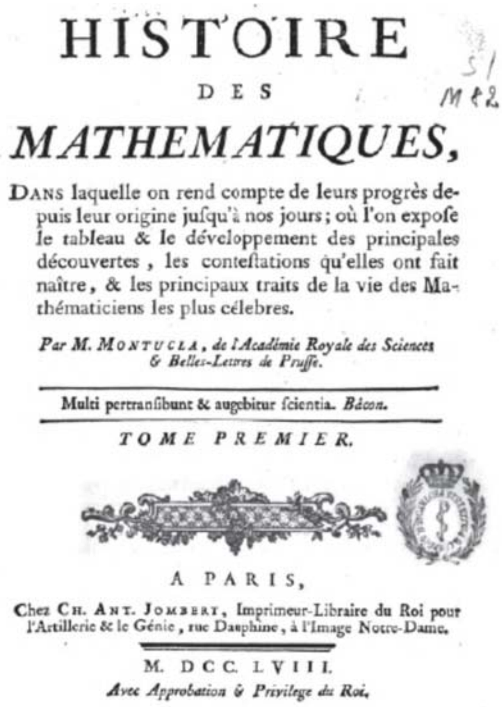
（J. É. Montucla, 1725 ~ 1799）

刊首语

本期封面人物为 18 世纪法国数学史家蒙蒂克拉（É. Montucla, 1725～1799）。

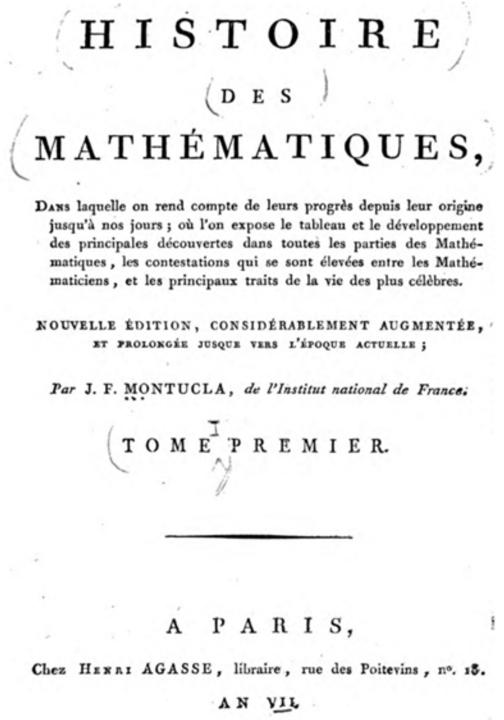
蒙蒂克拉于 1725 年 9 月 5 日出生于法国里昂，父亲是一名商人。少时，就读于当地的耶稣会学院（Jesuit College）。在耶稣会学院，蒙蒂克拉学习希腊文、拉丁文、哲学和数学，古典语言为他日后掌握英语、意大利语、德语和荷兰语打下了基础。1741 年，父亲去世，祖母承担起抚养他的责任。1745 年，祖母去世。同年，蒙蒂克拉去图卢斯的法律学校学习法律。之后，又去巴黎深造。在巴黎，他参加了出版商约姆贝尔（C. A. Jombert, 1712～1784）组织的科学晚会，结识了哲学家狄德罗（D. Diderot, 1713～1784）、天文学家拉兰德（J. Lalande, 1732～1807）、数学家达朗贝尔（J. d’Alembert, 1717～1783）以及其他许多一流数学家。约姆贝尔、达朗贝尔和狄德罗建议他研究数学史，并出版相关著作。

1754 年，蒙蒂克拉出版了第一部数学史著作——《化圆为方研究史》，并因此被选为柏林科学院的通讯院士。1758 年，他出版两卷本巨著《数学史》。第一卷涉及 1600 年以前的数学史，第二卷则讲述 17 世纪的数学史。蒙蒂克拉还计划撰写 18 世纪上半叶的数学史，作为《数学史》第三卷，可惜未能实现。



HISTOIRE
DES
MATHEMATIQUES,
DANS laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau & le développement des principales découvertes, les contestations qu'elles ont fait naître, & les principaux traits de la vie des Mathématiciens les plus célebres.
Par M. MONTUCLA, de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Prusse.
Multi pertransibunt & augebitur scientia. Bacon.
TOME PREMIER.
A PARIS,
Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame.
M. DCC. LVIII.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

1758 年版《数学史》扉页



HISTOIRE
DES
MATHÉMATIQUES,
DANS laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties des Mathématiques, les contestations qui se sont élevées entre les Mathématiciens, et les principaux traits de la vie des plus célèbres.
NOUVELLE ÉDITION, CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE, ET PROLONGÉE JUSQUE VERS L'ÉPOQUE ACTUELLE;
Par J. F. MONTUCLA, de l'Institut national de France.
TOME PREMIER.
A PARIS,
Chez HENRI AGASSE, libraire, rue des Poitevins, nº. 18.
AN VII.

1799 年修订版《数学史》扉页

1761 年，蒙蒂克拉赴格勒诺布尔，担任多菲内省行政长官的秘书。在那里，他认识了玛丽·弗朗索瓦·罗曼，并于 1763 年与之结婚。婚后，妻子育有一儿一女。1765 年，蒙蒂克拉受命以皇家天文学家的身份出使卡宴（法属圭亚那首府），15 个月后才回到格勒诺布尔。不久，他被任命为皇家建筑、园林的总管（Head Clerk），并迁往凡尔赛。他担任此职直到 1789 年。1775 年，他又被任命为皇家数学著作审查员。1778 年，他修订出版了奥泽南的《趣味数学与物理》。1784 年，他翻译了乔纳森·卡维尔（J. Carver, 1710～1780）的游记。

虽然长期担任政府官员，但作为一名学者，蒙蒂克拉却是心静如水、不爱社交。据说，如果家中来了一群客人，他出于礼节与客人见面寒暄片刻之后，又会回到自己的书房，直到晚餐时间才出现。我想，倘若蒙蒂克拉生活在今天，他绝不愿意使用微信，让自己卷入无尽的世俗喧嚣之中的。但他为人谦和，言谈举止都很有修养，还会讲故事。

1789 年，法国大革命爆发。蒙蒂克拉失去了所有的职位和收入。1795 年，他受命对外交部所存档案中的各种条约进行评估，但薪水微薄，入不敷出。他不得不在国家彩票办公室兼职，挣更多的薪水，以贴补家用。

在拉兰德等朋友的建议下，蒙蒂克拉对《数学史》进行了修订。1799 年 8 月，《数学史》第 1-2 卷的修订版在巴黎出版。拉兰德在其他学者的帮助下，完成了《数学史》的第 3-4 卷。第 3 卷讨论了 18 世纪的数学、光学和力学，第 4 卷则包含了 18 世纪的天文学、地理学和航海学。后两卷于 1802 年出版。

同年 11 月，蒙蒂克拉复发闭尿症，到了 12 月 19 日晚上 10 点，溘然长逝。

蒙蒂克拉的《数学史》被公认为历史上第一部数学史经典。初版第 1 卷包括从开始到拜占庭帝国时期的数学史、东方的数学史（阿拉伯、印度、中国）以及 17 世纪初以前西方的数学史，第 2 卷专论 17 世纪的数学史。

蒙蒂克拉将数学分为纯数学和混合数学两类，其中前者包括算术、几何学与代数学，后者包括力学、天文学、光学、声学和气体学。正如萨顿所云，蒙蒂克拉的《数学史》，不仅仅是一部数学的历史（a history of mathematics），而且也是一部数学科学的历史（a history of mathematical sciences），甚至也可以称为科学的历史（a history of science）。《数学史》揭示了数学史的文化价值。虽然蒙蒂克拉不是 HPM 的先驱者，但数学史的文化价值却是 HPM 视角下的数学教学所追求的重要目标。

站在蒙蒂克拉的肩膀上，一个多世纪后的著名德国数学史家康托尔（M. Cantor, 1829～1920）完成了他的科学史巨著——《数学史讲义》。

目　录

CONTENT

历史研究

椭圆第一定义是如何诞生的?

汪晓勤

（华东师大数学系，上海, 200241）

在今天的高中数学教科书中，椭圆被定义为“平面上到两定点距离之和等于定值的动点轨迹”，这就是我们通常所说的椭圆的第一定义。古希腊人一开始是通过用平面截圆锥发现三种圆锥曲线的，后来他们也把这些曲线看作“立体轨迹”。但是，他们仍然采用原始的“截线”定义。椭圆是圆锥曲线的一种，而在第一定义中，学生看不到圆锥的影子。要从 HPM 的视角来设计椭圆概念的教学，就需要在原始定义和第一定义之间建立联系。为此，我们需要回答这样一个历史问题：椭圆的第一定义究竟是如何诞生的？

1 圆锥曲线的诞生

古希腊哲学家普罗克拉斯（Proclus, 5 世纪）告诉我们①，柏拉图学派的梅内克缪斯（Menaechmus, 公元前 4 世纪中叶）是圆锥曲线的发现者，圆锥曲线一开始被称为“梅内克缪斯三线”。梅内克缪斯将圆锥曲线用于解决希波克拉底（Hippocrates）因倍立方问题而提出的两个比例中项问题：在线段 a 和 b 之间找两个比例中项，使得 $a:x=x:y=y:b$。梅内克缪斯是通过用垂直于母线的平面去截三种不同的圆锥，分别得到三种曲线的，后来，数学家亚里士塔欧（Aristaeus, 公元前 4 世纪末）分别将其称为锐角圆锥曲线、直角圆锥曲线和钝角圆锥曲线，分别对应于今天的椭圆、抛物线和双曲线。

仅仅在圆锥上用平面截得几种曲线，是远远不能享有“发现者”美誉的，梅内克缪斯一定对三种曲线进行了深入研究，并发现了它们的基本性质。根据数学史家希思（T. L. Heath, 1861～1940）的推测[1]，梅内克缪斯的研究是直接建立在三种不同的圆锥上的。锐角圆锥曲线（椭圆）的情形如图 4 所示。SMN 是顶角为锐角的圆锥，ΔSMN 为其轴截面。A 为母线

① 普罗克拉斯依据的是欧得姆斯（Eudemus, 公元前 4 世纪）的记载。欧得姆斯曾著有《算术史》、《几何史》和《天文学史》，但均已失传。

SM 上一点，过 A 且垂直于 SM 的平面交 SN 于 B，从而都得到锐角圆锥曲线 APB。

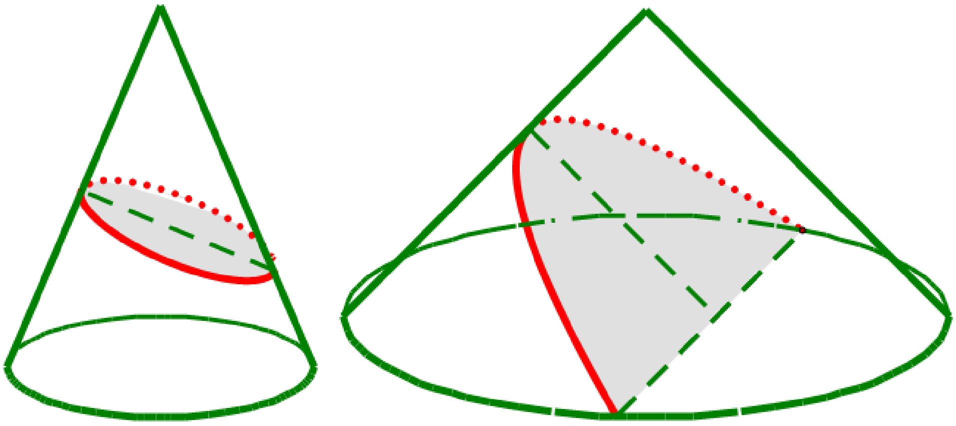


图 1 锐角圆锥曲线　图 2 直角圆锥曲线

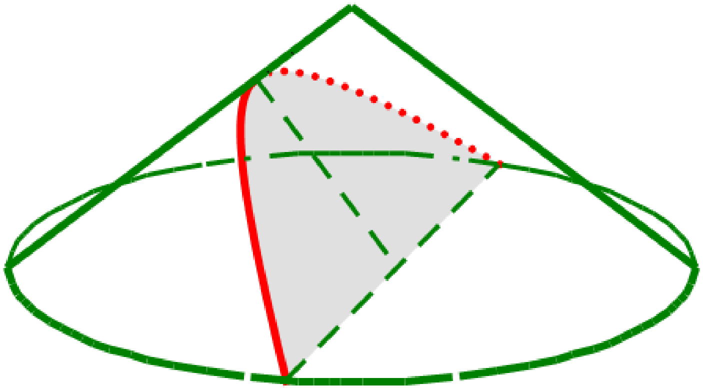


图 3 钝角圆锥曲线

设 P 为该曲线上任一点，$PQ\perp AB$；过 P 且平行于底面的平面截圆锥得圆 CPD。作 $AE/\!/CD$，交母线 SN 于 E，作 $EG\perp AE$，$DF\perp CD$。由三角形的相似性，得

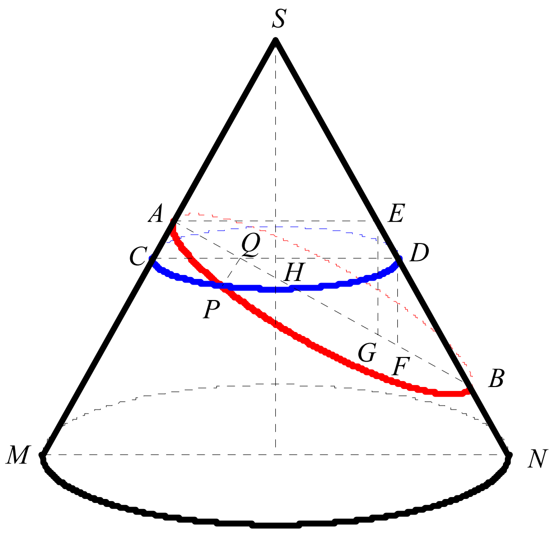


图 4 锐角圆锥曲线基本性质的发现

$$PQ^2=CQ\cdot QD=AQ\cdot QF=AQ\cdot AG\cdot\frac{QD}{AE}=AQ\cdot AG\cdot\frac{QB}{AB}=\left(\frac{2AH}{AB}\right)\cdot AQ\cdot QB$$

由此得到椭圆的基本性质：$\dfrac{PQ^2}{AQ\cdot QB}$ 为常数。这一性质如果用今天的代数语言来表达，便是我们耳熟能详的椭圆标准方程了[2]。

亚里士塔欧曾著《立体轨迹》一书，对圆锥曲线作了进一步的深入研究。之后，欧几里得又著《圆锥曲线》，对圆锥曲线的研究成果作了系统的总结。可惜，上述两书均未能流传到今天。

以梅内克缪斯为代表的早期希腊数学家并没有焦点的概念，因而更谈不上了解椭圆的焦半径性质了。

2 焦半径性质的发现

在欧几里得《圆锥曲线》的基础上，阿波罗尼斯（Apollonius, 公元前 3 世纪）撰写了一部划时代的巨著——《圆锥曲线论》。书中，作者将同一圆锥被不同位置的平面所截得的曲线定义为圆锥曲线。阿波罗尼斯所用的圆锥并不局限于前人的正圆锥，而是更一般的斜圆锥（由平面上一个圆和平面外一点形成）。如图 5 所示，通过类似作图，利用三角形相似性可得（《圆锥曲线论》第 1 卷命题 13）：

$$PQ^2=DQ\cdot QE=\left(AQ\cdot\frac{MF}{SF}\right)\cdot\left(QB\cdot\frac{NF}{SF}\right)=\left(\frac{MF\cdot NF}{SF^2}\right)AQ\cdot QB$$

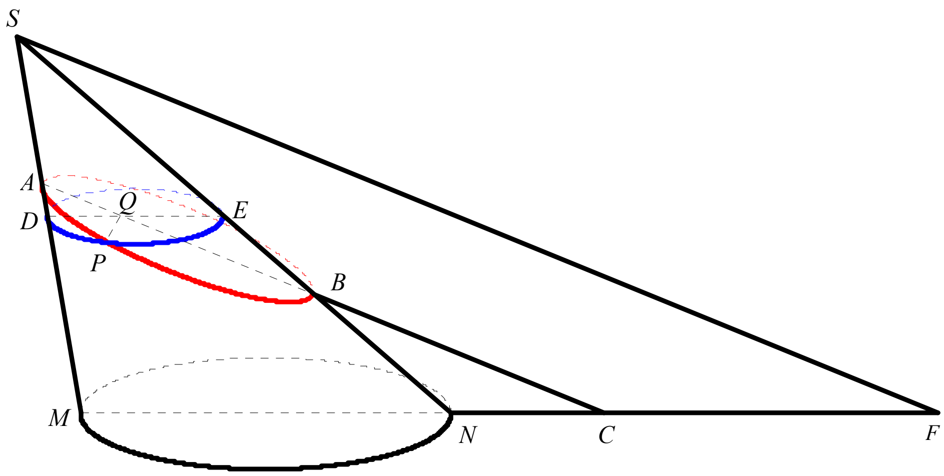


图 5 斜圆锥上的椭圆

从而同样得到椭圆的基本性质（(《圆锥曲线论》第 1 卷命题 21)。

APOLLONII
PERGAEI CONICORVM
LIBRI QVATTVOR.
VNA CVM PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATIBVS, ET COMMENTARIIS
EVTOCII ASCALONITAE.
SERENI ANTINSENSIS
PHILOSOPHI LIBRI DVO
NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI.
QVAE OMNIA NVPER FEDERICVS
Commandinus Vrbinas mendis quamplurimis expurgata è Græco conuertit, & commentariis illustrauit.

CVM PRIVILEGIO PII IIII. PONT. MAX.
IN ANNOS X.

BONONIAE,
EX OFFICINA ALEXANDRI BENATII.
M D LXVI.

图 6 1566 年版《圆锥曲线论》

图 7 1710 年版《圆锥曲线论》扉页

《圆锥曲线论》第 3 卷对圆锥曲线的与切线相关的一些性质进行了研究。如图 8，O 为椭圆的中心，AB 为椭圆的长轴，OE 为短半轴，F_1 和 F_2 为焦点，AC 和 BD 与 AB 垂直，点 P 为椭圆上异于 A、B 的任意一点，椭圆在点 P 处的切线分别与 AC 和 BD 交于点 C 和 D。CF_2 和 DF_1 交于点 H，连接 HP。阿波罗尼斯首先证明[3]：

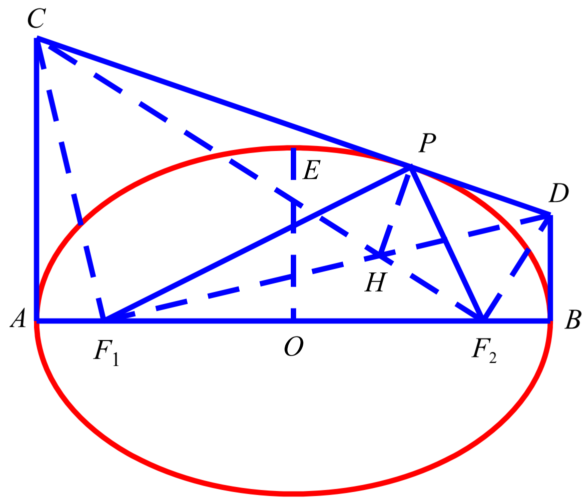


图 8 与切线相关的椭圆性质（I）

命题 1 $AC\cdot BD=OE^2$。

利用椭圆的基本性质，可得 $AF_1\cdot F_1B=OE^2$，故由命题 1 可得 $AC\cdot BD=AF_1\cdot F_1B$，即 $\dfrac{AC}{AF_1}=\dfrac{BF_1}{BD}$。因 $\angle A=\angle B=90°$，故 $\mathrm{Rt}\Delta CAF_1$ 与 $\mathrm{Rt}\Delta F_1BD$ 相似。于是得

$$\angle AF_1C+\angle BF_1D=\angle AF_1C+\angle ACF_1=90^\circ$$

类似可得 $\angle AF_2C+\angle BF_2D=90^\circ$。故有

命题 2 $\angle CF_1D=\angle CF_2D=90^\circ$。

由命题 2 可得：C、F_1、F_2、D 四点共圆，故有 $\angle DF_1F_2=\angle DCF_2$，$\angle CF_2F_1=\angle CDF_1$。从而得

命题 3 $\angle ACF_1=\angle DCF_2$，$\angle CDF_1=\angle BDF_2$。

接下来，阿波罗尼斯用较繁琐的反证法来证明

命题 4 HP 为椭圆在点 P 处的法线，即 $HP\perp CD$。

由命题 4 可知，C、F_1、H、P 和 P、H、F_2、D 分别共圆。故有 $\angle CPF_1=\angle CHF_1$，$\angle DPF_2=\angle DHF_2$。于是得

命题 5 （椭圆的光学性质）椭圆在点 P 处的两条焦半径与该点处切线所成角相等，即 $\angle CPF_1=\angle DPF_2$。

命题 6 过 F_1（或 F_2）向切线 CD 引垂线，垂足为 K，则 $AK\perp BK$。

如图 9，因 C、A、F_1、K 和 K、F_1、B、D 分别共圆，故 $\angle AKF_1=\angle ACF_1=\angle BF_1D=\angle BKD$，于是得 $\angle AKB=\angle F_1KD=90^\circ$。

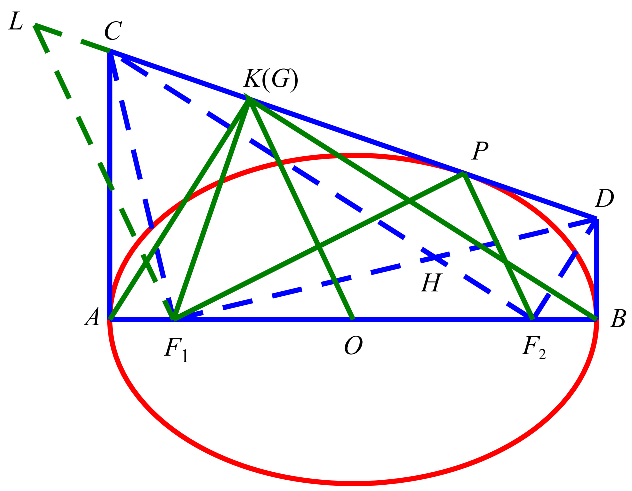


图 9 与切线相关的椭圆性质（II）

命题 7 过椭圆中心 O 作 F_2P 的平行线，交 CD 于 G，则 $OG=OA$。

过 F_1 作 F_2P 的平行线，交 DC（或 DC 的延长线）于 L。由命题 5 知，$\angle F_1PG = \angle F_1LG$；但 G 为 PL 的中点，故 $F_1G \perp CD$。可见，点 G 和命题 6 中的 K 为同一点。由命题 6 知，$\angle AGB = 90°$。但 OG 为 AB 边上的中线，故 $OG = OA$。

命题 8 椭圆上任一点处的焦半径之和等于长轴，即 $PF_1 + PF_2 = AB$。

事实上，$PF_1 + PF_2 = LF_1 + PF_2 = 2OG = AB$。

以上我们看到，阿波罗尼斯花了九牛二虎之力才获得了椭圆的焦半径性质。美国数学家库利奇（J. L. Coolidge, 1873～1954）因此说：“人们很想知道，阿波罗尼斯或者他以前的作者是否不曾用过更简单的方法来导出这个性质。”[4]无论如何，在现存的其他古希腊数学文献中，我们并没有找到别的推导方法。

3 园艺师作图法

拜占庭数学家、以设计圣索菲亚大教堂（图 10）而闻名世界的安提缪斯（Anthemius, 474?～574?）在研究燃烧镜是给出了我们今天再也熟悉不过的 “两钉一线”椭圆画法（今又称“园艺师画法”，图 11）。这种画法的依据显然就是阿波罗尼斯所发现的“椭圆焦半径之和是定值”这一性质。[1]

图 10 圣索菲亚大教堂

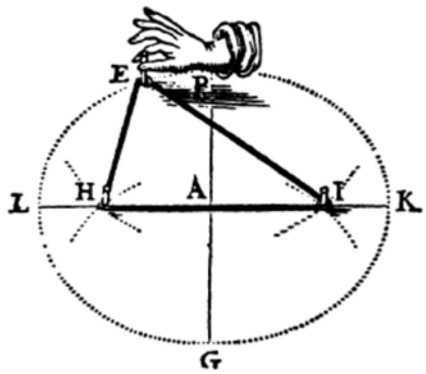


图 11 园艺师作图法（采自文献[5]）

文艺复兴时期，欧洲数学家对圆锥曲线作图法产生了浓厚的兴趣。16 世纪意大利数学家、物理学家蒙蒂（G. del Monte, 1545～1607）在其《球体投影理论》（1579）中给出同样的画法。荷兰数学家斯蒂文（S. Stevin, 1548～1620）也提到了这一作图法。蒙蒂还给出另一种作图法[6]：一条线段的两个端点分别在相互垂直的两条直线运动，则其上异于端点的一点的轨迹就是椭圆。这种作图法可以上溯到普拉克拉斯的一个几何定理，如图 11 所示。

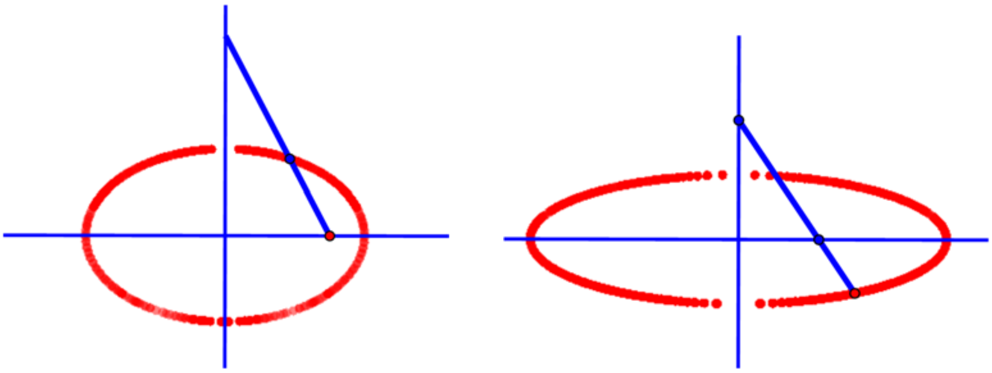


图 11 蒙蒂的另一种椭圆画图法

17 世纪末，荷兰数学家舒腾（F. van Schooten, 1615～1660）在《数学练习》（1657）中介绍了多种不同的椭圆规[5]，其中两种分别对应蒙蒂的上述作图法。

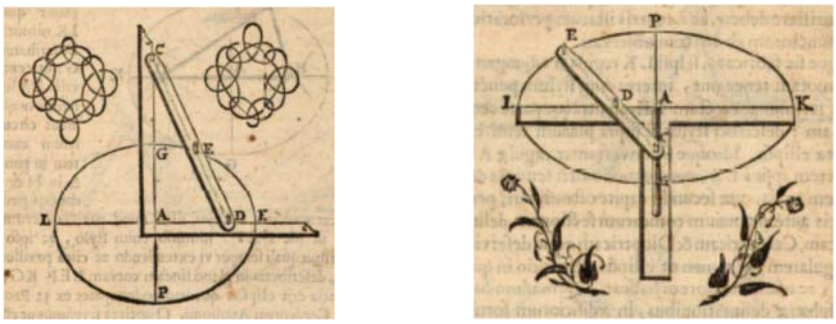


图 12 舒腾的椭圆规

有人说蒙蒂是第一个给出椭圆第一定义的人，但笔者没有找到证据。

17 世纪，德国数学家和天文学家开普勒（J. Kepler, 1571～1630）在出版于 1604 年的《天文学之光学部分》（图 13）中也给出了椭圆的园艺师作图法[7]。

图 13 开普勒《天文学之光学部分》（1604）书影

17 世纪荷兰数学家德・维特（J. de Witt, 1625～1672）在其《曲线基础》（1646）中采用了开普勒的作图法来画椭圆。他还把蒙蒂的另一作图法推广到两直线不互相垂直的情形[8]。尽管德・维特已经知道圆锥曲线的“焦点-准线”定义，并创用“准线”一词，但他并

没有给出椭圆的第一定义。

17 世纪法国数学家沃利斯（J. Wallis, 1616～1703 ）首次采用代数语言将椭圆定义为“具有性质 $e^2 = ld - \frac{l}{t}d^2$ 的平面图形”，其中 t 为直径，l 为通径（过焦点且垂直于长轴的弦长），(d, e)为椭圆上任意一点的坐标[9]。沃利斯的静态定义并没有为后人所采用，但是，他为椭圆标准方程的形成奠定了良好的基础。

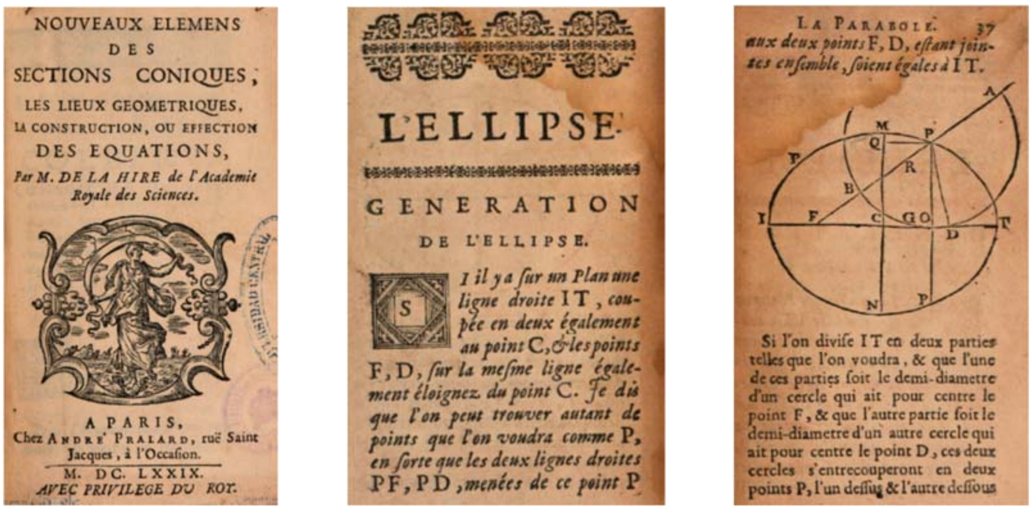
文艺复兴时期，人们逐渐抛弃圆锥来研究圆锥曲线，称之为“绝对的圆锥曲线”，这使得原始定义的必要性被大大弱化。

图 14 德 · 维特

图 15 沃利斯

4 椭圆的新定义

法国数学家和天文学家拉希尔（P. de Lahire, 1640～1719）在《圆锥曲线新基础》（1679）中给出了椭圆的焦半径定义（图 15）。拉希尔首先提出以下问题：给定线段 IT，其中点为 C，在 CI 和 CT 上分别取点 F 和 D，使得 $CF = CD$。求作一点 P，使得 $PF + PD = IT$。拉希尔的


NOUVEAUX ELEMENS DES SECTIONS CONIQUES, LES LIEUX GEOMETRIQUES, LA CONSTRUCTION, OU EFFECTION DES EQUATIONS, Par M. DE LA HIRE de l'Academie Royale des Sciences.

A PARIS, Chez ANDRE' PRALARD, ruë Saint Jacques, à l'Occasion. M. DC. LXXIX. AVEC PRIVILEGE DU ROY.

L'ELLIPSE.

GENERATION DE L'ELLIPSE.

S'il y a sur un Plan une ligne droite IT, coupée en deux également au point C, & les points F, D, sur la mesme ligne également éloignez du point C. Je dis que l'on peut trouver autant de points que l'on voudra comme P, en sorte que les deux lignes droites PF, PD, menées de ce point P

LA PARABOLE. 37

aux deux points F, D, estant jointes ensemble, soient égales à IT.

Si l'on divise IT en deux parties telles que l'on voudra, & que l'une de ces parties soit le demi-diametre d'un cercle qui ait pour centre le point F, & que l'autre partie soit le demi-diametre d'un autre cercle qui ait pour centre le point D, ces deux cercles s'entrecouperont en deux points P, l'un dessus & l'autre dessous

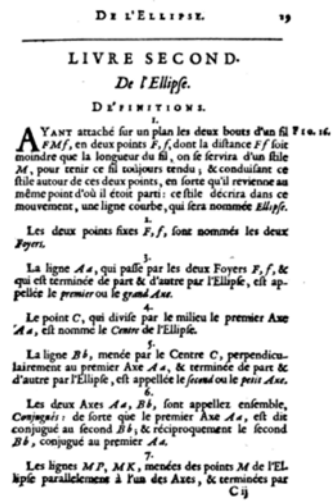
图 16 《圆锥曲线新基础》书影

作法是：任将 IT 分成两段，以 F 为圆心，以其中一段为半径作圆弧；再以 D 为圆心、以另一段为半径作圆弧，两弧的交点 P 及为所求。然后，拉希尔将点 P 的轨迹定义为椭圆[10]。

这是我们所见文献中第一定义的首次出现。在拉希尔之后，法国数学家洛必达（M. de L'Hospital, 1661～1704）在《圆锥曲线分析》（1707）中采用了园艺师画法以及拉希尔的新定义，并根据该定义来推导椭圆的方程[11]。


TRAITÉ
ANALYTIQUE
DES
SECTIONS CONIQUES
ET DE LEUR USAGE
POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS
dans les Problêmes tant déterminez qu'indéterminez.
OUVRAGE POSTHUME
De M. Le Marquis de l'Hospital, Academicien Honoraire de l'Academie Royale des Sciences.

A PARIS,
Chez { La Veuve de JEAN BOUDOT, Imprimeur Ordinaire du Roi, & de l'Academie Roiale des Sciences : ET JEAN BOUDOT Fils, Imprimeur Ordinaire du Roy & de l'Academie Roiale des Sciences, rue S. Jacques, au Soleil d'Or, près S. Severin.
M. DCCVII.
AVEC PRIVILEGE DU ROI.


De l'Ellipse. 19

LIVRE SECOND.
De l'Ellipse.
DÉFINITIONS.

1.
Ayant attaché ſur un plan les deux bouts d'un fil *FMf*, en deux points *F*, *f*, dont la diſtance *Ff* ſoit moindre que la longueur du fil, on ſe ſervira d'un ſtile *M*, pour tenir ce fil toûjours tendu ; & conduiſant ce ſtile autour de ces deux points, en ſorte qu'il revienne au même point d'où il étoit parti : ce ſtile décrira dans ce mouvement, une ligne courbe, qui ſera nommée *Ellipſe*. Fig. 16.

2.
Les deux points fixes *F*, *f*, ſont nommés les deux *Foyers*.

3.
La ligne *Aa*, qui paſſe par les deux Foyers *F*, *f*, & qui eſt terminée de part & d'autre par l'Ellipſe, eſt appellée le *premier* ou le *grand Axe*.

4.
Le point *C*, qui diviſe par le milieu le premier Axe *Aa*, eſt nommé le *Centre* de l'Ellipſe.

5.
La ligne *Bb*, menée par le Centre *C*, perpendiculairement au premier Axe *Aa*, & terminée de part & d'autre par l'Ellipſe, eſt appellée le *ſecond* ou le *petit Axe*.

6.
Les deux Axes *Aa*, *Bb*, ſont appellez enſemble, *Conjugués* : de ſorte que le premier Axe *Aa*, eſt dit conjugué au ſecond *Bb* ; & réciproquement le ſecond *Bb*, conjugué au premier *Aa*.

7.
Les lignes *MP*, *MK*, menées des points *M* de l'Ellipſe parallelement à l'un des Axes, & terminées par
C ij

图 16 《圆锥曲线分析》书影

18 世纪以后，椭圆第一定义逐渐被广泛采用，且第二定义（焦点-准线定义）也逐渐登上历史舞台。

5 结语

早在古希腊，焦半径性质已经为阿波罗尼斯所发现，而园艺师作图法则早在公元 6 世纪就为安提缪斯所用，但直到 17 世纪，人们才逐渐摈弃椭圆的原始定义，历史惊人地跨越了漫长的两千年！尽管古希腊人已经将圆锥曲线看作轨迹，但在解析几何诞生之前，“将曲线看成轨迹”并不是研究曲线性质的前提，人们似乎并不需要采用新定义。只有在解析几何诞生之后，人们需要将曲线看作动点的轨迹以建立其方程，或根据方程研究曲线的性质，而不再依赖几何语言和几何方法，因而原始定义逐渐变得多余，第一定义终于应运而生。另一方面，椭圆的原始定义建立在立体图形上，需要一定的空间想象①，且不易完成，而第一定义完全建立在平面上，相应的园艺师作图法则易于操作。因此，椭圆的第一定义有着巨大的优越性，显然更适合于教学。

①实际上，受直觉的影响，古人对于圆柱和圆锥的截线是否属于同类曲线是有困惑的。

椭圆脱胎于圆锥，但解析几何的发展、轨迹定义的广泛使用使它们与圆锥分道扬镳、形同陌路，由此产生“旧瓶装新酒”的现象。毫无疑问，只有诉诸历史，我们才能向学生解释这样的现象。

参考文献

[1]Heath, T. L.*A History of Greek Mathematics*. London: Oxford University Press, 1921.

[2] 汪晓勤. 椭圆方程之旅. 数学通报, 2013, 52(4): 54-58.

[3] Apollonius. *Conics* (translated by R. C. Taliaferro). In: R. M. Hutchins (ed.), *Great Books of the Western World* (11). Chicago: Encyclopaedia Britannica, Inc., 1982. 780-792.

[4] Coolidge, J. L. *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*. New York: Dover Publications, 1968. 19-20.

[5] Schooten, F. van. *Exercitationum Mathematicarum*. Lvgd Batav: Johannis Elsevirii, 1657.

[6] Taylor, C. *An Introduction to the Ancient and Modern Geometry of Conics*. Cambridge: Deighten Bell & Co., 1881.

[7] Kepler, J. *Astronomiae Pars Optica Traditur*. Francofvrti: Claudium Marnium & Haeredes Ioannis Aubrii, 1604.

[8] Boyer, C. B. *History of Analytic Geometry*. New York: Scripta Mathematica, 1956. 110-117.

[9] Wallis, J. *Tractatus de Sectionibus Conicis*. *Opera Mathematica*, Oxoniae: E. Theatro Sheldoniano, 1695.

[10] Lahire, P. de. *Nouvaux Elemens des Sectiones Coniques*. Paris: Andre Pralard, 1679.

[11] L’Hospital, M. de. *Traité Analytique des Sections Coniques*. Paris: Jean Boudot, 1707.

《九章算术》勾股章及其刘徽注中的变式思想*

齐春燕

（华东师范大学数学系，上海 200241）

众所周知，变式教学是我国传统的教学方式。在教学过程中，教师在保持概念、公式、定理、图形等的本质属性不变的前提下，通过改变概念的表述方式、变换问题的条件和试题的内容和形式、改变图形的形状、位置和大小等在不变中求变，在变中求不变，引导在求异、思变中创新，以培养学生良好的创造性思维品质和创造性学习的能力。鲍建生等认为，用于构建特定经验系统的变式，通常来自问题解决的三种拓展[1]：（1）一题多变；（2）一题多解；（3）一法多用。

变式思想并非现代教育的产物。沈康身先生在介绍中算家的“教学思想”时，曾简要提及一题多解方面的工作[2]。本文对《九章算术》勾股章及其刘徽注进行深入分析，试图较全面地揭示其中的变式思想，以拓展教育取向的数学史研究的内涵。

1 《九章算术》勾股章的内容

《九章算术》是我国最重要的数学经典之一，书中包含 246 个问题，这些问题可分为九类，形成九章。其中，勾股章专门讨论有关直角三角形问题，含 24 问，由三部分组成。第 1-13 问为勾股定理的应用题，具体内容是已知中的两个元素，求其他元素；第 15-20，22-24 问为相似直角三角形的应用题，包括勾股容方、勾股容圆以及其他测量问题；第 14 和 21 两问为勾股数问题。

设 a, b, c 分别为（小）直角三角形的勾、股、弦，d 为直角三角形内接正方形的边长，x, y 分别直角三角形内接长方形的长和宽，D 为直角三角形内切圆的直径，24 个问题[3]的相关信息见表 1。

*上海市教育科学研究重大项目“中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”（项目号：D1508）系列论文之一。作者之一曾在第十三届国际数学教育大会 HPM 卫星会议（HPM-2016，法国蒙彼利埃）上报告过本文的主要内容。

表 124 个问题相关信息表

题次	问题	已知项	所求项	解法
1	今有勾三尺，股四尺，问：为弦几何？	a, b	c	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
2	今有弦五尺，勾三尺，问：为股几何？	a,c	b	$b=\sqrt{c^2-a^2}$
3	今有股四尺，弦五尺，问：为勾几何？	b, c	a	$a=\sqrt{c^2-b^2}$
4	今有圆材径二尺五寸，欲为方板，令厚七寸。问：广几何？	a,c	b	$b=\sqrt{c^2-a^2}$
5	今有木长二丈，围之三尺。葛生其下，缠木七周，上与木齐。问：葛长几何？	a, b	c	$c=\sqrt{a^2+b^2}$
6	今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问：水深、葭长各几何？	a, c-b	b, c	$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}$ $c = b + (c\text{-}b)$
7	今有立木，系索其末，委地三尺。引索却行，去本八尺而索尽。问：索长几何？	a, c-b	c	$c=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b}+(c-b)\right]$,
8	今有垣高一丈。倚木于垣，上与垣齐。引木却行一尺，其木至地。问：木几何？	a, c-b	c	$c=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b}+(c-b)\right]$
9	今有圆材，埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问：径几何？	a, c-b	c	$c=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b}+(c-b)\right]$
10	今有开门，去阃一尺，不合二寸。问：门广几何？	a, c-b	c	$c=\frac{1}{2}\left[\frac{a^2}{c-b}+(c-b)\right]$
11	今有户，高多于广六尺八寸，两隅相去适一丈。问：户高、广各几何？	c, b-a	a, b	$a=\sqrt{\frac{1}{2}\left(c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right)}-\frac{b-a}{2}$ $b=\sqrt{\frac{1}{2}\left(c^2-2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right)}+\frac{b-a}{2}$
12	今有户，不知高广，杆不知长短。横之不出四尺，纵之不出二尺，斜之适出。问;户高、广、斜各几何？	c-a, c-b	a, b, c	$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-b)$ $b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)$ $c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)+(c-b)$

13	今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺。问：折者高几何？	$a, c+b$	b	$b=\frac{1}{2}\left[(c+b)-\frac{a^2}{c+b}\right]$
14	今有二人同所立。甲行率七，乙行率三。乙东行。甲南行十步而斜东北，与乙会。问：甲乙行各几何？	$b, c+a$	a, c	$a=\frac{1}{2}\left(m^2-n^2\right)$, $b=mn$, $c=\frac{1}{2}\left(m^2+n^2\right)$
15	今有勾五步，股十二步。问：勾中容方几何？	a, b	d	$d=\frac{ab}{a+b}$
16	今有勾八步，股一十五步。问：勾中容圆径几何？	a, b	d	$D=\frac{2ab}{a+b+c}$
17	今有邑方二百步，各中开门。出东门一十五步有木。问：出南门几何步而见木？[①]	$a_1, b_1=a_2=d$	b_2	$b_2=\frac{d^2}{a_1}$
18	今有邑，东西七里，南北九里，各中开门。出东门一十五里有木。问：出南门几何步而见木？	b_1, a_2, b_2	a_1	$a_1=\frac{a_2b_1}{b_2}$
19	今有邑方不知大小，各中开门。出北门三十步有木，出西门七百五十步见木。问：邑方几何？	a_1, b_2	$b_1=a_2=d$	$d=\sqrt{a_1b_2}$
20	今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木，出南门一十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问：邑方几何？	a_1, b, $a_2=2b_1+t$	b_1	$2b_1^2+\left(a_1+t\right)b_1-a_1b=0$
21	今有邑方一十里，各中开门。甲、乙俱从邑中央而出：乙东出；甲南出，出门不知步数，邪向东北，磨邑隅，适与乙会。率：甲行五，乙行三。问：甲、乙行各几何？	d, $(c+a):b$	a, b	$a=\frac{1}{2}\left(m^2-n^2\right), b=mn$, $c=\frac{1}{2}\left(m^2+n^2\right)$
22	今有木去人不知远近。立四表，相去各一丈，令左两表与所望参相直。从后右变望之，入前右表三寸。问：木去人几何？	a, a_1, b_1	b	$b=\frac{ab_1}{a_1}$
23	今有山居木西，不知其高。山去木五十三里，木高九丈五尺。人立木东三里，望木末适与山峰斜平。人目高七尺。问：山高几何？	a_1, b_1, b_2	a_2	$a_2=\frac{a_1b_2}{b_1}$
24	今有井径五尺，不知其深。立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸。问：井深几何？	a_1, b_1, a_2	b_2	$b_2=\frac{a_2b_1}{a_1}$

[①] a_1 和 b_1 分别表示勾上小直角三角形的直角边长，a_2 和 b_2 分别表示股上小直角三角形的直角边长。下同。

2 一题多变

一题多变是题目结构的变式，通过改变题目的条件或目标，从不同角度、不同方面揭示题目的实质。美国学者希尔佛（Silver）等人[4][5]的研究表明，根据已有问题提出新问题的具体策略有四种：

（1）条件操作，即改变现有问题的已知条件，而保持所求目标不变；

（2）目标操作，即改变现有问题的所求目标，而保持已知条件不变；

（3）对称互换，即将现有问题的条件和目标互换；

（4）新旧链接，即以现有问题的目标为条件，提出新问题。

表1给出基于勾股章第1题提出新问题的具体例子。

表 1 基于勾股章第 1 题的问题提出举例

策 略	新问题
条件操作	（1）已知直角三角形的两条直角边长分别为 7 米和 25 米，求与直角三角形具有公共直角的内接正方形的边长；
	（2）已知直角三角形的直角边为 a 和 b，求其内接正方形的边长。
目标操作	（1）已知直角三角形的直角边为 5 和 12，求其内接正方形的面积。
	（2）已知直角三角形的直角边为 5 和 12，求其内接正方形的对角线。
对称互换	已知直角三角形的内接正方形边长为 60/17，斜边为 13，求直角边。
新旧链接	已知直角三角形的直角边为 a 和 b，根据内接正方形边长与 a 和 b 之间的关系，证明均值不等式 $2ab/(a+b)<(a+b)/2$.

其中，条件式策略包括两种情形：（1）改变已知条件中的具体数据，我们称之为条件操作 I；（2）改变已知条件的类型，称为条件操作 II。如在直角三角形ABC 中，将条件 $a=5$，$b=12$改成$a=8$，$b=15$，即为条件操作I；将条件a，b改为a，c-b 或 c-a, b，但保持目标不变，则为条件操作II。如果数据和类型都改变，则仍归为条件操作II。

图 1 给出了勾股章诸问题之间的关系。从图中可见，问题 1 是所有 24 个问题的出发点。从该问题出发，通过条件操作 I 得到问题 5，通过对称互换分别得到问题 2 和 3。从问题 3 出发，通过条件操作 II，得到问题 11。从问题 2 出发，通过条件操作 I 和 II，分别得到问题 4、6 和 13。从问题 13 出发，通过对称互换，得到问题 14。从问题 6 出发，通过条件操作 I，得到问题 7-10，各问题通过条件操作 II，得到问题 12。

从问题 1 出发，通过目标操作，得到问题 15 和 16。从问题 15 出发，通过条件操作 I，得到问题 19。从问题 19 出发，通过条件操作 II，得到问题 20。从问题 15 出发，通过对称互换，得到问题 17。从问题 17 出发，通过条件操作 II，得到问题 18，21-24。

另一方面，虽然从问题 1 出发，通过目标操作得到问题 16，但问题 16 的解决是建立在勾股定理基础上的，因为直角三角形内切圆直径需要用直角边和斜边共同来表达。也就是说，从问题 1 到问题 16，也隐含了新旧链接的策略。

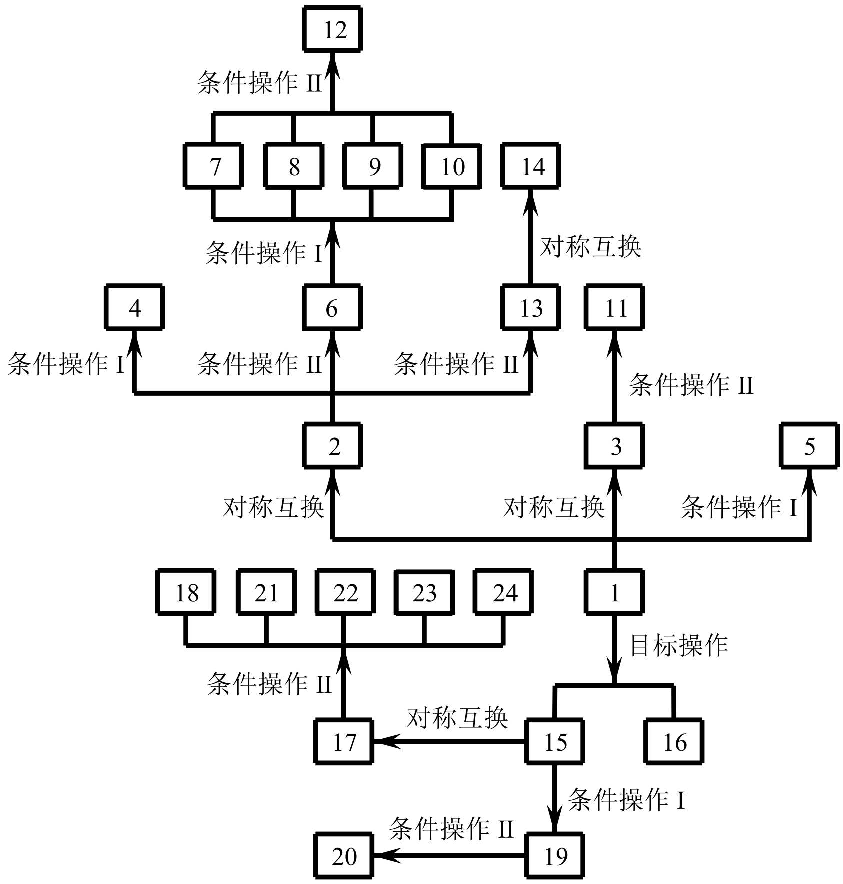


图 1 勾股章诸问题之间的联系

由此可见，希尔佛等所总结的四种问题提出策略并非现代人的创造，而是早已为《九章算术》的编撰者所用。

3 一题多解

三国时期数学家刘徽在注释《九章算术》时十分重视一题多解，典型的例子是勾股容方和勾股容圆公式的推导。

3.1 勾股容方公式

勾股章第 15 题给出“勾股容方”公式：已知直角三角形勾、股分别为 a、b，则内接正方形边长 $d=\dfrac{ab}{a+b}$。刘徽用了两种不同的方法来证明该公式。

方法 1：割补法

刘徽将直角三角形内接正方形称为黄方，余下两小直角三角形，位于勾上的称为朱幂，

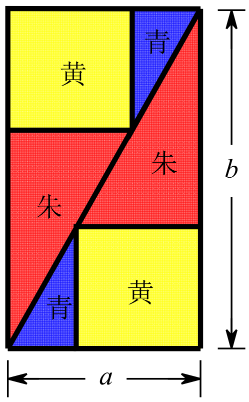


图 2

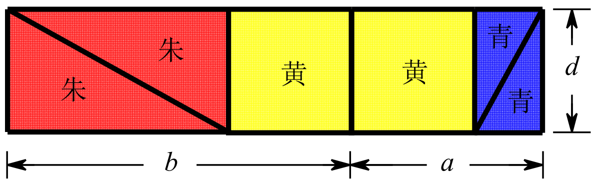


图 3

位于股上的称为青幂。如图 2，作以勾、股为边长的长方形，其面积为ab，其中含 2 个朱幂、2 个青幂和 2 个黄幂。将朱、黄、青幂重新拼成一个长为 a+b，宽为 d 的长方形，如图 3 所示，则因$ab=(a+b)d$，故得$d=\dfrac{ab}{a+b}$。

方法 2：比例法

如图 4，设勾上小直角三角形的直角边为a_1和b_1，股上小直角三角形的直角边为a_2和b_2，则因$a:b=a_1:b_1$，故$(a+b):b=(a_1+b_1):b_1$，但$a=a_1+b_1,b_1=d$，故$(a+b):b=a:d$。

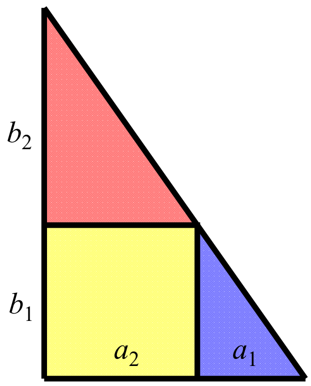


图 4

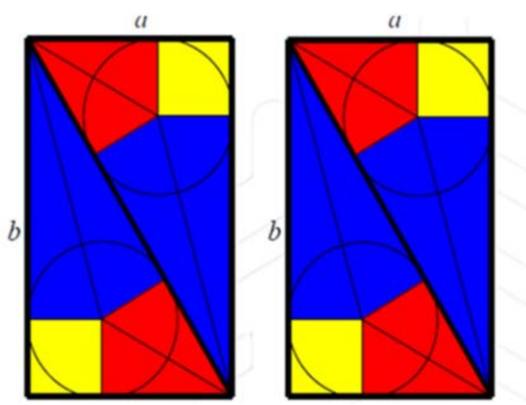


图 5

于是得$d=\dfrac{ab}{a+b}$。同样，因$b:a=b_2:a_2$，故$(a+b):a=(a_2+b_2):a_2$，但$b=a_2+b_2$，

$a_2 = d$，故得同一公式。

3.2 勾股容圆公式

第 16 题给出"勾股容圆"公式：已知直角三角形的勾、股分别为 a 和 b，则内切圆直径为 $d=\dfrac{2ab}{a+b+c}$。刘徽也分别用割补法和比例的性质来证明该公式。

方法 1：割补法

如图 5，将直角三角形分解成 1 个黄幂、1 个朱幂与 1 个青幂。黄幂是边长为内切圆半径的正方形；朱幂由 2 个勾为内切圆半径 $\dfrac{d}{2}$、股为大勾与半径之差 $a-\dfrac{d}{2}$ 的直角三角形组成；青幂由 2 个勾为内切圆半径、股为大股与半径之差 $b-\dfrac{d}{2}$ 的直角三角形组成。取 2 个原来的直角三角形，组成一个长方形，内含朱、青、黄幂各 2 个。

如图 6，将 2 个这样的长方形（总面积为 $2ab$）中的朱、青、黄幂进行重新组合，拼成一个长为勾、股、弦之和 $a+b+c$、宽为内切圆直径 d 的长方形。则因 $(a+b+c)d=2ab$，

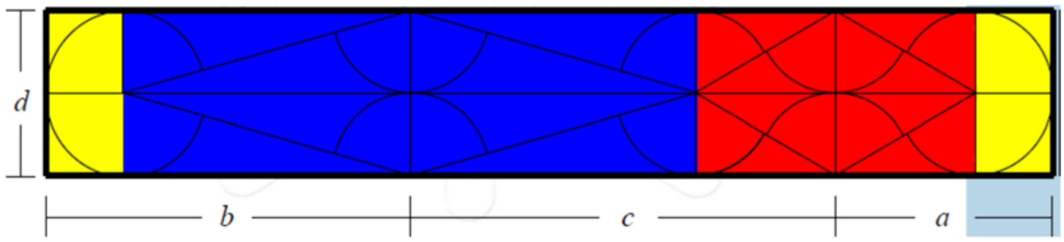


图 6

故内切圆直径为 $d=\dfrac{2ab}{a+b+c}$。

方法 2：比例法

如图 7，圆 O 为 $Rt\Delta ACB$ 的内切圆，过圆心 O 作斜边 AB 的平行线，分别交 AC 和 BC 于 A' 和 B'，易证 $AA'=OA'$，$BB'=OB'$。因 $Rt\Delta A'EO \sim Rt\Delta ACB$，故有

$$\frac{OE}{a}=\frac{A'E}{b}=\frac{OA'}{c},$$

由等比定律得

$$\frac{OE}{a}=\frac{OE+A'E+OA'}{a+b+c}=\frac{EC+A'E+AA'}{a+b+c}=\frac{b}{a+b+c} \qquad (1)$$

同理，由 $Rt\Delta ODB' \sim Rt\Delta ACB$，可得

$$\frac{OD}{b}=\frac{OD+B'D+OB'}{a+b+c}=\frac{DC+B'D+BB'}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c} \quad (2)$$

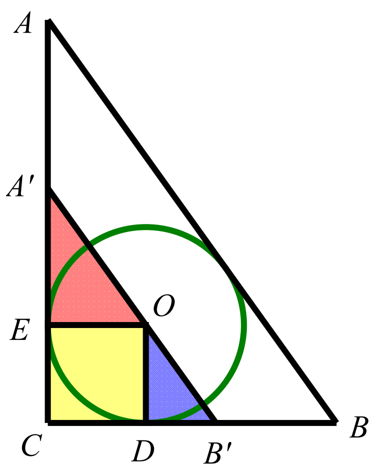


图 7

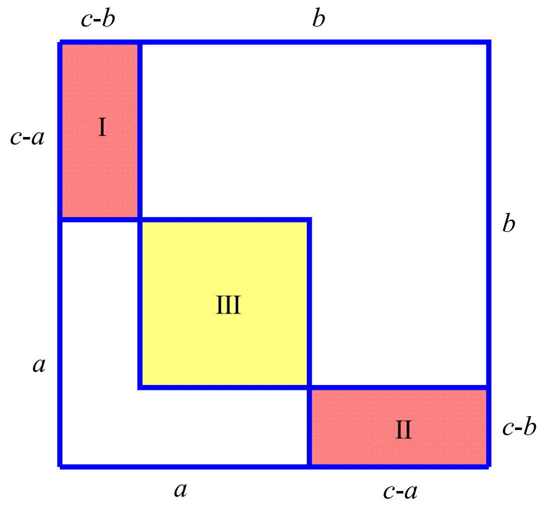


图 8

由（1）或（2）均可得$\frac{d}{2}=\frac{ab}{a+b+c}$。

刘徽还给出内切圆直径的另两种表达形式：$d=a+b-c$，$d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$。其中，后一个公式是通过图 8 得到的：在以 c 为边长的正方形中分别作边长为 a 和 b 的正方形，易知 $a^2+b^2-III=c^2-(I+II)$，故有 $I+II=III$，即 $(a+b-c)^2=2(c-a)(c-b)$。

4 一法多用

勾股章第 17-24 问均为测望问题（表 1），这些问题都可归结为直角三角形内接长方形问题。如图 4 所示，利用勾上小直角三角形（青幂）、股上小直角三角形（朱幂）以及整个直角三角形两两之间的相似性，可得

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a}{b} \quad (3)$$

故已知 a_1，b_1，a_2，b_2，a 和 b 中的三个，可求得其他未知项。第 17-20、22-24 诸题均通过上述方法求解。

5 结语

根据以上分析，我们得到如下结论：《九章算术》勾股章的问题是以第 1 题（已知勾、

股求弦）为出发点，通过条件操作、目标操作和对称互换三种策略编制而成，体现了精彩的一题多变的变式思想；所有测望问题均利用“相似直角三角形对应边成比例”这一性质来解决，体现了一法多用的变式思想。刘徽在推导勾股容方和勾股容圆公式时采用了不同的方法，体现了一题多解的变式思想。因此，在我国，数学教育中的变式思想至迟可以上溯至《九章算术》成书的时代。

在刘徽之后，中算家们继续运用变式思想，不断提出和解决新的勾股问题，形成了一个独特的课题，即“勾股算术”。因此，变式思想在我国数学教育史上历史悠久、绵延不绝。至此，我们不难理解为什么变式教学是我国传统的教学方式了。追溯变式思想的历史渊源，我们也获得了重要的启示，一个国家或民族的数学教育特色，必定是传承历史的结果；只有民族的，才是世界的。

参考文献

[1] 鲍建生, 黄荣金等. 变式教学研究. 数学教学, 2003, (1): 11-12.

[2] 沈康身. 中算导论. 上海:上海教育出版社, 1986.

[3] 郭书春. 汇校九章算术. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2004.

[4] Silver, E. A. et al. Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1996, 27(3): 293-309.

[5] Singer, F. M. et al. Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. Educational Studies in *Mathematics*, 2013, 83:1–7.

时空隧道

三角公式的若干几何模型

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海，200062）

在三角学的历史上，许多数学家，如托勒密（C. Ptolemy, 2 世纪）、阿布 •韦法（Abu Wefa, 940～998）、克拉维斯（C. Clavius, 1538～1612）、韦达（F. Viète, 1540～1603）、克雷斯维尔（D. Cresswell, 1776～1844）等等，都曾利用单位圆来推导三角公式。实际上，打开 20 世纪中叶以前的任何一部西方三角学著作，我们都能看到，三角公式都是借助某种几何模型、通过线段长度关系、图形面积关系或其他几何命题或公式来推导的[1]。考虑到数学教学的原则以及直观想象素养养成的需要，判断一种几何方法是否适合于教学的标准就是它的简洁性与直观性。历史上的许多方法都未能满足这样的标准。

作为对文献[1]所呈现的历史方法的补充，本文在文献[2]以及现代无字证明的基础上，对锐角情形下的和角与差角公式的若干几何模型进行分析，为 HPM 视角下的三角公式教学设计提供一些思路。

由于和角和差角诸公式中含有 $\sin\alpha$ ，$\cos\alpha$ ，$\sin\beta$ 和 $\cos\beta$ 中两两相乘的项，我们构造两对斜边均为 1 的直角三角形，其中一对各含锐角为 α（蓝色），另一对各含锐角 β（红色），不妨设 $\alpha \geq \beta$ 。如图 1 所示。为了获得四个乘积，需要将两对三角形进行组合。

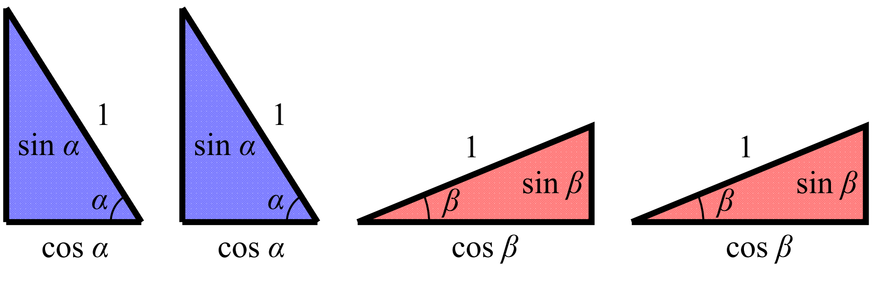


图 1 两对斜边为 1 的直角三角形

1 菱形模型

第一种模型类似于赵爽在其“勾股圆方图注”中所用的弦图，如图 2 所示，中间补充一

个长和宽分别为$\cos\beta-\cos\alpha$和$\sin\alpha-\sin\beta$的黄色长方形，得到一个边长为 1、一个内角为$\alpha+\beta$的菱形，其面积为$\sin(\alpha+\beta)$。将左上红色直角三角形移至右下，右上蓝色直角三角形移至左下，得到一个由蓝色、红色、黄色矩形构成的图形，如图 3 所示。将该图形分割成左右两个长方形，面积分别为$\sin\alpha\cos\beta$和$\cos\alpha\sin\beta$。故得和角正弦公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (1)$$

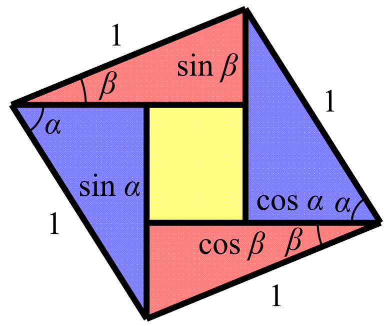


图 2 菱形模型

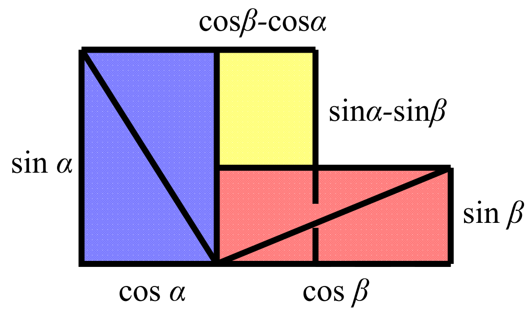


图 3 菱形模型的重新组合

若以$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$代替α，则得到图 4 所示的拼图方案，菱形面积为

$$\sin\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right]=\cos(\alpha-\beta)$$

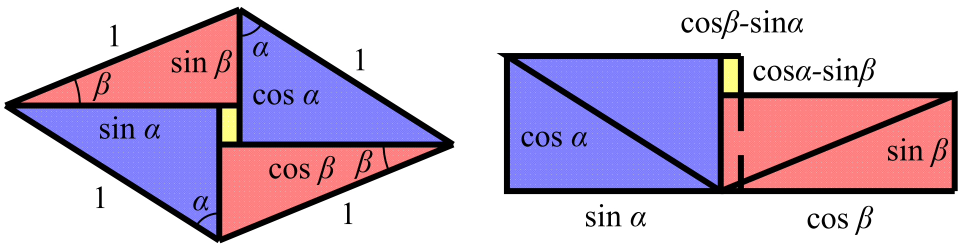


图 4 差角余弦的菱形模型及其重组

故得差角余弦公式为

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad (2)$$

2 第一类矩形模型

第二种模型类似于赵爽在其“勾股圆方图注”中所用的“大方”图，如图 5 所示。整个矩形的长为$\cos\alpha+\cos\beta$，宽为$\sin\alpha+\sin\beta$；中间是边长为 1、一个内角为$\alpha+\beta$的黄色

菱形，其面积为$\sin(\alpha+\beta)$。在该矩形中，将右上蓝色直角三角形移至左下，左上红色直角三角形移至右下，分别得到蓝、红矩形，余下部分则为两个黄色矩形，其面积分别为$\sin\alpha\cos\beta$和$\cos\alpha\sin\beta$，如图 6 所示。比较图 5 和图 6，易知，图 5 中的黄色菱形面积等于图 6 中的两个黄色矩形面积之和，故得公式（1）。

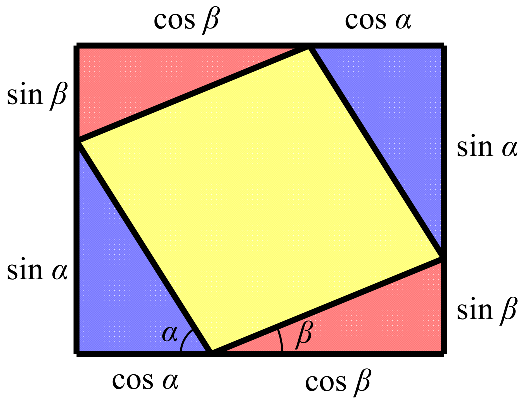


图 5 第一类矩形模型

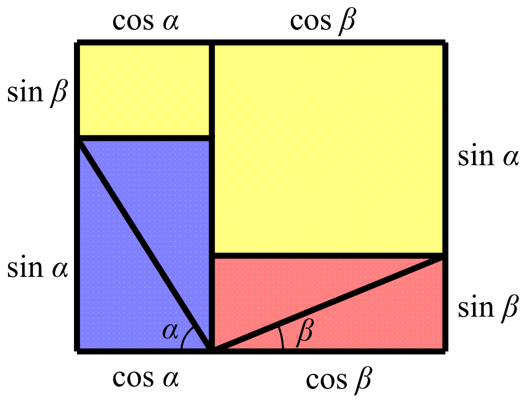


图 6 第一类矩形模型之重组

图 7 呈现了公式（1）的动态形成过程。

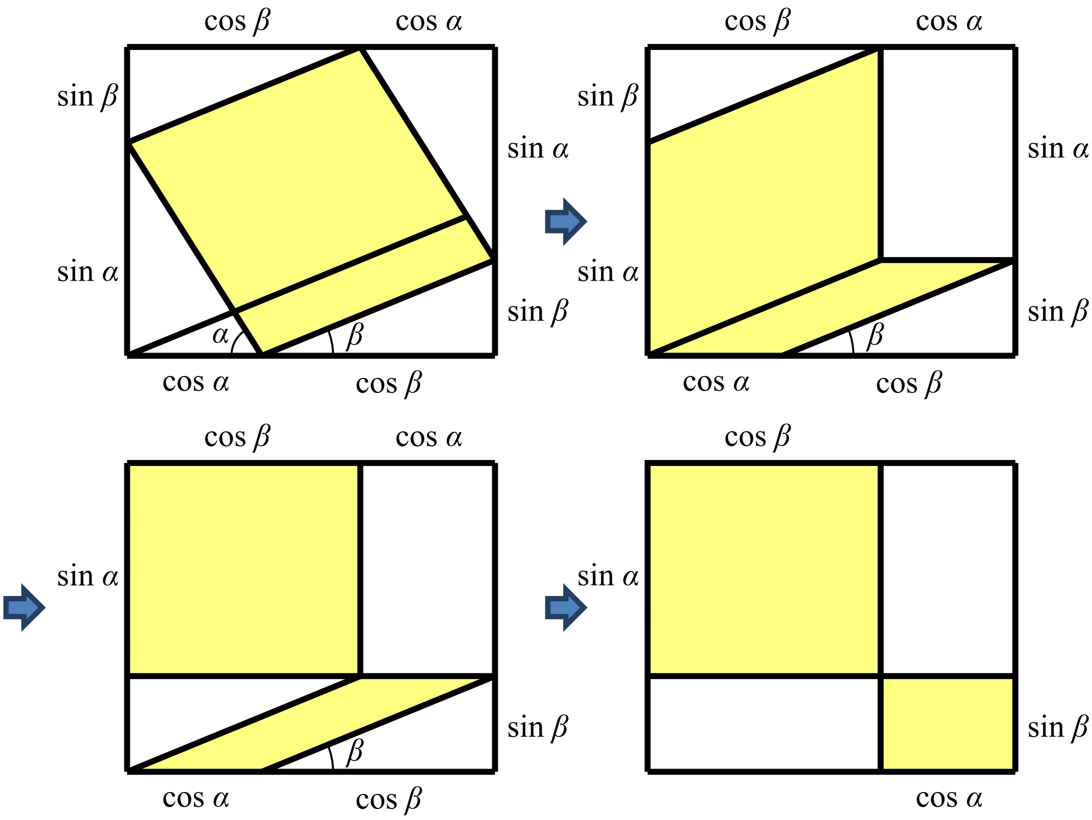


图 7 和角正弦公式的动态形成过程

我们也可以将上述矩形模型简化为直角梯形模型。如图 8 所示，将蓝色和红色直角三角形与一个黄色等腰三角形组成一个直角梯形。分别计算各三角形以及整个梯形的面积，得

$$\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\beta\cos\beta+\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)$$

整理后即得公式（1）。若以 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替 α，则可得公式（2）。

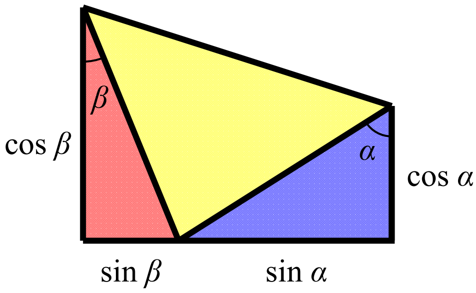


图 8 梯形模型

在上述矩形或直角梯形模型中，如果我们不从图形面积关系入手，而是考虑线段之间的关系，也可得相应公式。如图 9 所示，过顶点 A 作 BD 的垂线，垂足为 F；过顶点 C 作 AF 和 DB 的垂线，垂足分别为 G 和 H，则由 $AF=AG+CH$ 即得公式（1），由 $BF=CG-BH$ 即得公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad (3)$$

或者，过顶点 D 作 AB 的垂线，垂足为 M；过定点 E 作 DM 和 AB 的垂线，垂足分别为 N 和 P，则由 $DM=EP+DN$ 和 $BM=EN-BP$ 分别可得公式（1）和（3）。

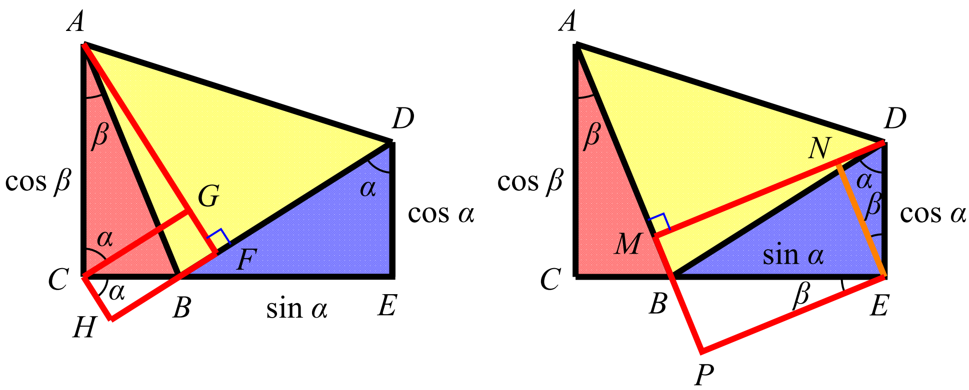


图 9 梯形模型中的线段关系

此外，利用余弦定理和勾股定理，可得

$$AD^2=2-2\cos(\alpha+\beta)=(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\beta-\cos\alpha)^2$$

整理后即得公式（3）。

3 第二类矩形模型

第三类模型与第二类模型一样，也是一个长为$\cos\alpha+\cos\beta$、宽为$\sin\alpha+\sin\beta$的矩形，但两类直角三角形的组合方式不同，如图 10 所示。其中间是边长为 1、一个内角为$\alpha-\beta$的黄色菱形，面积为$\sin(\alpha-\beta)$；左上角和右下角均为长和宽分别为$\cos\alpha$和$\sin\beta$的绿色小矩形。将同类直角三角形拼成红、蓝矩形，如图 11 所示。易知图 10 中的黄色菱形与图 11 中的黄色矩尺形面积相等，故得公式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (4)$$

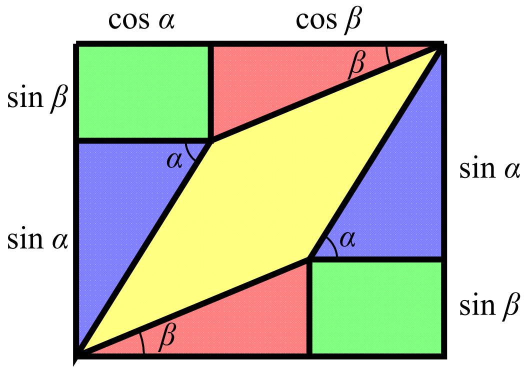


图 10 第二类矩形模型

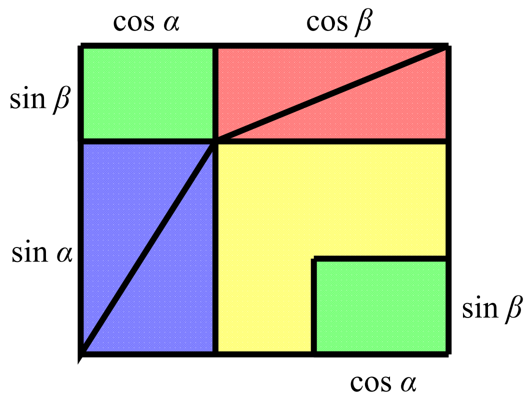
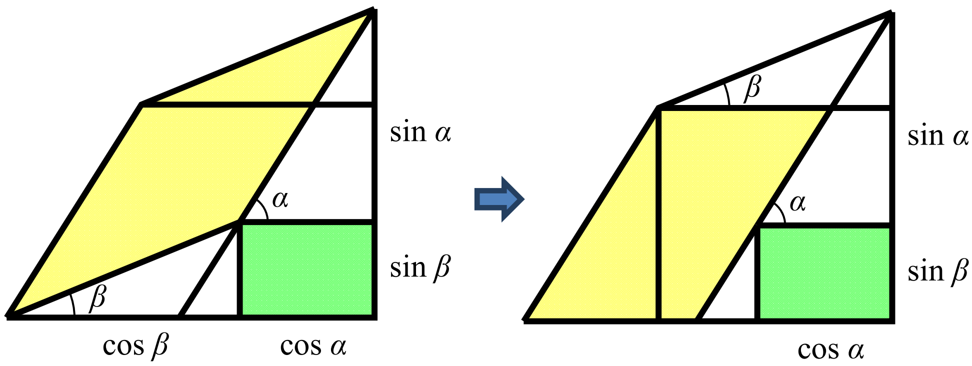


图 11 第二类矩形模型之重组

图 12 呈现了公式（4）的动态形成过程。



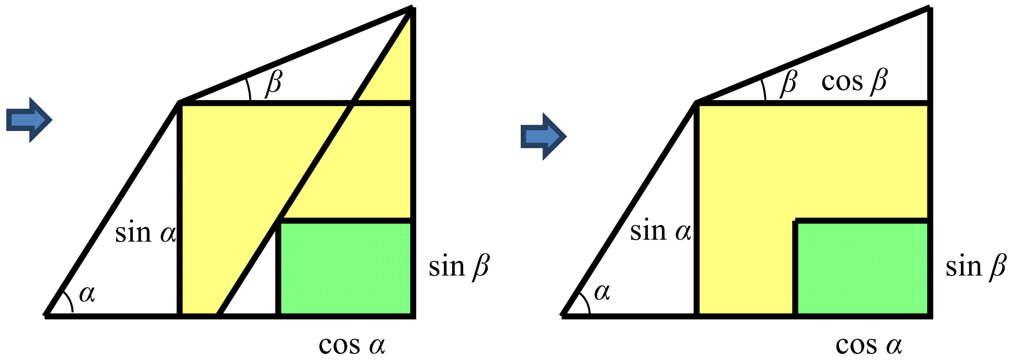


图 12 差角正弦公式的动态形成过程

在第二类矩形模型中，若以 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 代替 α，则可得公式（3）。

若考虑线段之间的关系，则也可得相应公式。如图 13 所示，过顶点 E 和 G 作 DF 的垂线，垂足分别为 R 和 P；延长 BE，交 GP 于 Q，则由 $RE=PQ=GP-GQ$ 和 $RD=EQ+PD$ 分别可得公式（4）和（2）。

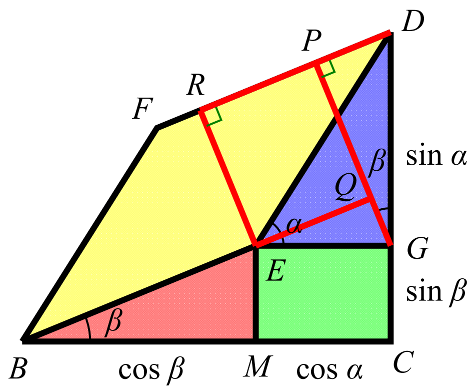


图 13 第二类矩形模型中的线段关系

此外，利用余弦定理和勾股定理可得

$$EF^2=2-2\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\beta-\cos\alpha)^2$$

$$BD^2=2+2\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2$$

整理后得公式（2）。

4 筝形模型

第四类模型如图 14 所示，两对直角三角形外加一对黄色梯形，构成一个筝形，其面积为

$$2\times\frac{1}{2}\times1\times\cos\beta\sec\alpha\times\sin(\alpha+\beta)=\cos\beta\sec\alpha\sin(\alpha+\beta),$$

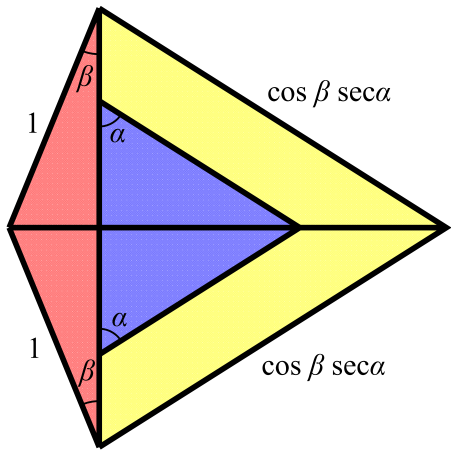


图 14 筝形模型

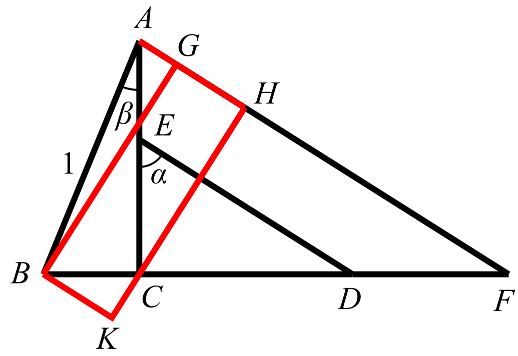


图 15 筝形模型中的线段关系

另一方面，筝形面积又等于其对角线乘积之半 $\cos\beta(\sin\beta+\cos\beta\tan\alpha)$，故有

$$\cos\beta\sec\alpha\sin(\alpha+\beta)=\cos\beta(\sin\beta+\cos\beta\tan\alpha),$$

整理后即得公式（1）。

在筝形模型中，若考虑线段之间的关系，则也可得相应公式。如图 15 所示，过顶点 B 和 C 作 AF 的垂线，垂足分别为 G 和 H；过 B 作 CH 的垂线，垂足为 K，则由 $BG=HC+CK$ 和 $AG=AH-BK$ 分别得（1）和（3）。

5 平行四边形模型

现在，我们将一个锐角分别为 α 和 β、斜边均为 1 的两个直角三角形的直角叠合在一起，如图 16 所示。过第一个直角三角形的非直角顶点，作另一个直角三角形的斜边的平行线，得到第五类模型——平行四边形模型，它是由两个顶角为 $\alpha-\beta$、腰为 1 的等腰三角形构成的，面积为 $\sin(\alpha-\beta)$，如图 17 所示。从平行四边形中割去一个直角边分别为 $\sin\alpha-\sin\beta$、$\cos\beta-\cos\alpha$ 的直角三角形，并将其移至右下角，得到一个箭头形的六边形。该六边形由两个小平行四边形组成。分别将这两个小平行四边形进行等积变换，得到一个矩尺形，其面积为 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，如图 18 所示。故得公式（3）。

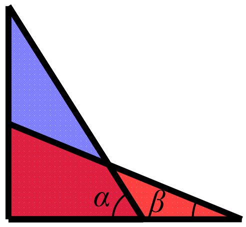


图 16 部分重叠的两个直角三角形

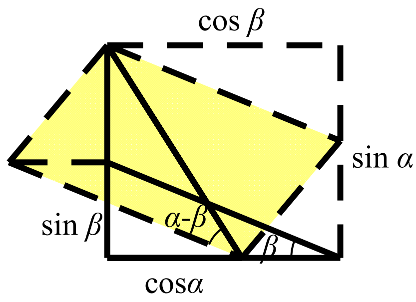


图 17 平行四边形模型

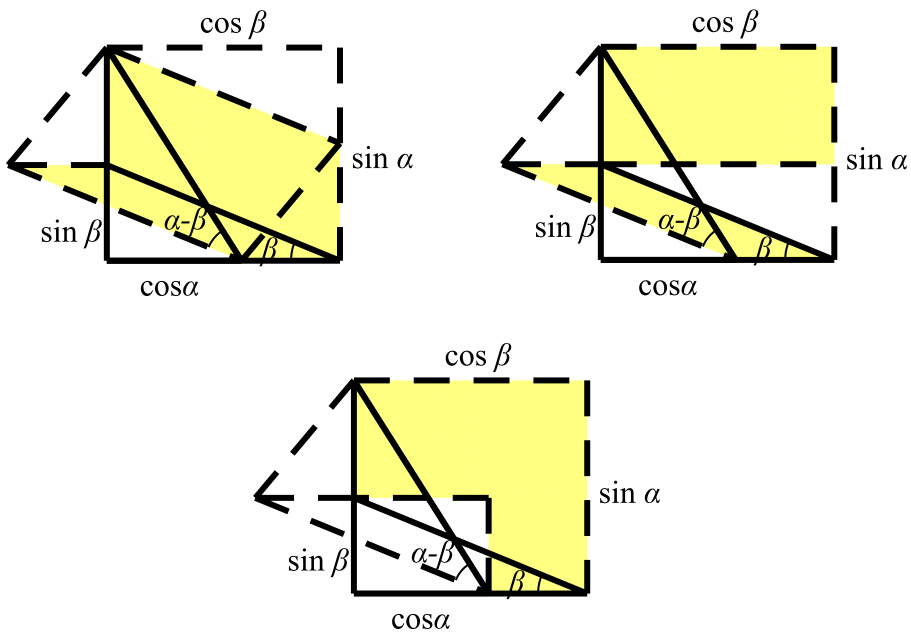


图 18 平行四边形的等积变换

类似地，在上述图形变换过程中，若以$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$代替α，则可得公式（4）。

在平行四边形模型中，如果我们不从图形面积关系入手，而是考虑线段之间的关系，也可以得到公式（2）和（3）。如图 19 所示，过顶点 A 作 BM 的垂线，垂足为 F；过顶点

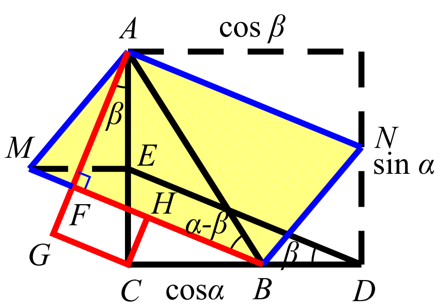


图 19 平行四边形模型中的线段关系

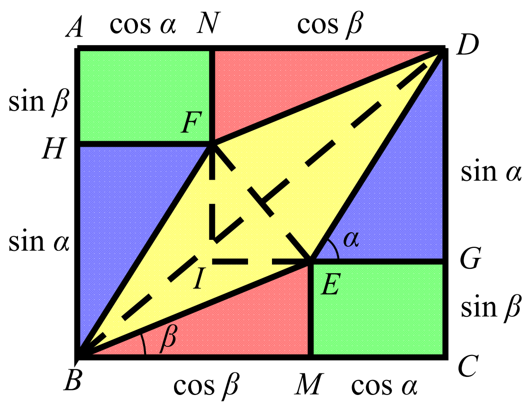


图 20 用第二类矩形模型推导和差化积公式

C 作 BM 和 AF 的垂线，垂足分别为 H 和 G，则

$$\cos(\alpha-\beta)=BF=BH+CG=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=AF=AG-CH=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta。$$

6 矩形模型的其他应用

用第二类矩形模型，还可以得到一组和差化积公式。如图 20，因 $\angle FBE=\alpha-\beta$，$\angle DBE=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\angle DBC=\angle EFI=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，故有 $BD=2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$EF=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$。

在 $\mathrm{Rt}\Delta DBC$ 和 $\mathrm{Rt}\Delta EFI$ 中分别有

$$DC=BD\sin\frac{\alpha+\beta}{2},\quad BC=BD\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$FI=EF\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\quad EI=EF\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

故得公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (5)$$

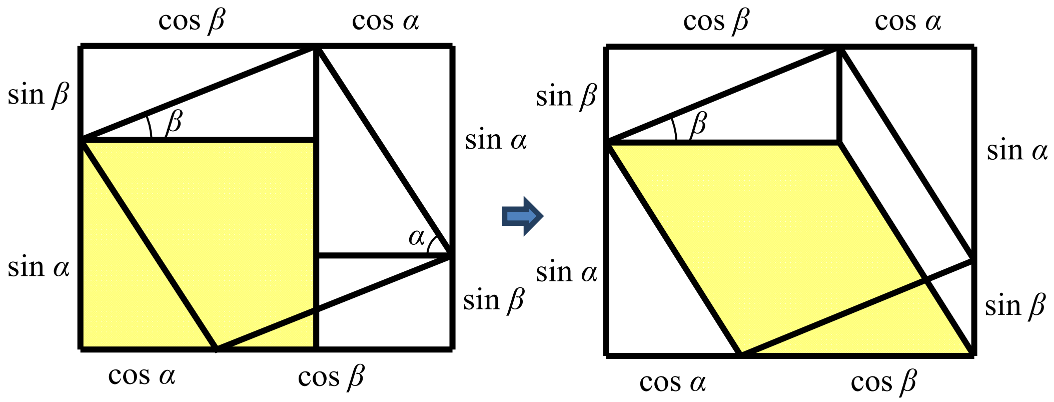
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (6)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (7)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (8)$$

此外，综合运用两类矩形模型，我们可以呈现积化和差公式的形成过程。例如，图 21 所呈现的是公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \quad (9)$$



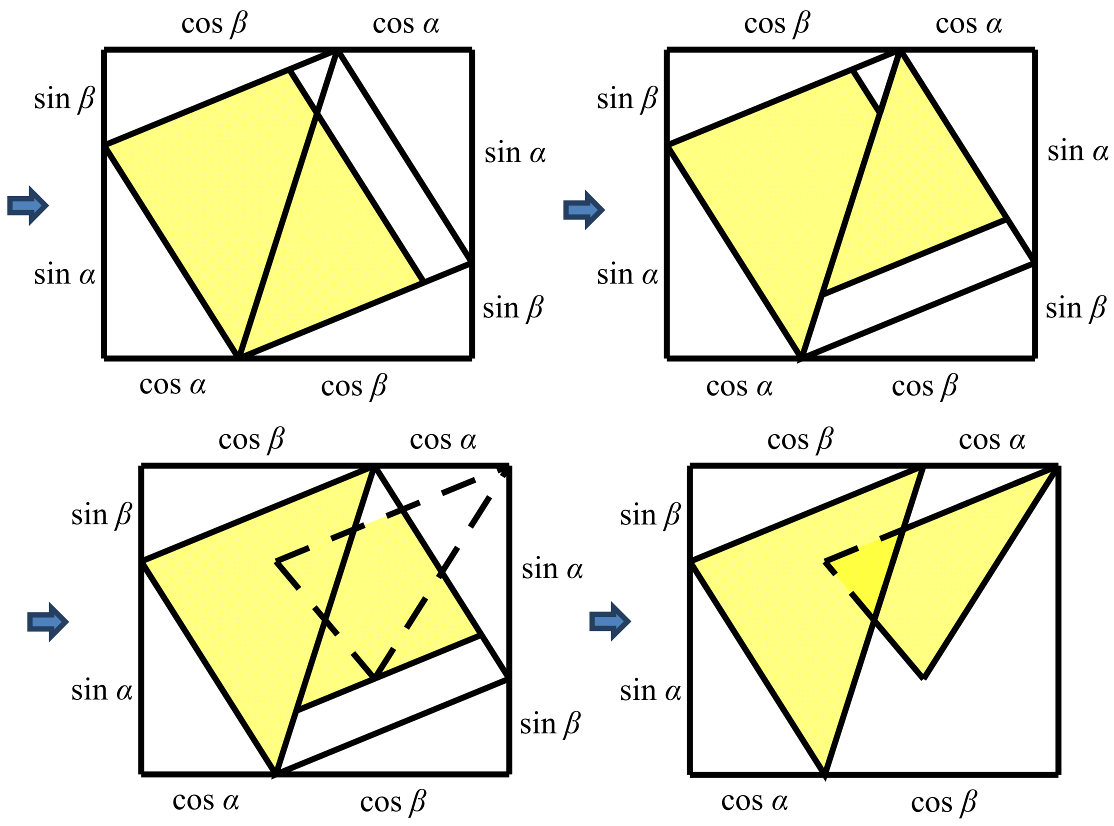


图 21　积化和差公式的动态形成过程

7　结语

通过两对或两个直角三角形的不同组合，并补充相关图形，我们得到了三角公式的菱形、矩形、平行四边形、筝形、直角梯形模型。基于这些模型，利用面积或线段大小关系，可以得到和角、差角的正余弦公式甚至和差化积、积化和差公式。就面积关系而言，两类矩形模型最为直观。

在教学中，我们首先需要推导三角形式的三角形面积公式；在此基础上，再导出平行四边形面积公式。然后，引导学生通过拼图，建立矩形模型或其他模型，借助出入相补原理，对图形进行等积变换，将菱形转化为两个矩形之和或差，从而导出锐角情形下的和角与差角公式。这一教学进路，不仅让学生看到三角公式的几何表征，而且还让他们看到公式的形成过程；不仅体现逻辑推理素养，而且还落实直观想象素养；不仅加深学生对三角公式的理解，而且还能让他们树立一种信念——每一个三角公式的背后，一定存在多种几何模型。

参考文献

[1] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方三角学文献中的和角公式. 数学通报, 2016, 55(6): 4-8

[2] Blakslee T M. *AcademicTrigonometry*, *Plane &Spherical*. Boston: Ginn & Company, 1888.

教学实践

HPM 视角下三角形中位线定理的课例评析*

沈中宇　李霞

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

1 引言

数学史在课堂中的运用是 HPM 领域的重要课题之一[1]。近年来，由高校研究者与中学教师合作开发的数学史融入课堂教学的案例不断增多[2]。在教学实践中产生了数学史教育价值、数学史在数学教学中的应用方式和数学史融入数学教学的原则等理论成果，但在一个 HPM 案例实施过后如何对其进行评价，还缺少理论方面的指导。

另一方面一些案例如“椭圆的概念”、“对数的概念”取得了理想的效果，受到了学生的喜爱[3-4]，但也有一些案例由于史料选取不当、应用方式单一等因素而没有发挥数学史应有的价值[5]。为了更好地传播 HPM 的教学理念，提升 HPM 视角下数学教学的质量，我们需要一个 HPM 案例评价框架来促进教学实践的发展。同时这样的 HPM 评价框架可以帮助教师在实践基础上分析与反思 HPM 教学，促进其教师专业的发展。

因此本文初步建立 HPM 课例评析框架，对 HPM 视角下“三角形中位线定理的教学”进行评析，为 HPM 教学实践、案例开发以及课例分析提供借鉴。

2 课例简述

2.1 选取的历史素材及其分析

在古代两河流域，古巴比伦泥版记载着六兄弟分割三角形土地的问题[6]，三角形的面积和高已知，用平行于底边且间距相等的直线来分割三角形。显然，古人已经知道分割三角形的这些平行线段的长度是按照等差数列递增的，且三角形中位线等于底边的一半，同时这也说明三角形的中位线起源于现实中的土地分割问题。公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得

*上海市教育科学研究重大项目“中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”（项目号：D1508）系列论文之一。

在《几何原本》中没有直接讨论中位线的性质，而是在卷六给出了更一般的命题：“将三角形两腰分割成成比例的线段，则分点连线段平行于三角形的底边”。欧几里得将线段关系转化为三角形面积关系，再推出直线位置关系。这种方法同样适用于三角形中位线定理的证明。如图 1，在△*ABC* 中，*AD*=*DB*，*AE*=*EC*。联结 *BE* 和 *DC*，因 *AD*=*DB*，*AE*=*EC* 故 $S_{\triangle EAD}=S_{\triangle EDB}$，$S_{\triangle EAD}=S_{\triangle CED}$。于是得 $S_{\triangle EDB}=S_{\triangle EDC}$，故知 *DE*//*BC*。另一方面，因为 $S_{\triangle EBC}=S_{\triangle ABE}=2S_{\triangle BDE}$，而△*EBC* 和△*BDE* 是等高的，所以，*BC*=2*DE*。

刘徽在《九章算术》通过如图 2 或图 3 所示的割补法来推导三角形面积公式，从中可以看出中国古代数学家已经知道中位线与底边的位置关系和大小关系。这里，取三角形两腰的中点，过中点作底边的垂线，将垂线外侧的小三角形补到上方的相应位置（图 2），得到一个矩形，该矩形的面积等于原来的三角形的面积，它的长等于原三角形的高，它的宽等于原三角形底边的一半，即三角形面积等于半底乘以高。刘徽的第二种方法是：连接两腰中点（中位线），过顶点作中位线的垂线，将中位线上方的小三角形分割成两个小直角三角形，分别将它们补到相应位置（图 3），得到一个矩形，矩形的长为原三角形的底边长，宽为原三角形高的一半，故三角形的面积等于底乘以半高。

事实上，在图 3 中，将中位线上方的两个小直角三角形分别补到相应位置时，所得到的四边形是矩形（因为一组对边平行且相等），故中位线与底边平行，且等于底边之半。

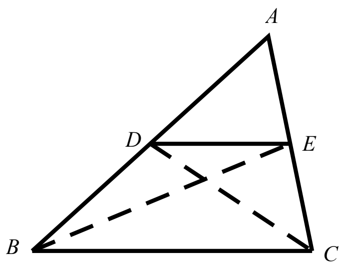


图 1

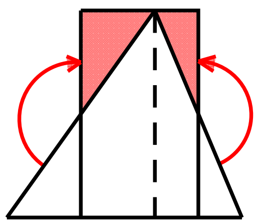


图 2

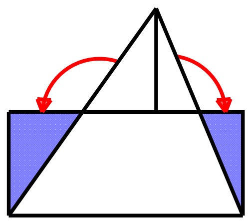


图 3

2.2 教学目标与重难点

“三角形的中位线”是沪教版数学教科书八年级第 22 章“平行四边形”中的内容。教材通过剪纸活动将一个三角形拼接成平行四边形去证明三角形中位线定理。本节课的听课学生为上海某中学初三的学生，基础良好。

结合三角形中位线定理的历史，教师将本节课的教学目标设定如下：

（1）学习三角形中位线的概念，理解三角形中位线的定理并加以证明；

（2）通过剪纸的方法引入三角形中位线的概念，并站在历史的角度，通过转化的思想利用不同的方法证明三角形中位线定理，并将这些方法加以拓展；

（3）通过对三角形中位线概念及其定理的学习，让学生体验转化的数学思想。

重点：三角形中位线定理的证明；

难点：体验在证明过程中的转化思想，并将数学思想方法应用于其他题型中。

2.3 教学过程

教学过程分为四个环节，具体的教学流程如下图 4 所示。

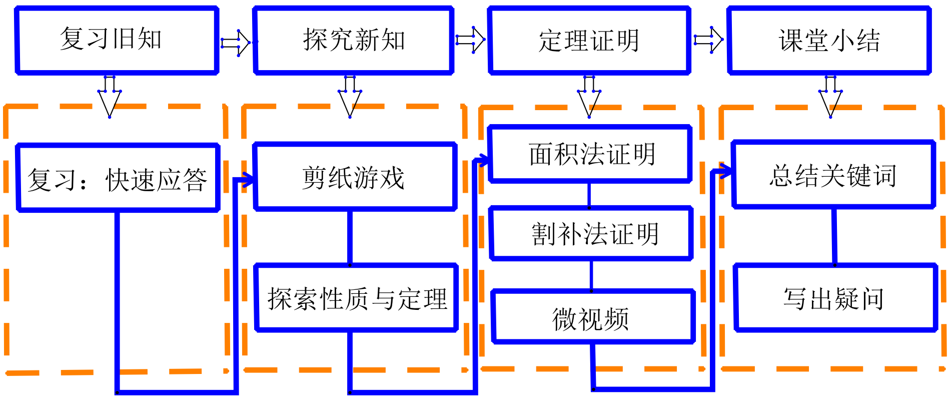


图 4

首先，通过快速问答复习了有关三角形的知识。剪纸游戏中，给每组学生一个三角形，要求他们探讨将一个三角形分成两个面积相等的三角形的解决方案。接着，教师让学生剪出四个面积相等的三角形，目的是通过剪纸活动引出中位线的概念。之后，让学生猜想中位线和底边的位置关系和数量关系，得到中位线定理。在定理证明环节，教师给出了欧几里得的面积法和刘徽的割补法，讲完两种方法之后，播放微视频，介绍其他三种证明方法。最后，在课堂小结阶段，教师让学生总结本节课的关键词，并写出学完本节课之后存在的疑问。

3 课例评析

根据 HPM 视角下数学教学设计的原则、数学史的融入方式、数学史的教育价值，结合 HPM 教学实践经验，我们总结出一节“好的”HPM 课需要具备四个方面的特点，如图 5 所示。

我们利用以上 4 个指标对本节课进行评析。

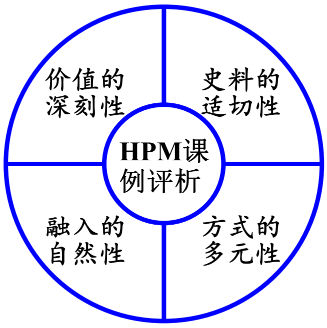


图 5

3.1 史料的适切性

数学史材料的选取必须要遵循五个原则：趣味性、科学性、有效性、可学性、新颖性[7]。其中趣味性是指数学史料能够阐述数学背后的故事，而且让学生觉得有趣。科学性是指数学史料符合史实，而非胡编乱造，不能有数学上的错误。有效性是指数学史料的选取要满足教学目标的要求，而不是为了数学史而数学史。可学性是指数学史料的难易程度要符合学生的认知基础，易于让学生接受。新颖性是指选取的数学史料要有新意，有特色，而非老调重弹，人云亦云。

本节课选取的史料有古巴比伦泥版记载的三角形土地分割问题、古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中的证明方法、刘徽在《九章算术》中的证明方法、在 19 世纪末 20 世纪初几何教科书中的证明方法。选取的四则史料皆有明确依据，符合史实，符合科学性的原则。四则史料分别对应于“让学生理解中位线由来”、“理解中位线定理并加以证明”的教学目标，符合有效性的原则。古巴比伦泥版的土地分割问题符合学生的认知基础，但欧几里得与刘徽的证明方法有点脱离学生的认知基础，在可学性上稍差一池。四则材料的选取皆有新意，土地分割问题经过改编成剪纸活动，在新颖性和趣味性上比较突出。

3.2 方式的多元性

数学教学中运用数学史的方式有附加式、顺应式、复制式、重构式[2]。附加式是指展示有关数学家图片，讲述逸闻趣事等。复制式是指直接采用历史上的数学问题、解法等。顺应式是指根据历史材料，编制数学问题。重构式是指借鉴或重构知识的发生、发展历史。重构式是数学史最高层次的应用，即追溯思想的历史起源，以寻求激发学习动机的最佳方式。在数学史融入课堂教学中要根据情况恰当、灵活的使用这四种方式。

本节课的本意是重构中位线历史，让学生通过探究活动，经历定理的发现、证明过程。但由于剪纸活动之后，几乎成了教师一言堂，因而算不上真正的重构式。将古巴比伦泥版上所载的土地分割问题改编为剪纸活动，使用了顺应式。直接采用了欧几里得、刘徽以及早期教科书中的证明方法，属于复制式。用顺应式的剪纸活动激发了学生的学习动机，使用较为合理，但两种证明方法中复制式的使用有些生硬，未能有很好地与学生认知相契合。本节课没有使用附加式，缺乏中位线定理背后的人文元素。

3.3 融入的自然性

数学史融入的自然性，是指数学史知识在课堂中是自然出现的，而不是生硬添加的。弗赖登塔尔认为，力求用发生的方法来教概念，并不意味着必须完全按照指示的发展顺序，甚至连走过的弯路与死胡同都不加删除地教；发生的方法既非逻辑概念，又非历史概念，也不是心理概念[8]。所以数学史融入数学教学中不是让学生原原本本重蹈人类的历史，而是要考虑到逻辑顺序、历史顺序和心理顺序三者的统一，只有达到三者的统一，才能将数学史自然地融入数学教学之中。否则，就会出现生硬添加数学史的情况。

我们截取本节课中融入数学史的一个片段进行分析。

片段一：学生给出有关中位线性质的猜想后，教师直接给出图 6，介绍并板演欧几里得的证明方法。接着给出图 7，求直角三角形斜边上的高 BD 的长度，巩固了利用面积解决长度问题的转化思想。而由于时间原因，教师略去了作为面积思想的应用的“角平分线定理”的证明。

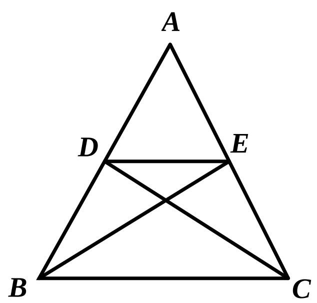


图 6

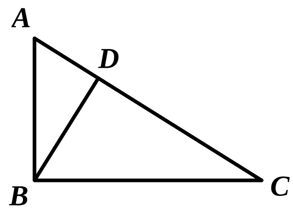


图 7

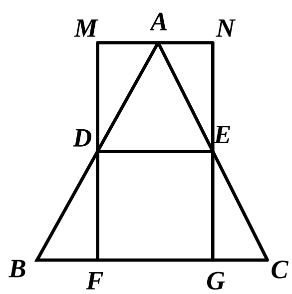


图 8

在学生给出中位线性质的猜测之后，需要引出历史上欧几里得对中位线定理的证明，但本节课在猜测性质到引出证明之间没有适当的过渡，而是直接由教师给出证明。因此，此处没有很好地将数学史与整个课堂相融合。实际上，欧几里得的证明用到了等积变换的思想，学生对此并不熟悉，在没有前面的课堂过程作为铺垫的情况下采用该方法，没有考虑知识出

现的必要性。

片段二：教师要求学生完成以下任务：做出手里得到的三角形的中位线，利用手里的工具来证明三角形的面积等于底乘高除以二。这时的课堂剩余时间已然不多，学生还没有给出有效的方法，教师直接给出图 8，讲解了刘徽的割补法证明定理。

在此片段中，由于学生没有一下子给出刘徽的方法，教师就用自的己讲授来替代，实际上教师并没有考虑到学生的认知基础。刘徽的两种割补法都需要割两次，不易通过探究得出；而同样体现刘徽割补思想的书本上的方法则更容易想到。事实上，有一名学生得出教科书中的方式：沿中位线剪开，将得到的小三角形和梯形拼成一个平行四边形，教师对这一探究成果视而不见。实际上应该以学生的认知基础为起点，在学生给出方法的基础上，将数学史上的方法与学生的方法建立联系。例如，根据学生的探究，教师可以采用图 9 所示的方法来完成三角形面积公式的证明，最后的这一方法实际上就是刘徽的方法。

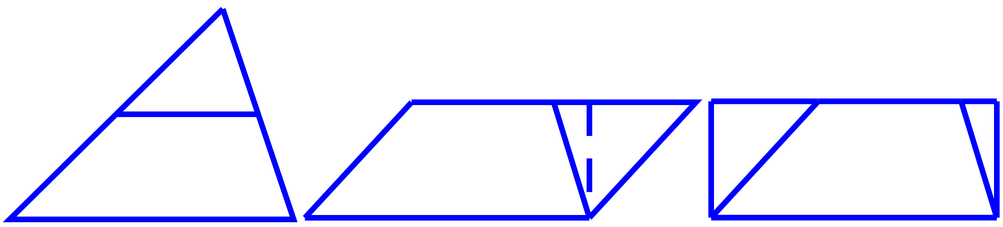


图 9

3.4 价值的深刻性

数学史的教育价值包括知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅和德育之效。“知识之谐”是指数学史揭示了数学主题（概念、公式、定理）的自然发生发展过程，创造学生的学习动机，促进学生的理解；“方法之美”是指通过古今不同的思想方法，拓宽学生的思维；“探究之乐”是指基于历史材料提出的数学问题为学生提供探究机会，让他们积累数学活动经验，获得成功的体验；“能力之助”是指数学史在培养学生核心素养以及阅读、表达等方面能力上的帮助；“文化之魅”是指数学史揭示数学与现实生活以及人类其他知识领域之间的联系，并人他们感受数学文化的多元性；“德育之效”是指数学史在培养学生积极的数学情感、信念、品行、操守等方面的有效性。在将数学史融入课堂教学中时要充分彰显数学史的这六大教育价值。

首先从这节课的教学目标中可以看到，没有考虑到有关数学文化内涵与学生数学情感的目标，说明教师对于本节课中数学史“文化之魅”和“德育之效”的价值是比较忽视的。

接下来从两个片段对数学史的教育价值进行分析。

片段三：任务 1：用一把剪刀将一个三角形分成面积相等的两份。学生的方案如图 9 所示：

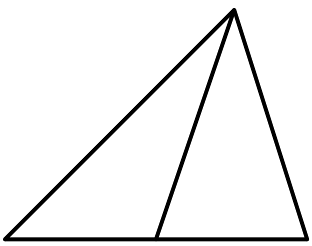


图 10

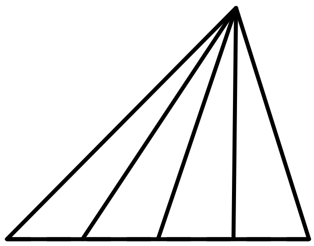


图 11

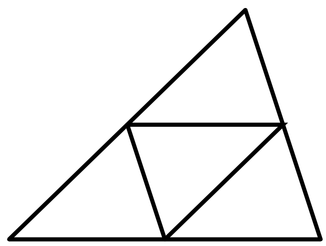


图 12

任务 2：用一把剪刀将一个三角形分成面积相等的四份。学生首先想出如图 11 所示四等分三角形一底边的方案。接着在教师鼓励下另一组学生给出第二个方案，如图 12 所示，从而引出中位线的概念。

复习中线的性质，为中位线概念的出现做铺垫，解决传统课堂上直接抛出中位线的问题，体现了数学史“知识之谐”的教育价值。以历史起点为出发点设计剪纸活动，重构三角形中位线定理的发现历程，为学生下一步猜想出三角形中位线的性质做铺垫，体现了“探究之乐”的价值。但在学生反馈中有学生问：“中位线定理有何应用？”表明在引入部分教师忽视了证明思想方法的“源”——古代两河流域先民分土地问题，致使学生不了解中位线之用，反映了本节课数学史价值的不深刻——没有体现“文化之魅”。

片段四：

师：好的，前面我们接触到三角形中的另外一个比较重要的线段，并且命名为‘中位线’，那么接下来我们该怎么认识中位线呢?

生：要看中位线的性质。

师：对，我们要研究它的性质，这条是中位线（图 11)，它有什么性质呢?

生 1：如果你连接两个中点，你得到两个三角形相似。

师：对，这个小的三角形与大的三角形相似，好的，让我们来研究这条中线的性质。

生 1：它是底的一半。

师：还有吗?

生 1：它与底边平行。

师：这些是我们的猜想，接下来我们证明这个定理，我们称为三角形中位线定理

本环节中，由一个学生的猜想（他很可能已经看过书本上的内容，因而是假猜想）便下

结论，未能体现“探究之乐”的教育价值。在学生反馈中也有学生提问：“为什么我们要证明三角形中位线定理？”因此，教师应该多问一些“为什么”，片段四中，学生通过剪纸，得到四个两两全等的三角形。这里，教师应该设问：为什么这四个三角形是全等的？如果不对这个问题进行探究，又怎能凭空发现中位线的性质？

在三角形中位线定理的证明活动中，虽然体现了一定的“方法之美”，学生感受不到这种证明方法的独到之处。实际上中位线定理背后有着丰富的历史文化内涵，古巴比伦、希腊、中国的数学文献中都有相关素材。但在教学中，教师剥离了文化元素，只字不提欧几里得、刘徽等数学家的名字；也只字未提古巴比伦土地分割问题，因而未能让学生感受到数学的悠久历史与多元文化，使得“文化之魅”荡然无存。由于剪纸活动没有得到充分利用，学生在课堂上失去了穿越时空与古人对话的机会，因而本节课也未能彰显“德育之效”。

4 若干启示

从以上分析中，我们可以得知，要上好一节 HPM 课，需要考虑以下因素。

首先，要恰当与灵活的选用数学史。并不是所有的历史素材都适合本节课的教学，要在五项原则的指导下选用适合本节课的素材，历史素材的选用也不是只有附加式或复制式，可以在不同的环节灵活采取不同的方式，如本节课中的剪纸活动不应该只在引入中出现，也可以用在证明活动中，从而真正采用重构的方式将数学史与本节课的每个环节融为一体。附加式的使用也可以增加本节课的人文色彩。

其次，要将数学史自然地融入课堂。将数学史融入课堂教学中，并不是为了数学史而数学史，要充分考虑数学史融入的必要性以及学生的认知基础，让学生真正参与到课堂中。数学史是古人与今人之间的一座桥梁，通过数学史让学生亲近数学，热爱数学。在本节课中，除了剪纸活动之外，教师全程讲解而且忽视课堂上出现的有效资源，学生没有参与到课堂主体当中，数学史就变成了“天外来客”。因此，在数学史融入数学教学的过程中要充分注重学生活动，在学生活动的基础上让数学史自然的出现。

最后，要充分彰显数学史教育价值。本节课所用的数学史料有着丰富的教育价值，但在本节课的教学目标和教学过程中没有很好的展现出来。首先参照数学史自然地引出三角形中位线概念，体现了知识之谐。此外，让学生拼图解决问题，体现了探究之乐。然而，还有一些教育价值没有得到很好地体现，如教师全程讲解没有体现数学史促进探究的价值。同时证明的讲解过程过于仓促，没有体现方法背后的深刻数学思想，所以对于方法之美的体现还不

充足。本节课所用的数学史有古巴比伦的泥版，西方的《几何原本》以及中国的《九章算术》，体现了文化的多元性，可这节课将概念、性质与情境剥离，失去了一次传递数学文化的机会。本节课的历史素材也有着使学生与古人亲近，培养数学自信心的德育效果，但由于本节课过于侧重证明方法的讲授，也没有体现出这一价值。因此，在数学史融入课堂教学的过程中要深度挖掘数学史材料的教育价值，充分发挥数学史的作用。

参考文献

[1] 汪晓勤，张小明. HPM 研究的内容与方法[J].数学教育学报, 2006, 15(1): 16-18.

[2] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J].中学数学月刊, 2012, (2): 1-5

[3] 汪晓勤. 王苗,邹佳晨. HPM 视角下的数学教学设计：以椭圆为例[J]. 数学教育学报, 2011, 20(5): 20-23.

[4] 金惠萍, 王芳. HPM 视角下的对数概念教学[J].教育研究与评论, 2014, (9): 28-34

[5] 黄友初. HPM 在教育中的实然困境与应然向度[J]. 教师教育研究, 2013, 25(5): 81-85

[6] 李霞, 汪晓勤. 三角形中位线定理的历史[J]. 中学数学月刊, 2016, (9): 58-60

[7] 汪晓勤. HPM 视角下“角平分线”教学[J]. 教育研究与评论, 2014, (5): 29-32

[8] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 上海: 上海教育出版社,1995.

点到直线的距离公式：从历史到课堂*

杨懿荔

（华东师范大学数学系，上海, 200241）

1 引言

“点到直线的距离”是沪教版数学教科书高二下第 11 章节第 4 小节的内容，旨在解决“已知直线 $l: Ax+By+C=0$ 及 l 外一点 $P(x_0, y_0)$，求点 P 到 l 的距离”的问题。教科书是通过向量的投影（下文称向量法）得出距离公式的。该方法虽然简便，但由于很多学生对于向量的印象仅仅停留在基本运算以及数量积的层面上，他们还没有树立运用向量解决问题的意识，因而向量方法似乎并不符合他们的认知基础。教学实践表明，高中生自己在推导余弦定理时，很少采用书本上的向量方法，这也印证了上面的论断。另一方面，许多教师认为，学生只要会用公式就可以了，公式本身的推导并不重要，况且升学的压力、教学的进度也不允许花太多时间于公式的推导。因此，他们往往在用向量方法推导公式后，把剩余的绝大部分时间用于解题训练。在这种教学模式下，学生没有自己的探究机会，无法发挥主观能动性，导致他们的参与度较低。

有鉴于此，我们希望将点到直线距离公式的教学更好地建立在学生的认知基础之上，并为学生创造探究机会。在数学史上，点到直线距离公式的推导方法精彩纷呈。我们希望从中选择最适合于教学的若干方法，并与学生自主探究得到的方法进行比较。教学目标如下：

（1）会推导和运用点到直线的距离公式；

（2）领会距离公式背后的数学思想；

（3）通过探究活动，培养学生的创新意识，激发学生的学习兴趣，让他们获得成功的体验，增强学习自信心。

2 历史材料及其运用

对 20 世纪中叶以前出版的 65 种西方解析几何教科书的考察表明，点到直线的距离公式有 8 种不同推导方法：交点法、原点距离法、投影法、三角法、三角形面积法、坐标平移

*上海市教育科学研究重大项目“中小学数学教科书的有效设计”子课题“中小学数学教科书中数学文化素材的案例设计”（项目号：D1508）系列论文之一.

法、向量法、最值法[1]。具体分布如下：

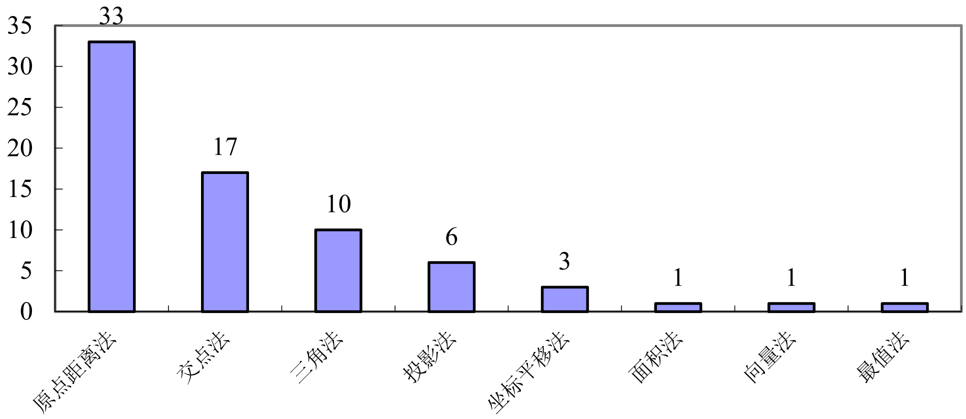


图 1 65 种教科书中“点到直线的距离”推导方法分布

早期解析几何教科书普遍采用直线的法线式方程，相应地也就普遍采用原点距离法来推导点线距离公式。但今日教科书并未采用法线式方程，故原点距离法也就过时了。交点法是从已知点 P 向直线 l 引垂线，求 P 和垂足之间的距离[2]，该方法思路清晰自然，但运算量很大。三角法通过从点 P 分别向 l 和 x 轴引垂线，得到一个直角三角形，利用它的边角关系来求点线距离[3]，该方法比较简便，在历史上颇受人们的喜爱，但今日学生对其中所需的三角公式并不熟悉，因而并不适于教学。三角形面积法先求以点 P 与直线 l 和坐标轴的交点为顶点的三角形面积，继而求得它的高。其中，三角形面积是利用三阶行列式来求的[4]，显然不适于教学。投影法和坐标平移法也不适于教学。最值法利用了柯西不等式[5]。向量法出现得很迟[6]，远远滞后于向量概念本身，这种方法缺乏几何、代数或三角方面的根基，但向量法的计算量很小，因而受到重视向量知识的现代教科书的青睐。

综上，历史上点到直线距离公式的推导方法虽然丰富多彩，但有优有劣，并非全部适合于今日的课堂教学。我们选择其中的交点法、最值法、三角形面积法以及向量法，但对其中的三角形面积法和最值法都进行了必要的改进。

3 教学过程

3.1 情境引入

师：某工厂需要将一批大型货物从仓库运送到工厂附近的公路上进行货车装载。由于货物数量多、体积大、吨位重，因此需要在仓库与公路之间建造一条传送轨道。为了节约成本，该如何建造这条轨道呢？如何计算轨道的长度呢？

生：（思考几秒钟后）从仓库口造一条垂直于公路的轨道。

师：很好。我们现在把仓库看成一个点，公路看成一条直线。为了求轨道的长度，需要研究“点到直线的距离”的求法。

3.2 讲授新知

首先让学生梳理距离概念。

师：“点到直线的距离”指的是该点与直线上任意一点连线的长度的最小值。那么类似地，点到平面的距离指的是什么呢？

生：指的是该点到平面上任意一点连线的长度的最小值。

师：很好。那么两条直线之间的距离又指的是什么呢？

生：指的是在两条直线上各取一点，这两个点之间连线距离的最小值。

师：对，距离实则就是一个最小值的概念。

这里，教师不仅让学生了解距离的意义，也为以后空间几何的学习买下伏笔。更重要的是，为距离公式的最值推导法作了铺垫。

3.2.1 最简思路

“交点法”的逻辑清晰、想法简便，适合于初学者学习。学生在初中学过两点之间的距离公式，可否将点线距离转化为两点之间的距离呢？引例中，不妨设路边所在直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$（$AB\neq 0$），仓库所在定点为 $P(x_0,y_0)$。如图 2 所示，过 P 作 l 的垂线 l'，垂足为 $R(x_1,y_1)$。点到直线的距离即为点 P 和 R 之间的距离。点 P 的坐标是已知的，故只需求点 R 的坐标即可，而点 R 为 l 与 l' 的交点。根据直线点方向式（或点法向式）方程，可得 l' 的方程为 $y-y_0=\dfrac{B}{A}(x-x_0)$。联立 l 与 l' 的方程即得 $R\left(\dfrac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},-\dfrac{ABx_0-A^2y_0+BC}{A^2+B^2}\right)$，而后采用两点间距离公式即得点到直线的距离。

教师并未在计算上花费太多时间，而是用 PPT 直接展示给学生看，让他们了解公式推导的思路，感受到计算的繁琐，进而促使他们去思考新的推导方法。

3.2.2 学生探究

教师提前在 PPT 中预设了学生最易想到的 3 种推导方法——最值法、三角形面积法、原点距离法，以及课本中采用的向量法，并制作超链接。将学生分成几组，让各组自由讨论。

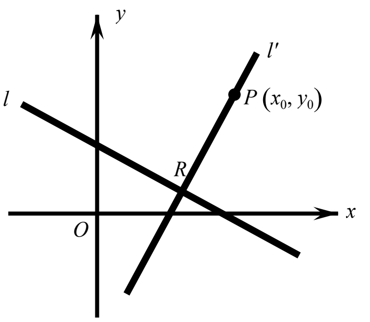


图 2 交点法

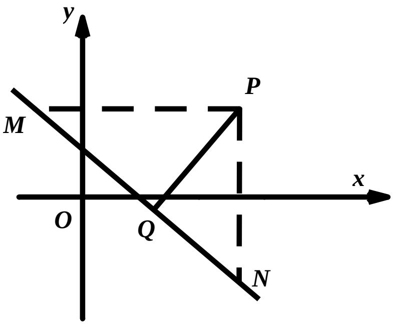


图 3 三角形面积法 1

教师在班级中巡视，但不作任何提示。

令人欣喜的是，有两个小组经过合作与讨论，顺利完成了公式的推导。

（1）最值法

第一组学生从距离的定义出发，采用了函数最值法。设直线上任一点为(x,y)，它与定点 P 之间的距离$d(x)$满足

$$d^2(x)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x-x_0)^2+\left[\frac{A(x-x_0)+(Ax_0+By_0+C)}{B}\right]^2$$

$$=\frac{A^2+B^2}{B^2}(x-x_0)^2+\frac{2A(Ax_0+By_0+C)}{B^2}(x-x_0)+\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{B^2}$$

$$=\frac{A^2+B^2}{B^2}\left[(x-x_0)+\frac{A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}\right]^2+\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$$

易见，$d^2(x)$的最小值为$\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$，故得距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

（2）三角形面积法

第二组学生采用了面积法，与人教版教科书中所采用的方法一致：如图 3，过点 P 分别作 x 轴和 y 轴 x 轴和 y 轴的平行线，交直线 l 于 M、N，利用直角三角形面积公式可知：$PM \cdot PN = MN \cdot d$，算出 PM、PN 和 MN，即可求得点到直线的距离 d。但上述方法的计算量也比较大，学生花费了较长的时间。

教师指出：上述方法将点到直线的距离看作三角形的高，这是非常巧妙的思路。那么，能否对该方法进行改进以减少工作量呢？如果将点到直线的距离看作一个面积和底边都更易于计算的三角形的高，那么，计算量无疑就会减少。于是，教师用 PPT 展示如下改进的方法（即预设的三角形面积法）：

如图 4，设直线 l 与 x 轴和 y 轴的交点分别为 M 和 N，连接 PM 和 PN。过点 P 作 $PT//MN$，交 x 轴于 T。于是，ΔPMN 底边 MN 上的高即为点 P 到 l 的距离。引导学生找到一个与 ΔPMN 同底等高的 ΔTMN。易知直线 PT 的方程为 $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0$，故有

$$M\left(-\frac{C}{A},0\right),\ N\left(0,-\frac{C}{B}\right),\ T\left(\frac{Ax_0+By_0}{A},0\right),$$

$$\left|MN\right|=\sqrt{\frac{C^2}{A^2}+\frac{C^2}{B^2}}=\left|\frac{C}{AB}\right|\sqrt{A^2+B^2},$$

$$\left|MT\right|=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\left|A\right|},$$

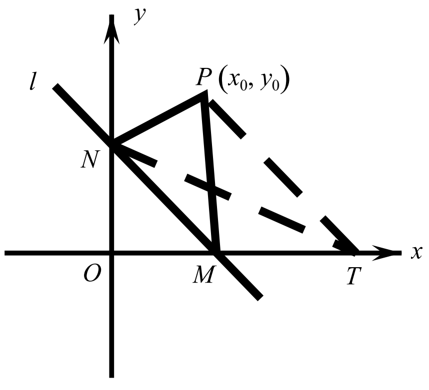


图 4 改进的三角形面积法

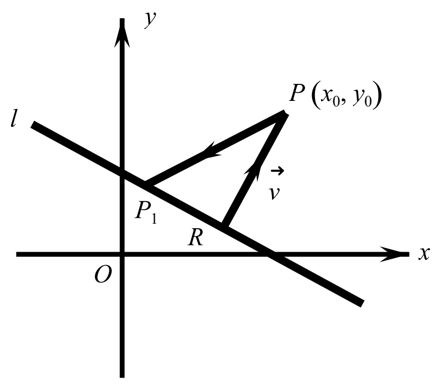


图 5 向量法

于是得

$$S_{\Delta PMN}=S_{\Delta TMN}=\frac{1}{2}MT\times ON=\frac{1}{2}\left|\frac{C}{AB}\right|\left|Ax_0+By_0+C\right|$$

故得

$$d=\frac{2S_{\Delta PMN}}{MN}=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

改进后的方法不仅肯定了学生的想法，而且解决了运算量过大的问题（当然，改进的方法也仍需要一定的计算量）。教师总结："轻轻的一条线，已经打动我的心！"

（3）向量法

如图 5，设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$（$AB\neq 0$），其法向量为 $\vec{v}=\left(A,B\right)$，给定不在 l 上的点 $P\left(x_0,y_0\right)$。任取 l 上一点 $P_1\left(x,y\right)$，则 $\overrightarrow{PP_1}=\left(x-x_0,y-y_0\right)$。因 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{PP_1}=\left|\vec{v}\right|\left|\overrightarrow{PP_1}\right|\cos\theta$，故得点到直线的距离为

$$d=\left|\overrightarrow{PP_1}\right|\left|\cos\theta\right|=\frac{\left|\vec{v}\cdot\overrightarrow{PP_1}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

学生都赞叹向量法的简洁。但在探究环节，没有一个学生提及向量法。可见，向量的应用对于学生而言确实是"近在眼前，却远在天边"的。

3.3 小试牛刀

例 1：求点 $\left(1,1\right)$ 到直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=0$ 的距离 d 的最大值。

例 2：求到 x 轴，y 轴和直线 $x+y=2$ 的距离都相等的点的坐标。

3.4 课堂小结

由学生自由发言，教师进行总结。本节课不是为了证明而证明，更不是为了公式而公式。熟记公式并能够灵活运用于解题固然重要，但是公式的由来也不容忽视。本节课所呈现的几种推导方法体现了重要的数学思想——化归思想和模型思想。交点法将点到直线的距离转化为两点之间的距离；三角形面积法将点线距离转化为三角形的高，而三角形面积又通过图形的转化求得；最值方法则运用了二次函数模型。同学们通过团队合作探究，获得了貌似很复杂的点线距离公式，每一个人都可以做一回数学家！公式的推导不仅锻炼了同学们的思维能力和创新能力，而且增强了大家学习数学的自信心。

4 学生反馈

在课堂结束后，我们对 40 名学生进行了问卷调查，实收 40 份问卷。

首先，调查学生在不考虑计算量的前提下，对点线距离公式不同推导方法的倾向性。24 人（60%）认为交点法的思路最简单。10 人（25%）认为三角形面积法最容易想到。5 人（12.5%）认为向量法最容易。只有 1 人认为最值法思路最简单。

其次，调查学生在考虑计算难易程度的情况下，对于不同方法的倾向性。22 人（55%）认为向量法最精彩，一名学生写道："只需要用到投影公式，几乎是零计算量，太方便、太精彩了。"12 人（30%）认为三角形面积法最精彩，一名学生写道："三角面积形法用到的都是初中学过的最基本的知识，计算量也不大，喜欢。"剩下 6 人（15%）则表示所有的方法都很精彩。

最后，调查学生对于用多元方法推导公式的教学方式的感受。36 人（90%）认为有必要从多元化的视角对公式进行探究，其主要理由是：公式固然重要，探究的过程可以开拓思维，而做题需要多种思维；技多不压身，多角度思考很有趣。

4 人认为，只需要知道结论，能解题即可，他们并没有体会到对公式进行探究的意义。在"唯分数论"盛行的今天，他们的观点其实具有一定的代表性。

5 反思

本节课中，我们采用了四种方法来推导点到直线距离公式。从学生探究的结果以及课后的反馈来看，交点法、最值法和三角形面积法都比较符合学生的认知基础，因而诸方法的选择是恰当的。四种方法中，三角形面积法和最值法都是对历史上的方法进行改进得到的，故属于顺应式，而交点法和向量法则属于复制式。没有运用重构式和附加式。

从数学史的教育价值看，本节课揭示了点到直线距离公式背后的方法之美，并为学生创造了探究机会，有助于发展学生的逻辑推理、数学运算、直观想象和数学建模素养，让学生体会数学思维的多元性，提升数学学习的自信心。但是，本节课缺乏附加式，教师并没有呈现不同方法的来源，没有交待历史上有关方法的发现者，学生虽获得探究机会，但并没有获得历史感，未能跨越时空与数学家"对话"，未能感受数学文化之魅。

在本节课中，我们看到了一些矛盾现象：历史上的多元方法富有教育价值，但势必减少学生练习的时间；向量方法很简洁，但远离学生的最近发展区；教师追求美好的课堂教学，学生的心中却只有分数。如何解决这些矛盾，是未来 HPM 理论和实践研究的课题之一。

参考文献

[1] 杨懿荔, 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方解析几何教科书中的 “点到直线距离公式” [J]. 数学传播, 2016, 40 (3): 85-96.

[2] Purcell, E. J. *Analytic Geometry* [M]. New York: Appleton-Centruy-Crofts, 1958. 51-54

[3] Loomis, E. *The Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Harper & Brothers, 1877. 57-58

[4] Johnston, W. J.*An Elementary Treatise on Analytical Geometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1893. 70-71

[5] Taylor, A. E. *Calculus, with Analytic Geometry* [M]. New Jersey: Prentice- Hall, 1959. 271-273

[6] Murnaghan, F. D. *Analytic Geometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1946. 85-86

学术动态

2016 年 HPM 研究成果总汇

历史研究

[1] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前的正弦定理历史. 数学通报, 2016, 55(1): 1-5; 27

[2] 方倩, 汪晓勤. 西方早期代数教科书中的二项式定理. 中学数学杂志, 2016, (1): 59-62

[3] 汪晓勤, 洪燕君. 20 世纪初美国数学教材中的几何应用——以建筑为例. 数学教育学报, 2016, 25(2): 11-14

[4] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方三角学文献中的和角公式. 数学通报, 2016, 55(6): 4-8

[5] 齐丹丹, 洪燕君, 汪晓勤. 一元一次方程求解的历史. 中学数学月刊, 2016, (7): 42-45; 56

[6] 沈中宇. 西方早期几何教科书中的面面平行判定定理. 数学教学, 2016, (7): 27-30

[7] 杨懿荔, 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方解析几何教科书中的“点到直线距离公式”. 数学传播, 2016, 40(3): 85-96

[8] 李霞, 汪晓勤. 三角形中位线定理的历史. 中学数学月刊, 2016, (9): 58-60

[9] 杨懿荔, 汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方解析几何教科书中的斜率概念. 数学通报, 2016, 55(9): 10-13; 18

[10] 洪燕君, 汪晓勤. 美国百年几何教科书中的棱柱概念. 数学教育学报, 2016, 25(5): 67-72

[11] 汪晓勤. 美国早期代数教科书中的“因式分解”内容. 中学数学月刊, 2016, (11): 36-39

[12] 陈慧, 邹佳晨. 圆锥曲线之起源与发展简史. 数学教学, 2016, (5): 39-41

教学实践

[13] 钟萍, 汪晓勤. 函数概念: 基于历史相似性的自然过渡. 教育研究与评论（中学教育教学）, 2016, (2): 62-68

[14] 李玲, 汪晓勤. 数列概念: 通过历史体现“奇、趣、本、用”. 教育研究与评论（中学教育教学）, 2016, (4): 61-65

[15] 石和飞. 曲线与方程: 用古希腊轨迹问题串联. 教育研究与评论（中学教育教学）, 2016, (3): 52-56

[16] 廖飞, 王进敬. HPM 视角下的“三角形内角和”教学. 黑龙江教育, 2016, (5): 88-90

[17] 柴俊杰. 从勾股定理到余弦定理. 中学数学月刊, 2016(5): 24-26

[18] 杨懿荔. “倾斜角与斜率”: 重构数学史, 体会合理性. 教育研究与评论（中学教育教学）, 2016, (6): 46-51

[19] 杨懿荔，龚凯敏. HPM 视角下的“平面直角坐标系”教学. 上海中学数学, 2016, (6) : 6-9

[20] 孙冲. 导数概念：借鉴数学史,融合数与形. 教育研究与评论（中学教育教学）, 2016, (7): 42-46

[21] 郑怡. HPM 视角下的分数指数幂教学. 中学教研(数学), 2016, (7): 4-7

[22] 方倩. 二项式定理: 在历史中探源、求法、寻魅. 教育研究与评论（中学教育教学）, 2016, (9): 37-41

[23] 沈中宇，汪晓勤. 平面概念: 基于相似性，重构数学史. 教育研究与评论（中学教育教学）, 2016, (10): 46-51

[24] 方倩，杨泓. HPM 视角下的初中函数概念教学. 中学数学月刊, 2016, (11): 40-43

[25] 刘轩如，岳增成. HPM 视角下“角”的教学. 小学数学教师, 2016, (11): 43-48

[26] 陈嘉尧. HPM 微课在全等三角形教学中的应用. 数学教学, 2016, (6): 41-45

[27] 沈琰，沈中宇，洪燕君. HPM 视角下全等三角形应用的教学. 数学教学, 2016, (10): 43-46

[28] 沈金兴. 数学史视角下的棱柱定义“学习单”设计. 数学教学, 2016, (11): 45-48

[29] 吴晨昊. HPM 视角下的“对数概念及其运算”的教学. 数学教学, 2016, (12): 37-41

[30] 沈志兴，洪燕君. 列方程的翻转课堂教学：HPM 的视角. 数学教学, 2016, (12): 42-45

[31] 岳秋，张德荣. “平面直角坐标系”：利用历史故事，实现维度跨越. 教育研究与评论（中学教育教学）, 2016, (11): 32-37

实证研究

[32] 施慧慧，汪晓勤. 如何表示 2 的算术平方根: 七年级学生的创新设计. 中学数学月刊，2016, (2): 21-23

[33] 王烨，汪晓勤. 七年级学生关于$\sqrt{2}$的概念意象. 数学教学, 2016, (6): 38-41

[34] 戚双泱，汪晓勤. 为什么$\sqrt{5}$是无理数: 七年级学生的证明. 上海中学数学, 2016, (4): 6-7; 19

[35] 过静，汪晓勤. 对文科学生数学文化读书报告的分析. 数学教育学报, 2016, 25(3): 52-55

数学文化

[36] 汪晓勤. 北欧数学文化掠影(I). 新高考(高一数学)，2016，(4)；(高二数学)，2016，(3): F0003-F0004

[37] 汪晓勤. 北欧数学文化掠影(II). 新高考(高一数学), 2016, (5): F0003-F0004; (高二数学), 2016, (4)

文献研究

[38] 田方琳，汪晓勤. 美国《数学教师》上的 HPM 内容分析. 数学教育学报, 2016, 25(4): 42-46