上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2020 年第 9 卷第 8 期

罗伯瓦尔 1669 年发明的天平（Roberval Balance）

刊首新语

HPM 与卓越育人

姜浩哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

深化育人方式改革，实现学科育人功能，是全面提高教育质量的内生性要求。以学科教学为载体，实现全员育人、全方位育人和全过程育人，是全面贯彻立德树人教育根本任务的重要途径。为此，探讨学科育人的基础和价值，是当前我国教育研究的重要转向。有学者指出，“学科教育知识是对学科知识进行‘教育学转化’和‘生本化表达’后形成的，以发挥学科知识育人功能为目的的一种新的学科知识形态”。学科教育知识本身包含了学科育人功能，学科教育知识的育人价值正是学科教育专业性的体现，而实现学科教育知识的育人价值是推动学科教育专业化的前提条件。

不同的学科有不同的育人价值，不同的学科教育方法有不同的育人路径。以一种学科教育方法实现学科育人价值的过程，也是这一学科教育方法专业性的体现。数学史融入教学是数学教育的重要育人路径。当前，对“中国课堂”中的数学史育人价值已有充分的探讨，其主要包括“知识之谐”、“方法之美”、“探究之乐”、“能力之助”、“文化之魅”、“德育之效”六个方面。但是，当我们不是用“显微镜”观察数学史融入教学的设计细节或课堂表征，而是用“望远镜”来审视数学史融入教学这一学科教育方法的专业化过程时，就会发现，进一步深化和丰富对数学史融入教学独特育人内涵和方式的研究很有必要。

一方面，加强对拔尖学生培养的关注是数学史融入教学实现“卓越育人”的应有之义。“努力构建中国特色、世界水平的基础学科拔尖人才培养体系”，是当前提高教育质量的迫切诉求。数学史融入教学在拔尖学生培养上有着独特的价值。第一，新时代拔尖人才培养需要从“改变思维”开始，而数学史融入教学对学生批判性思维、创造性思维培养有着独特的价值。已有相关实证研究对此进行了论证。未来，通过数学史融入教学培养和发展学生的高阶思维是一个重要研究话题。第二，新时代拔尖人才需要做到“科技”与“人文”相通，而这正是数学史融入教学的关键词。第三，新时代拔尖人才需要有跨学科的视野，而基于数学史的数学文化强调“学科联系”，为相关人才培养提供了基础。第四，新时代立德树人，还需要培养学生的信仰精神，而数学家们执着求学、潜心钻研的故事，正是对今日学生最好的激励。

另一方面，强化卓越教师培养的实际成效是数学史融入教学实现“卓越育人”的重要内容。学科教育的主体不仅是学生，教师的成长同样值得关注。近年来，以数学史融入教学为

载体促进教师专业发展形成一系列丰实的成果。第一，以学习共同体的形式，实现了教师教育者、在职教师和职前教师的共同发展。相关实证研究已经证实了上海 HPM 专业学习共同体提升教师知识、能力、信念发展的效果。第二，数学史融入教学走进区域教研，越来越多的学科大联盟、名师工作室、教师培训基地开始关注数学史融入教学的理论与实践，以数学史融入教学推动乡村卓越教师培养也成为了重要的研究话题。第三，也是最为独特的，数学史融入教学这一学科教育方法，让更多的教师会做研究，能研究历史、研究学生、研究课例、研究数学，研究能力成为他们成为卓越教师的“源动力”。

教师和学生是参与数学史融入教学的主体，进一步研究数学史融入教学如何促进学生成长、如何促进教师专业发展，有利于丰富数学史融入教学的育人内涵和方式。但是，学科教育方法的专业化是一个系统工程，明晰学科教育专业化的前提和条件，并探讨实现育人价值的保障，同样具有重要意义。

一方面，追求“学术卓越”是实现“卓越育人”的基本前提。“学术卓越”是一个专业领域成熟的表现。当前，学科教学论作为教育学的一个分支“只能取得寄生性发展”，“受到不应有的限制或者被故意边缘化乃是不争的事实”。而没有“学术卓越”支撑的研究方向走不远，因为这意味着很难有专业的教师教育团队，而没有专业的教师教育团队就不可能产出一系列被大家广泛认可和接受的课程体系、研究课题和研究成果。当前，数学史融入教学正在着力突破学科教学论这一固有的困境，通过展开“中国经验”的“国际表述”、推动“中国智慧”的“国际对话”、提升“中国贡献”的“国际认同”，HPM 这一扎根中国大地快速发展的学术研究领域正在努力迈向“学术卓越”。

另一方面，数学史融入教学的“实践卓越”为“卓越育人”提供了现实基础和条件。“实践卓越”是 HPM 领域的特色和优势，数学史融入教学本身的实践属性决定了数学史融入教学不是书斋中的“育人”、实验室里的“育人”、想象中的“育人”，而是田野中的真真切切、实实在在的“育人”。HPM 丰富的实践基地为“卓越育人”提供坚实的保障。未来，不断拓宽实践的渠道和范围，有利于进一步强化数学史融入教学“卓越育人”的影响力。

但是，同样值得指出的是，学科教育方法的专业化并不意味着学科教育方法的单一化，未来，“HPM+问题提出”、“HPM+STEM”等“HPM+”的育人模式也将成为理论和实践的焦点，更多学科教育方法将共同发挥育人价值，实现“卓越育人”。

在学科教育专业化的过程中，作为学科教育方法的数学史融入教学的专业化同样值得深入研究。未来，加强理论研究，强化实践引领，数学史融入教学定能在“学术卓越”、“实践卓越”的基础上实现“卓越育人”。

目　录

CONTENT

历史研究

20 世纪晚期数学名师的数学史教育价值观探析

刘思璐

(华东师范大学教师教育学院，上海 200062)

1 引言

1972 年，第二届国际数学教育大会上成立了数学史与数学教学关系国际研究小组（简称 HPM，现常用 HPM 表示数学史与数学教育之间关系这一学术领域），这标志着数学史与数学教育之间的关系成为数学教育的重要研究领域之一[1]。在我国，早在上个世纪 20~50 年代，数学史家钱宝琮（1892~1974）已强调数学史对数学教育的重要价值[2]，但直到 2005 年首届全国数学史与数学教育学术研讨会之后，HPM 才逐渐开始受到国内学术界的关注[3-4]。目前，国内 HPM 研究已呈现出以课例研究为主要模式的实践取向、关注学科德育等不同研究主题、涉及从小学到大学多学段等特点[5]。

今天，越来越多的中学教师开始关注数学史的教育价值[6-7]，一些职前和在职教师在教学技能比赛、公开课等活动中往往会运用数学史[8-10]。然而，数学史融入课堂教学并非只是今天才出现的新潮，早在上世纪 80 年代，我国中学数学名师就已经有过实践尝试了[11-12]。历史是思想的宝库，了解名师的数学史教育价值观以及他们在课堂上运用数学史的实例，对今天的 HPM 研究和数学课堂教学均有现实意义。本文的具体研究问题是：20 世纪晚期我国中学数学名师是如何看待数学史教育价值的？他们又是如何在课堂中实现数学史教育价值的？

2 研究对象

选取《名师授课录》（初中版、高中版）、《中国著名特级教师教学思想录》（中学数学卷）中涉及的有关数学名师作为研究对象。

（1）1987 年上海师范大学数学系数学教育研究室联合上海教育出版社数学编辑室面向

全国数学教师征集、编审《名师授课录》（中学数学）[13]，并于 1991 年出版了高中版，1992 年出版了初中版。书中的作者均为特级或高级教师，且在全国或所在地区具有一定知名度，其中特级教师占很大比例。两册书集中了 20 世纪 80 年代我国最优秀中学数学教师的典型课例，反映了当时数学教学主流和我国传统教学情况[14]。

（2）1996 年，江苏教育出版社出版了《中国著名特级教师教学思想录》（中学数学卷），该书介绍了当时我国著名中学数学特级教师教育思想和方法，旨在为中学教师队伍建设和中学教育质量提高做贡献[15]。

（3）为深入研究以上两套丛书中名师们对数学史教育价值的认识，研究者在中国知网上检索条件全文处输入“数学史”，以两套书中涉及的名师为作者，检索 1980-1999 年间发表的数学教学论文。

以上选取范围中涉及数学史的课堂教学实录、数学教学思想的中学数学名师共 19 位。表 1 为最终选取的研究对象分布情况。

表 1 研究对象分布情况

来源	人数
《名师授课录》（初中版、高中版）	11
《中国著名特级教师教学思想录 中学数学卷》	2
中国知网（检索条件：全文“数学史”+作者“名师”+时间“1980.1.1-1999.12.31”）	6

这 19 位名师分别来自于浙江省、吉林省、四川省、湖北省、安徽省、河北省、陕西省、山东省、河南省、福建省、江苏省、广东省、上海市、天津市，他们对数学史教育价值的认识具有一定的代表性。

3 数学史教育价值

从研究对象的文献资料中，共梳理出以下六条数学史的教育价值。

V1 激发学生兴趣和求知欲

恰当、合理地使用数学史可以激发学生的学习兴趣和求知欲，同时讲数学史还可以作为一种上课的技巧来提高学生注意力。王家华老师在“勾股定理”的引入环节加入了我国发现

勾股定理的历史，他在设计意图中写到数学史可以“增强学生好奇心，激发学生求知欲”“学生注意力可以高度集中，保证学习顺利进行”[12]。王学贤老师在讲授“数学归纳法及其应用”时，介绍了费马的一个错误猜想（形如 $2^{2^n}+1\left(n\in N^*\right)$ 的正整数为素数），其设计意图为数学史例使学生兴趣盎然，学习积极性大为提高[11]。

V2 培养学生的数学自信心

给学生讲授数学史的过程正是培养学生数学自信的好时机。数学冰冷的美丽背后是火热的思考，了解这个思考过程，有助于学生建立学习数学的自信心。寿纪瑗老师在“正数与负数”课上让学生尝试表示相反数，学生提出“用红色 5°C 表示零下 5°C，黑色 5°C 表示零上 5°C”。寿老师先是夸赞道学生们成了发明家，接着告诉他们我国古代的表示方法，通过对比学生的表示方法和古代的表示方法，既激发了学生的学习兴趣又培养了学生学习数学的自信心[11]。龚方程老师在“一元二次方程的根与系数的关系”一课中给学生讲了韦达定理的发现者，同时鼓励学生只要用心观察，认真分析，也可以发现这样的数学规律[11]。

V3 促进学生对数学知识的理解

讲授数学史上的数学概念的发展过程、经典思想方法以及数学术语的来源，可以促进和加深学生对所学内容的认知和理解。王绍鹏老师在“应用配方法解一元二次方程”一课中借鉴我国古代“出入相补原理”的解题思路，将配方与正方形的割补联系起来，并让学生从中提炼方程配方的基本步骤。王老师指出：“这种历史思想方法具有很强的启迪性，有助于帮助学生认清问题的实质和明确解题的思路。”[11]李淦林老师认为，高中函数概念的教学必须反映函数发展的历程，这个过程可以加深学生对函数这个重要数学概念的理解[15]。

V4 落实爱国主义教育

讲授我国古代数学家的发现与发明，或做多国数学成就的对比，可以培养学生的爱国主义情怀，激发民主自豪感，培养学生的文化自信。孔庆成老师在“二项式定理”的课上提到了杨辉三角，并在教案说明中写到“向学生进行爱国主义教育，激励学生勤奋学习”[11]。王永建老师则在文章中专门论述了怎样在中学数学中进行爱国主义教育[16]和改进数学课堂教学意见[17]，其中提到宣传我国数学史上杰出成就，可以增强学生民族自豪感。

V5 拓宽学生视野

数学史的讲授必定会拓宽学生的眼界，让学生了解不同国家的数学文化。沈瑞初老师在文章中提到教师要“在开拓学生视野方面多做工作，数学史上的趣事，数学家的动人事迹等都会产生良好的教育效果。”[18]范光中老师在“重要不等式及其应用”课上讲授了重要（基本）不等式的几何法证明即我国古代数学家赵爽的证明方法[11]。范老师和某些老师没有解释其使用数学史的目的，故本研究将这种情况归于“让学生拓宽视野，了解数学文化”。

V6 提高学生科学素养

给学生讲授数学史的探究和发展历程，有助于提高学生的科学素养和创新性思维。李淦林老师指出，要用科学方法论指导数学教学，展现数学知识的形成、发展轨迹，以函数概念为例，让学生经历从传统定义到近代定义的过程，可提高学生的科学素质[15]。马明老师在“发展学生的思维能力”一文中提到，衡量学生思维水平的是思维的创造性，数学家们在研究时思维往往要经历归纳、类比、演绎等过程，而教材往往只呈现结果，教师应该懂得数学史，在课上恢复原来知识内容的思维过程，这对培养学生思维的创造性是非常有利的[19]。

可见，在 20 世纪晚期的中学数学名师眼中，数学史的教育价值主要体现在数学理解、思想情感和文化素养三个方面。如尹旺忠老师的“初中几何引言课”把介绍几何学发展简史及我国古代数学家的几何成就作为几何引言课的教学目的和教学重点之一，认为可以把“辩证唯物主义教育与爱国主义教育贯穿其中，同时使得学生能够饶有兴趣地沉浸其中”。[12]

4 数学史教育价值的实现

以下我们从数学史料的选取原则、运用方式和教育价值三个方面对《授课录》（初中版、高中版）中 11 位教师的教学进行分析。数学史料的选取原则包括趣味性（P1）、科学性（P2）、有效性（P3）、可学性（P4）和人文性（P5）[20]；课堂教学中运用数学史的方式包括附加式（W1）、复制式（W2）、顺应式（W3）和重构式（W4）[21]；数学史的教育价值见上节的 V1-V6。分析结果见表 2。

表 2 《授课录》11 位名师在课堂上使用数学史情况的分析

教师	主题	满足的选取原则	使用的方式	实现的教育价值
寿纪瑗	正数与负数	P1, P4, P5	W1	V1, V2, V5
王绍鹏	应用配方法解一元二次方程	P3, P4	W3	V3
龚方程	一元二次方程的根与系数的关系	P2, P4, P5	W1	V2, V5
岑申	函数的概念	P2, P4, P5	W1	V4
尹旺忠	初中几何引言课	P1, P3, P4, P5	W1, W3	V1, V2, V3, V4, V5, V6
王家华	勾股定理	P1, P2, P3, P4, P5	W1	V1, V3, V5
王培甫	“面积”在几何解题中的应用	P2, P3, P4, P5	W3	V3, V5, V6
范光中	重要不等式及其应用	P3, P4, P5	W3	V3, V5
王学贤	数学归纳法及其应用	P1, P2, P3, P4, P5	W2	V1, V3, V6
孔庆成	二项式定理	P4	W1	V4, V5
郑宾王	有向线段	P2, P4, P5	W1	V5

注：这里的 P2（科学性）指教师在课堂教学中讲授的数学史料符合史实，而非有文献出处。

由表 2 可知，11 位名师所选取的数学史内容均符合可学性，即他们在课堂中讲授的数学史符合学生的认知基础。5 位名师在科学性方面有所欠缺：1 位教师将中国古代正负数的算筹表示法“正算赤，负算黑”[22]说成“正算黑，负算赤”；1 位教师在“教案说明”部分将阿拉伯数学家花拉子米的面积配方法[2]写成了我国古代的数学思想方法；2 位教师将赵爽的“勾股圆方图”[23]讲成了“勾股方圆图”；1 位教师的论断——“杨辉三角比欧洲至少早了三百年”并不准确，我国北宋数学家贾宪（11 世纪）最早构造“开方作法本原图”，而 13 世纪德国数学家约丹努斯（Jordanus de Nemore, 1225-1260）已经发现了算术三角形[24]。人文性方面，多数名师在课堂上介绍了相关的数学家。相比而言，趣味性和有效性则有所欠缺，且有效性主要体现在定理课和应用课。

11 位名师运用数学史的方式大多为附加式，他们主要向学生介绍数学知识相关的数学家和中国古代的数学成就等。仅 1 位名师使用复制式，通过介绍费马的一个错误猜想，揭示

数学归纳法的必要性。4 位名师使用了顺应式，即改编数学史的内容，让学生经历再创造的过程，从而促进学生对数学方法和数学定理的理解。其中 1 位名师综合使用了复制式和顺应式，在几何序言课上介绍几何学的发展过程和我国的几何学历史，这在当时是不可多得的。

六种教育价值在不同名师的课堂上都有所体现，落实得最好的是“拓宽学生视野”。就某一节课而言，数学史的教育价值往往也不止一种，如尹老师在几何序言课中通过丰富的数学史内容实现了所有六种教育价值。不过，仅仅附加式介绍与某个知识点相关的数学家，如“$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 叫沙尔定理，沙尔是 19 世纪法国数学家”，只能起到“拓宽学生视野”的作用。

可见，数学史教育价值的实现与数学史的运用方式以及所选数学史素材是相互影响的。此外，教师在课上所采用的评价策略也有助于数学史教育价值的实现。如在寿老师的课上，学生提到负数和正数可分别用红色和黑色进行区分，他立刻抓住了学生的想法，将其与古代数学家的表示法进行对比，称赞学生是“发明家”，这对学生而言是莫大的鼓励！

5 讨论

1980-1999 年间我国正式颁布的几版中学数学教学大纲都涉及有关数学史方面的教学目标。从整体教学层面上，1986 年的大纲提出，通过向学生介绍我国古今数学成就，激发学生的民族自尊心和爱国主义思想。从具体教学内容上，1992 年的大纲针对一些具体的知识点提出了运用数学史的要求，如实数教学中要求“结合数的发展史和我国古代数学家对 π 的研究，激励学生科学探求的精神，激发他们爱国主义精神”[25]。可见，这个时期的大纲明确提出数学史的教育价值之一——培养学生的爱国主义精神，这在名师课堂上也有所体现。

各种教材引入了相应的数学史内容，如当时人教版初中教材通过“读一读”等形式介绍了古代数学著作、数学人物以及几何、正负数等内容的发展简史[26]，这些内容在名师们的课堂实录中也有涉及。此外，教材内容的编排也受到了数学史的影响，如数的概念的产生和发展历史以及函数概念的历史等，为不同学段的教材循序渐进地呈现相关内容提供了参照[27]。

另外，自 1977 年起，我国开展了中学数学教学方法的改革。改革以“启发式”思想为

指导，教育工作者开始关注教与学、知识与能力的关系等重要思想问题[28]。一些教育者认识到非智力因素对数学教学的影响，即要在数学教学中渗透德育，适时进行爱国主义和辩证唯物主义观点的教育有助于提升数学教学质量[29]。这说明，当时的一些数学教师已经认识到数学史在落实爱国主义教育等方面的价值，并付诸课堂教学的实践。

李善良老师于 1996 年对江苏省某市部分初中师生进行了数学史教育的调查，结果显示，学生的数学史知识十分有限，对外国数学史知之甚少，教师对数学史教育的重视程度不够[30]。可见，因地区环境、教师信念、教学评价等原因，数学史远未进入“寻常百姓家”[31]。

近几年来，HPM 专业学习共同体在理论和实践研究的基础上提出了数学史对学生的六类教育价值，即知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅和德育之效[32]。对比发现，昔日与今时的人们对数学史教育价值的认识有着千丝万缕的联系。“激发学生兴趣和求知欲”、“培养学生的数学信心和爱国主义精神”对应于“德育之效”，“促进学生对数学知识的理解”对应于“知识之谐”，“扩宽学生视野”对应于“文化之魅”，“提高科学素养”是“能力之助”的部分内容。然而，数学史在彰显方法之美、营造探究之乐方面的价值在当时尚未受到数学名师们的关注。

6 结语

在 20 世纪晚期数学名师眼中，数学史有着多元的教育价值，包括激发兴趣和求知欲、培养数学自信心、促进数学理解、落实爱国主义、拓宽学生视野和提高科学素养六个方面。名师在课堂上选取的数学史内容大多符合可学性和人文性原则，但科学性、趣味性和有效性有所欠缺。他们使用数学史的方式较为单一，且大多为附加式。“拓宽学生的视野”这类价值落实得最好，部分名师的课堂体现了数学史的多元价值。

从数学名师的数学史教育价值观以及他们的课堂教学实践中，我们可以得到以下启示。

首先，数学教师在其专业发展的成熟阶段，必然会认识到数学史对数学教学的重要价值。理想的数学教学，往往需要某种教育理论或理念的支撑，而一种教育理论或理念可能会随着时代的变迁而被另一种理论或理念所替代。数学历史却是不动点，无法更改。因此，美国数学家和数学史家 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）强调“数学史是教学的指南”。另一方面，

数学的历史蕴含着取之不尽、用之不竭的教学资源，优秀的数学教师不可以、也不可能忽视这一巨大的宝藏。

其次，课堂上探究活动的缺失导致数学史的运用方式单一，运用水平较低。以生为本，借鉴历史，让学生经历数学知识的探究和发现过程，乃是 HPM 的基本教学理念之一。

最后，数学史知识的局限导致教师在课堂上运用数学史时或多或少出现了科学性错误。教育取向的数学史研究是 HPM 视角下的教学实践的基础，“读原著、学原文、悟原理”是确保数学史科学性、提升 HPM 教学水平的基本途径。

参考文献

[1] 汪晓勤. 数学史与数学教育[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014(01): 8-14.

[2] 汪晓勤著. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 前言; 179-182.

[3] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望[J]. 中学数学月刊, 2012(02): 1-5.

[4] 冯振举, 杨宝珊. 发掘数学史教育功能,促进数学教育发展——第一届全国数学史与数学教育会议综述[J].自然辩证法通讯, 2005(04): 108-109.

[5] 刘思璐, 韩嘉业, 姜浩哲. 第八届全国数学史与数学教育学术研讨会纪要[J]. 数学教育学报, 2020, 29(01): 93-97.

[6] 张国定. 数学史教育价值的演化进程——从 HPM 的视角[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2010(06): 36-40.

[7] 孙红强. 数学史教育价值的挖掘使用与实践检验——以“费马大定理”阅读材料为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2016(12): 48-53.

[8] 王传利. 数学职前教师细节实践性知识形成的叙事研究——基于第三届广东省师范生教学技能大赛分析[J]. 数学教育学报, 2017, 26(01): 88-93.

[9] 冯振举, 王惠扬子. 职前数学教师教学设计信念转变的个案研究——以 HPM 视角下的勾股定理教学为例[J]. 数学教育学报, 2016, 25(02): 59-65.

[10] 聂淑媛, 张之正. “数系的扩充和复数的概念”的同课异构设计与评析[J]. 上海中学数学, 2019(03): 35-36+47.

[11] 《名师授课录》（中学数学）编委会编. 名师授课录 中学数学 高中版[M]. 上海: 上海教育出版社, 1991.03.

[12] 《名师授课录》（中学数学）编委会编. 名师授课录 中学数学 初中版[M]. 上海: 上海

教育出版社, 1992.08.

[13] 张方盛. 介绍《名师授课录》中几位名师的数学教学方法[J]. 抚州师专学报, 1992(03): 94-97.

[14] 李善良. 我国高中数学课堂教学过程的演变与评析[J]. 数学通报, 2010,49(02): 19-23+29.

[15] 钟善基主编. 中国著名特级教师教学思想录 中学数学卷[M]. 南京: 江苏教育出版社, 1996.08.

[16] 王永建. 改进数学课堂教学的意见[J]. 数学通报, 1985(01):2-4.

[17] 王永建. 怎样在中学数学中进行爱国主义教育[J]. 江苏教育, 1984(02): 29-30.

[18] 沈瑞初. 漫谈高中数学教学的高潮与低潮[J]. 中学数学, 1989(03):3-5.

[19] 马明. 发展学生的思维能力[J]. 南京师大学报(自然科学版), 1981(01): 77-86.

[20] 陈晏蓉, 汪晓勤. 数学史料的选取原则与案例分析[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(12): 37-43.

[21] 汪晓勤. HPM 研究之旅[J]. 小学教学(数学版), 2018(Z1): 4-9+2.

[22] 郭书春. 中国古代科技名著译注丛书 九章筭术译注. 上海：上海古籍出版社, 2009.12:332- 334.

[23] 程贞一, 闻人军译注. 周髀算经译注[M]. 上海：上海古籍出版社, 2012.12: 13-15.

[24] 汪晓勤. 算术三角形的历史及其文化价值[J]. 中学数学月刊, 2019(04): 52-55.

[25] 吴履平主编; 课程教材研究所编; 陈宏伯卷编. 20 世纪中国中小学课程标准 教学大纲汇编 数学卷[M]. 北京: 人民教育出版社, 2001: 527, 613.

[26] 李善良. 初中阶段数学史教育的调查与分析[J]. 数学教育学报, 1997(04): 38-41.

[27] 蔡晓春, 陆克毅. 关于数学教材分析方法的探讨[J]. 数学教育学报, 1996(02): 35-39.

[28] 范纲, 李秋. 我国新时期的中学数学教育的发展与展望[J]. 中小学教师培训, 1997(C6): 11-13.

[29] 唐盛昌. 数学教学的质量观[J]. 数学教学, 1991(03):10-13.

[30] 李善良. 初中阶段数学史教育的调查与分析[J]. 数学教育学报, 1997(04): 38-41.

[31] 唐盛昌, 翁泰吉, 刘俊杰. 中学数学教育的中西比较[J]. 上海教育科研, 1999(05): 3-5.

[32] Wang X Q, Qi C Y, Wang K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics[J]. Science & Education, 2017, 26(7-9): 1029-1052.

美英早期教科书中的解析几何价值观

秦语真

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

《普通高中数学课程标准》（2017 年版 2020 修订，以下简称《标准》）中指出："通过高中数学课程的学习，学生能提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心，养成良好的数学学习习惯，发展自主学习的能力；树立敢于质疑、善于思考、严谨求实的科学精神；不断提高实践能力，提升创新意识；认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值。"[1]在核心素养时代到来的今天，不仅需要教师数学教学观念的更新，更需要教师深刻理解数学价值观。只有深刻理解数学的价值，才能有意识地设计数学课程中的价值教育，促进数学课程的建设[2]。

调查表明，学生的数学信念和数学成绩之间有密切的关系，随着年级的增高，数学信念水平在逐步下降，并且优等生的数学信念要强于差生[3]-[5]。因此，一些学者大力提倡在数学教学中彰显数学的价值，让学生认识到数学学习的作用，提升学生的数学信念[6]-[8]。

解析几何是数学的一个分支，在初高中数学教育中占据着重要的地位。要想在解析几何教学中渗透数学价值观，首先需要提炼、分析解析几何所特有的价值。19 世纪以来，美英部分解析几何教科书曾相继对解析几何的价值进行过讨论和提炼。早期教科书所持有的价值观一方面可以促进教师对数学价值的深刻理解，从而在教学中加以渗透，树立学生积极的数学信念，改善教学的质量，另一方面也可以为今日教科书的编写提供有益的参考，提升教科书的质量。

鉴于此，本文对 1830-1970 年间出版的美英早期解析几何教科书进行考察，以期回答以下问题：从历史上看，早期解析几何教科书持有怎样的解析几何价值观？这些价值观在教科书中是怎样体现的？对今日数学教学和教科书编写有何启示？

2 研究方法

2.1 研究对象

研究者从有关数据库中选取出版于 1830-1970 年间的 93 种美国和英国解析几何教科书，其中 83 种出版于美国，10 种出版于英国。对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化或书名有变化，则将其看作不同的教科书。若以 20 年为一段，各种教科书的时间分布情况如图 1 所示。

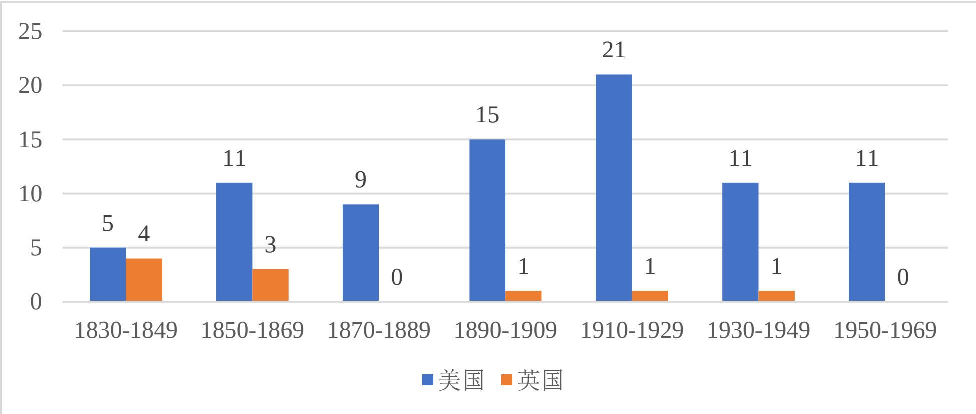


图 1　93 种解析几何教科书的时间分布

详细阅读各本教科书的序言和正文引言部分，从中筛选出论及解析几何价值的教科书作为研究对象。关于解析几何价值的表述可分为以下四类：

第 1 类：直接在前言或正文中描述解析几何价值；

第 2 类：描述数学的价值，因其出现在解析几何教科书的前言部分，将其归为解析几何价值；

第 3 类：描述该教科书或教科书中某一部分（如习题）要实现的价值，因其出现在解析几何教科书的前言部分，将其归为解析几何价值；

第 4 类：在前言和正文中描述解析几何某一知识点的价值。

最终发现，共有 81 种教科书在前言中论及解析几何价值，61 种教科书只在前言中论及解析几何价值，2 种只在在正文引言部分论及解析几何价值，18 种在前言和正文部分同时论及解析几何的价值。

2.2 解析几何价值的分类框架

历史上，西方学者对数学的教育价值有过长期的讨论，概括起来有训练思维、发展心智、获得真知、知识基础、现实应用、美化心灵、消遣娱乐、惩戒浮躁等[9]。结合课程中提出的科学价值、文化价值、应用价值和审美价值进行分类[1]，据此形成初步的分析框架，运用该框架对早期解析几何教科书涉及的价值观进行统计，并根据统计情况，反过来对框架进行修正，最终形成正式的分析框架，见表 1。

表 1 解析几何价值的分类框架

类别	具体内涵
科学价值	数学和自然科学的基础
思维训练	推理、分析、抽象、直观等能力的培养
现实应用	日常生活、职业发展中的应用
数学交流	语言、表达、陈述
审美价值	学科之美、方法之美、思想之美、公式之美、性质之美
德育价值	理性、信念、情感、品质

2.3 分类统计

确定分析框架后，研究者运用文本分析法，对 79 种教科书的前言和正文引言部分进行研究，提炼出教科书中所涉及的解析几何价值观的统计单位，根据分类框架对统计单位进行分类。

统计结果显示，共有 28 种教科书论及 1 类价值，25 种教科书论及 2 类价值，13 种教科书论及 3 类价值，10 种教科书论及 4 类价值，2 种教科书论及 5 类价值，1 种教科书论及 6 类价值。六类价值一共出现 173 次，具体分布情况如图 2 所示。

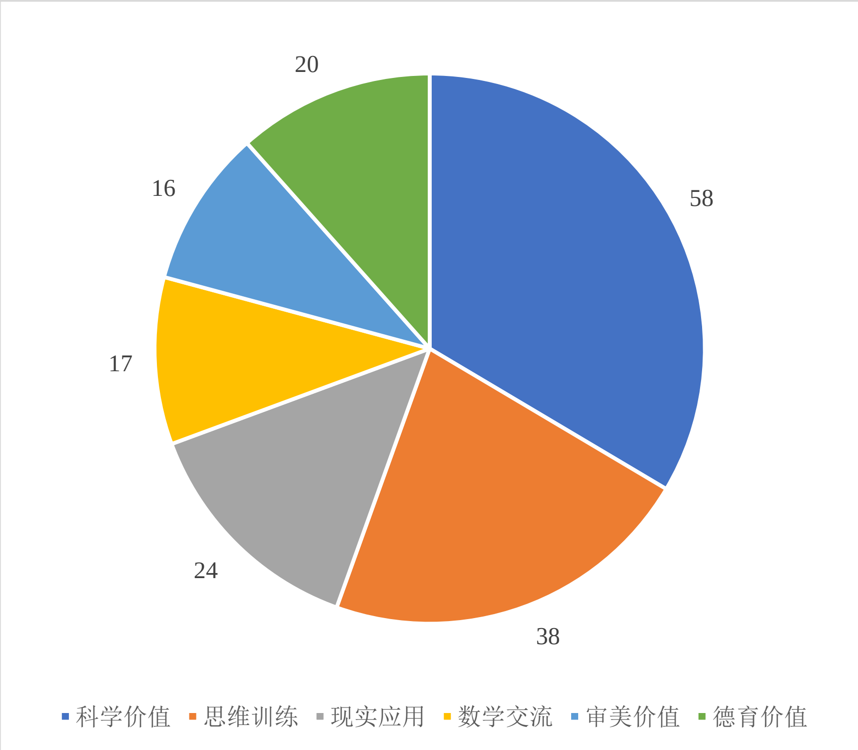


图 2 解析几何价值观的分布

3 早期教科书的解析几何价值观

3.1 科学基础

17 世纪解析几何的诞生在数学上具有跨时代的意义，它为数学的发展开辟了新天地，是数学学科的重要基础。同时，它也是物理学、天文学和其他学科不可或缺的研究工具。共有 58 种教科书（占比 73.4%）论及解析几何的科学价值，即解析几何在数学学科内部的价值以及对其他学科（如天文、物理学）的价值。表 2 给出了代表性的具体观点。

表 2 关于解析几何科学价值的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
数学基础	解析几何是现代数学的基础。[10]	Johnson（1869）
	解析几何，以代数分析为研究工具，向学生展示了一种新的数学思维形式和新的思维方法——解析方法。正因如此，解析几何是微积分的重要初步课程。[11]	Borger（1928）

科学工具	解析几何的学习对于理科生、工程系学生和数学专业学生来说都是同等重要的。它的重要性在于它给予代数运算、三角学和其他数学分支"图形洞察力"。与代数学和三角学一样，是微积分和许多科学和工程课程所依赖的基础。[12]	Cell（1951）
	解析几何是数学和自然科学的基本分析工具，对科学、天文和工程学具有重要影响。[13]	Haaser（1959）
	通过解析几何的学习，学生对物理和工程课程的理解会更加透彻。这有利于学生在之后的学习中更好地将数学方法应用到工程和物理问题上。[14]	Murnaghan（1946）
	解析几何在天文学中的应用，是最受自然青睐的曲线，行星在太阳引力下运动的曲线是椭圆。同样在科学、工程学上也有它们的身影[15]。	Kells（1949）
	解析几何在物理上有广泛应用，在教学中应明确圆锥曲线的焦点的光学和声学意义[16]。	Osgood（1921）
	解析几何将被工程学家和数学家应用于自己的事业中[17]。	Holmes（1950）

3.2 思维训练

美国数学家杨格和摩根在其《初等数学分析》中指出："数学的学科价值应该从思维、推理、反思和分析领域中去寻求，而不是从记忆领域或从高度专门化活动的技巧领域中去寻求。" [18]。38 种教科书（占比 48.1%）提到解析几何的在思维训练方面的价值，包括该学科在培养学生推理、分析、抽象、想象、直观、运算等能力的作用。表 3 给出了代表性的具体观点。

表 3 关于解析几何思维训练价值的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
推理能力	培养学生的推理能力，是解析几何追求的目标之一。[19]	Hardy（1889）
分析能力	强调在几何学中运用分析的方法来解决问题。[20]	Gibson（1911）
抽象思维	在这门课程的学习中，抽象思维是不可或缺的。[13]	Haaser（1959）
想象力	通过解析几何，可以激发学生的想象力[21]。	Nowlan（1946）
直观能力	解析几何具有很强的内在价值，可以为培养学生的直观能力和严谨思维能力提供一套完整的思想体系。[22]	Nathan（1947）
运算能力	代数运算对于数学理解必不可少，是学生必须具备的能力。[18]	Young（1918）

3.3 现实应用

24 种教科书（占比 30.3%）强调了解析几何的现实应用价值，认为解析几何不仅应用在在物理、天文等学科上，并且渗透在我们生活的方方面面，并为日后的工作和生活打下基础。表 4 给出了代表性的具体观点。

表 4 关于解析几何现实应用价值的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
日常生活	将学生注意力放在日常应用上，发现有趣的现象，可以弥合理论和实践之间的鸿沟[23]。	Candy（1909）
	将日常经验作为练习和应用的原材料，利用解析几何加以分析和解决[13]。	Haaser（1959）
职业需求	解析几何具有强大的应用价值，可以成为学生日后工作中解决问题的重要工具 [18]。	Young（1918）

3.4 数学交流

数学是一种语言，利用这种语言，人们能够简洁地表达和交流思想。作为数学的一个分支，解析几何可以培养学生严谨的数学表达能力和交流能力。17 种教科书（占比 21.5%）论及解析几何在数学交流方面的价值。表 5 给出了代表性的具体观点。

表 5 关于解析几何数学交流价值的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
语言	通过解析几何，培养学生几何语言和代数语言之间转化的能力。[24]	Smith（1954）
	几何语言和代数语言密不可分，解析几何离不开解析方法，将问题呈现具体化，同时得到的代数结论又需要得到几何解释。[25]	Robinson（1860）
	当学生开始学习本书时，教师最好让学生用自己的语言在黑板上写出证明，同时注意语言要尽可能简单。这将为数学语言的学习提供宝贵的练习机会，并培养学生合理有序地安排每一步工作的习惯。[26]	Wentworth（1890）
表达	数学是培养准确且简洁的语言表达习惯和思维能力的重要媒介。[27]	Ford（1924）
	熟悉几何语言，进行熟练准确的表达，从而能更好地掌握几何推理。[26]	Wentworth（1890）
陈述	通过学习推导的法则，总结其中的结论，培养学生准确陈述的能力，建立学生对解析几何的清晰认知。[28]	Smith（1912）
	在学完教材后，学生应该及时复习，其中包括口头陈述和证明。[26]	Wentworth（1890）

3.5 审美价值

Young & Morgan（1917）指出：“数学在促进人类进步方面起到了很大的作用，数学本

身具有力量和美。”[18] 16 种（占比 20.2%）论及解析几何的学科之美。解析几何是研究几何的重要工具，代数分析是解析几何的力量之源[29]。数学定理和公式的教学绝非只是为了应用，翻开历史的画卷，不同时空中的方法多样且精彩，从中我们可以获取丰富的养料，浸润我们的课堂。在英美早期教科书中，解析几何的性质推导往往是方法多样、环环相扣的，方法之美渗透在解析几何的方方面面。其代表性观点见表 6。

表 6 关于解析几何审美价值的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
学科之美	向学生介绍解析几何方法，可以激发其兴趣。并对其性质进行深入探究，那些优雅又有力量的证明方法，构成了学科之美。[30][30]	Howison（1869）
思想之美	解析几何在数学中占据重要地位，不仅是微积分初步，本身也是一个严谨的思想体系，学生在这里第一次将代数和几何思想结合，感受解析几何蕴含的思想之美——它的简洁性、概括性和逻辑的完美。[31]	Purcell（1958）
方法之美	解析几何的证明方法丰富且优雅，让学生在学习中多多接触，可以提升学生的数学品位。[32]	Newcomb（1884）
	圆锥曲线起源相同，性质环环相扣，通过相似性质的类比，可以揭开解析几何的面纱，这为圆锥曲线的学习增添了色彩。[30]	Howison（1869）

3.6 德育价值

20 种教科书（占比 25.3%）提到解析几何在培养理性思维、树立积极情感方面的价值。表 7 给出了代表性的具体观点。

表 7 关于解析几何德育价值的代表性观点

类别	具体观点	作者（年份）
理性	解析几何可以培养数学思维，训练数学表达能力，让学生形成清晰的数学概念、完美的推理逻辑和严谨的精神。[35]	Hardy（1897）
	学习解析几何就是学习推理的艺术，让学生在学习中不仅认识到推理的严谨性，更能认识到其中的意义和价值。[36]	Loomis（1851）
情感	纯数学中没有任何一个分支比解析几何更能激发学生的兴趣，提升思维能力。解析几何中包含了几何推理的清晰性和代数的简洁性、一般性，不仅满足了推理者的需求，并且通过优雅的推导和严谨的解释，给学习者带来持续的乐趣。[37]	Church（1851）
品质	学习解析几何可以培养学生面对困难勇于探索的品质。[36]	Loomis（1851）
信念	希望本书可以为学生树立投身纯数学或其他科学事业的精神信念。[38]	Agnew（1962）

4 解析几何价值观分布

以 20 年为一个时间段，把 140 年分成七段。由于每一段的教科书数量有差异，我们对每一段中各类价值观的分布情况（占比）进行统计，结果见图 3。从图 3 可见，科学价值、

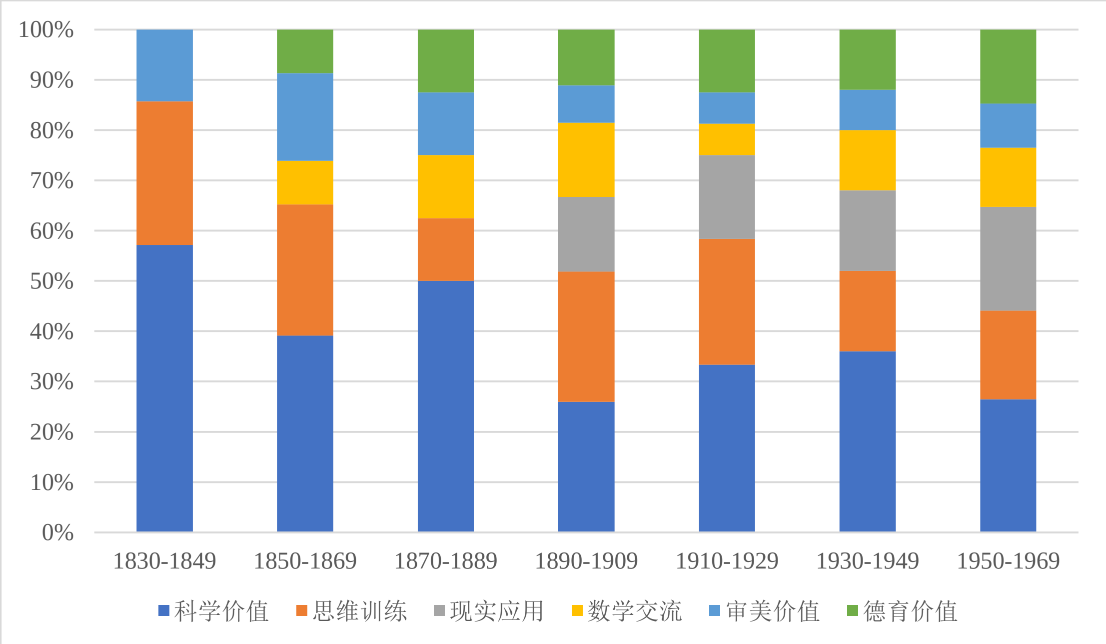


图 3 各类价值分布的变化情况

思维训练、审美价值出现于所有 7 个时间段，数学交流价值和德育价值出现在 6 个时间段，现实应用价值只出现在 4 个时间段。可见，早期解析几何教科书的解析几何价值观呈现了多元化的特点。科学价值最受重视，思维训练次之。

而解析几何各类价值的叙述也并非一成不变的，表 8 呈现了 19 和 20 世纪教科书中解析几何价值观的变化，从中我们可以发现，各类价值观的维度不断增加，内涵更加丰富，教科书编写者更加关注数学学科内部和外部的价值，越来越注重解析几何的实用价值。

表 8 解析几何价值分布的变化情况

类别	19 世纪	20 世纪
科学价值	数学基础	数学基础、科学工具
思维训练	分析、推理能力	分析、推理、直观、想象、抽象、运算能力
现实应用	无	日常生活、职业发展中的应用
数学交流	语言、表达、陈述	语言、表达、陈述
审美价值	公式之美、性质之美、方法之美	学科之美、方法之美、思想之美、公式之美、性质之美
德育价值	情感、品质	理性、信念、情感、品质

自文艺复兴以来，数学因为其“纯粹知识”与博雅学科一样，有助于心灵和谐发展而受

到人文主义教育学家的关注，因此，早期教科书更注重传统的思维能力价值和科学价值。随后，19 世纪末，科学技术飞速发展，数学课程的内容和方法已不能适应当时的科学和生活需要，也不能适应数学自身发展的需要，“克莱因—培利运动”正是在这样的时代背景下诞生的。英国数学家培利在英国科学促进会的一次演讲中曾说 “绝不允许为培养一个中学数学教师，而扼杀千万个儿童的精神（生活）；为造就一个数学家，而毁灭数以百万计的人们”，与克莱因注重实用价值的思想不谋而合[39]。解析几何现实应用价值在出现于 19 世纪晚期，到了 20 世纪则受到教科书的关注，这与克莱因-培利运动是息息相关的。

5 解析几何价值观在教科书中的落实

早期解析几何教科书的正文内容往往是由曲线的定义、方程、性质、问题解决和实际应用这五个方面构成，本章将从这五个方面简要分析解析几何价值观的落实情况。

5.1 曲线定义

早期教科书中，对于同一种曲线，往往采用不同的定义方式，以椭圆为例，93 种解析几何教科书中，共出现椭圆的五种定义，分别是原始定义、第一定义、第二定义、压缩变换定义和基于方程的定义（作为补充说明出现）。53 种教科书采用了第一定义，28 种教科书采用了第二定义，6 种采用了原始定义。五种定义共出现 201 次，其中有 25 种教科书只给出 1 种定义，36 种教科书给出 2 种定义，24 种教科书给出了 3 种定义，8 种教科书给出了 4 种定义。通过圆锥曲线不同定义之间的等价性，让学生感受解析几何的统一美，并培养学生的分析、类比、推理、直观等方面的能力。

5.2 方程推导

早期教科书中方程的推导更是丰富多彩。以双曲线为例，在双曲线方程的推导中，采用第一定义的教科书分别用“两次平方法”、“洛必达法”、“平方差法”和“利用余弦定理”法来推导标准方程。采用原始定义的教科书分别用旦德林双球模型、阿波罗尼奥斯的方法、借助三角函数和空间解析几何知识来推导双曲线方程。方程的形式也经历了从 $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$ 到 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的变化；还统一了极坐标方程 $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，呈现了圆锥曲

线方程形式的对称美和统一美。

可见，早期教科书通过方程的推导，不仅训练学生的思维，培养学生多角度思考，不断探索的精神，欣赏不同证明方法的妙处，同时也呈现了方法的多样性，体现了解析几何的审美价值、思维训练价值和德育价值。

5.3 性质证明

早期教科书中十分重视曲线性质的证明，多数教科书单独设节讨论曲线的法线、切线、次法线、次切线、极坐标方程、参数方程以及面积的相关性质。以面积为例：早期教科书通过压缩变换定义来揭示圆和椭圆面积之间的关系；借助微积分来推导抛物弓形的面积，并且让学生尝试探索更多的办法。另外，早期教科书在证明曲线性质时也很注重揭示解析几何的统一美，如通过将椭圆和双曲线进行对比来说明其性质的相似性。

可见，早期教科书通过圆锥曲线性质的证明来训练学生的思维，培养严谨的理性精神，揭示数学之美，体现了解析几何的思维训练价值、审美价值和德育价值。

5.4 问题求解

Smith（1904）提到："只有运用数学原理才能真正理解数学，学习解析几何时，需要通过练习去熟悉性质。"[40] Whitlock（1848）设计了超过 400 个例题，以便于让学生在实践中加深对理论的掌握，且问题的选择以"有用"为标准[41]。早期教科书中的习题类型多样，主要分为以下几类：

- 定义应用。如：给定条件求解标准方程。
- 方程推导。如：用第二定义推导椭圆、双曲线的标准方程。
- 性质证明。如：证明抛物线弓形的面积为以其顶点为顶点、以弦为底边的内接三角形面积的 $\dfrac{4}{3}$；已知 AB 是抛物线 $y^2=2px$ 的过焦点 F 的弦，求证：以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切，等等。
- 实际应用。如：给定不同地点听到的枪响时间差，确定开枪者的位置。

通过问题的呈现，教科书揭示了解析几何的科学价值、思维训练价值、实际应用价值和德育价值。

5.5 实际应用

Davies（1856）指出：数学在自然科学和实际问题中的应用，促进了数学的发展[42]。20 世纪的教科书开始重视解析几何的实际应用。

部分早期教科书设置专门的章节来呈现解析几何的应用，如 Kells（1949）详细描述了解析几何在天文学的应用，揭示了行星在太阳引力下运动的曲线是椭圆，当速度变大时逐渐变成双曲线和抛物线。解析几何可以帮助我们解决天文观测的问题[15]。Osgood（1921）描述了解析几何的声学和光学性质，写道："椭圆、双曲线和抛物线具有不同的光学性质，并在生活中有着广泛的应用[43]，"并举例说明在生活中的太阳灶、卫星接收天线、探照灯、助听器和扩音器等等就是利用了抛物线从焦点发出的光线或声波在抛物线周上反射后，反射光线平行于抛物线的对称轴的性质。Agnew（1962）和 Taylor（1959）则给出了解析几何在军事上的应用，例如，在二战的时候，设计监听站根据枪响的时间差确定敌人所在的位置[44][45]。同时，双曲线也被应用于雷达[44]和导航[43]中。Kaltenborn（1951）则给出了解析几何在建筑上的应用，如：热电站、核电站的冷却塔都利用了双曲线轻巧，利于流体流动的性质，以使得冷却器中排出的热水在其中冷却后可重复使用[46]。抛物线的身影也越来越多的出现在大跨距桥梁中，比如悬索桥的主缆就利用了抛物线[15]。此外，在古代教堂的玻璃及顶部经常采用圆锥曲线的元素来进行装饰，构造出千变万化的图案[15]。

因此，早期教科书通过实际应用训练学生的思维能力，凸显解析几何的科学基础、审美价值和实际应用价值。图 4 呈现了早期解析几何教科书在定义、方程、性质、问题和应用五个方面落实解析几何的价值的一些策略。

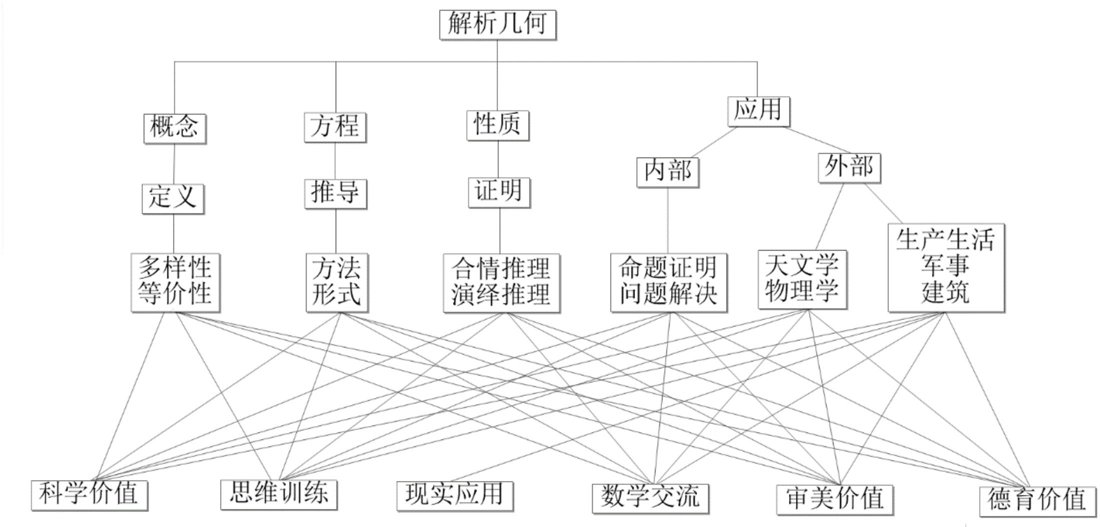


图 4 早期教科书落实解析几何价值的一些策略

6 结论与启示

1830-1970 年间出版的 93 种解析几何教科书呈现了解析几何的六类价值，即科学价值、应用价值、思维训练价值、数学交流价值、审美价值和德育价值。140 年间，解析几何的价值不断丰富，教科书编写者越来越重视解析几何的实用性。早期教科书中的解析几何价值观对我们今日的教学有一定的启示。

其一，《标准》提出：在解析几何部分要“重点提升直观想象、数学运算、数学建模、逻辑推理和数学抽象素养[1]。”早期教科书的解析几何价值观中，思维训练价值维度占比很高，且已涉及所有上述五类核心素养。因此，教师在教学设计时可以借鉴早期教科书的相应策略，如呈现圆锥曲线的不同定义、采用不同方法来推导方程等，在解析几何教学中实现解析几何的思维训练价值，培养学生的数学运算、数学抽象、逻辑推理、直观想象素养。

其二，解析几何与天文学、物理学、通信学等学科都有密切的联系，在现实生活中有广泛应用。教师在教授解析几何时，可以设计跨学科问题，让学生感受解解析几何的科学价值；也可以设计军事或生活中的问题，培养学生的数学建模素养，并让学生体会解析几何的应用价值。

其三，斯托利亚尔曾说过：“数学教学就是数学语言的教学。”[47] 而解析几何的核心是几何语言和代数语言的转化。在解析几何教学中，要重视语言的规范严谨表达，加强几何语

言和代数语言转化的训练，实现解析几何在数学交流上的价值。

其四，增强学生学习信念，重视解析几何对学生德育的塑造和培养。解析几何计算量大，学生在初遇解析几何总有退缩情绪，教师要善于引导学生，让学生在不断的解决困难中树立学习的信心，并从中获得科学的态度和严谨的数学思维，在日后的学习中也能不断创新、勇于探索，体会解析几何带来的乐趣，增强数学信念。

参考文献

[1] 中国人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 修订）[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 唐恒钧, 佘伟忠, 张维忠. 什么样的数学和数学教育是重要的——基于义务教育数学课程标准的分析[J]. 课程·教材·教法, 2016, 36(10): 58-62.

[3] 李宏, 吴颖康, 李士锜. 关于中学生数学信念和数学学习行为调查[J]. 数学教育学报, 2001, 10(3): 88-91.

[4] 张胜. 学生数学信念研究三十年: 回顾与展望[J]. 数学通报, 2017, 56(07): 6-12.

[5] 杨艳苏, 吴庆麟. 学生的数学信念研究综述[J]. 数学教育学报, 2009, 18(06): 23-25.

[6] 张侨平, 黄毅英, 林智中. 中国内地数学信念研究的综述[J]. 数学教育学报, 2009, 18(06): 16-22.

[7] 唐剑岚, 喻平, 周莹. 学生数学信念: 数学教育中一个不容忽视的话题[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2007, 20(04): 34-36.

[8] 黄秦安,邹慧超. 数学的人文精神及其数学教育价值[J]. 数学教育学报, 2006，15(04): 6-10.

[9] Cajori F. *Mathematics in Liberal Education* [M]. Boston: The Christopher Publishing House, 1928.

[10] Johnson, W. W. *An elementary Treatise on Analytical Geometry*[M]. Philadelphia: J. B. Lippincott & Co., 1869: 3-4

[11] Borger, R. L. *Analytic Geometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1928: ⅴ-ⅵ.

[12] Cell, J. W. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1951: ⅲ-ⅷ.

[13] Haaser, N. B. *A Course in Mathematical Analysis*[M]. Boston: Ginn & Company, 1891: ⅴ-ⅵ.

[14] Murnaghan, F. D. *Analytic Geometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1946: iii-iv.

[15] Kells, L. M. *Analytic Geometry* [M]. New York: Prentice-Hall, 1949: 150-152.

[16] Osgood, W. F. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1921: iv-vii.

[17] Holmes, C. T. *Calculus and Analytic Geometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1950: v-vi.

[18] Young, J. W., Morgan, F. M. *Elementary Mathematical Analysis* [M]. New York: The Macmillan Company, 1917: ii-x.

[19] Hardy, A. S. *Elements of Analytic Geometry* [M]. Boston: Ginn & Co., 1889: iii-iv.

[20] Gibson, G. A. *Elements of Analytical Geometry*[M]. London: Macmillan & Co, 1911: iv-ix

[21] Nowlan, F. S. *Analytic Geometry*[M]. New York: The McGraw-Hill Book Company, 1946: iv-vi.

[22] Nathan, D. S. *Analytic Geometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1947: v-vi.

[23] Candy, A. L. *The Elements of Plane and Solid Analytic Geometry* [M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1909: iii-v

[24] Smith, E. S., Salkover, M. & Justice, H. K. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1954: viii.

[25] Robinson, H. N. Conic Sections and Analytical Geometry[M]. New York: Ivison, Blakeman, 1860: v-viii.

[26] Wentworth, G. A. *Elements of Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1890: ii-viii.

[27] Ford, W. B. *A Brief Course in Analytic Geometry* [M]. New York: H. Holt and Company, 1924: v-vi.

[28] Smith, P. F. & Gale, A. S. *New Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1912: v-viii.

[29] Smyth, W. *Elements of Analytical Geometry* [M]. Boston: Sanborn, Carter and Bazin, 1855: 5-8.

[30] Howison, G. H. *A Treatise on Analytic Geometry* [M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Co., 1869: iii-v.

[31] Purcell, E. J. *Analytic Geometry* [M]. New York: Appleton Century Crofts, 1958: vi.

[32] Newcomb, S. *Elements of Analytic Geometry* [M]. New York: H. Holt & Company, 1884: iii.

[33] Coffin, J. H. *Elements of Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Collins & Brother, 1859: ⅴ-ⅵ.

[34] Ashton, C. H. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1901: 91-93.

[35] Hardy, J. J. *Elements of Analytic Geometry*[M]. Massachusetts: Chemical Publishing Company, 1897: ⅴ-ⅵ.

[36] Loomis, E. *Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculus* [M]. New York: Harper & Brothers, 1851: ⅳ-ⅶ.

[37] Church, A. E. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: G. P. Putnam, 1851: ⅴ-ⅵ.

[38] Agnew, R. P. *Calculus: Analytic Geometry and Calculus* [M]. New York: McGraw-Hill, 1962: iii-ⅷ.

[39] 曹一鸣，辛兴云. 从数学本质解读数学课程改革[J]. 数学教育学报, 2005, 14(01): 42-45.

[40] Smith, P. F. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1904: 174-182.

[41] Whitlock, G. C. *Elements of Geometry, Theoretical and Practical* [M]. New York: Pratt, Woodford, 1848: 121-122.

[42] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry* [M]. New York: Wiley & Long, 1836: 160-178.

[43] Osgood, W. F. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1921: 124-128.

[44] Agnew, R. P. *Calculus: Analytic Geometry and Calculus, with Vectors* [M]. New York: McGraw-Hill, 1962: 379-381.

[45] Taylor, A. E. *Calculus, with Analytic Geometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1959: 146-151.

[46] Kaltenborn, H. S. *Meaningful Mathematics* [M]. New York: Prentice-Hall, 1951: 293-300.

[47] A. A. 斯托利亚尔. 数学教育学 [M]. 北京:人民教育出版社, 1985: 224.

美英早期代数教科书中的等差数列知识

韩粟

(华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

荷兰著名数学家弗莱登塔尔（H. Freudenthal，1905-1990）曾说：没有数的序列，就没有数学。数列的历史源远流长，其中，等差数列是数学史上出现得最早的数列之一，古埃及纸草书中记载的粮食分配问题、古巴比伦泥版书上的兄弟分银问题、中国古代典籍《九章算术》中的二马相遇问题等等，都涉及等差数列[1]。由于等差数列与人类社会生产生活息息相关，所以原本侧重各异、缺乏联系的中西方古代数学不约而同地聚焦了等差数列的研究[2]。

我国高中数学课程中，等差数列有着成熟的知识体系，现行各版本教科书在该主题上所呈现的内容区别不大，许多教师也倾向于使用固定的模式进行教学。但对于学生而言，他们是第一次学习，在学习新知时会产生种种疑问，比如为何要命名这种数列为等差数列？它的定义是否唯一？公式推导是否可以另辟蹊径？对于上述问题，教材并没有给出确切的答案，解答仍然藏在广袤的历史中等待我们寻找，以期为中学课堂教学添砖加瓦。

有鉴于此，我们对美英早期代数教科书进行考察，试图回答以下问题：等差数列是如何引入和定义的？通项与求和公式是如何推导的？对今日教学有何启示？

2 研究对象

本文选取 1800-1959 年间出版的 126 种美英代数教科书为研究对象，其中，117 种出版于美国，9 种出版于英国。对于同一作者且内容无明显差异的教科书，视为同一种，并从中选取出版最早的版本。以 20 年为时间单位，这些教科书的时间分布情况见图 1。

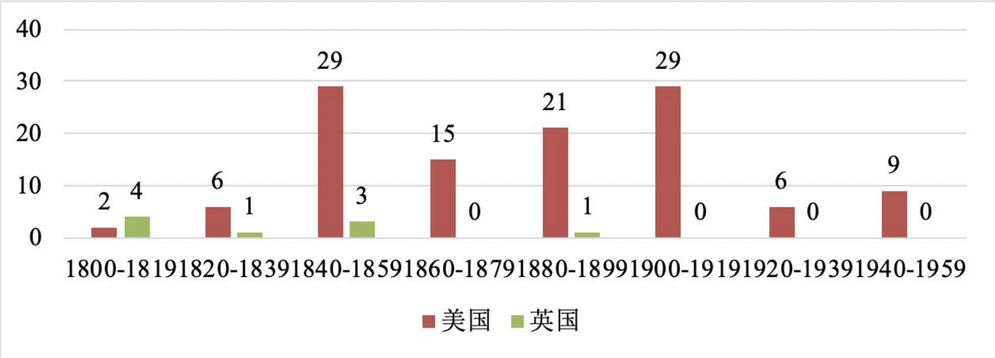


图 1 126 种美英早期代数教科书的出版时间分布

本文对书中等差数列的引入、定义、通项及求和等相关知识进行考察。

3 等差数列的引入方式

3.1 算术比例

126 种教科书中，15 种通过“算术比例”引入等差数列，它们均出版于 1880 年之前。Simpson(1710)在“比例”一章中，首先定义“算术比例”：有 4 个数，若前两数之差与后两数之差相等，则称它们构成“算术比例”；再定义“连续算术比例”：有一列数，若每两个相邻数的差都相等，则称它们构成“连续算术比例”。构成连续算术比例的这列数就是算术数列(arithmetical progression)[3]。为不致混淆，以下均称等差数列。

3.2 一般数列

自 1840 年起，有 50 种代数教科书陆续采取先定义一般数列，后定义特殊数列的方式来引入等差数列。如 Nowlan(1886)定义：数列(sequence)是按某种确定顺序出现的一列数，而形如

$$(a)1,4,7,10,\cdots$$
$$(b)1,\frac{1}{4},\frac{1}{7},\frac{1}{10},\cdots$$
$$(c)1,2,4,8,\cdots$$

的三类数列分别称为等差数列、调和数列与等比数列[4]。Young(1865)认为，当一组数由某种规律确定时，这组数即为数列，并指出：当一个数列的规律已知时，任何项都可以被直接确定，故应先研究具有简单规律的数列，如等差数列和等比数列[5]。

3.3 函数引入

在 1880-1959 年出版的教科书中，有 4 种另辟蹊径，通过一次函数引入等差数列。Smail(1888)在其编写的大学教材中，将等差数列作为“一元线性函数”这一章中的一节[6]。以 $y=2x+3$ 为例，计算 $x=0,1,2,3,\cdots$ 时 y 的值，得到一列数 $3,5,7,9,\cdots$，其中相邻两数之差都等于 2。一般地，对任意一元线性函数 $y=ax+b$ ，x 依次取 $0,1,2,3,\cdots$ 时，得到一系列函数值：

$$b,a+b,2a+b,3a+b,4a+b,\cdots$$

每相邻两函数值之差等于 a，这样的一组数即为等差数列。

3.4 小结

除了上述三种引入方式外，还有 57 种教科书直接引入等差数列。四种引入方式在各时间段的分布见图 2。从图中可见，算术比例引入多见于 19 世纪早期与中期，随后不再被采用，但它很好地解释了为什么我们熟知的等差数列在西方更多地被称为算术数列；函数引入出现于 19 世纪末期，这时期函数理论蓬勃发展，故教科书编写者开始用函数的观点来分析数列，但这种方式并未成为主流。总的看来，直接引入和数列引入占据主导地位。

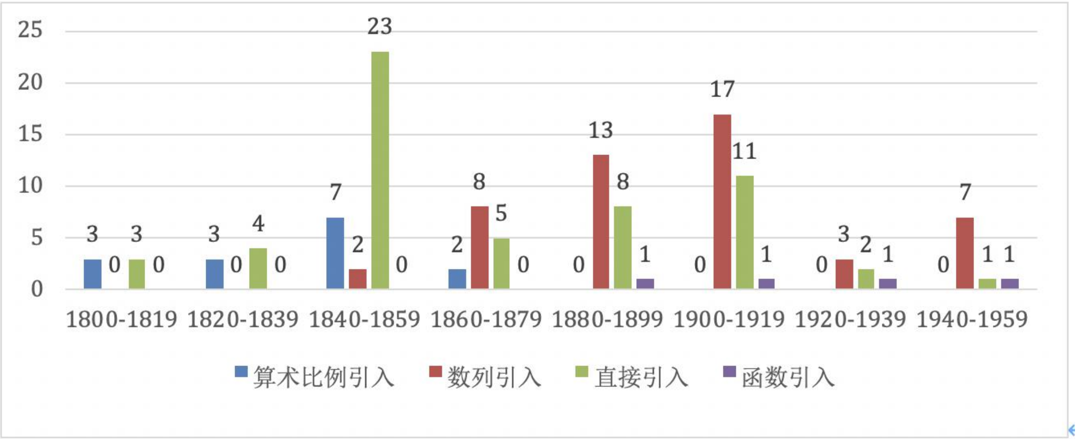


图 2 四种引入方式的时间分布

4 等差数列的定义

4.1 算术比例定义

虽然有 15 种教科书利用算术比例来引入等差数列，但只有 4 种用算术比例来定义等差

数列。Day(1773)认为，如 10,8,6,4,2,⋯这样依次减少一个相同量的一些数称为连续算术比例，即等差数列[7]。Sestini(1816)给出了类似的定义[8]。

4.2 公差定义

117 种教科书采用了公差定义法，不同教科书的表述互有不同，可分为增减式、加法式、减法式及相邻式四种。

49 种教科书采用“增减式”定义。Bridge(1767)提出：一系列量若通过相继增加相同量而递增，或通过相继减去相同量而减少，则称这些量构成等差数列[9]。Colburn(1793)给出了更简洁的定义：按照一个相同量增加或减少的一系列数是等差数列[10]。

48 种教科书采用“加法式”定义。Davies (1798)认为，若一个数列的每一项都是由前一项加上一个常量得到，则称该数列为等差数列，常量为数列的公差。在第二段中，作者对上述定义进行了补充：当公差是正数时，数列是递增的；当公差是负数时，数列是递减的[11]。

在“增减式”定义中，公差默认为非负数，等差数列的单调性取决于运算方式而不取决于公差正负，而“加法式”定义可以视作将“增减式”定义中公差的取值范围扩大至实数集，而运算方式减少至加法一种，故等差数列的单调性又重新归结于公差的正负与否。

3 种教科书采用“减法式”定义。其中一种表述为：若从任何项中减去下一项得到的差都相同，则称该数列为等差数列。另一种表述为：若从任何项中减去上一项得到的差都相同，则称该数列为等差数列。两种定义中的公差互为相反数，目前我国高中教材均采取后一种。

17 种教科书采用“相邻式”定义。Wentworth(1835)指出，任意两个相邻项之差与另两个相邻项之差相等的数列是等差数列[12]。采用此类定义的大多数教科书则将定义表述为：“等差数列是这样一个数列，其中任意两个相邻项的差是一个常数。”这类定义并未明确“差”究竟是前一项减去后一项的结果，还是后一项减去前一项的结果，故未被大多数教科书所采用。

表 1 给出了上述四种形式的现代符号表述。

表 1 公差定义法四种形式的现代符号表述

形式	数量	现代符号表述	公差 d 取值范围	项数 n 取值范围
增减式	49	$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + d \\ a_n = a_{n-1} - d \end{cases}$	$d \in [0,+\infty)$	$n \in N^* \setminus \{1\}$
加法式	48	$a_n = a_{n-1} + d$	$d \in R$	$n \in N^* \setminus \{1\}$
减法式	3	（1） $a_n - a_{n+1} = d$ （2） $a_{n+1} - a_n = d$	$d \in R$	$n \in N^*$
相邻式	17	$a_{n+1} - a_n = d$ （或 $a_n - a_{n+1} = d$ ）	$d \in R$	$n \in N^*$

4.3 函数定义

Dupuis (1836)别出心裁地用函数来定义等差数列。他首先给出了首项、公差及项数的符号表示，分别为 a 、 d 以及 n 。然后设 f_n 是项数 n 的一个函数，则 f_n 作为对应法则，给出了某个数列的第 n 项，所以只要知道 f_n 的表达式，就知道了整个数列。最后他提出：若一个数列的第 n 项 f_n 形如 $a+(n-1)d$ ，则该数列为等差数列[13]。

这种方法将数列视为定义域是正整数集的函数，并将数列用函数的解析法表示出来，与现行初中教材中一次函数的定义类似。

5 等差数列的通项公式及推导

5.1 通项公式

部分教科书将等差数列通项公式表示为

$$l = a + (n-1)d \tag{1}$$

除了首末项的写法外，与今日教科书中的公式一致。

部分教科书根据定义，将通项公式表示为

$$l = a \pm (n-1)d \tag{2}$$

如用“增减式”定义时，公式(2)中的公差 $d \geq 0$，当等差数列递增时，通项公式为(1)当等差数列递减时，通项公式为

$$l = a - (n-1)d \tag{3}$$

除此之外，少数教科书对公式(2)提出了不同的解释：公差为 $\pm d$，其中 $d \geq 0$，当公差为 d 时，通项公式为(2)；当公差为 $-d$ 时，通项公式为(3)。公式(2)在 19 世纪及 20 世纪初期的教科书中出现频率较高，但随着等差数列及公差定义的逐渐统一，到 20 世纪中期，等差数列的通项公式基本统一为(1)。

5.2 推导方法

5.2.1 定义法

17 种教科书选择直接由定义得通项公式：由于等差数列的每一项都是由前一项加上公差 d 得到的，所以每一项中 d 的系数总是要比所在项的序数少 1，所以第 n 项为 $a+(n-1)d$。选择定义法的教科书中不约而同地含有“显而易见”、“轻而易举”、“马上看出”等字眼，猜测其原因有二：一是早期代数教科书编写者认为等差数列的通项显而易见，无需归纳，更不需严格证明，二是他们认为研究等差数列的重点是求和而不是末项，所以甚至不需要给出其符号表示。

5.2.2 不完全归纳法

105 种教科书采用不完全归纳法推导等差数列的通项公式。在采取公差定义法的教科书中，以“加法式”为例：如 Wilson(1851)设等差数列的首项为 a，公差为 d，则第 2 项为 $a+d$，第 3 项为 $(a+d)+d$，即 $a+2d$，同理第 4 项为 $a+3d$，不难发现第 1-4 项中 d 的系数比这一项在数列中的序数少 1，归纳得等差数列第 n 项中 d 的系数应为 $n-1$，则第 n 项为 $a+(n-1)d$，即为等差数列的通项公式(1)[14]。若教科书采用“增减式”、“减法式”或“相邻式”，那么推导通项的方法或如出一辙，或先由上述过程得到(1)，然后补充第 2、3、4 项分别为 $a-d$、$a-2d$、$a-3d$ 的情况，最后不完全归纳得另一通项公式(3)。

5.2.3 函数法

Wilczynski(1876)在函数定义的基础上提出：既然任意线性函数 $mx+b$，当 x 依次取

$0,1,2,3,\cdots$时，函数值

$$b, m+b, 2m+b, 3m+b,\cdots \tag{4}$$

按顺序构成等差数列；反过来，对于任何等差数列，都可能存在一个线性函数$mx+b$，当x按顺序取$0,1,2,3,\cdots$时，此时函数值与等差数列的对应项相等。基于此，可以用等差数列的首项a和公差d分别替代(4)中的b和m，则(4)表示为

$$a, a+d, a+2d, a+3d... \tag{5}$$

显然，第i项即为$a+(i-1)d$。所以若项数为n，则第n项为$a+(n-1)d$，即为等差数列的通项公式[15]。

5.2.4 数学归纳法

19 世纪中期，归纳法还停留在不完全归纳法的应用阶段，直到 19 世纪末期才出现数学归纳法的名称和应用，而真正建立起数学归纳法的逻辑基础则要到 20 世纪中期[16]。Skinner(1863)在其编写的《大学代数》一书中将数学归纳法应用于证明等差数列通项公式。他通过观察一些具体等差数列，猜想等差数列$\{a_n\}$的第n项

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{6}$$

假设当$n=k$时猜想成立，即

$$a_k = a_1 + (k-1)d \tag{7}$$

根据等差数列的规律及(6)有

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + (k+1-1)d \tag{8}$$

(8)的最后一个等式与(7)的差别仅仅只是将 k 替换成 k+1。这说明，若公式(6)对$n=k$成立，则对$n=k+1$同样成立。所以，对任意的n，公式(6)均成立，证毕[17]。

由于数学归纳法的逻辑基础直到皮亚杰公理提出后才建立起来，所以早期代数教科书中尽管存在着数学归纳法在数列上的应用，但深究其本质却并不符合逻辑基础。对于等差数列的通项公式而言，在普遍采取不完全归纳法推导的大背景下，数学归纳法的尝试意味着归纳推理理论趋于完善，有效避免了不完全归纳法的或然性。

6 等差数列的求和公式及推导

6.1 求和公式

除了通项之外，所有教科书无一例外地讨论了求和问题。一部分在引入部分即指出：研究数列的目的就是为了研究数列的和。一部分教科书得到求和公式

$$S=\frac{(a+l)\times n}{2} \tag{9}$$

其中 a、l、n 为等差数列的首项、末项及项数，并指出：等差数列的前 n 项和等于首末项之和乘以项数的一半。

除(9)以外，以(1)为通项公式的教科书，或将(1)代入(12)，或直接由(1)推导，得到

$$S=\frac{n}{2}\times\left[2a+(n-1)d\right] \tag{10}$$

同理，以(2)为通项公式的教科书中有求和公式

$$S=\frac{n}{2}\times\left[2a\pm(n-1)d\right] \tag{11}$$

由此可见，通项公式的形式会对求和公式的形式产生直接的影响。

6.2 推导方法

6.2.1 首尾配对法

仅有 3 种教科书采用了古老的首尾配对法推导求和公式，其中 Sestini(1816)的方法如下：首先将任意等差数列的前 n 项表示为

$$a,a+d,a+2d,\cdots,a+(n-2)d,a+(n-1)d \tag{12}$$

观察(12)发现，第 2 项与倒数第 2 项的和，第 3 项与倒数第 3 项的和等等，都等于首末项之和 $2a+(n-1)d$。

若 n 为偶数，将 n 项配成 $\frac{n}{2}$ 对，每一对之和都等于 $2a+(n-1)d$，故得前 n 项和公式(11)。

若 n 为奇数，则(12)中除去中间项，其余 $n-1$ 项可配成 $\frac{n-1}{2}$ 对，每一对之和为 $2a+(n-1)d$，故 $n-1$ 项之和等于 $\frac{n-1}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$；中间项为第 $\frac{n+1}{2}$ 项，即 $a+\left(\frac{n-1}{2}\right)d$。因此，前 n 项之和为

$$\frac{n-1}{2}\left[2a+(n-1)d\right]+\left[a+\frac{1}{2}(n-1)d\right] \tag{13}$$

同样可得前 n 项和公式(11) [8]。

可见，(10)或(11)对 n 为偶数和奇数的情况都是适用的。由于公式推导过程中需要将与首末项等距的项配对相加，所以这种方法常被称为首尾配对法。

6.2.2 倒序相加法

122 种教科书采用了倒序相加法，但不同教科书所选已知量互有不同，可分为三类。

第一类已知量为首项 a、公差 d 和项数 n。Wood(1760)提出：等差数列的前 n 项求和式既可以写成

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+\left[a+(n-2)d\right]+\left[a+(n-1)d\right] \tag{14}$$

还可以写成

$$S=\left[a+(n-1)d\right]+\left[a+(n-2)d\right]+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \tag{15}$$

将(14)与(15)的对应项分别相加，得到

$$2S=n\times\left[a+(n-1)d\right] \tag{16}$$

再除以 2 即得求和公式(10)[18]。该方法是对首尾配对法的直接改进，避免对项数的奇偶性进行讨论。

第二类已知量为首项 a、公差 d、末项 l 及项数 n。Seaver(1838)认为，如果将等差数列倒序书写，即从 l 开始，则第二项就是 $l-d$，第三项是 $l-2d$，直到最后一项，即原来的首项 a 可表示为 $l-(n-1)d$，所以求和式可以写成

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+\left[l-(n-2)d\right]+\left[l-(n-1)d\right] \tag{17}$$

将(14)与(17)的对应项相加得

$$2S=n\times(a+l) \tag{18}$$

再除以 2 即得求和公式(9)[19]。这种方法实为将原等差数列表示为一个首项为 l，公差为 $-d$ 的等差数列，但不同的表示并不影响前 n 项和的值。此外，较第一种倒序法而言，这种方法更能直观地观察到对应项在相加时正负抵消，从而配对相等。

第三类已知量为等差数列的前 n 项。Lacroix(1765)将它们表示为 $a,b,c,\ldots,i,k,l$，则前 n 项和

$$S=a+b+c+\cdots+i+k+l \tag{19}$$

倒序之后成为

$$S=l+k+i+\cdots+c+b+a \tag{20}$$

将(19)与(20)相加得

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\cdots+(i+c)+(k+b)+(l+a) \tag{21}$$

由等差数列的性质，由首项开始有

$$a+\delta=b,b+\delta=c,\cdots,i+\delta=k,k+\delta=l \tag{22}$$

由末项开始有

$$l-\delta=k,k-\delta=i,\cdots,c-\delta=b,b-\delta=a \tag{23}$$

将(22)与(23)的等式对应相加，得

$$a+l=b+k=c+i=\cdots \tag{24}$$

由(21)和(24)，易得等差数列的求和公式(9)[20]。这种方法利用等差数列的递推性质

$$a_{n+1}-a_n=d\left(n\in N^*\right) \tag{25}$$

进行双向递推，证明了倒序相加后对应项相加确为定值。

6.2.3 数学归纳法

Whyburn(1901)应用数学归纳法猜想并证明了等差数列的求和公式。记任意等差数列的前 n 项和为 S_n，则

$$\begin{aligned}
&S_1=a\\
&S_2=2a+d\\
&S_3=3a+(1+2)d=3a+\left(\frac{2\times 3}{2}\right)d\\
&S_4=4a+(1+2+3)d=4a+\left(\frac{3\times 4}{2}\right)d
\end{aligned} \tag{26}$$

(26)表明 S_n 可能具有如下形式

$$S_n = na + \frac{(n-1)n}{2}d \tag{27}$$

假设当 $n=k$ 时，(27)成立，即

$$S_k = ka + \frac{(k-1)k}{2}d \tag{28}$$

则当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}
&S_{k+1} = S_k + u_{k+1} \\
&= ka + \frac{(k-1)k}{2}d + a + kd \\
&= (k+1)a + \left[\frac{(k-1)k}{2} + k\right]d \\
&= (k+1)a + \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]d \\
&= (k+1)a + \frac{[(k+1)-1](k+1)}{2}d
\end{aligned} \tag{29}$$

由(26)、(28)及(29)，可得(27)对任意正整数 n 均成立，所以(27)是等差数列的求和公式[21]。

运用数学归纳法的前提是能通过归纳猜想得到公式的形式。重新观察(26)，猜想的关键是 d 的系数能否表示为 n 的代数式。观察发现 S_1,S_2,S_3,S_4 中 d 的系数正好为 $0,1,1+2,1+2+3$，恰好是自然数 $0,1,2,3,\cdots$ 对应前 $1,2,3,4$ 项的和，显然自然数构成一个首项为 0，公差为 1 的特殊等差数列。所以，Whyburn 通过数学归纳法将一般等差数列的求和归结为特殊等差数列的求和，这种方法对学生的观察能力提出了较高的要求。

7 结语

由以上分析可见，在等差数列的引入上，美英早期代数教科书与今日教科书不尽相同，早期教科书或直接引入等差数列，或以函数观点将其作为特殊的一次函数，还有部分教科书采用了算术比例的引入方式，揭示了英文语境中等差数列之名的由来。在定义等差数列时，大部分教科书放弃了算术比例的原始定义而采取公差定义，凸显了等差数列的代数特征。等差数列的定义对通项公式的形式产生直接影响，随着定义趋于统一以及人们对实数集的认识逐渐清晰，通项公式由分为两类至最终统一，且编写者普遍采用不完全归纳法推导通项公式。如今常用的推导等差数列求和公式的倒序相加法，同样也是早期教科书中的主流方法，但参

与推导的已知量以及倒序形式与今天略有区别。在数学归纳法登上历史舞台后，一些教材编写者开始尝试用数学归纳法证明通项公式与求和公式。

等差数列是我国中学数学的传统教学内容，但不能因为其传统便使得教学日益固化。美英早期代数教科书中有关等差数列引入、定义、通项及求和的内容经过筛选、分类与整理，可以很好地作为课堂教学的素材。比如，教师可以让学生在研究具体数列的基础上，自己总结等差数列的定义，并与公差定义法的四种形式进行对应，再比对其与教材中等差数列定义的异同，思考为何我国现行教科书最后选择了美英早期教科书中并不常见的减法式，从而构建知识之谐。现行教材中推导或证明等差数列通项公式的方法多为不完全归纳法及叠加法，教师还可以在课堂上引进数学归纳法，发展学生的逻辑推理素养。以倒序相加为等差数列求和的基本思想，引导学生采取不同的已知量构建倒序式并设法配对相消，而不局限于教材所呈现的单一形式，彰显方法之美。此外，还可以探索几何方法并应用数学归纳法加以证明，培养学生的直观想象素养，实现能力之助。教师可以带领学生探究为何等差数列又名算术数列，任何一个数学名词都有其来源，追溯算术数列的词源可以让学生思考简单的加减算术如何形成比例，由算术比例又如何形成等差数列，结合中国古代数学史知识，感受中西方数学文化的背景差异，展现文化之魅。学生还可以运用思维导图等信息技术，自主构建以等差数列为中心，以比例、函数及方程为分支的代数知识网络，体会探究之乐。在历史长河中，等差数列的知识并不是一成不变，而是随着数学知识体系的完善和社会生产实际的需要不断发展，在立德树人的教育目标引领下，教师教授给学生的不应只是传统的知识与技能，还应在课堂中使学生耳濡目染数学的人文价值和理性精神，这样才能潜移默化地达成德育之效。

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[2] 童晓群, 蒋亮. 对话“等差数列”[J]. 中学数学教学参考, 2015(19): 15-17.

[3] Simpson, T. *A Treatise of algebra*[M]. London: Printed by L. Hanford, for F. Wingrave, 1800, 69-70.

[4] Nowlan, F. Stanley. *College algebra*[M]. New York: McGraw-Hill Book Co, 1947: 140-141.

[5] Young, J. W. A., Jackson, L. L. *A second course in elementary algebra*[M]. New York: D.

Appleton and company, 1910: 170-171.

[6] Smail, L. Leroy. *College algebra*[M]. New York: McGraw-Hill book company, 1931: 381-383.

[7] Day, J. *An introduction to algebra*[M]. New Haven: Howe & Deforest, 1814: 211-212.

[8] Sestini, B. *A treatise on algebra*[M]. Baltimore: J. Murphy & co, 1855: 173-178.

[9] Bridge, B. *A treatise on the elements of algebra*[M]. Philadelphia: Key, Mielke, & Biddle, 1832: 119-120.

[10] Colburn, W. *An introduction to algebra upon the inductive method of instruction*[M]. Boston: Cummings, Hilliard, and company, 1825: 303-304.

[11] Davies, C., Bourdon, M. *Elements of algebra*[M]. New York: Wiley & Long, 1835: 249-250.

[12] Wentworth, G. A. *Elements of algebra*[M]. Boston: Ginn & Heath, 1881: 299-301.

[13] Dupuis, N. F. *The principles of elementary algebra*[M]. New York: The Macmillan company, 1900: 381-383.

[14] Wilson, J. W. *An elementary algebra*[M]. Philadelphia: Eldredge & brother, 1872: 192-193.

[15] Wilczynski, E. J., Slaught, H. E. *College algebra: with applications*[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1916: 80-81.

[16] 方倩，汪晓勤. 20 世纪中叶以前西方代数教科书中的数学归纳法[J]. 数学教学, 2017(11): 1-4+31.

[17] Skinner, E. Brown. *College algebra*[M]. New York: The Macmillan Co., 1917: 185-186.

[18] Wood, J. *The elements of algebra: designed for the use of students in the university.6ed*[M]. Cambridge: J. Smith, 1815: 109-110.

[19] Seaver, E. P., Walton, G. A. *The Franklin elementary algebra*[M]. Philadelphia: J.H. Butler, 1882: 222.

[20] Lacroi, S. F., Farrar, J. *Elements of algebra*[M]. Cambridge, N.E.University Press, 1818: 235-236.

[21] Whyburn, W. M., Daus, P. H. *Algebra for college students*[M]. New York: Prentice-hall, 1955: 220-221.

美英早期代数教科书中的方程定义

杨孝曼

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

方程是代数学的基石，是用数学符号刻画现实世界的重要工具。在古代，虽然还没有形成方程的概念，但由于实践需要，人们已经会用方程解决实际问题了。“方程”这个名词最早见于汉代数学典籍《九章算术》，指的是多元线性方程组。刘徽注称：“程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程。”[1] “如物数程之”的意思是需要求几个未知数就要列几个方程。晚晴数学家李善兰和英国传教士伟烈亚力在翻译德摩根的《代数学》时，首次将“equation”译为“方程”。至此，方程这中国古代数学术语被注入了新的内涵而沿用至今。

人教版和苏教版五年级数学教科书均将“方程”定义为“含有未知数的等式”，并在例题和课后习题中设有方程的判断题。该定义体现了教材重形式轻本质的特点。据了解，在实际教学过程中，一些教师甚至会用“含有字母的等式”来代替方程的定义，这种过度解读非常不利于学生对方程本质的理解。同时，“含有未知数的等式”这个定义也带来了很多引起争议的问题，例如很多老师和学生都存在这样的疑问：$x=1$是方程吗？$x+1=x+2$是方程吗？在英语里用“equation”表示方程，而“equation”原来就是等式的意思，那么前人在翻译这个单词时，为什么不直接用等式？方程与等式的联系与区别到底在哪里？

若要回答以上问题，就必须真正理解方程的本质。著名数学史家 M.克莱因（M. Kline, 1908-1992）曾说：“课本上斟字酌句的叙述，未能表现出创造过程中的斗争，挫折，以及建立一个可观结构之前，数学家经历的艰苦漫长的道路。”[2]数学史是展示人类认识数学这一连续过程的最好媒介，它不仅追溯数学内容、思想和方法的演变、发展过程，并且探索影响这种过程的各种因素[3]。不同时期数学教科书中的方程定义及其演变，展示了人类对方程概念的认识过程，为今日教科书的编写和方程的课堂教学带来很多启示。因此，本文考察1820-1959 年之间出版的 120 种美国和英国代数教科书中有关方程定义的内容，试图回答以

下问题：美英早期代数教科书中是如何定义方程的？定义是如何演变的？方程定义的历史对我们今天认识方程有何启示？对于今日方程的教学又有何启示？

2 研究方法

本文从有关数据库中选取 120 种美英早期代数教科书为研究对象。若以 20 年为一个时间段，则这些教科书的时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

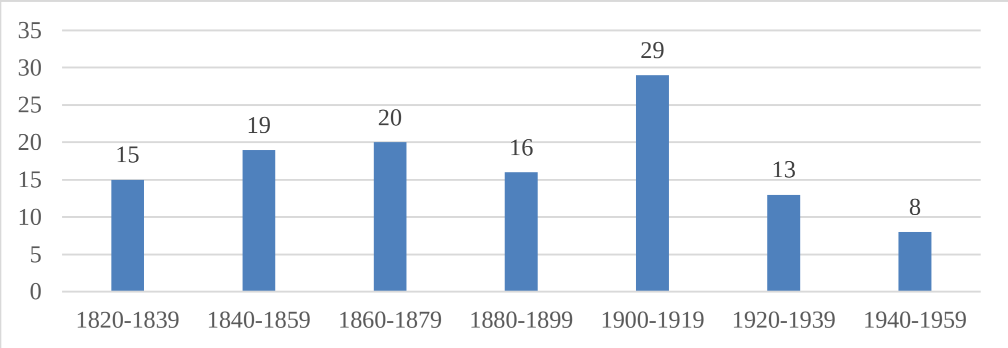


图 1 120 种教科书的时间分布

首先，按照年份查找并摘录出各教科书中的方程定义以及相关内容；接着，参考相关知识和文献[4]，以关键词为参照，确定分类框架，根据参考文献[4]中所提，目前对数学概念的定义方式并没有形成共识，常见的提法有：属加种差定义法，发生定义法，形式定义法等。基于对方程定义表述方式的不同，本文首先建立初步的分类框架，运用该框架对早期教科书中的方程定义进行统计，再根据统计情况对分类框架进行适当修正，最终形成正式的分类框架，见表 1；最后，根据分类框架，对 120 种教科书中的方程定义进行分类与统计。

表 1 方程定义的分类框架

类别	内涵
“属加种差”定义	运用数学概念的邻近的属和种差所组成的定义
“描述性”定义	运用范例或描述的方式对数学概念进行简洁、形象、定性的陈述
“函数”定义	从函数的角度来定义数学概念

3 早期代数教科书中的方程定义

方程作为一个数学概念，它是一种数学逻辑构造，是抽象逻辑的产物。本节根据分类框架对研究对象进行分类，最终 “属加种差”定义、“描述性”定义和“函数”定义依次占比 8.27%、90.08%和 1.65%，其中“描述性”定义占比最大。

3.1 “属加种差” 定义

“属加种差”定义法可以简单地表述为：被定义项=种差+邻近的属。在 120 种教科书中共有 10 种采用了此类定义方法，主要集中在 19 世纪末到 20 世纪初。表 2 给出了“属加种差”定义的典型例子。

表 2 “属加种差”定义的典型例子

特点	定义的叙述	教科书
两个代数表达式+等式	方程是两个代数表达式的等式。[5]	Shoup（1874）
只对某些值成立+等式	方程是一个等式，它只对其未知量的某些值或值的集合成立。[6]	Taylor (1889)
等式中除去恒等式	不是恒等式的等式是方程。[7]	Taylor (1900)

3.2 “描述性” 定义

“描述性”定义重在对方程形式的描述，共有 108 种采用此类定义，占据压倒性多数。根据定义叙述的中心词，“描述性”定义又分为“表达式”定义、“命题式”定义、“陈述法”定义、“比较法”定义、“典例法”定义和“组成法”定义 6 种。图 2 给出了 6 种方法的分布情况。

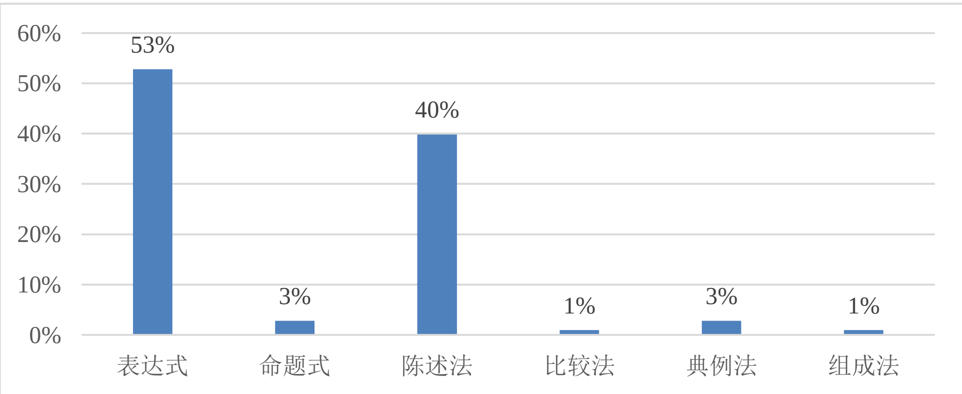


图 2 各类描述性定义的分布情况

3.2.1“表达式”定义

将方程定义为等号连接的一种表达式的方法称为“表达式”定义，共有 57 种教科书采用此类定义方法。表 3 给出了“表达式”定义的典型例子。

表 3 “表达式”定义的典型例子

特点	定义的叙述	教科书
两个量的表达式	两个量之间相等的表达式称为方程。[8]	Colburn（1825）
代数表达式	方程是一个代数表达式，由两个相等的量组成，它们之间用等号连接。[9]	Lawren（1853）
命题表达式	方程是一个代数性质的命题表达式，即一组量与另一组量之间的相等，或同一个量的不同表达式之间的相等。[10]	Day（1844）

3.2.2“命题式”定义

中心词是“命题”的定义方式称为“命题式”定义，这种定义将方程看作一种命题。仅有 3 种采用“命题式”定义的方法。表 4 给出了“命题式”定义的典型例子。

表 4 “命题式”定义的典型例子

特点	定义的描述	教科书
已知量和未知量+命题	方程是由已知量和未知量组成的命题，用等式符号连接在一起。[11]	Bayley（1830）
代数表示+命题	方程是一个用代数表示的两个量相等的命题。[12]	Loomis（1862）

3.2.3“陈述法”定义

将方程定义为一种“阐述”、“描述”或“陈述”等的定义方式称为“陈述法”定义。共有 43 种教科书采用这种定义方式，在“描述性”定义方式中占比仅次于“表达式”定义。表 5 给出了“命题式”定义的典型例子。

表 5 “陈述法”定义的典型例子

特点	定义的叙述	教科书
阐述	方程是某些特定问题的代数阐述。[13]	Docharty（1852）
描述	量相等的描述称为方程。[14]	Sherwin（1841）
陈述	方程是两个表达式相等的陈述。[15]	Fisher（1921）

3.2.4“比较法”定义

将方程看作是两个量之间比较的定义方式称为“比较法”定义。Williams（1840）将方程定义为：“当两个相等的量用符号‘=’连接时，这种比较称为方程”[16]。虽然仅有 1 种教科书采用此种定义，但是该定义值得关注，因为它将等号两边看作是地位平等的两个量，这有助于打破学生认为“=”仅代表运算结果的固有思维，从而更好地理解方程两边的等量关系。

3.2.5“典例法”定义

由典型的例子出发给出的定义称为“典例法”定义。共有 3 种教科书采用这种定义方式。如 Hind（1837）将方程定义为：“像 $ax+b=cx+d$ 这样，符号“=”两边的量彼此相等，整体称为等式或方程。”[17] Lilley（1892）将方程定义为：“形如 $3x+5=5x-7$ 的等式叫做方程。”[18]这种方式的特点就是从形式上说清楚“什么是”，但是忽略方程这一概念的本质。

3.2.6“组成法”定义

从方程的组成进行定义的方式称为“组成法”定义，在 120 种教科书中，仅有 Ficklin（1874）采用这种定义方式，具体表述为：“一个方程由两个用等号连接的表达式组成。”[19]

图 3 给出了上述 6 类描述性定义的时间分布情况。

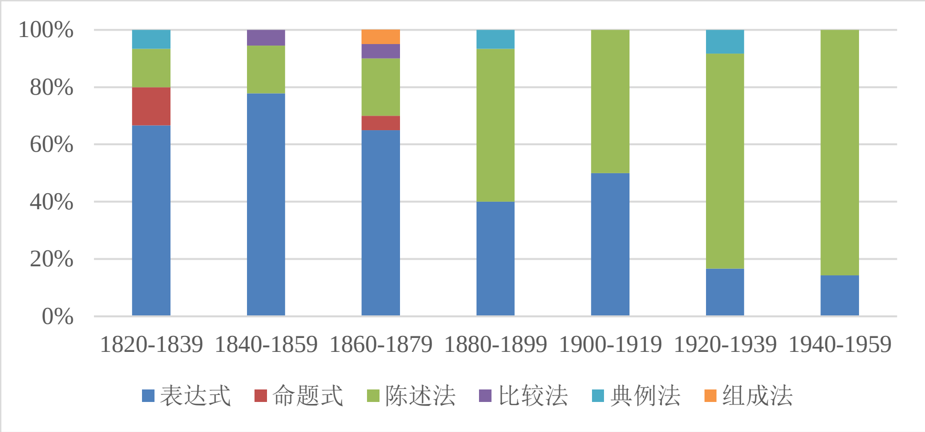


图 3 6 种定义方式的时间分布

从图 3 可以看出，19 世纪 80 年代之前“表达式”定义占有绝对优势，19 世纪末占比开始减少。反之，“陈述法”的占比逐渐增加，到 20 世纪发展成为“主流”定义方式。而“命题式”、“比较法”、“典例法”和“组成法”都是在少数几个时间段昙花一现。

3.3 “函数”定义

从函数的角度来定义方程的方式称为“函数”定义。有 2 种教科书采用这种定义方式，分别是 Urner（1937）将方程定义为：“要求 x 的一个值，使函数 $f(x)$和 $g(x)$具有相同的值。则 $f(x)=g(x)$称为方程。”[20] Whyburn (1955)将方程的定义叙述为：“如果将含有一个或多个未知数的两个函数设为相等，并且对某些数而不是对所有值都成立，在这种情况下，它被称为条件方程。”[21]这种定义方式虽然在形式上将方程等号两边看作两个函数，但是这里的 x 不是函数中的变量，而表示未知数。20 世纪初，德国数学家 F·克莱因（F. Klein，1849−1925）提出以函数概念统一数学教育内容的思想[22]，因此，“函数”定义法的出现受到了此种思想的极大影响。

4 方程与等式

在英语中“equation”这个单词本身就是等式的意思，数学里公式、函数、纯数字算式等都是等式的形式。120 种教科书在定义方程时，有的将方程与等式进行了区分，有的则不加区分。具体主要分为以下三类。

第一类：未区分方程和等式

19 世纪早期的教科书倾向于不区分方程和等式，部分教科书里明确表示纯数字的等式

也是方程。表 6 给出了第一类定义的典型例子。

表 6 第一类定义的典型例子

特点	定 义	教科书
未提到 equality	如果一个量等于另一个量，或等于零，并且这个等式用代数形式表示，它就构成了一个方程。[23]	Wood (1815)
明确不区分 equality 和 equation	像 $ax-b=cx+d$ 这样，符号“=”两边的量彼此相等，整体称为等式或方程。[24]	Hind (1837)
明确说明纯数字的等式也是方程	方程是一个代数性质的命题表达式，即一组量与另一组量之间的相等，或同一个量的不同表达式之间的相等。因此，$x+a=b+c$；$5+8=17-4$ 是方程。[25]	Day (1844)

第二类：没有明确区分等式和方程，但明确说明方程含有未知数

第二类定义虽然没有明确区分方程和等式，但是提到“方程通常含有未知数”。这类定义在 19 世纪初占比最大，之后逐渐减少。表 7 给出了第二类定义的典型例子。

表 7 第二类定义的典型例子

特点	定义	教科书
方程是从未知到已知的“桥梁”	用等号连接的两个相等量的表达式叫做方程。通过方程我们可以从未知到已知。[26]	Mudie (1836)
方程含有已知量和未知量两部分	方程通常由已知的某些量和未知量组成。[27]	Loomis (1862)
通过两个关于 x 的函数相等来定义方程	要求 x 的一个值，使函数 $f(x)$和 $g(x)$具有相同的值。则 $f(x)=g(x)$ 就称为方程。[28]	Urner (1937)

第三类：区分恒等式和方程

第三类定义突出方程包含未知数的特点，将方程作为等式的一种情形独立出来，强调只有某些特定值代入方程所含未知数后等式才成立，而通过已知部分和等量关系确定这些特定值进而求出未知数的过程就叫做解方程。表 8 给出了第三类定义的典型例子。

表 8 第三类定义的典型例子

特点	定义	教科书
说明方程是特殊的等式	某些等式直到将特定的值代入表示未知量的一个或多个字母后才被验证，那些特定的值取决于等式中已知和给定的数字。为了区别这类等式，我们称之为方程。[29]	Bourdon (1831)
分别定义恒等式和方程	两个代数表达式可能是如此的相关，以致无论对所涉及的字母赋予什么值，它们都将彼此相等。则表示这两个代数式相等的表达式就叫做恒等式。但一般来说，两个表达式只有在一定条件下才是相等的，这两个不同的表达式相等的表述称为方程，有时称为条件方程[30]。	Elsee (1879)
明确说明纯数字等式不是方程	只由某些特定值代入代表未知量的字母才成立的等式称为方程。2+3=5 这个表达式是一个等式，但它不是一个方程。[31]	Beman (1900)

10 个“属加种差”定义中，3 个属于第一类，1 个属于第二类、6 个属于第三类。2 个“函数”定义分别属于第二类和第三类。108 个“描述性”定义中，39 个属于第一类，20 个属于第二类，49 个属于第三类。

若以 20 年为一个时间段，则上述三种方式的分布情况见图 4。

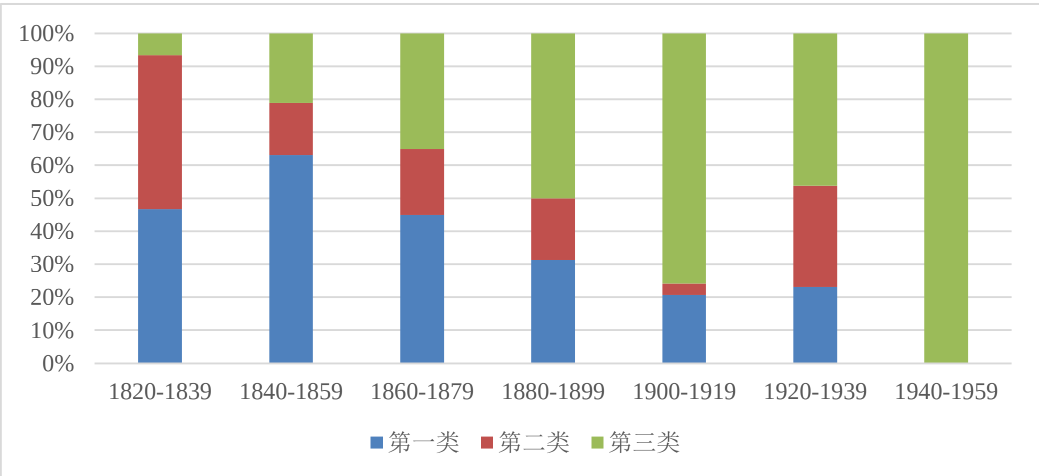


图 4 120 种教科书关于方程分类的时间分布

从图中可见，在 19 世纪初，第一类和第二类的占比较大，第三类占比最少。随后第一类在 1840-1859 年短暂增加后，开始逐渐减少；第二类的占比大体上也呈递减趋势，到 20

世纪中叶第一、第二类的占比都为零；第三类的占比逐渐增加，到 20 世纪中叶仅剩下这一种分类方式。早期的教科书并没有将方程和等式进行区分；随着时间的推移，教科书在定义方程时越来越倾向于强调“方程通常含有未知数”。进入 20 世纪，将方程与恒等式区分开的方式逐渐成为主流。

5 方程的意义

Bartoo & Osborne（1937）在“方程”章的开篇记载了这样一个故事，一个人在工作岗位上遇到了难题，在百思不得其解后，领导告诉他其实这就是他在学校里学习的代数[32]。由此可见，方程不只是书本上的一个公式，更是解决实际生活问题的数学工具。

方程的本质体现在它将一个问题的已知部分和未知部分通过等号连接起来，并由此求出对我们有价值的未知数，进而解决实际问题。波利亚（G. Pólya, 1887-1985）也曾说过：“方程的核心思想是借助一组等式关系求解未知数。”[33]

在所考察的 120 种教科书中，49 种在给出方程的定义时，明确提到方程在求实际问题和数学研究方面的意义。例如 Mudie（1836）将问题的已知部分和未知部分比作一条河的两岸，而得到它们之间的等量关系即建立方程，就是建造连通两岸的桥梁[26]。Feinstein & Murphy（1957）则言简意赅地指出：方程本质上是一个问题，而不是一个陈述[34]。

张奠宙先生也多次对教科书上关于方程的定义提出过质疑，并提议将方程定义为：“方程，是为了求未知数，在已知数和未知数之间建立起来的一组等式关系。”[35]先生给出的定义非常严谨且清晰地揭示了方程的本质与意义，不仅符合西方代数教材中强调的等式关系，而且将求未知数这个功能说清楚了，同时也让学生明白方程不是一个自然存在的公式，而是建立数学模型的过程。

6 结论与启示

在 120 种美、英早期代数教科书中，共出现了“属加种差”、“描述性”和“函数”3 类定义，其中“描述性”定义占比最大，又可具体分为“表达式”、“命题式”、“陈述法”、“比较法”、“典例法”和“组成法”6 个子类。19 世纪 80 年代之前，“表达式”定义占

有绝对优势，随后“陈述法”定义的占比逐渐增加，到 20 世纪发展成为主流定义方式。同时，方程的定义也经历了从模糊到清晰的过程，早期的教科书倾向于不区分方程和等式，到 19 世纪末，方程才逐步从等式中独立出来。从本质上来说，方程是一个问题，它的意义在于通过等量关系连接问题的已知和未知，进而求解未知数，方程的建立是一个数学建模的过程。

早期教科书中方程定义的多样性以及方程定义的演变过程可以为今日教学提供有益的参考。

首先，早期教科书给出的一些定义或观点有助于我们澄清有关方程定义的争议。如：无论按照何种定义，$x = 1$ 当然是方程；但按照 Feinstein & Murphy（1957）的观点“方程本质上是一个问题，而不是一个陈述”[34]以及 Smith (1925)的观点“我们可以把条件方程看作疑问句，它询问在什么条件下这个等式是成立的”[36]，$x = 1$ 是一个陈述——即未知数等于 1，而不是一个问题——x 等于多少时等式成立，因而可以说它不是真正的方程。至于 x+1=x+2，根据“比较法”定义，它是一个不等关系，并不属于方程。

其次，方程概念从不完善到完善的演进过程为今日 HPM 视角下的方程概念教学提供了参照。教师可以设计教学活动，让学生在课堂上用自己的语言给方程下定义，并进行古今对照，从而促进学生对方程概念的理解。教师可以引用早期教科书的精彩观点，如“方程是沟通已知与未知的桥梁”，让学生感悟数学对于人类认识世界的价值，彰显数学的文化之魅。教师还可以制作以“方程定义的历史”为主题的 HPM 微视频，让学生感悟数学概念的演进过程，树立动态的数学观，达成德育之效。

参考文献

[1] 郭书春. 九章算术新校[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014.

[2] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想[M]. 张理京, 张锦炎, 江泽涵, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 4.

[3] 张容溪. 以方程为例的数学史与数学教育整合探究[J]. 上海中学数学, 2009, (11): 3-6.

[4] 周曙. 基于定义方式的初中数学概念分类及其教学建议[J]. 中学数学教学参考，2019,

(11): 2-4.

[5] Shoup, F. A. *The Elements of Algebra* [M]. New York: E. J. Hale & Son, 1874: 75.

[6] Taylor, J. M. *A College Algebra* [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1889: 56.

[7] Taylor, J. M. *Elements of Algebra* [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1900: 12.

[8] Colburn, Warren. *An Introduction to Algebra* [M]. Boston: Cummings, Hilliard, and Co., 1825: 7.

[9] Lawrence, C. D. *Elements of Algebra*[M]. New York: Alden, Beardsley & Co., 1853: 61.

[10] Day, J., Thomson, J. B. *Elements of Algebra* [M]. New Haven: Durrie & Peck, 1844: 72.

[11] Bayley, J. *A Treatise on the Elements of Algebra* [M]. London: Whittaker, Treacher & Co., 1830: 1.

[12] Loomis, E. *The Elements of Algebra* [M]. New York: Harper, 1862: 108.

[13] Docharty, G. B. *The Institutes of Algebra* [M]. New York: Harper & Brothers, 1852: 75.

[14] Sherwin, T. *An Elementary Treatise on Algebra* [M]. Boston: Hall and Whiting, 1841: 4.

[15] Fisher, G. Egbert., Schwatt, I. J. *Complete Secondary Algebra* [M]. New York: Macmillan Co., 1921: 9.

[16] Williams, J. D. *An Elementary Treatise on Algebra* [M]. Boston: Hilliard, Gray, & Co., 1840: 4.

[17] Hind, J. *The Elements of Algebra* [M]. England: John William Parker, 1837: 17.

[18] Lilley, G. *The Elements of Algebra* [M]. Boston: Silver, Burdett, 1892: 104.

[19] Ficklin, J. *The Complete Algebra* [M]. New York: Ivison, Blakeman, Taylor & Co., 1874: 80.

[20] Urner, S. E., Orange, W. B. *Intermediate Algebra* [M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1937: 81.

[21] Whyburn, W. M., Daus, P. H. *Algebra for College Students* [M]. New York: Prentice-Hall, 1955: 29.

[22] 马忠林. 数学教育史 [M]. 南宁:广西教育出版社, 2001: 340-391.

[23] Wood, J. *The Elements of Algebra* [M]. Cambridge: J. Smith, 1815: 64.

[24] Hind, J. *The Elements of Algebra* [M]. Cambridge: John William Parker, 1837: 13.

[25] Day, J., Thomson, J. B. *Elements of Algebra* [M]. New Haven: Durrie & Peck, 1844: 72.

[26] Mudie, R. *Popular Mathematics*[M]. London: Orr and Smith, 1836: 90.

[27] Loomis, E. *The Elements of Algebra*[M]. New York: Harper, 1862: 108.

[28] Urner, S. E., Orange, W. B. *Intermediate Algebra*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1937: 81.

[29] Bourdon, M., Ross, E. C. *Elements of Algebra* [M]. New York: E. B. Clayton, 1831: 46.

[30] Elsee, C. *Elements of algebra*[M]. Cambridge: Deighton, Bell & Co., 1879: 24.

[31] Beman, W. W., Smith, D. E. *Elements of Algebra* [M]. Boston: Ginn & Company, 1900: 8.

[32] Bartoo, G. C., Osborne, J. O. *First-year Algebra*[M]. Washington: Webster publishing Company, 1937: 19.

[33] Pólya G. *Mathematical Discovery*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1965: 28.

[34] Feinstein, I. K., Murphy, K. H. *College Algebra* [M]. Ames: Littlefield, Adams & Co., 1957: 102.

[35] 邹佳晨，张奠宙，汪晓勤，李旭辉. 访谈录：究竟什么是方程?——析“含有字母的等式叫方程”之误[J]. 数学教学, 2015, (01): 1-4.

[36] Smith, D. E., Reeve, W. D. *Essentials of Algebra* [M]. Boston: Ginn and Company, 1925: 110.

教学实践

点到直线的距离：巧借历史方法，营造探究之乐*

蔡东山[1]，彭思维[2]，雷沛瑶[3]

（1.华东师范大学第二附属中学，上海, 201203；2.华东师范大学教师教育学院，上海, 200062；3.华东师范大学数学科学学院，上海，200241）

1 引言

点到直线距离公式是高中解析几何课程中最重要的也是最精彩的公式之一，它是解决点线距离、线线距离的基础，也是研究直线与圆的位置关系的重要工具，同时为后面学习圆锥曲线做准备。沪教版教材利用向量探究点到直线的距离公式。已有的教学设计，大部分基于人教版教材提供方法，结合初中已学的几何方法，由直线外一点作直线的垂线，计算垂足点的坐标，然后利用两点间的距离公式，推导出点到直线距离公式；[1]也有部分教学设计，借鉴沪教版提供的思想，利用向量的知识，推导出点到直线距离公式；[2]还有少部分教学设计采用面积法、三角法和函数最值法推导公式。[3]

已有研究表明，数学史具有多元的教育价值，数学史可以帮助学生理解数学，通过古今数学方法的对比，拓宽学生思维。[4]同时，数学史有助于培养学生的数学核心素养，将数学史融入教学之中，给学生提供了探究机会。[5-6]从而让学生回到知识的发生之时，体验像数学家一样探索的过程。除了上述教学设计中提到的方法外，历史上关于点到直线距离公式的推导方法还有原点距离法、投影法和设而不求法等。这些方法是让学生学会利用数形结合、转化、函数等数学方法解决数学问题的好素材，也可以让学生作为学习主体，体验数学学习中探究、发现和创造的乐趣。此次教学设计实施的班级属于学校的重点班级，学生拥有扎实的数学基础。鉴于此，在本节课的教学中，教师将历史上的多种推导方法融入其中，带领学生了解点到直线距离公式的历史，掌握点到直线距离公式的多种证明方法，体会不同方法的巧妙。因此，设定的教学目标如下：

（1）掌握点到直线距离公式及两平行线间的距离公式，并运用公式解决相关问题；

（2）通过探究点到直线距离公式的推导方法，培养合作探究和发散思维的能力；

---

* 本文是 HPM 工作室系列课例之一。

（3）通过展示多元的推导方法，感受用数形结合、转化等数学思想研究数学问题的优越性，发展逻辑推理、数学运算等素养。

2 历史材料及其运用

如图 1，点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{1}$$

历史上的推导方法各具特色。20 世纪中叶之前出版的 65 种解析几何教科书中含有 8 种不同的推导方法：交点法、原点距离法、投影法、三角法、三角形面积法、坐标平移法、向量法、最值法。[7]

出现的较早的方法是交点法，也是较多教科书采用的一种方法，Davies（1836）在《解析几何》一书中采用了这种方法，但计算繁杂。[8]为了简化计算，19 世纪英国数学家杨格（J. R. Young, 1799-1885）将 l 的方程化成关于 $(x-x_0)$ 和 $(y-y_0)$ 的方程，与 PQ 的方程联立得

$$\begin{cases} A(x-x_0)+B(y-y_0)=-(Ax_0+By_0+C) \\ B(x-x_0)-A(y-y_0)=0 \end{cases}$$

解出 $(x-x_0)$ 和 $(y-y_0)$，从而直接计算距离。[9]20 世纪，Gibson（1919）在杨格的基础上采用设而不求法，[10]进一步减少了计算量。三角法也备受教科书的青睐，19 世纪英国著名数学家托德亨特（I. Todhunter, 1820-1884）将点线距离化为直角三角形的边长。[11]此外，英国数学家约翰斯顿（W. J. Johnston, ?-1924）将点线距离转化成三角形的高，利用面积法求解。[12]到了 20 世纪，数学家们从函数的视角来看问题，美国数学家泰勒（A. E. Taylor, 1911-1999）把握距离概念的本质，在其《微积分与解析几何》中介绍了通过函数的最值来求点线距离。[13]

在早期教科书中，普遍采用原点距离法推导公式，利用的直线方程为法线式，目前在中学教科书中没有涉及，所以此方法并不能直接运用在课堂中，但它的推导方法却能给我们以启示，融入教学中。此外，投影法和坐标平移法也需要法线式方程的应用，也不适合融入课堂中。但授课班级的学生数学基础扎实，有过竞赛经历。因此，交点法、三角法、三角形面积法、向量法、最值法等方法对学生来说都是可以接受的，甚至还能进行创新，所以本节课将上述方法融入教学中，并根据学情进行相应的改编，例如最值法中可以使用柯西不等式简化计算。历史上各种方法出现的时间段及代表著作如表 1 所示，关于上述方法的介绍则在教学设计中根据学生的回答予以呈现。

表 1 历史上不同方法出现的时间段及代表文献

时间段	证明方法	教科书代表	教科书作者
1800-1839	交点法 原点距离法	《*Elements of Analytical Geometry*》 《*Elements of Analytic Geometry*》	Davies Hardy
1840-1869	三角法	《*A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry as Applied to the Straight Line and the Conic Sections*》	Todhunter
1870-1899	坐标平移法 三角形面积法	《*Analytic geometry*》 《*An Elementary Treatise on Analytical Geometry*》	Riggs Johnston
1900-1959	向量法 最值法	《*Analytic Geometry*》 《Calculus, with Analytic Geometry》	Murnaghan Taylor

3 教学设计与实施

前已提及，学生的数学基础扎实，平时也经常会开展探究性活动，因此将本节课定位为探究式教学。1998 年，美国哥伦比亚大学的西格尔（M.Siedel）教授提出了数学探究式教学的四个阶段：准备与聚焦、探索与发现、综合与交流。[14]参照上述四个阶段，进行教学设计与实施。

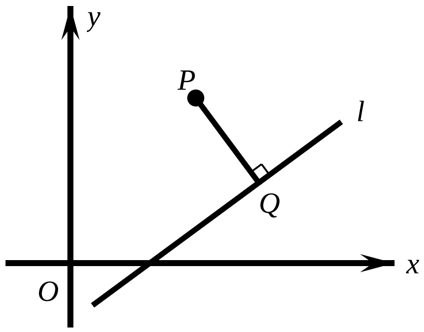


图 1 点到直线的距离

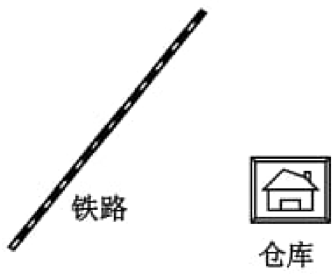


图 2 铁路与仓库

3.1 准备与聚焦

上课开始，教师给出一个实际问题：如图 2 在火车铁轨的附近，有一个大型仓库。现要修建一条公路与之接连起来。那么怎么设计能使公路最短？最短路程又是多少，该如何计

算呢？

生：可以作垂线。建立直角坐标系去计算。

师：非常好，我们可以建立直角坐标系，将几何问题代数化，这也是解析几何的本质。

3.2 探索与发现

建立直角坐标系后，实际问题可以抽象成一个数学问题：求点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离。结合所学的知识，学生首先独立思考，然后小组探究，最后每个小组由一名代表上黑板展示证明方法。

（1）探索与发现一

生 1 展示了“交点法”的步骤：如图 1，先算出垂足 $Q(x,y)$ 的坐标，然后利用直线上两点之间的弦长公式计算 $|PQ|$。

①直线 PQ 的方程为：$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$

②联立方程：$Ax+By+C=0$，可得 Q 点横坐标 $x=\dfrac{B^2x_0-AC-ABy_0}{A^2+B^2}$

③利用弦长公式可得

$$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x-x_0|=\sqrt{1+\frac{B^2}{A^2}}\,\frac{A|Ax_0+by_0+C|}{A^2+B^2}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

有一个小组则展示了另一种“交点法”，计算出点 Q 的横纵坐标，再利用两点间的距离公式求出距离。这也是人教版教材上的一种推导方法。

师：嗯，刚刚两位同学都采用了先算交点，再算距离的方法，我们把这类方法称为“交点法”。当交点计算出来后，利用两点间的距离公式计算会比利用弦长公式麻烦。但交点法总的来说计算量还是比较大的。那我们接下来看看下一个小组的方法。（学生交点法和面积法的板书见图 3）

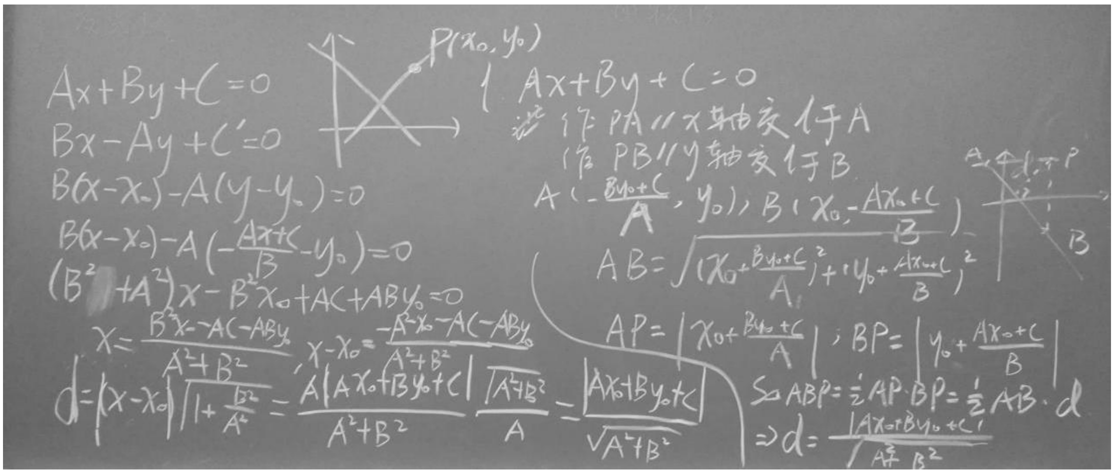


图 3 生 1 和生 2 给出的交点法和面积法

（2）探索与发现二

生 2 给出了“面积法”的思路，利用同一个三角形面积的不同计算方法，计算距离。

①如图 4，作 $PA//x$ 轴交 l 于 A，作 $PB//y$ 轴交 l 于 B，于是 $A(-\dfrac{By_0+C}{A},y_0)$、$B(x_0,-\dfrac{Ax_0+C}{B})$

②计算

$$|PA|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{A}\right|,|PB|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}\right|$$

③根据三角形面积的不同计算公式 $S_{\vartriangle APB}=\dfrac{1}{2}AP\cdot BP=\dfrac{1}{2}AB\cdot d$，可得

$$|PQ|=\frac{|PA||PB|}{|AB|}=\frac{|PA||PB|}{\sqrt{|PA|^2+|PB|^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

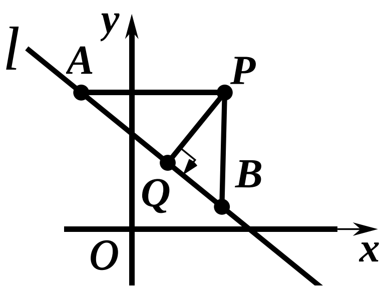


图 4 面积法（1）

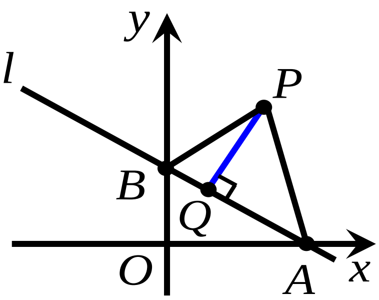


图 5 面积法（2）

师：非常好，你们小组是利用三角形的面积推导公式，我们把这种方法称为“面积法”，那除了可以构造直角三角形求面积，在我们以前学习行列式的过程中，还可以怎样求面积？

生（部分学生）：已知三点的坐标，利用行列式可以求这三点围成的三角形的面积。

师：很好，那我们就可以选择易于计算的点来构造三角形，比如选择直线 l 与 x 轴、y 轴的交点 A、B，用行列式求面积。

如图 5，设直线 l 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、B，易知 $A(-\frac{C}{A},0)$、$B(0,-\frac{C}{B})$、$|AB|=\left|\frac{C}{AB}\right|\sqrt{A^2+B^2}$，则

$$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_0 & y_0 & 1 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C}{B} & 1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|\frac{C(Ax_0+By_0+C)}{AB}\right|$$

也可得出 PQ 的长度。

（3）探索与发现三

学生 3 给出了“三角法”的步骤：将所求距离看成是直角三角形的斜边，利用三角比求解。

①在图 4 中，有 $B(x_0,-\frac{Ax_0+C}{B})$，$|PB|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}\right|$

②根据向量的数量积有

$$\cos\angle QPB=\left|\frac{\overrightarrow{PQ}\bullet\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PB}|}\right|=\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

③于是 $|PQ|=|PB|\cos\angle QPB=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

（4）探索与发现四

学生 4 也采用了“三角法”，但思路与学生 4 有所不同，借助平行线将所求的距离进行转化。

①过 $P(x_0,y_0)$ 点作直线 $l:Ax+By+C=0$ 的平行线 $l':Ax+By-Ax_0-By_0=0$。

②如图 6 所示，有 $PQ=MN$，$\angle PJO=\angle KMN=\theta$。易知 $\tan\theta=-\frac{A}{B}$，则 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$

③$\left|MN\right|=\left|KM\right|\cdot\cos\theta=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，即为$\left|PQ\right|$。

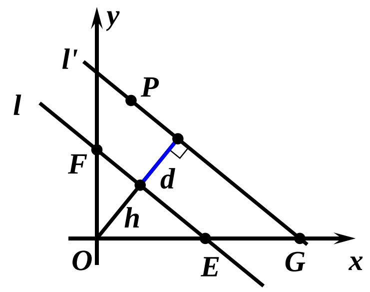


图 6 三角法

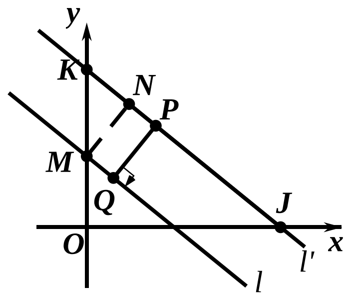


图 7 原点距离法

师：很好，构造直角三角形，借助三角比和向量的数量积推导公式，这种方法为“三角法”。还有一组也采用了“三角法”，但他们借助平行线，将距离进行转化，这样也减少了计算量。其实通过平行线，我们也可以利用相似三角形来求解。

如图 7, 考虑原点到直线的距离这一特殊情形。设直线l与x轴、y轴分别交于点E、F，

则$E\left(-\dfrac{C}{A},0\right)$、$F\left(0,-\dfrac{C}{B}\right)$，再由三角形面积恒等：$\dfrac{1}{2}EF\cdot h=\dfrac{1}{2}OE\cdot OF$，得

$h=\dfrac{\left|C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。由$l//l'$可知$\dfrac{d}{h}=\dfrac{EG}{OE}$，于是

$$d=\frac{EG}{OE}\cdot h=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\left|A\right|}\div\left|\frac{C}{A}\right|\cdot\frac{\left|C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

（5）探索与发现五

学生 5 则直接利用向量的数量积推导公式。过P点作$PQ\perp l$，根据向量的知识，有

$$|PQ|=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_2-x_0)+B(y_2-y_0)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_2+By_2-Ax_0-By_0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

即$\left|PQ\right|=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

师：这一小组则直接借助向量知识解决问题，我们可以把它称为“向量法”。非常好，方法越来越多了，我们再来看看其他小组的。（学生的三角法和向量法板书见图 8 和图 9）

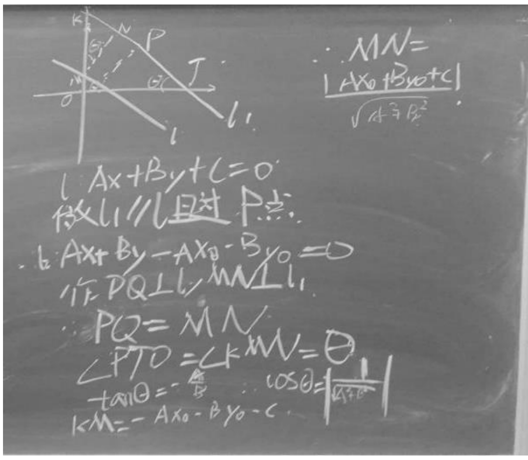


图 8 生 4 给出的三角法

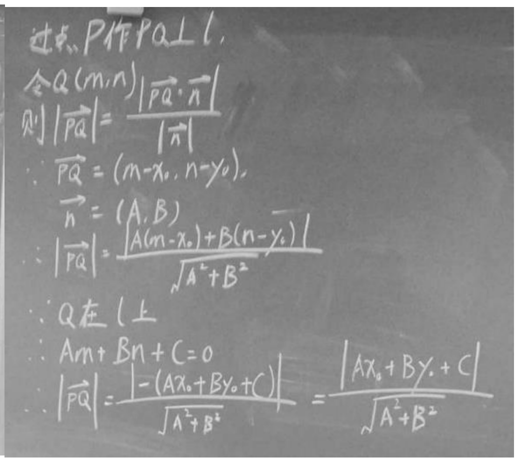


图 9 生 5 给出的向量法

（6）探索与发现六

学生 6 给出了从函数的视角推导公式的思路：点到直线的距离可以看成点$P\left(x_0,y_0\right)$与直线$l:Ax+By+C=0$上任意点 M 的最小值，即$\left|PM\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$。要求$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$的最小值，利用柯西不等式，有

$$(A^2+B^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\geq\left[A(x-x_0)+B(y-y_0)\right]^2=\left(Ax_0+By_0+C\right)^2$$

当且仅当$\dfrac{x-x_1}{A}=\dfrac{y-y_1}{B}$时等号成立。所以$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$。

（7）探索与发现七

学生 7 也是从函数的视角看问题，但求解$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$最小值的方法是化为二次函数，利用对称轴求得两点间距离的最小值。

师：很好，点线距离实际上是点到直线上任一点的最小值，所以我们可以从函数的角度来看问题，利用求最值的方法可以求得最小值，用柯西不等式也可以，这能减少计算量，非常巧妙。那还有没有同学有其他办法？（学生的板书见图 10）

师：刚刚我们一起探究了许多方法去推导点到直线的距离公式，那么点$P\left(x_0,y_0\right)$到直线$l:Ax+By+C=0$的距离公式为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

接下来我们就运用这个公式来解决一些问题。

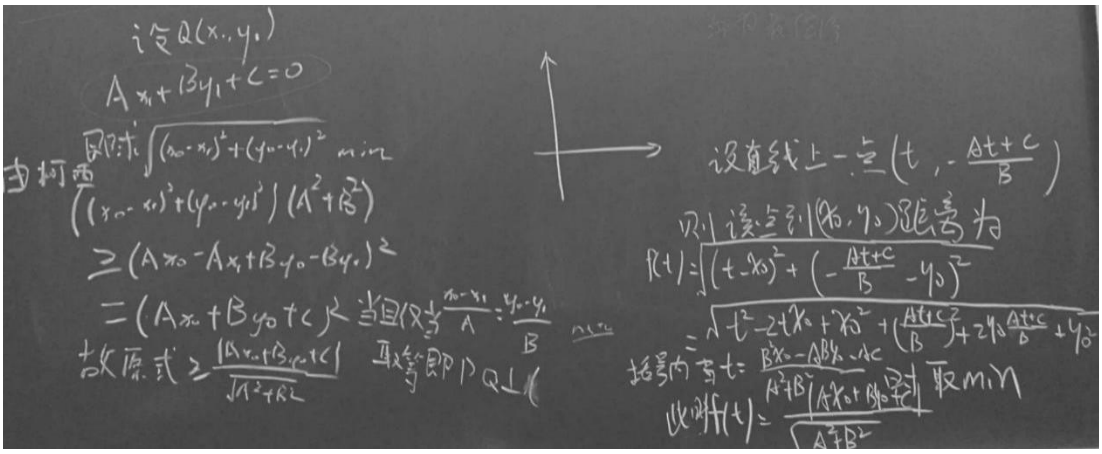


图 10 生 6 和生 7 从函数的视角推导公式

3.3 综合与交流

在本环节，教师引导学生利用推导的公式解决相关问题，并思考新的问题：两平行线间的距离公式是什么？如何推导这个公式？

例题 1 求点 $P(3,6)$ 到直线 $5x-12y+8=0$ 的距离。

解：将点 $P(3,6)$ 坐标代入公式得：$d=\dfrac{|15-72+8|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{49}{13}$。

例题 2 已知 x,y 满足 $5x-12y+8=0$，求 $\sqrt{x^2+y^2-6x-12y+45}$ 的最小值。

解：将表达式化成 $\sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}$，可以看成直线 $5x-12y+8=0$ 上一动点到 $(3,6)$ 距离的最小值，即 $(3,6)$ 到直线 $5x-12y+8=0$ 的距离，因此最小值为 $\dfrac{49}{13}$。

例题 3 求直线 $l_1: x+3y-4=0$ 和直线 $l_2: 2x+6y-9=0$ 的距离。

解：两直线为平行线，因此可将距离转化为直线 l_1 上一点到 l_2 的距离，$P(4,0)$ 为直线 l_1 上一点，利用公式可得两直线的距离为：$d=\dfrac{|2\times4-9|}{\sqrt{2^2+6^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{20}$。

探究： 两条平行线 $Ax+By+C_1=0, Ax+By+C_2=0$ 距离公式。

由点到直线的距离公式可得：

$$d=\frac{|C_1-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

3.4 评价与延伸

教师播放微视频，介绍西方早期教科书中的推导方法，将历史上数学家的证明方法与学生的证明进行对比，对学生的表现给予积极评价，并在此基础上进一步延伸新的方法。

师：其实刚才大家所想出的各种方法都是历史上数学家们用过的方法。其中的交点法，作垂线求交点坐标，再用两点间的距离公式进行计算即可。但刚刚同学们用弦长公式来求距离，实际上简化了历史上数学家的方法，减少了计算量。还有三角形面积法，数学家是用行列式做的。刚刚几位同学都觉得向量法很巧妙，但这种方法在历史上出现得很迟，而你们也是最后想出来的。当然，如果大家对刚才这些方法还觉得不够满意的话，自己可以去查阅更多的数学文献。（展示早期教科书的相关文献）

生：（发出感叹，比较活跃）哇哦!

师：刚才大家想到的各种方法中，大家觉得柯西不等式运算最简便，其实历史上还有一种比较巧妙的方法，我给大家扼要介绍一下。

设 Q 的坐标为 $Q(x_1,y_1)$，因为 Q 在直线 PQ 上，因此 Q 点坐标满足

$$B(x_1-x_0)-A(y_1-y_0)=0 \tag{2}$$

因点 Q 也在直线 l 上，则有 $Ax_1+By_1+C=0$，也可写为

$$Ax_1+By_1+C=0=A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+Ax_0+By_0+C=0,$$

即

$$A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=-(Ax_0+By_0+C) \tag{3}$$

由 $(2)^2+(3)^2$ 可得 $(A^2+B^2)[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2]=(Ax_0+By_0+C)^2$，即

$$d^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$$

接着，教师对本节课进行小结，并邀请学生欣赏多种方法，对方法进行评价。

师：首先，本节课学习了点到直线距离公式，掌握了它的多种推导方法，同时我们也与古代数学家进行对话，领略了历史上各种点到直线距离公式精彩的推导方法。

其次，本节课我们学习了多种数学思想，如数形结合、转化、从函数的视角看问题等思想。

最后，通过历史上一个又一个数学家精彩的推导方法，一方面我们理解了点到直线距离的内涵，让我们感受到数学公式推导的巧妙；另一方面也能感受到其中浸润着的数学家们对知识孜孜不倦、力求创新的探索精神。

师：同学们，历史上如此丰富多彩的方法，大家也想出来了很多种，你们最喜欢哪一种？

生 1：我最喜欢柯西不等式，我觉得计算简便，而且太巧了。

生 2：最喜欢向量法，因为它将向量用的很灵活，计算也挺简便。

生 3：设而不求法，因为我不太能想到这么巧妙地方法。

师：看来每位同学的看法都不一样，那大家还能不能想出其他方法呢？这个就留给大家课后思考。

4 学生反馈

在以上教学设计实施前后，对学生进行了课前和课后测试。其中课前学习单发放 40 份，有效学习单 38 份；课后学习单发放 40 份，有效学习单 35 份。

4.1 课前学习单分析

学生均能准确地表述出“两点间的距离”，大多以文字表述为主，部分学生会配以几何表示，少部分学生直接给出两点间的距离公式或距离公式的文字表述。在表述“点到直线的距离”时（以下简称“点线距离”），学生有如下几种表述：

- 点线距离是点到直线上所有点距离的最小值；
- 点线距离是指过点作直线的垂线，垂线与已知直线的交点和已知点的距离；
- 已知点关于直线的对称点和已知点的距离的一半为点线距离；
- 点线距离是指一个点移动到直线的路径中的最短路径长度；

虽然学生对点线距离的表述不尽相同，但对点线距离的理解比较到位。这些不同的表述方法代表学生思考问题角度的多样性，这也为学生思考推导点线距离公式的方法也奠定了基础.

4.2 课后学习单分析

（1）知识与能力

课后学习单的结果表明，100%学生在本节课中对点线距离公式掌握牢靠，会正确运用电线距离解决相关问题。在课后学习单中，有这样一道题：

已知 $m,n,a,b\in R$ ，且满足 $3m+4n=6$ ，$3a+4b=1$ ，则 $\sqrt{(m-a)^2+(n-b)^2}$ 的

最小值是多少？

大多数学生都将题目转化为求 $3x+4y=6$、$3x+4y=1$ 两平行线间距离的最小值。还有部分学生想到了本节课中提到的柯西不等式，采用柯西不等式求解，过程也是简单易行。

（2）情感与态度

回收的 35 份学习单中，有 1 位认为没有必要介绍多元方法，他认为某些推导方法牵强且复杂，超出了结论本身的难度。但有 34 位认为有必要了解多元的推导方法，他们的理由大致可以分为以下几类：

- 促进对数学的进一步思考，还能顺便回忆之前所学的知识，拓展思维的广度与深度；
- 多元的推导方法很有意思，让我觉得很有趣；
- 能更好地理解和运用公式，一题多解；
- 每种方法内部都蕴含着数学思想，发散了思维，展现了数学之美；
- 数学作为人类思想之结晶，应当被人们重视，不管是公式还是推导方法，任一方面都不能加以忽略。

当被问到最先想到的方法时，和预设一样，约 49%的学生最先想到交点法，20%最先想到向量法，也有少数想到了面积法等。在选择最精彩的方法时，选择向量法、柯西不等式法（目标函数法）、设而不求法位居前三。学生认为向量法的推导巧妙且无需分类讨论，避免了复杂计算而且适用性广；柯西不等式法十分巧妙，引人入胜，完全想不到，感受到了数学简洁之美；设而不求法则是思路巧妙，计算量小。

在谈到本节课的收获和困惑时，学生表示学到了许多种推导公式的方法，相对应的也学到了很多解题的思路。了解了历史上多远的公式推导方法，收获了数学上探索的乐趣。也有学生提出困惑：如何想到这种设而不求法的构造，这种思想能否进一步推广？可见学生的思考并未因这节课的结束而止步，而是对方法进行再思考。

5 结语

整节课采取了“提出问题——学生探究——历史回溯——课堂总结”的教学模式，采用附加式、复制式和顺应式的方式融入数学史，共分为呈现问题、探究规律、总结公式、应用公式四个阶段。以实际问题作为背景创设教学情境，在具体问题上，抽象出解决一个典型数学问题公式的方法，让学生亲历提出问题，解决问题，反思总结的全过程。

通过将数学史融入点到直线距离公式的教学，本节课达成了多元的教育价值，从学生熟悉的初中几何知识和一次函数知识出发，联系以往学习的不等式、函数最值、矩阵行列式和向量的知识，使学生个人思考与小组探究相结合，推导公式。根据学生探究的过程对多元方法进行讲解，符合学生的心理序，揭示了“知识之谐”。通过不同方法的对比，拓宽学生思维，从而展现了“方法之美”。学生通过小组合作探究活动，思考出不同的推导方法，经历形式化公式背后的发现过程，体会到数学探究与发现的乐趣，从而营造了“探究之乐”。在公式推导中，培养学生逻辑推理和数学运算的核心素养能力，通过几何方法帮助学生建立直观想象能力，课前的引入，仓库到铁路线路设计问题，渗透了数学建模的核心素养，通过不同的数学思想和四种核心素养的渗透，从而达成了“能力之助”。将学生的推导方法与历史上数学家们的推导方法进行对照，不仅树立了学生的自信心，也激发了学生的思考，让学生感受到历史上数学家思考的脚步从未停止，彰显了数学史 “德育之效”。

本节课后，有以下启示：

（1）本节课是一堂教师定位变换的课，教师成为课堂的组织者，组织学生作为探究的主人，感受探究多种方法的乐趣。

（2）通过课堂上的小组合作，让学生更多的展示得到推导方法的过程，然后讨论公式的精髓和难易接受程度，不仅仅是要掌握推导的结果，更重要的是推导方法背后的数学思想。

（3）不同的推导方法意味着看问题角度的不同，多元的推导方法有助于拓展学生的思维，发展学生逻辑推理，数学运算等素养。

（4）由于历史研究的局限性，还未注意到不同方法背后相关人物、方法的背景及背后所反映的人文精神。因此还需加强数学史“文化之魅”的教育价值，让学生感受到数学的魅力。

参考文献

[1] 王跃辉.核心素养视角下高中数学教学设计的基本要求——以“点到直线的距离”的教学设计为例[J].中小学数学(高中版),2019(11):24-27.

[2] 曾国光. 是强调方程思想, 还是突出向量方法?——谈“点到直线的距离”处理两难的教学设计 [J]. 数学教学, 2008(04): 6-8+50.

[3] 王敏杰. 研究性教与学: 点到直线的距离课例[J]. 中学数学月刊, 2018(01): 24-26.

[4] Gulikers I , Blom K . `A historical angle', a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education[J]. Educational Studies in Mathematics, 2001, 47(2):223-258.

[5] Wang, X., Qi, C. & Wang, K. A categorization model for educational values of the history of mathematics: An empirical study[J]. Science & Education, 2017, 26(7): 1029-1052.

[6] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[7] 杨懿荔, 汪晓勤. 20 世纪中叶前西方解析几何教科书中的“点到直线距离公式” [J]. 数学传播, 2016, 40(3): 85-96.

[8] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry* [M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Co., 1836.

[9] 彭思维,汪晓勤.HPM视角下的“点到直线距离”同课异构课例分析[J].中小学数学(高中版),2020(Z1):82-86.

[10] Gibson, G. A., Pinkerton, P. *Elements of Analytical Geometry* [M]. London: Macmillan & Co., 1919.

[11] Todhunter, I. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry as Applied to the Straight Line and the Conic Sections* [M]. London: Macmillan & Co., 1855.

[12] Johnston, W. J. *An Elementary Treatise on Analytical Geometry* [M]. Oxford: The Clarendon Press, 1893.

[13] Taylor, A. E. *Calculus, with Analytic Geometry* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1959.

[14] 瞿鑫婷,汪晓勤,贾彬.基于数学史的三角形内角和探究活动的设计与实施[J].2019(02):12-15+46.

HPM 视角下的初中数学单元整体性复习教学

——以“圆的基本性质复习”为例

余立海[1]，栗小妮[2]

（1．萧山区南阳初级中学，杭州 311227; 2. 华东师范大学教师教育学院，上海, 200062）

1 背景

在全国积极深化义务教育课程改革，全面落实立德树人根本任务之际，研究改进适合改革需要的课堂教学刻不容缓。然而，对于复习课而言，当前已有的复习课课堂教学以“练习+讲评”为主，数学复习课普遍很乏味，要让学生喜欢数学复习课很难。在我们的调查中发现，传统模式下的复习课，普遍存在着一些这样的问题：

① 教辅为本，缺乏研究。教师对课标和教材以及试题都缺乏研究，直接按照教辅资料的内容作为上课的主要内容。既不管难度是否适合本校学生，也不管内容是否恰当合理。许多时候老师们会要求学生课前先完成，课堂来讲解。与其说是一堂复习课，更像一堂习题课。大大增加了学生的学习负担。

② 课堂乏味，忽视学生。由于教师认为复习课的时间比较“紧”的原因，往往采用一讲到底或边做边讲的一贯模式。使得学生毫无“发言权”，这样一来学生哪怕有思考也无法表达，久而久之，学生也就丢掉了思考和表达的习惯。归根到底是教师选择的复习素材不好，没有能引起学生足够的学习兴趣和思考愿望，这样的复习课不仅乏味而且效率低下。

③ 内容割裂，缺少联系。我们说复习课的一个目的是将碎片化的知识体系化。而教师往往找不到一个较好的线索把自己想要复习的知识串联起来，所以只能重复操练自己认为“重要”的习题，这样往往造成一节复习课下来学生也不清楚自己解决了什么问题。究其原因主要是由于教师未能提供相对真实并可供解决的问题背景。

所以，我们尝试利用 16 世纪一个典型的法律案例进行复习课的单元整体性教学设计，帮助学生参与到一个有意义的情境任务中，通过问题的解决，建构和完善知识体系。这样的教学过程对教师自身的成长有着重要的促进作用，对学生未来的发展更是有着十分重要的价值和意义。

2 教学目标

14 世纪的意大利，有这样一个法律案例。如图 1，具有公共边界 OC 的甲、乙两块土地的主人都想获得洪水过后所产生的一块肥沃的淤积地 OAB（其中甲、乙两块土地与淤积地接壤的边界线 OA 和 OB 均为线段，河岸线 AB 为不规则曲线），双方人争执不下，最终对簿公堂。当时，法律教授巴托鲁斯（Bartolus，1313~1357）给出的方案是：淤积地中的任何区域，离谁家原有土地的边界线更近，就归属谁家。这一方案为两家所接受，利用数学知识可知，图 1 中$\angle AOB$ 的平分线就是合适的分割线。

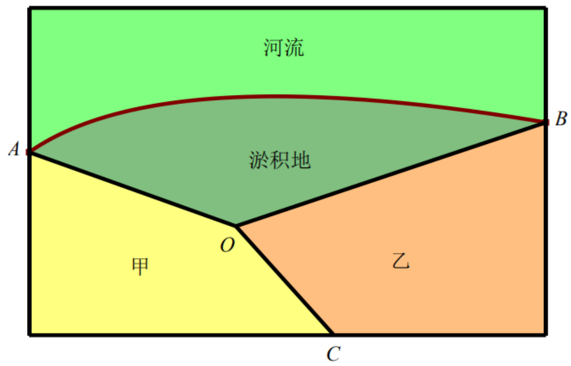


图 1 淤积地分配问题

“圆的基本性质”是浙教版初中数学九年级上册第 3 章的重要教学内容。学习圆的基本性质对学生逻辑推理能力的培养，数学思想方法的形成都要重要的价值。基于以上原因，再结合法律案例对圆的基本性质复习课进行教学设计，拟定以下教学目标：

（1）能对本法律问题发表自己的观点，知道本问题的历史解决方案，并知道法律问题的解决需要满足公平公正和可操作的原则；

（2）能通过建立圆这个数学模型，并根据圆的基本性质和相关知识解决本问题的延伸问题串，从而培养学生分析、解决问题的能力；

（3）在问题解决过程中，体会数学的应用价值。

3 教学设计与实施

3.1 情境引入

教师在课前一天已发放工作单，让学生自行设计分割方案，并进行了分类整理。

课上，教师投影部分学生的分配方案，然后找对应的同学说说自己所设计的分配方案的依据，教师在学生表达自己的观点后与其他学生一起进行适当的评价。

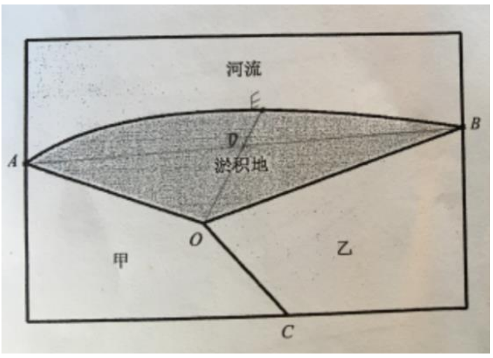
师：根据收集后统计的情况，同学们主要的分配方案有平均分配、补差分配、按比例分配、按分割线分配，其中大部分学生都是按分割线分配，可见同学们都喜欢用数学的眼光来思考问题，老师选了些比较多和典型的分割线分配方案，请同学们自己来说一说你这样分配的依据？

生 1：我想尽量平均分配，方法是连接 AB，取 AB 中点 D，连接 OD 并延长交河岸线于点 E，OE 为分割线。

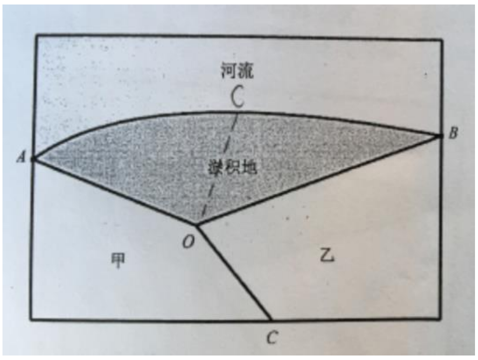
师：这位同学表述非常规范，用了“尽量”平均，因为他这样去操作并不一定能平均。

生 2：我也是想尽量平分面积，方法是取河岸线 AB 的中点 C，连接 OC 即为分割线。

师：这位同学也用了“尽量”平分，因为他这样去操作也并不一定能平分，而且不规则的曲线 AB 的中点很难找到。



学生 1 的分割线分配方案



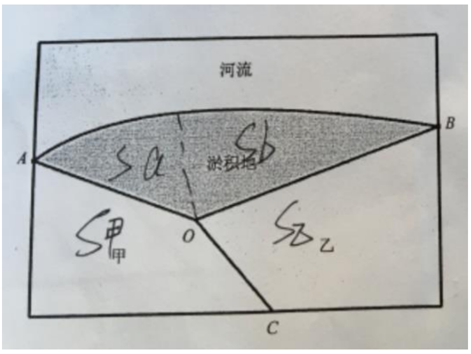
学生 2 的分割线分配方案

生 3：我是想尽量按比例分，方法是过点 O 画一条分割线使得 S_a：S_b=$S_{甲}$：$S_{乙}$。

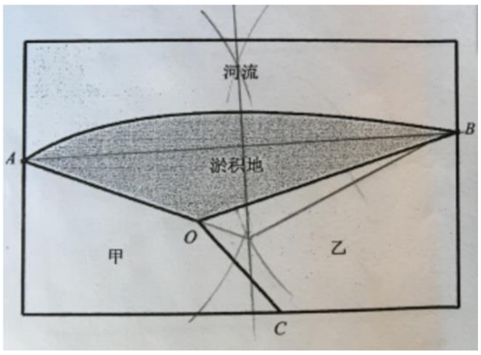
师：由于不规则，这位同学的分割线很难准确得到。

生 4：我也是想尽量平分面积，方法是连接 AB，画 AB 的中垂线，与河岸和边界的交点连线作为分割线。

师：这位同学也想平分这块淤泥地的面积，但这样的操作无法真正平均分配。



学生 3 的分割线分配方案



学生 4 的分割线分配方案

师：听了同学们的讲解，发现大多数同学都希望平均分配，我想同学们的出发点是希望公平、公正的解决这个问题，但具体的操作和同学们所想的依据并不完全符合，而按比例分配可能会造成多的越多，少的越少的情况，也无法得到甲、乙双方的认可，而且操作起来也是非常困难，那么当初这个问题又是如何解决的呢？我们一起来看一下。

再现情境，教师先出示当初法律教授的分配依据——就近，并说明此依据当初得到了甲乙双方的一致认可，然后介绍在这样依据下的具体操作，并提出新的问题。

师：请同学们思考，他这样操作为什么就符合离谁原有土地边界近就归谁这个依据呢？

生：利用角平分线的性质，角平分线上的点到角两边的距离相等。

师：那为什么角平分线右边的点离乙的边界 *OB* 更近呢？

生：假设任意取点 *P*，先向两个边界做垂线段，记作 *PM*、*PN*，量取后进行比较即可。

师：你说得方法能解决点 *P*，但其余的点呢？我们都靠量取的话这个工作能做得完吗？

生：老师，我们可以记 *PM* 与角平分线的交点为 *C*，过点 *C* 再作 *OB* 的垂线，交于点 *M'*，由角平分线性质可得 *CN=CM'*，所以根据三角形两边之和大于第三边和在同意三角形中斜边大于直角边可以得到：*PM=PC+CM=PC+CM'＞PM'＞PN*。

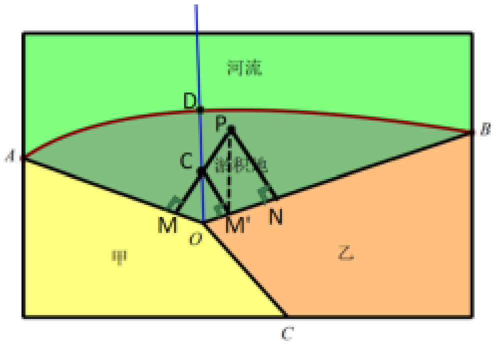


图 2 学生对法律教授的操作方案的解释

师：同学们借助数学知识科学地解释了点 *P* 离分界线 *OB* 比较近，由于点 *P* 的任意性我们可以说明角平分线右侧的点都离分界线 *OB* 比较近，反之也可以用同样的方法去说明左侧的点离分界线 *OA* 比较近，这样我们就解释了他的操作是符合当时的分配依据的。

3.2 情景再创

因为本节课的目标是复习圆的基本性质，而且之前学生的方案中已经有涉及到圆的相关性质，所以教师采用对学生作品进行情景再创的方式进行问题设计，这样既可以缩短理解新问题的时间，又可以增加学生的学习兴趣。

问题 1：如图 3，在学生作法的基础上，连接 *AB*，作 *AB* 与 *OB* 的垂直平分线，其交点为 *D*，若此时淤积地的法定分割线恰为 *OD* 的一部分，判断原边界线 *OA* 和 *OB* 的数量关系

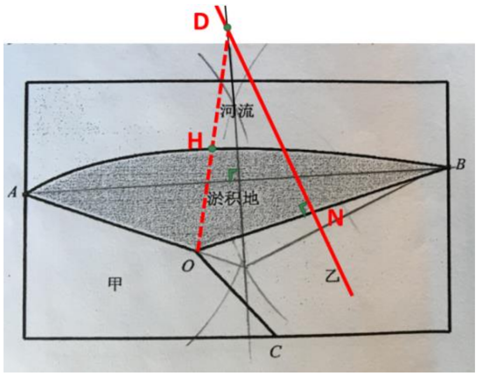


图 3 学生的作法

生 1：过点 D 作 AO 的垂线交 AO 于点 M，因为 $DN \perp BO$，且 DO 是角平分线，则由角平分线性质定理可得到：$DM=DN$，又因为点 D 是$\triangle ABO$ 的外接圆圆心，所以根据圆心角定理的逆定理直接可以得到 $AO=BO$.

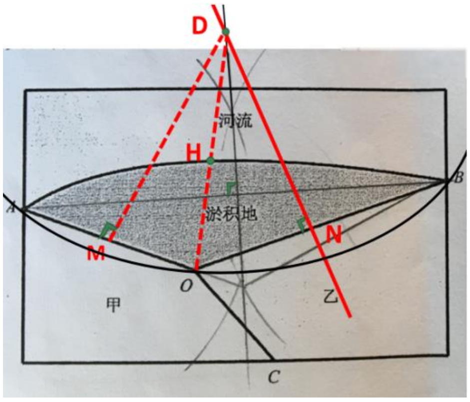


图 4 学生对问题 1 的解法

生 2：由 DO 是角平分线，则 $\angle AOD=\angle BOD$，又因为点 D 是$\triangle ABO$ 的外接圆圆心，所以根据圆周角定理的推论：同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧相等，可以得到与弧 AO 和弧 BO 度数互补的弧相等，则弧 AO=弧 BO，再根据圆心角定理逆定理可以得到 $AO=BO$.

生 3：还可以先证明$\triangle DOM \cong \triangle DON$，得到 $MO=NO$，然后由垂径定理得到 $AO=2MO$，又因为由条件知 $BO=2NO$，得到 $AO=BO$.

师：很好，同学们用到了圆周角定理的推论、圆心角定理逆定理、垂径定理以及三角形全等等数学知识证明了 $AO=BO$.

3.3 问题迁移

在不改变分割规则的前提下，教师改编原始图形，设计问题，让学生在解决问题的过程中，进一步复习圆的相关性质。

问题 2：如图 5，边界线 AOB 为长度 80 米的线段，且河岸线为一段半径为 50 米的圆弧，则淤积地的法定分割线如何画？

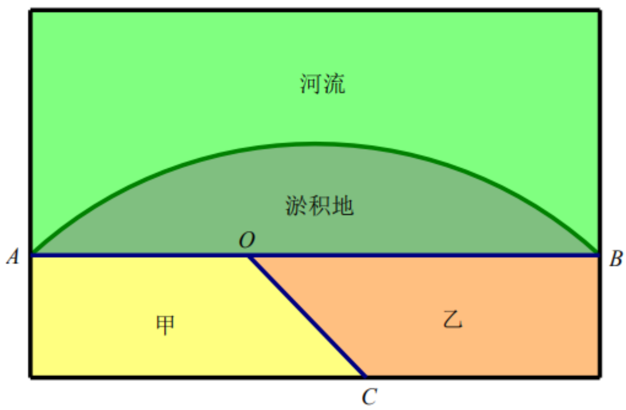


图 5 问题 2 的图

生：只要过点 *O* 作 *AB* 的垂线交弧 *AB* 于点 *H*，*OH* 即为所求分割线，其实还是角平分线，现在是一个平角而已。

师：非常好，不仅给出了分割线，还解释了原因。那这个法定分割线 *OH* 的长度可求吗？

生 1：会随着 *O* 点位置的改变而改变，只有点 *O* 确定才可能可以求。

师：那我们给他选一个特殊的位置：比如中点处，然后试着计算一下它的长度。

生 2：延长 *HO*，由 *HO* 是弦 *AB* 的中垂线，根据找圆心的方法可知圆弧 *AB* 所在圆的圆心一定在射线上，假设为点 *D*，连接 *BD*，由勾股定理可得 *DO*=30 米，则 *HO*=20 米。

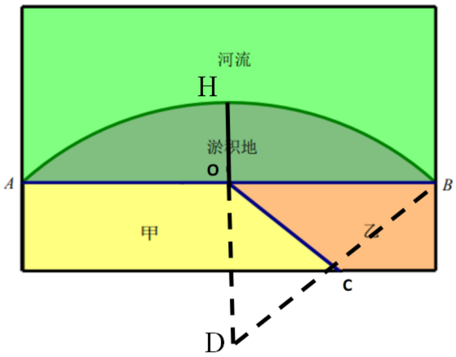


图 6 学生 1 对问题回答的图示

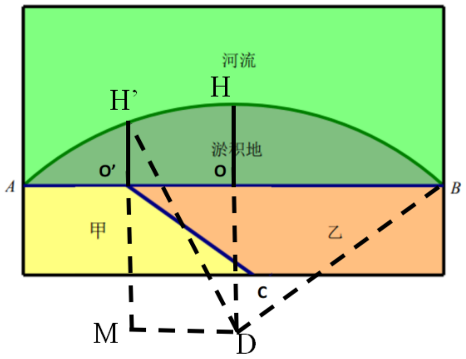


图 7 学生 2 对问题回答的图示

师：那如果不是中点，而是 *AO*：*BO*=1：3 呢？还可以求吗？

生：在原来的基础上假设有个点 *O*'满足 *A O*'：*BO*'=1：3，再构造一个由半径、半弦、弦心距组成的直角三角形 *DMH*'，和刚才一样利用勾股定理就可以求解。

师：非常好，从方法上来看，在半径和弦长知道的情况下，只要知道 *AO*：*BO* 的值，就可以求出此时分割线 *OH* 的长度，请同学们课后思考 *AO*：*BO*=1：n 时的情况。

3.4 变式深化

在不改变分割规则的前提下，教师在问题 2 的基础上，进一步改编原始图形，将边界线改为圆弧，让学生寻找解决问题的方案。

问题 3：如图 8，若边界线 *AOB* 为圆弧，该如何分配淤积地？

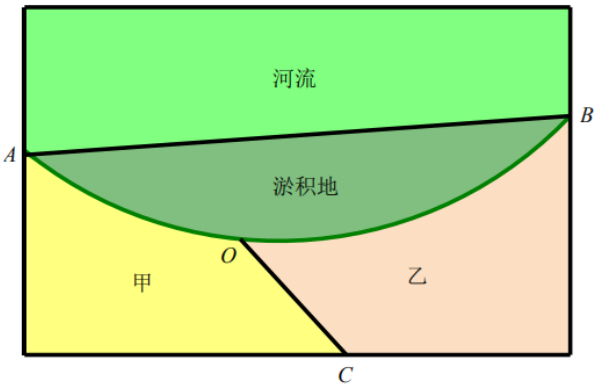


图 8 问题 3 的图

师：如果我们继续改变边界线和河岸线的形状，若边界线 AOB 为圆弧，则按照刚才的分配依据，你能不能把分割线画出来？

生 1：在淤泥地区域任意找个点 P，那么从图中点 P 的位置可以猜想点 P 与边界 AO 的最近的点就是点 O，即 PO 的长，而点 P 与边界 BO 的最近的点是过圆心 D 时直线 DP 与边界 BO 的交点 H，即 PH 的长，目测 $PH<PO$,所以分割线是 DO 上的一段。

师：谁能借助已学的数学知识用推理的方式解释 $PH<PO$ 呢？

生 2：根据三角形中任意两边之和大于第三边得：$PD+PO>OD=DH=PD+PH$，即 $PH<PO$。

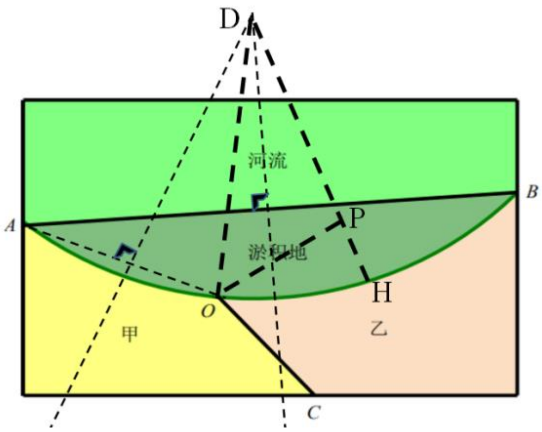


图 9 学生 1、2 对问题回答的图示

师：也就是说淤泥地中任意一个点与圆心 D 的连接的直线与边界线的交点在哪个边界上就离哪家的边界近，这样就能解释为什么分割线是 DO 上的一段。

3.5 回顾总结

引导学生从以下几方面进行总结：一个原则（公平公正、可操作）；一块知识（圆的基本性质）；一种思想（模型思想）。

4 学生反馈

课后，我们收集了全班 25 名学生对于本节课的反馈信息。对于“通过这节课，你体会到了学习数学有哪些价值？”这个问题，有 18 位同学提到了可以利用数学知识解决生活中的实际问题；有 6 位同学提到学习数学可以帮助思维更有逻辑性；有 1 位同学提到可以用类似的方法解决其它的问题；由此可以看出数学史在数学课堂中的融入使学生深刻体会到了数学的广泛应用性和严谨性。

对于“你认为要解决本节课所遇到的法律问题应遵循怎样的原则？”这个问题，96%的同学给出了公平公正、可操作的回答，由此可以说明数学史的融入对学生是有教育意义的。

对于“这节课你印象最深的是什么？为什么？”这个问题，有 8 位同学提到了用数学知

识解决法律问题，认为学习数学知识有着实际应用价值；7 位同学提到了一题多解，认为问题 1 的解法多种多样，很有意思，也让他们知道了解题思路的多样性；7 位同学提到了主要用到了圆的基本性质解决问题，认为本节课就是圆的基本性质复习；3 位同学提到了各种分配方案。这些令学生印象深刻的内容全部都要归咎于我们将数学史融入到数学课堂中。

5 结语

本节课并虽然没有大篇幅地运用数学史，但在教学环节中使用数学史所达到的教学效果是显而易见的。在开始之初抛出中世纪法律问题的部分，充分引起了学生的学习兴趣，提前设计和准备好的分配方案，让学生有机会表达自己的观点，充分体现了“探究之乐”；通过对问题进行迁移和变式，学生不但复习了圆的基本性质，而且感受到学习数学知识的价值，又通过一题多解，感受“方法之美”；学生表达法律问题解决时对于公平公正的要求以及在说明操作与依据相符时的严谨的数学精神，感受到做人做事“要讲道理”，彰显了“德育之效”。

参考文献

[1] Van Maanen, J. Teaching geometry to 11 year old "medieval lawyers" [J]. The Mathematical Gazette, 1992, 76(475): 37-45.

[2] 陈建国.开发教材为素材,演绎复习更精彩:浙教版数学九上《圆的基本性质》复习课教学设计[J].数学教学,2019, (06): 6-13.

[3] 汪晓勤.HPM：数学史与数学教育[M].上海:华东师范大学出版社,2017.

[4] 汪晓勤, 栗小妮. 数学史与初中数学教学: 理论、实践与案例 [M].上海: 华东师范大学出版社, 2019.

[5] 王鑫，汪晓勤，岳增成. 基于数学史的数学探究活动设计课例分析[J].中学数学月刊, 2018, (10): 54-58.

学术讯息

“基于历史名题的 HPM 高中单元复习课”暑期研修活动

余庆纯

（华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

2020 年 8 月，浙江省义乌市高中数学王芳工作室、上海市华东师范大学 HPM 研究团队、内蒙古自治区呼和浩特内蒙古师范大学数学史研究团队的师生们共聚云端，合力开展“基于历史名题的 HPM 高中单元复习课例”暑期研修活动。

本期暑期网络研修活动围绕九大单元课例主题，每个课例以“1+2 方式”（即 1 位中学一线教师+2 位高校研究者）组建研讨小组，采用“1+1+1 模式”（即 1 人主讲、1 人记录、1 人补充反馈的形式）进行小组汇报。目前，该暑期网络研修活动开展在线网络课例研讨共计 6 场，每场约为 2 小时，活动频率为 4 天一场，初步地积累一批单元教学的历史素材，有效地收集一串数学历史名题，有力地推动 HPM 学习共同体在线研修发展！

1 数列、三角函数

8 月 12 日，来自浙江省义乌市第六中学的万松强老师做了“基于历史名题的‘数列’单元复习课例”的报告。以历史时间轴为主线，基于代数、几何角度对数列的历史名题进行梳理。教学设计上，万老师创意性地运用“数列历史博物馆”形式，将数列求和的相关内容进行串联。值得一提的是，在历史博物馆的展馆 3 中，创新式地设计了“奥雷姆法求和”等探究活动，带领学生们穿越古今历史，触摸数学家的火热思想，颇具亮点！

基于历史名题的单元复习课
--以“数列”单元为例

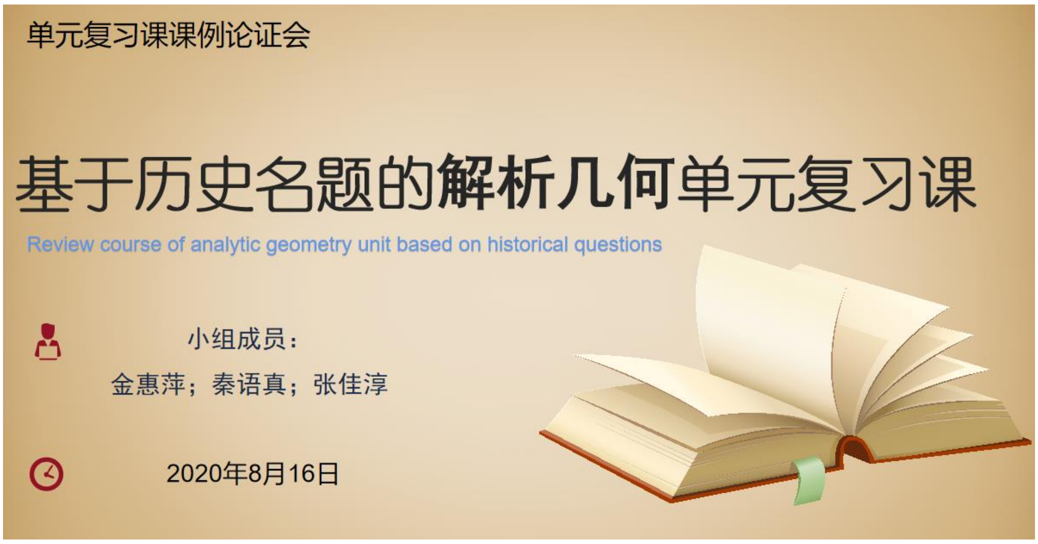
义乌市第五中学的纪亚荣老师带来“基于历史名题的‘三角函数’单元复习课例”的课例报告。基于时间顺序，介绍了三角函数的概念发展，托勒密定理及弦表的制作。在教学设计中，以托勒密定理为中心，设置了 8 个问题，分别是托勒密定理的证明、利用托勒密定理证明和差角公式及余弦定理等基本三角公式、利用托勒密定理解决几何问题与证明三角恒等式等问题、运用三角公式解决三角求值问题。最后阐述对普通高中“三角函数”单元新教材的理解，强调单位圆的重要性，希望借助几何直观、代数运算等方法得到三角函数的性质与一些恒等关系式，突出三角学之美。

2 立体几何、解析几何

8 月 16 日，来自义乌市树人中学的鲍雯霞老师做了“基于历史名题的‘立体几何’单元复习课”的课例报告。首先，鲍老师从古希腊泰勒斯谈到欧几里得及其著作《几何原本》，再到阿基米德、刘徽、祖暅等数学家关于球体积公式的推导与数学成就，并提出本节课主要围绕立体几何中表面积与体积等重点内容。历史名题部分，主要对《九章算术》里的部分原文及历史名题进行了解析与提炼，并介绍了 2 道融入《九章算术》中数学史内容的高考题与 1 道改编的模拟题。此外，鲍老师对于新、旧两版教材中立体几何内容的改动进行论述。

华东师范大学的张佳淳研究生继续带来“基于历史名题的‘解析几何’单元复习课”的课例报告，主要从阿波罗尼奥斯的代表作《圆锥曲线论》、动态轨迹问题、高考题中的圆锥曲线研究等三方面展开。首先，由轨迹的历史变迁入手，将轨迹的发展分为了四个阶段：（1）公元前 4-5 世纪，希皮亚斯发明割圆曲线，轨迹思想初现；（2）公元前 3 世纪，欧几里得《几何原本》标志着轨迹之用到来；（3）公元前 4 世纪早期，阿契塔引入曲线是点的轨

迹；（4）从阿波罗尼奥斯的《平面轨迹》采用纯几何的做法，再到笛卡儿引入解析几何。在历史名题部分，根据阿波罗尼奥斯圆设计出一系列相关联的问题串，并分成了三类：（1）与定点有关的轨迹；（2）与定直线、定点有关的轨迹；（3）与定直线有关的轨迹。据此，设计的问题分别对应椭圆与卡西尼卵形线、双曲线及其第二定义、抛物线与三线轨迹，并针对三线轨迹设计了变式练习。



3 函数与导数、不等式

8 月 20 日，义乌中学的楼萍萍老师做了“基于历史名题的‘函数与导数’单元复习课”的课例报告。楼老师先介绍了微积分的产生与发展史，基于四个阶段：酝酿阶段-创立阶段-发展阶段-严格化阶段。接下来，基于阿基米德求解方法、西方数学家的一些数学解法，介绍了三次方程的求解历史。通过教材分析，确定把重点放在提升学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养的培育上。在教学设计中，其以历史故事作为载体，抛出 2 个探究性问题：从特殊到一般讨论三次函数的零点个数，进一步研究对应的三次函数的图像与性质，探究一般的三次函数的图像与性质，从而探讨一般的三次方程的解的个数。随后，讨论卡丹方程的实根个数，并对卡丹方程进行变式，强调借助函数与导数来研究方程解的个数的能力，最后总结求解三次方程的思路。

义乌中学的吴小悦老师进行“基于历史名题的‘基本不等式’单元课例”汇报。其以“等周问题”为主要切入点，梳理了古人研究该问题的历史轨迹。从古人刚开始运用周长来推测面积，到公元前 2 世纪芝诺多鲁斯在《论等周问题》一书中对“等周问题”的研究，再到亚历山大时期的帕普斯、16 世纪的笛卡尔等数学家对“等周问题”的证明。最终，19 世纪的德国数学家维尔斯特拉斯用变分法对“等周问题”进行了严格的证明。随后，吴老师分别基于课标解读、教材变化、数学思想、核心素养等 4 个角度，分析了“基本不等式”内容的变动。在教学设计中，通过一个实际问题“如何用最少的材料围出最大的面积”引出“等周问题”，依次设置了“在空地上围”、“依托直线围”、“依托角的形状围”等 3 个情境，层层递进、逻辑高阶，完成了对基于“等周问题”的基本不等式内容的单元复习。

4 计数原理、概率

8 月 24 日，内蒙古师范大学的研究生王占带来“基于历史名题的‘计数原理’单元复习课”汇报。在史料梳理方面，王占同学介绍了计数原理中二项式定理的演变史。在历史名题方面，以“杨辉三角”为主线，分析了 5 个性质。在课例解析方面，确定把教学重点放在提升学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学核心素养的培育上，旨在突破用计数原理分析二项式的展开过程，以及发现二项式展开成单项式之和时各项系数的规律的教学难点。初步教学设想分为 3 个环节：（1）利用排列组合中的“最短路径问题”引出“杨辉三角”；（2）通过数形结合地探究来解析“杨辉三角”，复习二项式定理的二项式系数与性质，并且以“弹子游戏”为例，引导学生复习二项式定理的相关知识；接着，通过高考题与模拟题，

运用不同的解法求出答案，并且通过比较不同的解法，加深学生对二项式的理解和运用；(3) 拓展“杨辉三角”与概率、数列、三项式定理之间的知识联系，加强深度学习。

内蒙古师范大学的黄佩同学带来的“基于历史名题的‘概率’单元复习课例”报告。在史料介绍方面，首先将概率的发展史料分成了四个阶段：孕育期—诞生期—奠基期—发展期。在教材分析方面，介绍了高中 2017 版数学教科书与试验版课标教科书之间的内容差异，指出“概率”章节的内容变化。在历史名题设计方面，主要解决 3 个重要问题：《神曲》中的“机会游戏”问题、德 梅耳（de Mere，1607-1684）问题，概率与数列的综合运用问题。最后以两个高考题目，学校“概率”知识在高考中的应用。

5 向量

8 月 29 日晚，义乌中学吴俊凯老师带来“基于历史名题的‘向量’单元复习课”。首先，吴老师提出向量概念的演变可以放在数学、物理两大学科领域中讨论，展示了向量历史发展的三个阶段：（1）向量概念主要产生于力与速度的“平行四边形法则”，由此发展起来的向量理论；（2）向量概念存在于位置几何相关的向量理论，始于莱布尼兹的位置几何，其中最主要是几何加法、几何减法的定律；（3）向量源自复数几何表示的向量理论，即复数的几何解释，现代向量理论就是在此理论基础上发展起来的，逐渐认识到了平面上的向量可以用复数来表示和研究。接着，吴老师分享了课例分析的情况：首先通过一道历史名题，阐述了古希腊著名学者亚里士多德（Aristotle，384 B.C.-322 B.C.）提出的速度的合成满足“平行四边形法则”，随后古希腊数学家海伦利用三角形的相似性，给出了该法则的几何证明；在此基础上对该题目进行了改编，以解决“小船渡河的登陆点”的问题为切入点，引出向量加法的“平行四边形法则”，讲解了“平面向量的基本定理”；最后，由“平面向量的基本定

理”得出的“共线定理”与“等和线”概念。

6 总结与展望

8 月 29 日晚，随着最后一场研修汇报的结束，浙江义乌王芳工作室、华东师范大学 HPM 研究团队与内蒙古师范大学数学史研究团队的师生们对本期“基于历史名题的 HPM 单元复习课例”暑期研修活动进行总结。

王芳老师高度赞扬本次 HPM 暑期研修活动，认为这是一段内涵丰富、意义特殊的网络研修活动：（1）研讨的主题不是中学解题，而是学科大概念的教学，将历史名题融入到学科大概念的发生、发展历程中，成为本期研讨的精彩亮点；（2）研修的内容不是组织者制定的，而是参训者自由选择、自行决定的，这样的研讨更接地气，问题更加聚焦；（3）本次网络研修没有地域之分、师生之别，而是平等地、交互地在线研讨，增进了共同体成员间的深度交流与合作；（4）研讨的对象不是一个既有的 HPM 课例成品，而是一个 HPM 课例的初创过程。各位研修者亲历这种过程，可以积累珍贵的 HPM 课例开发经验；（5）随着时代的进步，数学课标、教材与教学也在不断地演进，但无论知识的呈现方式怎样改进，历史都忠实地记录着这些知识的发生与发展，记录着数学家研究它们的火热过程。德国教育家雅尔贝斯认为：“教育意味着一棵树摇动另一棵树，一朵云追逐另一朵云，一个灵魂唤醒另一个灵魂。”正是数学家们的理性求真、不懈追求，促使我们对 HPM 充满了信心与勇气！

华东师范大学汪晓勤教授充分肯定了本期“基于历史名题的 HPM 高中单元复习课”暑期研修活动的落实，从时代的高度出发强调了 HPM 是教师专业发展的有效抓手，认为 HPM

在义乌教研基地已经生根发芽、开花结果，令人欣慰不已！汪教授强调说：在历史长河中，每一个时代的数学教育教学都会受某种教育理念的影响，随着新时代的来临，旧时代的理念会被淘汰；然而 HPM 是不会过时的，它是教师专业发展的不动点，能够经受得起不同时代的历史考验！其次，汪教授简要地论述了“基于数学史的高中数学问题串”设计与实施，以“曲线与方程”为例，讲了按照问题的延展需要形成一系列问题串，强调若重构式的教学需要通过问题串来逐步实现。基于数学史的问题串内涵十分丰富，可以将历史的问题裁剪、加工成为问题串，或利用历史的材料、根据问题提出的策略来编制问题串。最后，汪老师积极地肯定了 HPM 美好的研究前景：随着 HPM 的不断传播，影响力越来越大，发表也越来越广泛，期待本期“基于历史名题的 HPM 高中单元复习课例研究”的每一位老师能够有新的成果发表出来，为 HPM 的新发展添砖加瓦！

内蒙古师范大学的李春兰老师发言感谢汪老师与华东师范大学团队、义乌王芳工作室给予的本次课例研修的宝贵机会，“基于历史名题的 HPM 高中单元复习课”暑期研修盛宴让内蒙古师范大学的研究生们收获颇丰，打开学习研究的新视野，同时也认识到自身团队史料研究中的不足，数学史研究不仅要为历史而历史，更要为教育而历史，才能更好地服务于中小学数学教学！

最后，本次研修活动的主持人余庆纯博士进行总结发言：十分感谢幕后支持本次研修平台的师生们，为研修平台保驾护航；感谢汪教授的多元统筹，感谢王芳老师、李春兰老师、金惠萍老师、万松强老师等导师们的鼓励与支持，感谢单元小组师生们的辛勤工作，一起书写 HPM 单元课例研修的精彩故事！

2020 年 8 月，在这个特殊的暑期里，HPM 网络学习共同体携手努力，融合线上与线下，跨越时间与空间，促进小组合作，推动共同研修，品味历史名题，提升专业发展！