上海HPM通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2022年第11卷第06期

《算法统宗》（1592）中的师生问难图

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首新语

中华优秀传统数学文化融入小学数学教学的若干路径

汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

中国传统数学有着十分悠久的历史，十进位值制记数法、九九表、分数的四则运算、小数的概念、比率理论、各种比例运算、盈不足术、正负术、多边形面积理论、圆周率等等，都是具有世界意义的成就。因此，今日小学数学课程与中国古代数学史（简称中算史）有着密切的关系。本文从新知引入、问题设计、方法运用和公式推导四个方面说明中算史上的概念、问题、方法等在小学数学教学中的具体应用。

1 新知引入

借鉴中算史中某些概念产生的动因，可以采用发生教学法来教授有关主题。

小数概念最早诞生于中国。刘徽（约 220-约 280）在注《九章算术》“开方术”时，针对开不尽的情形称：“不以面命之，加定法如前，求其微数。微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细。”刘徽在注释割圆术时，使用了大量的“微数”。如图 1，已知圆 O 的半径 $OA = 1$ 尺，则圆内接正六边形的边长 $AB = 1$ 尺，由勾股定理得 OD 的长度为 $\sqrt{75}$ 寸，约等于八寸六分六厘二秒五忽十分忽之四，于是又得 CD 的长度为一寸三分三厘九毫七秒四忽十分忽之六。用今天的话来说，即 $OD = 866025.4$ 忽，$CD = 133974.6$ 忽。从刘徽对“微数”的定义以及割圆术中的计算实例来看，小数产生的动因是“无名”，即“没有单位可用”。

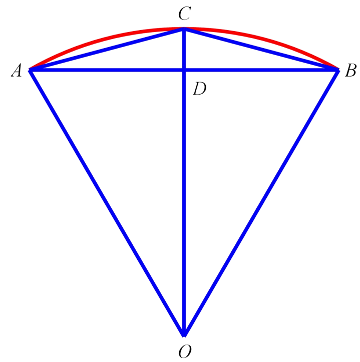


图 1 从圆内接正六边形边长推求正十二边形的边长

我们可以借鉴小数的诞生过程来引入小数概念。例如，篮球明星姚明的身高为 2 米 2 分米 6 厘米，即 226 厘米，那么，他的身高分别是几分米、几米呢？当“厘米”这个单位缺失时，原来位于个位的 6 现在“无家可归”了。教师从 1 厘米和 1 分米之间的关系出发，引导学生给 6 寻找一个“新家”，当学生找到这个“新家”，即“十分位”的时候，小数概念就应运而生了。类似地，当“厘米”和“分米”这两个单位都缺失的时候，原来分别位于个位和十位的 6 和 2 都“无家可归”了，教师可以从 1 厘米、1 分米和 1 米之间的关系出发，引导学生分别给 6 和 2 寻找“新家”，从而再引出百分位。

根据中国古代的数学文献，可以对“比”这一概念进行溯源。《九章算术》粟米章呈现的都是比例应用问题，其开篇列出“粟米之法”：“粟率五十，粝米三十，粺米二十七，……”，说的是不同种类粮食之间的交换比例。刘徽注称：“据粟率五、粝率三，是粟五而为一，粝米三而为一也。……又完言之知，粟五升为粝米三升，分言之知，粟一斗为粝米五分斗之三。”即 $\text{粟}:\text{粝}=5:3=1:\dfrac{3}{5}$。粟米章第一题为：“今有粟一斗，欲为粝米。问：得几何？”（1 斗= 10 升）解法是：“以粟求粝米，三之，五而一。”设可换粝米 x 升，则 $5:3=10:x$，故得 $x=\dfrac{10\times 3}{5}=6$ 升。可见，物物交换是“比”概念产生的动因之一。

“比”概念产生的另一个动因是物质分配。《九章算术》衰分章呈现的是配分比例应用问题，如：“今有牛、马、羊食人苗。苗主责之粟五斗。羊主曰：‘我羊食半马。’马主曰：‘我马食半牛。’今欲衰偿之，问：各出几何？”题目说的是牛、马、羊的主人按 $4:2:1$ 的份额比率来赔偿五斗粟米。

“比”概念产生的第三种动因是大小比较。《九章算术》方田章给出圆田问题：“今有圆田，

周三十步，径十步。问：为田几何？”问题蕴含周三径一的比率，即圆周长和直径之比为 3:1，刘徽指出，这个比率对应的是圆内接正六边形的周长与直径之比。他利用割圆术，求得圆周长与直径之比为 157:50；还利用正 $2n$ 边形和正 n 边形面积之差的规律，求得圆周长与直径之比为 3927:1250。

教师可以设计一个关于古代甲、乙两户人家之间关系的情境来引入比的概念：

• 甲、乙两户人家的人口各为 20 和 15，怎样表示两户人家的人口之间的关系？

• 甲、乙两户人家的耕地分别为 5.5 亩和 4.5 亩，怎样表示两户人家耕地面积之间的关系？

• 甲家欲用粟米（小米）换乙家的粝米（精米），已知 50 升的粟米可以换 30 升的粝米。怎样表示两种粮食的兑换关系？

• 假设按照人口数来纳税，两户人家共需纳税 300 钱，那么两户人家怎样分摊这笔税呢？

• 假设每户人家共有一长方形水池，水池的长为 800 尺，宽为 600 尺，如何表示水池长、宽之间的关系呢？

2 问题设计

根据数学史料来编制数学问题的策略有再现式、情境式、条件式、目标式、对称式、串联式和自由式七种。

再现式指的是直接采用历史上的问题，除了文字翻译以外，原题中的条件和目标保持不变。以《九章算术》为代表的中国古代数学典籍往往都是以问题集的形式呈现的，为今日小学数学教学提供了丰富多彩的问题。例如，《九章算术》中载有如下分数运算问题：

• 约分问题：“今有九十一分之四十九。问：约之得几何？”

• 合分问题：“今有三分之一 ，五分之二。问：合之得几何？”

• 减分问题：“今有九分之八 ，减其五分之一。问：余几何？”

• 乘分问题：“今有田广七分步之四，从五分步之三。问：为田几何？”

• 经分问题：“今有三人三分人之一 ，分六钱三分钱之一、四分钱之三。问：人得几何？”其中“合分”“减分”“乘分”和“经分”分别指分数的加法、减法、乘法和除法。

《孙子算经》载有如下趣味问题：

• 棋盘布子：“今有棋局，方一十九道，问用棋几何？”

• 河上荡杯："今有妇人河上荡杯，津吏问曰：杯何以多？妇人曰：家有客。津吏曰：客几何？妇人曰：二人共饭，三人共羹，四人共肉，凡用杯六十五，不知客几何？"

• 百鹿入城："今有百鹿入城，家取一鹿，不尽；又三家共一鹿，适尽。问：城中家几何？"

• 三鸡啄粟："今有三鸡共啄粟一千一粒，雏啄一，母啄二，翁啄四。主责本粟，三鸡主各偿几何？"

• 鸡兔同笼：今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何。

• 禽兽问数：今有兽六首四足，禽二首二足。上有七十六首，下有四十六足，问禽兽各几何。

《算法统宗》载有许多以诗歌来表达的趣味问题，如：

• 老人问甲：有一公公不记年，手持竹杖在门前。借问公公年几岁？家中数目记分明。一两八铢泥弹子，每岁盘中放一丸。日久岁深经雨湿，总然化作一泥团。秤重八斤零八两，加减方知得几年。（1 斤 = 16 两，1 两 = 24 铢）

• 僧分馒头：一百馒头一百僧，大和三个更无争。小和三人分一个，大小和尚得几丁。

• 排鱼求数：三寸鱼儿九里沟，口尾相衔直到头。试问鱼儿多少数，请君对面说因由。（1 里 = 360 步，1 步 = 15 寸）

• 苏武牧羊：当年苏武去北边，不知去了几周年。分明记得天边月，二百三十五番圆（已知 19 年 7 闰）

• 行程问日：三藏西天去取经，一去十万八千程。每日常行七十五，问公几日得回程。

• 房客分银：隔墙听得客分银，不知人数不知银。七两分之多四两，九两分之少半斤。（1 斤 = 16 两）

• 牧童分杏：牧童分杏各争竞，不知人数不知杏。三人五个多十枚，四人八枚两个剩。

• 狐鹏共舞：今有狐狸一头九尾，鹏鸟一尾九头。只云前有七十二头，后有八十八尾，问二禽兽各若干。

• 龟鳖同池：三足团鱼六眼龟，共同山下一深池。九十三足乱浮水，一百二眼将人窥。或出没，往东西，倚栏观看不能知。有人算得无差错，好酒重酌赠数杯。

南宋数学家杨辉（约 1238-约 1298）在《田亩比类乘除捷法》、明代数学家吴敬在《九章

算法比类大全》中、明代数学家王文素在《算学宝鉴》中相继记载了一些特殊平面图形的面积问题（图 2），如：

• 今有梭田，中阔八步，正长十二步，问田几何；

• 今有腰鼓田，两头各广八步，中广四步，正从一十二步，问田几何；

• 三广田，一头广四步，一头广六步，中广八步，正长一十二步，问田几何；

• 有曲尺田，内曲十二步，外曲二十六步，两头各广七步，问田几何。

• 有箭舌田，两畔各长八步，中长四步，阔十二步，问田几何。

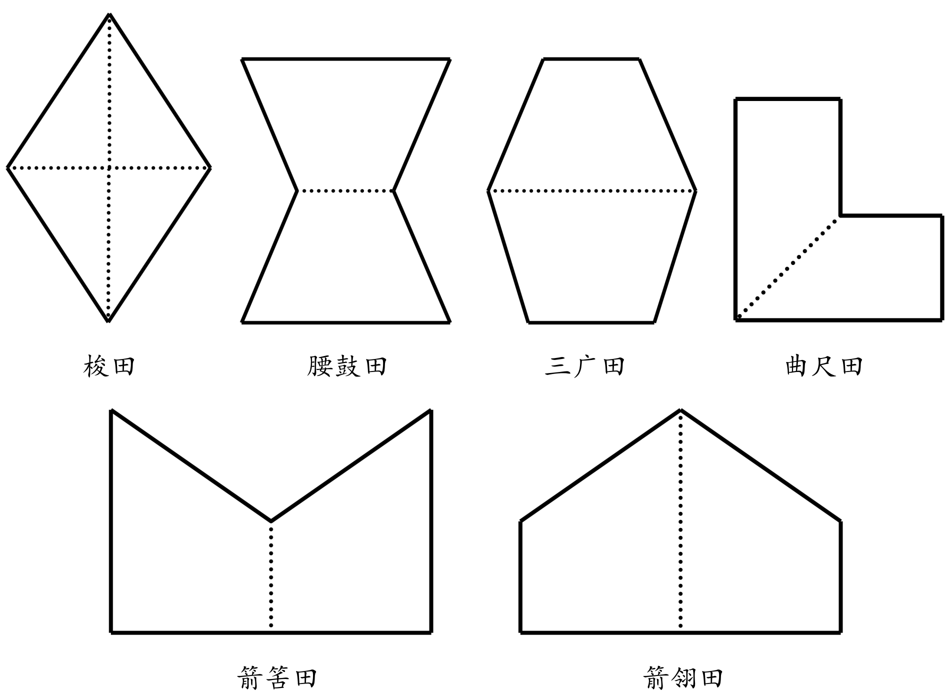
• 有箭翎田，中长八步，东西两畔各长四步，阔一十二步，问田几何。

• 偏梭田，长四十步，左畔阔二十步，右畔阔十步，问田几何。

• 四广田，南广十四步，南中广二十一步，北中广十二步，北广十六步，长六十步。问：为田几何？

• 五广田，南广十三步，南中广十八步，正十二步北中广十九步，北广十七步，长六十步。问：为田几何？

其中，梭田（菱形）和偏梭田（平行四边形）为两个三角形的组合，腰鼓田、三广田、曲尺田、箭筈田、箭翎田、四广田、五广田均为两个或多个梯形的组合。



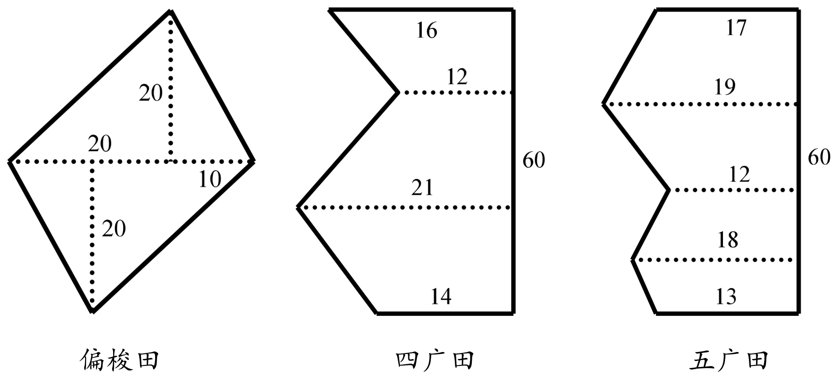


图 2 杨辉《田亩比类乘除捷法》和王文素《算学宝鉴》中的面积问题

教师还可以呈现历史上的一些错误面积公式，让学生感悟数学的演进性。如北周甄鸾（公元 6 世纪）在《五曹算经》中给出腰鼓田面积算法：取三广的平均值，再乘以正长；四不等田（四边两两不相等的四边形）面积算法：两组对边的平均值相乘，上述两个公式都是错误的，杨辉、王文素等纠正了前人的错误。

明代数学家程大位（1533-1606）在《算法统宗》中给出了各种各样的图形（图 3），这些图形可由两个基本图形组合或从一个图形组合挖去另一个图形而形成的，教师据此可以设计有关面积问题。

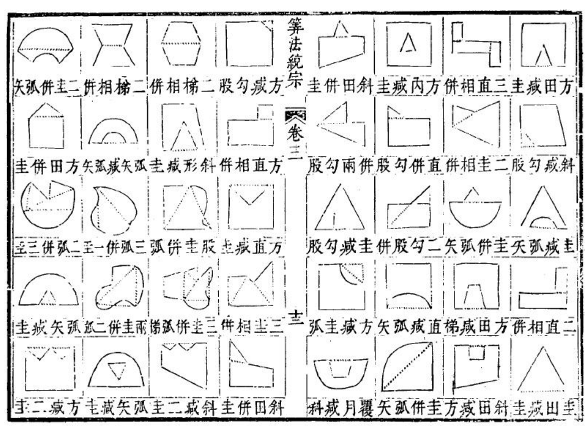


图 3 《算法统宗》书影

根据中国古代数学史料，我们可以编制大量新的数学问题。如：根据鸡兔同笼问题，可以编制以下条件式问题：

• 小明在某个家具店里看到了两种凳子，一种有三只脚，一种有四只脚。他数了一下凳子，共有 25 张；再数了一下脚，共有 90 只。问：三只脚和四只脚的凳子各有几张？

• 三轮车和自行车共有 32 辆，轮子共有 75 个。问：自行车和三轮车各有几辆？

• 育才小学五年级和六年级共有 750 名学生，学校安排核酸混合检测，五年级 10 人共 1 管，六年级 5 人共 1 管，共用了 110 个试管。问：五、六年级各有多少学生？

根据中国古代益智游戏工具——七巧板（图 4），可以编制各类自由式问题。

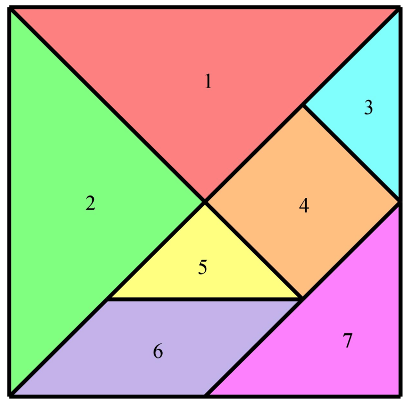


图 4 七巧板

问题 1：用七巧板分别拼一个三角形、梯形、平行四边形；

问题 2：组块 1-7 的面积分别是整个正方形面积的几分之几？

问题 3：组块 1、3 和 7 的面积之和是整个正方形面积的几分之几？

问题 4：组块 4、6 和 7 的面积有怎样的关系？

问题 5：在七巧板中，找出所有的轴对称图形。

问题 6：你能用七巧板拼一个新的轴对称图形吗？

3 方法运用

中算史为数的运算以及各类算术问题的求解提供了丰富的素材和多元的方法。

《九章算术》是世界上最早给出分数四则运算的数学文献，分数的加法、减法、乘法和除法分别称为“合分”“减分”“乘分”和“经分”。

• 合分术：“母互乘子，并以为实。母相乘为法。实如法而一。”（$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}$）

• 减分术：“母互乘子，以少减多，余为实。母相乘为法。实如法而一。”（$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}-\frac{ad}{ac}=\frac{bc-ad}{ac}$）

• 乘分术：“母相乘为法，子相乘为实。实如法而一。”（$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$）

• 经分术：“以人数为法，钱数为实，实如法而一。有分者通之，重有分者同而通之。”（刘徽注称：“以法分母乘实，实分母乘法”，即 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\div\frac{bc}{bd}=\frac{ad}{bc}$。）

在分数四则运算的教学中，教师可以制作微视频，追溯中国古代的运算法则；其中，在分数除法教学中，教师还可以让学生探究：为什么两个分数相除，结果会等于除数的倒数与被除数相乘？进而将学生的解释与古人的方法加以对比。

刘徽在《九章算术》注中指出，通分是“齐同术”的一种：“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。同者，相与通同，共一母也；齐者，子与母齐，势不失本数也。”而“齐同术”是一种有着广泛应用的通法：“然则齐同之术要矣：错综度数，动之斯谐，其犹佩觿解结，无往而不理焉。乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎。”以下我们来看“齐同术”在解不同问题时的一些应用。

• 行程问题

《九章算术》均输章：“今有凫起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海。今凫、雁俱起，问：何日相逢？”利用齐同术，计算相同天数中凫、雁共同飞行的距离：凫 63 天飞行南海-北海距离的 9 倍，雁 63 天飞行南海-北海距离的 7 倍。二鸟同时出发，经 63 天，共飞行南海-北海距离的 16 倍，因此，从出发到第一次相逢，需要 $\frac{63}{16}=3\frac{15}{16}$ 日。

• 工程问题

《九章算术》均输章：“今有一人一日为牝瓦三十八枚，一人一日为牡瓦七十六枚。仅令一人一日作瓦，牝、牡相半。问：成瓦几何？”利用齐同术，一人二日制牝瓦 76 枚、一人一日制牡瓦 76 枚，故一人 3 日制牝瓦和牡瓦各 76 枚，于是一人一日制牝瓦和牡瓦各 $25\frac{1}{3}$ 枚。

• 注水问题

《九章算术》均输章：“今有池，五渠注之。其一渠开之，少半日一满；次，一日一满；次，二日半一满；次，三日一满；次，五日一满。今皆决之，问：几何日满池？”利用齐同术，计算各水渠单独注水相同日数的满池次数（表 1）：单独注水 15 日，各渠满池次数分别为 45、15、6、5、3，因此，五渠共同注水 15 天，满池次数为 74，故满池 1 次需 $\frac{15}{74}$ 日。

表 1 各水渠单独注水相同日数的满池次数

水渠序号	日数	满池次数	日数	满池次数	日数	满池次数
1	$\frac{1}{3}$	1	1	3	15	45
2	1	1	1	1	15	15
3	$2\frac{1}{2}$	1	5	2	15	6
4	3	1	3	1	15	5
5	5	1	5	1	15	3

• 荡杯问题

上文提到的《孙子算经》“河上荡杯”问题也可用齐同术来解。考虑相同人数分别用碗数：12 人共 6 碗饭、4 碗羹、3 碗肉，共用 13 个碗，已知用碗总数为 65，故知人数为 60。

• 盈亏问题

《九章算术》盈不足章呈现的是一类盈亏问题，如：“今有共买鸡，人出九，盈一十一，人出六，不足十六。问：人数、鸡价各几何？”利用齐同术，求盈亏钱数相同时每人所出钱数，具体步骤如下：

$$\begin{pmatrix} 人出 & 鸡价 & 盈/亏 \\ 9 & 1 & 11 \\ 6 & 1 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{齐同术} \begin{pmatrix} 人出 & 鸡价 & 盈/亏 \\ 144 & 16 & 176 \\ 66 & 11 & 176 \end{pmatrix} \xrightarrow{通计}$$

$$\begin{pmatrix} 人出 & 鸡价 & 盈/亏 \\ 210 & 27 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{今有术} \begin{pmatrix} 人出 & 鸡价 & 盈/亏 \\ \frac{70}{9} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

故由“今有术”（比例算法）知，每人出钱 $\frac{210}{27}=\frac{70}{9}$ 时总钱数恰好等于鸡价。因此，每人出钱比 $\frac{70}{9}$ 多 $9-\frac{70}{9}=\frac{11}{9}$ 时，总钱数比鸡价多出 11，故人数为 9，鸡价为 70。

4 公式推导

中国古代的多边形面积理论建立在两个公理的基础之上。一是长方形面积公式，二是出入相补原理，即一个图形从一处移动到另一处，面积不变，且将一个图形分割成若干部分，每一部分面积之和等于原图形面积。有了这两个公理，任意一个多边形的面积问题都可以得到解决，

因而中国古代的多边形面积理论是完备的。例如，《九章算术》给出了“圭田”（三角形）面积公式“半广以乘正从”，即半底乘以高，刘徽的推导方法如下：“半广知，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广。”如图 5，通过“以盈补虚”（即出入相补），将三角形转化为矩形，从而得到三角形面积公式。

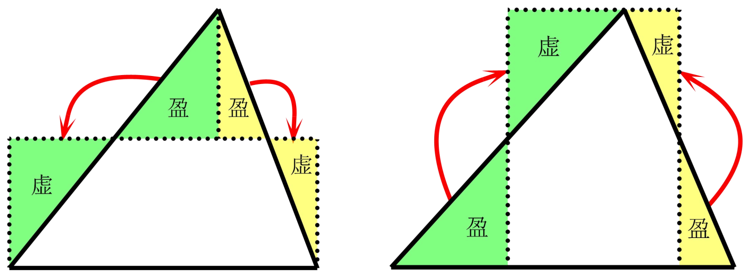


图 5 用“以盈补虚”法推导三角形面积公式

类似地，《九章算术》还给出了梯形面积公式，其中直角梯形面积公式为“并两邪而半之，以乘正从若广”或“半正从若广，以乘并”，即上、下底之和的一半乘以高，或“高的一半乘以上、下底之和”。刘徽注称：“并而半之者，以盈补虚也。”如图 6，通过“以盈补虚”，将直角梯形转化为矩形，从而得到直角梯形面积公式。同样的方法可用于一般梯形。

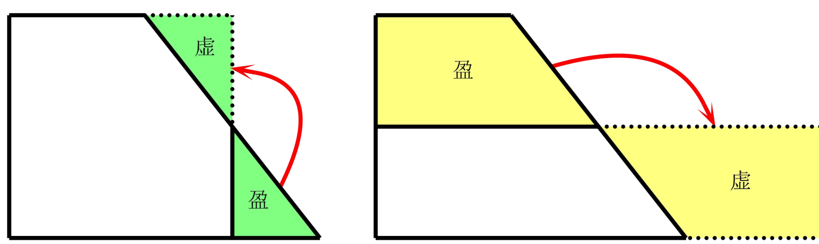


图 6 用“以盈补虚”法推导直角梯形面积公式

杨辉在《田亩比类乘除捷法》中还用“补图”方法来推求三角形、菱形、梯形的面积，如图 7 所示。

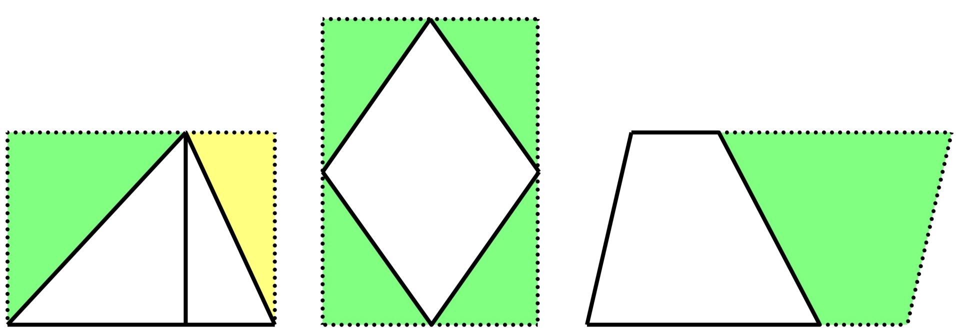


图 7 利用“补图”法推导三角形、菱形和梯形面积公式

教师可以设计情境，引导学生探究三角形、平行四边形、梯形面积的计算公式，并将学生的方法与中国古代数学家刘徽和杨辉的方法进行比较，从而让学生跨越时空与数学教学对话，增强数学学习的自信心。

5 结 语

现行人教版小学数学教科书在“你知道吗”栏目中已经呈现了较为丰富的中算史素材，但正文中鲜有体现。近年来，HPM 视角下的小学数学教学开始受到越来越多一线教师的关注，许多教师希望通过数学史的融入来提升教学的质量，更好地落实“立德树人”的目标，但在实践中遇到很多困难，最主要的困难集中在“融入什么”和“如何融入”两个问题上。要将中华优秀传统数学文化融入课堂教学，教师需要深入学习和研究中算史，收集和研读有关素材，并运用不同方式对有关素材进行裁剪和加工。

中国古代数学文化源远流长、博大精深，本文所举只是沧海一粟。我们有理由相信，教育取向的中算史研究、中算史融入小学数学教学的实践和评价都将是未来 HPM 领域的重要课题，“融入中算史的数学教学”也将成为小学数学教师在职培训或网络研修的重要主题之一。

目 录

CONTENT

历史研究

几何视角下的半角公式

刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

半角公式是三角变换中非常重要的公式，其在三角函数求值和恒等变换中具有不可替代的作用。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》指出，要求学生运用已有三角恒等变换公式推导出半角公式，此外，在三角恒等变换的教学中，可以采用不同的方式得到三角恒等变换基本公式[1]。反观已有教学，一些教师通过二倍角的变形公式推导半角的正弦、余弦和正切公式[2]，这一推导方法虽然沟通起不同三角恒等变换公式的联系，却忽视了三角学从属于几何学范畴的历史事实。

三角变换公式很早就为数学家所熟知，古希腊亚历山大后期重要数学家、天文学家和地理学家托勒密（C. Ptolemy, 约 85-约 165）给出托勒密定理，由此证明两角和与差的正弦公式、半角公式，并在此基础上编制正弦表用于天文测量[3]。10 世纪阿拉伯数学家阿布·韦发（Abu'l-Wafā, 940-998）是数学史上首次使用所有六种三角函数的数学家，和托勒密一样，为了制作弦表，他建立了和角、差角、倍角和半角公式[4]。

历史是过去的现实，现实是未来的历史。对历史的每一次回眸，都是一次初心的叩问、精神的洗礼、思想的升华。只有不忘来路，才能走好正路，才能开辟新路。三角学作为现代中学数学教育内容的重要组成部分，中学数学教师有必要了解相关三角学的发展史。翻开历史的画卷，数学家对半角公式的几何证法比比皆是，但迄今我们对此知之甚少。鉴于此，本文从几何的视角，对历史上的半角公式的内容进行考察，从中总结出半角公式的各种几何证明方法，以供教学参考。

2 托勒密的方法

托勒密在制作弦表时给出了半角公式的一个简单的几何模型[5]。如图 1，以单位长度 AB 为直径作圆，在圆上任意取点 D，$\angle DAB=\alpha$，作$\angle DAB$ 的平分线，交圆于点 C，连结 BC、CD。过点 C 作 AB 的垂线，垂足为点 F，在 AB 上取点 E，使得 $EF=FB$。因 $EC=BC=CD$，$\angle DAC=\angle CAE$，$AC=AC$，注意到$\angle AEC$ 和$\angle ADC$ 均为钝角，故$\triangle CAD\cong\triangle CAE$，于是有 $AD=AE$。在$\triangle ABC$ 中，由射影定理，有

$$BC^2=BF\cdot AB=\frac{1}{2}BE\cdot AB=\frac{1}{2}(AB-AE)\cdot AB=\frac{1}{2}(AB-AD)\cdot AB,$$

即

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha) \qquad (1)$$

类似地，

$$AC^2=AF\cdot AB=\frac{1}{2}(AB+AE)\cdot AB=\frac{1}{2}(AB+AD)\cdot AB,$$

即

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha) \qquad (2)$$

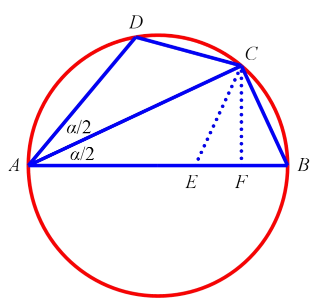


图 1 托勒密的方法

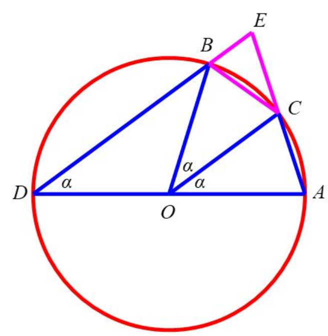


图 2 阿布·韦发的方法

3 阿布·韦发的方法

阿布·韦发采用了新的方法推导半角公式[4]。如图 2，在单位圆 O 中，DA 为直径，$AC=CB$，DB 与 AC 的延长线交于点 E。易证$\triangle OAC\backsim\triangle CEB$，于是有

$$\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{2-2\cos\alpha},$$

整理得公式（1）。

4 射影方法

如图 3，Nichols（1811）以 AD 为直径作单位圆 O，在圆上任取一点 B，$\angle AOB=\alpha$，过点 B 作 AD 的垂线，垂足为 E，连结 OB、AB 和 BD。过圆心 O 作 AB 的垂线，垂足为 C。

在 Rt△ABD 中，由射影定理，得 $AB^2=AE\cdot AD$ 及 $DB^2=DE\cdot AD$，于是得 $AE=\frac{AB^2}{AD}=2AC^2$，$DE=\frac{DB^2}{AD}=2OC^2$，因 $AE=1-\cos\alpha$，$DE=1+\cos\alpha$，$AC=\sin\frac{\alpha}{2}$，$OC=\cos\frac{\alpha}{2}$，故得公式（1）和（2）。[6]

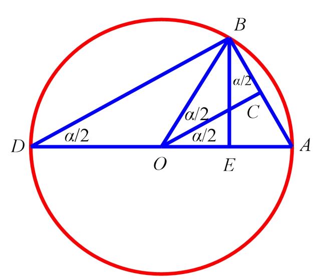


图 3 射影定理法

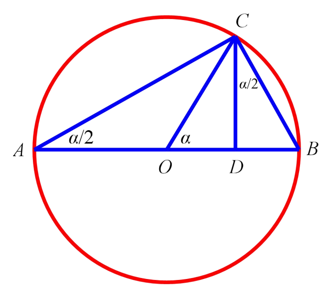


图 4 定义法

Richards（1878）运用射影定理，给出了类似的证明方法[7]。在 Rt△BED 和 Rt△BEA 中，分别有

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{BE^2}{BD^2}=\frac{DE\cdot EA}{DE\cdot DA}=\frac{EA}{DA}=\frac{OA-OE}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha),$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{BE^2}{AB^2}=\frac{DE\cdot EA}{DA\cdot EA}=\frac{DE}{DA}=\frac{OD+OE}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)。$$

同样的证明也适用于 $\angle AOB$ 为钝角的情形。

5 定义法

如图 4，Wood（1885）以 AB 为直径作单位圆 O，C 为圆上异于 A 和 B 的任意一点，∠

$BOC=\alpha$，过点 C 作 AB 的垂线，垂足为 D。在 Rt△CDB 和 Rt△CDA 中，分别有

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{BD}{BC}=\frac{1-\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{BD}{CD}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{3}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{AD}{AC}=\frac{1+\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{CD}{AD}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{4}$$

由第一和第三个等式分别得公式（1）和（2）。将两个半角正切公式（3）和（4）相乘，还可以得到另一公式[8]

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{5}$$

Rider & Davis（1923）则由勾股定理计算出图 4 中的 AC：

$$AC^2=\left(1+\cos\alpha\right)^2+\sin^2\alpha=2+2\cos\alpha\,,$$

于是得[9]

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\alpha}{2+2\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\,,$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\left(1+\cos\alpha\right)^2}{2+2\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\,。$$

6 余弦定理法

仍如图 4，Moritz（1915）在△BOC 和△AOC 中分别利用余弦定理得到[10]

$$BC^2=2-2\cos\alpha\ ,$$

$$AC^2=2+2\cos\alpha\ 。$$

于是，在 Rt△ACB 中有

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\frac{1-\cos\alpha}{2}\,,$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=\frac{1+\cos\alpha}{2}。$$

McCarty（1920）抛弃单位圆，直接从等腰三角形中得到半角公式。如图 5，在等腰△ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=\alpha$，作$\angle BAC$ 的平分线 AD，则有[11]

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{CD^2}{AC^2}=\frac{BC^2}{4AC^2}=\frac{2AC^2-2AC^2\cos\alpha}{4AC^2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}。$$

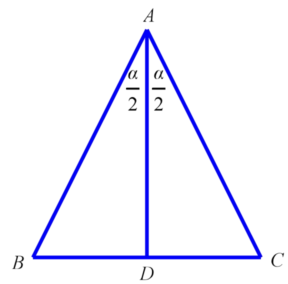


图 5 余弦定理方法之二

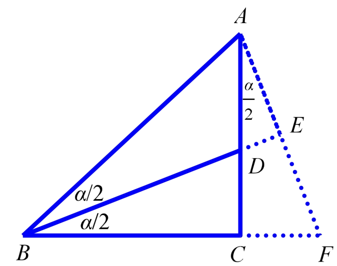


图 6 角平分线法

7 角平分线法

如图 6，在 Rt△ABC 中，有$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=\alpha$。Todhunter（1866）作$\angle ABC$ 的平分线，交 AC 于点 D。过 A 作 BD 的垂线，分别交 BD 和 BC 的延长线于点 E 和 F。[12]

令 $AB=c$，则 $AC=c\sin\alpha$ 及 $BC=c\cos\alpha$。由 $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{BA}{BC}$ 得

$$\frac{c\sin\alpha-CD}{CD}=\frac{c}{c\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha},$$

于是得

$$CD=\frac{c\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}。$$

在 Rt△DBC 中有

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{CD}{BC}=\frac{\dfrac{c\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{c\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

即

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

故得

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\cos\alpha}{2},$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}。$$

还可以用另一种方法来推导半角公式。仍如图 6，在 Rt△ACB 中，由角平分线的性质得

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{AD}=\frac{AB+BC}{AC}=\csc\alpha+\cot\alpha \tag{6}$$

而在 Rt△ACF 中，

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{CF}{AC}=\frac{BF-BC}{AC}=\frac{AB-BC}{AC}=\csc\alpha-\cot\alpha \tag{7}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{CF}{AF}=\frac{c-c\cos\alpha}{2c\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

再由 $\sin^2\frac{\alpha}{2}$ 求 $\cos^2\frac{\alpha}{2}$。

8 比例法

如图 7，Whitaker（1898）在 Rt△ABC 中作 $\angle ABC$ 的平分线，交 AC 于点 D，过点 C 作 $CE//DB$，交 AB 的延长线于点 E，过点 B 作 $BF\perp CE$，垂足为点 F。在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得 $AC^2=AB^2-BC^2$，两边同时除以 AC^2 得

$$1=\csc^2\alpha-\cot^2\alpha \tag{8}$$

由三角形一边的平行线性质定理得公式（6），即

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{BC}{DC}=\frac{BE}{DC}=\frac{AE}{AC}=\frac{AB}{AC}+\frac{BC}{AC}=\csc\alpha+\cot\alpha=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

又由 $\frac{EC}{BD}=\frac{AE}{AB}$ 及 $\frac{DC}{BE}=\frac{AC}{AE}$，两式相乘得 $\frac{EC}{BD}\cdot\frac{DC}{BE}=\frac{AC}{AB}$，于是

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha \tag{9}$$

将公式（8）除以（6）式可得公式（7）；将公式（7）与（9）相乘可得半角正弦公式 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$；将公式（6）与（9）相乘可得半角余弦公式 $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$。[13]

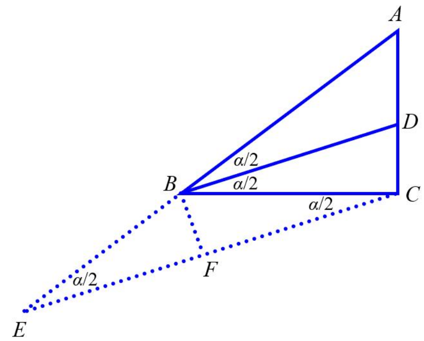


图 7 比例法

9 坐标法

如图 8(a)，Vance（1954）在单位圆 O 上任取一段弧 $\overset{\frown}{PP'}$，$\overset{\frown}{PP'}$ 所对圆心角的度数为α，点 A 是 $\overset{\frown}{PP'}$ 的中点。以 OA 为 x 轴，垂直于 OA 的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系。由此可以写出点 P 和点 P' 的坐标为 $P\left(\cos\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\alpha}{2}\right)$，$P'\left(\cos\frac{\alpha}{2},-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$，于是 $PP'=2\sin\frac{\alpha}{2}$。因为 $OP=OP'=1$ 及 $\angle POP'=\alpha$，故

$$\left(PP'\right)^2=OP^2+\left(OP'\right)^2-2\cdot OP\cdot OP'\cdot\cos\alpha=2-2\cos\alpha,$$

于是得 $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$。

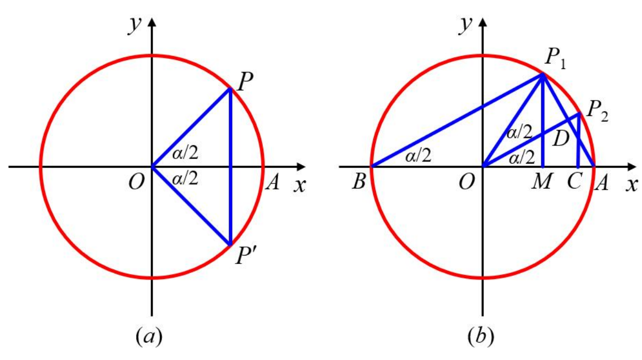


图 8 坐标法

如图 8(b)，在单位圆 O 上任取一段弧 $\overset{\frown}{AP_1}$，$\overset{\frown}{AP_1}$ 所对圆心角的度数为α，点 P_2 是 $\overset{\frown}{AP_1}$ 的中点。以 OA 为 x 轴，垂直于 OA 的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系。连结 BP_1、OP_1、AP_1 及 OP_2，AP_1 与 OP_2 交于点 D，过点 P_1、P_2 分别作 x 轴的垂线，垂足为点 M、C。

因为点 D 是线段 AP_1 的中点，且点 A 和点 P_1 的坐标分别为 $A(1,0), P_1(\cos\alpha,\sin\alpha)$，故点 D 坐标为 $D\left(\dfrac{1+\cos\alpha}{2},\dfrac{\sin\alpha}{2}\right)$，由两点间距离公式知

$$AD^2=\left(\frac{\cos\alpha-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2=\frac{1-\cos\alpha}{2}。$$

在 Rt△OCP_2 和 Rt△OAD 中，有 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{CP_2}{OP_2}=\dfrac{AD}{OA}$，故 $AD=CP_2$，又因为点 P_2 的坐标为 $P_2\left(\cos\dfrac{\alpha}{2},\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$，所以 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$。

同理可得

$$OD^2=\left(\frac{\cos\alpha+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2=\frac{1+\cos\alpha}{2},$$

由 $OC=OD$，故 $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$。此外，因为 O、D、P_2 三点共线，所以 $k_{OD}=k_{OP_2}$，即 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$。[14]

10 结论与启示

综上所述，历史上出现了多种半角的正弦、余弦、正切公式的几何证法，包括托勒密的方法、阿布·韦发的方法、射影方法、定义法、余弦定理法、角平分线法、比例法和坐标法八类，上述方法涉及很多数学知识，基于此，我们可以得到半角公式几何证法的概念图（图 9）。

从概念图中，我们可以得到如下教学启示。

其一，以形辅数，培养学生直观想象素养。三角变换公式本身形式简洁、具有美感，在三角函数计算和应用等问题中有着重要应用，但由于公式众多且过于抽象，因而学生对这部分公式的记忆和理解存在困难。在实际教学中，为帮助学生深入理解和记忆公式，教师可以依托几何图形对半角公式进行证明，通过不断地进行数与形的交错，让学生在数与形的转换中不断地进行思考，进一步发挥图形的直观作用。

其二，构建联系，促进学生认知结构生长。任何数学知识都不是孤立存在的，前后知识之间存在着联系的密切，因此教师需要引导学生建构知识结构体系，从整体上把握某一知识点。

在半角公式的教学中，教师除了引导学生运用已经学习过两角和与差的正弦、余弦、正切公式及二倍角公式，从代数的角度推导半角公式，还可以构造几何图形从而抽象出其中蕴含的数量关系，进而完成证明。此外，对于课堂上没有涉及到证明方法，教师可以将其作为课外拓展资料。这些数学思想方法无疑开阔了学生的视野，丰富了学生原有的证明方法，促进学生对知识的联系与理解，体会这些证明方法的巧妙之处，有助于提高学生的数学素养。

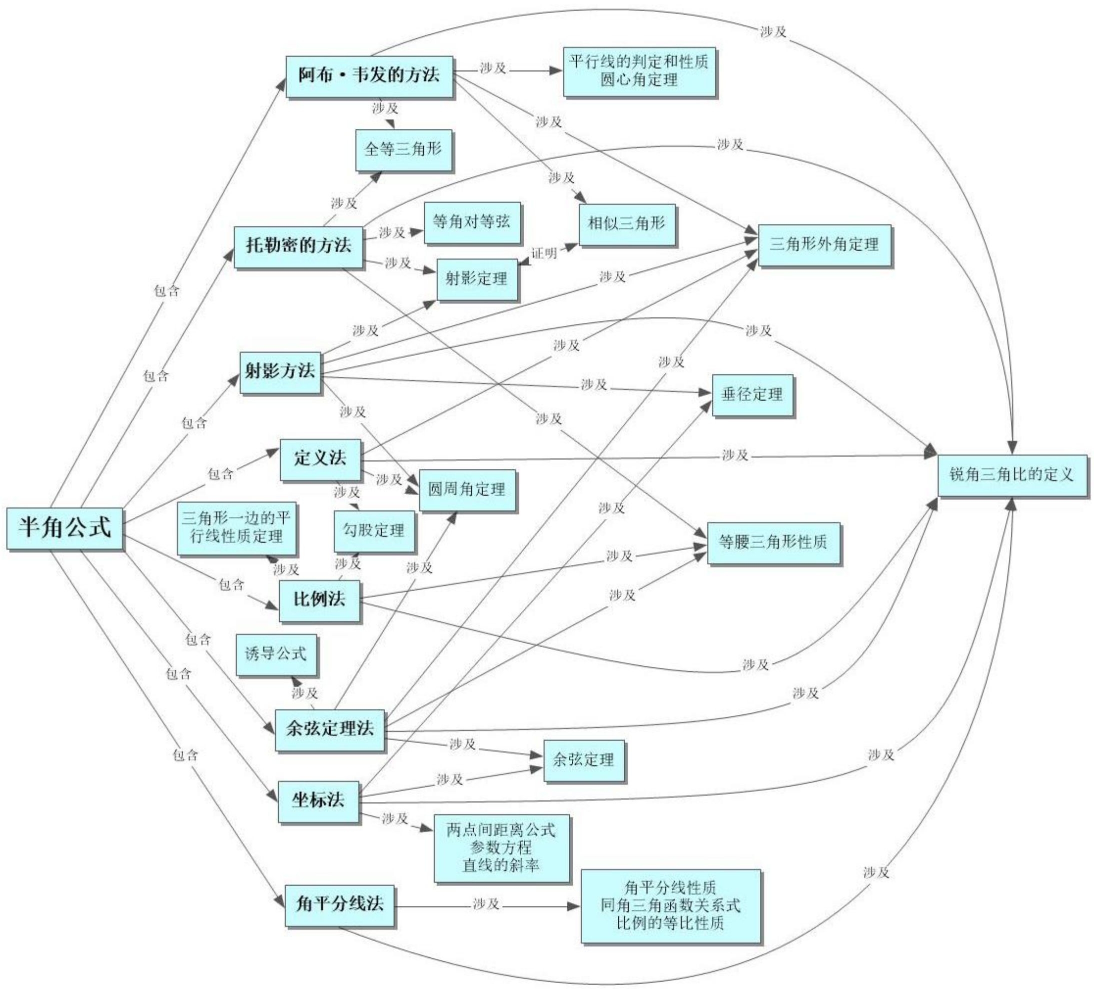


图 9 半角公式几何证法的概念图

其三，小组合作，推动学生思维之花绽放。课堂不是教师自我展示的舞台，而是师生、生生之间交流互动、探究知识的舞台。数学课堂应“动静结合”，在学习半角公式时，不仅要让学生“动”起来，通过小组合作，从不同角度探究半角公式的各种证明方法，还要让学生“静”下心来，思考每一步证明过程成立的依据。长此以往，探究的过程不仅有利于激发学生的创新

意识，培养学生的数学思维，同时，教师通过将学生们的与历史上数学家的方法进行对照，有助于培养学生积极的数学情感、信念、品行和操守。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 22.

[2] 肖奋勇. 《简单的三角恒等变换》教学设计[J]. 读写算, 2019(8): 176.

[3] 胡炳生. 托勒密与托勒密定理[J]. 中学数学教学, 1994(01): 28-29.

[4] 汪晓勤, 吴晨昊. 阿布·韦发与三角公式[J]. 中学数学月刊, 2013(08): 47-50.

[5] 彭思维, 汪晓勤. 基于托勒密定理的平面三角知识网络[J]. 中小学数学(高中版), 2020(Z2): 120-124.

[6] Nichols, F. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Philadelphia: F. Nichols, 1811: 10, 37.

[7] Richards, E. L. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: D. Appleton & Co., 1878: 61-64.

[8] Wood, De V. *Trigonometry, Analytical, Plane & Spherical*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1885: 51-52.

[9] Rider, P. R. & Davis, A. *Plane Trigonometry*[M]. New York: D. van Nostrand Co., 1923: 152-153.

[10] Moritz, R. E. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915: 218.

[11] McCarty, R. J. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. Chicago: American Technical Society, 1920: 33.

[12] Todhunter, I. *Trigonometry for Beginners*[M]. London & Cambridge: Macmillan & Co., 1866: 16-19.

[13] Whitaker, H. C. *Elements of Trigonometry*[M]. Philadelphia: D. Anson Partridge. 1898: 28-29.

[14] Vance, E. P. *Trigonometry*[M]. Cambridge: Addison-Wesley Publishing Co., 1954: 96-97.

美英早期三角学教科书中的特殊角三角函数

朱轶萱

（苏州大学数学科学学院，苏州 215006）

1 引 言

三角学萌芽于人类对天文现象的研究，比如从定性到定量地刻画恒星或行星的位置等，由此产生了一系列天文数值计算问题，如通过制定三角函数表以求弧所对弦长。公元 2 世纪，托勒密（C. Ptolemy，约 85-约 165）在其著作《天文学大成》中绘制了现存最早的，有明确构造原理的弦表，从特殊角，如 36°，60°，72°及 90°的弦长入手，运用和角、差角、半角公式推导更一般的角的弦长[1]。可见，求特殊角的三角函数值是三角学早期研究的重要问题之一。

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》要求学生“知道 30°，45°，60°角的三角函数值”，对于其余锐角只要求“会使用计算器由已知锐角求它的三角函数值”[2]。教学实践中，大部分教师仅仅带领学生通过构造特殊三角形探索 30°，45°，60°角的三角函数值，忽略了 36°，72°等其余特殊角。事实上，从古人的工作中不难窥见，不少特殊角三角函数值的求解过程充分体现了推导方法的多样性、定理应用的灵活性和几何构造的直观性，若加以整理定能成为初中乃至高中数学课程的有益补充。

鉴于此，本文聚焦特殊角三角函数，对 18 世纪中叶至 20 世纪中叶的美英三角学教科书进行考察，试图回答以下问题：早期三角学教科书中出现了哪些特殊角？如何推导其三角函数值？特殊角三角函数有何应用？以期为课堂教学提供更加丰富的素材。

2 早期教科书的选取

本文选取 1749-1955 年间出版的 111 种美英三角学教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

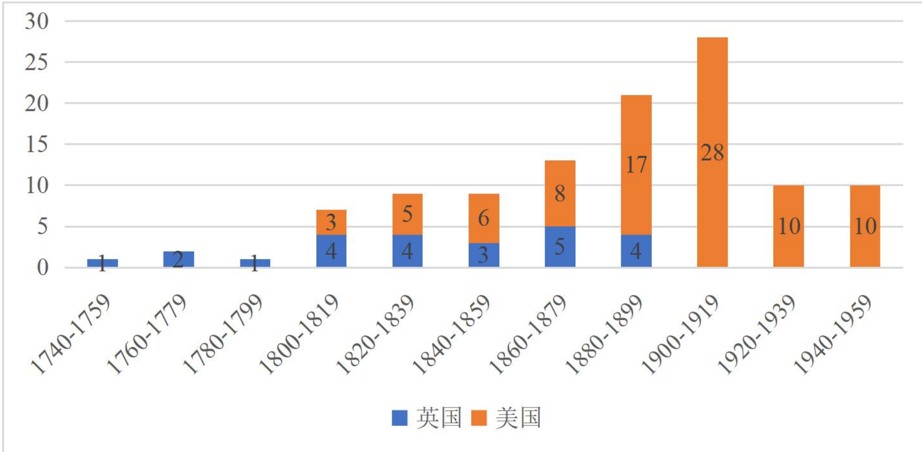


图 1 111 种美英早期三角学教科书出版时间分布

进一步，本文梳理了早期教科书中具有完整三角函数值推导过程的特殊角及其出现频率，得到 3°，9°，15°，18°，30°，36°，45°，54°，60°，72°，75°共 11 个特殊角[1]，出现频率分布如图 2。

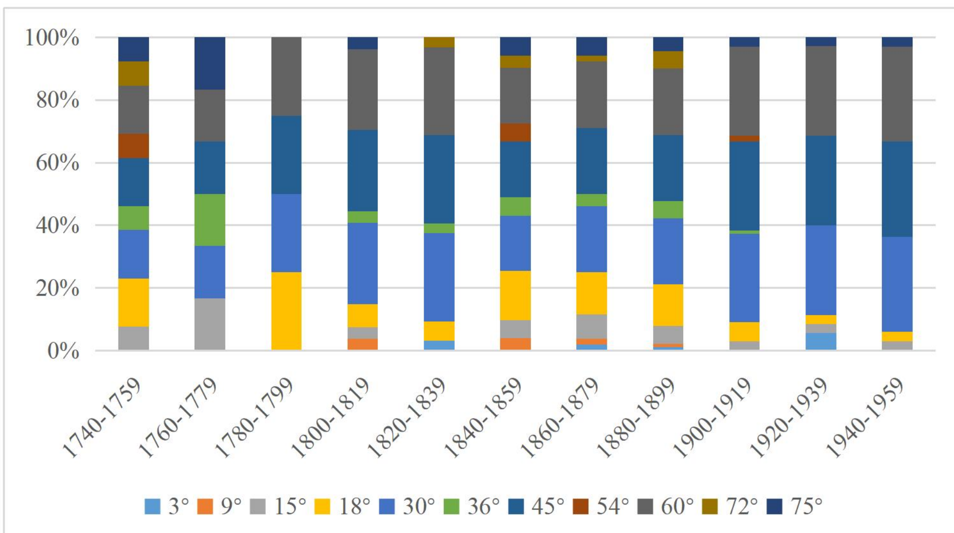


图 2 特殊角出现频率分布

[1] 通过诱导公式可将任意角的三角函数转化为锐角三角函数，因此本文只统计了锐角出现的频率。

3 特殊角三角函数值推导

3.1 30°，45°，60°角

在考察的 111 种美英三角学教科书中，107 种计算了 30°，45°，60°角的三角函数值，它们在 18-19 世纪的教科书中大多被穿插在知识点之间，以例题或练习形式出现；进入 20 世纪，教科书中“特殊角的三角函数值（三角比）”内容逐渐被单列成节，它们也随之成为独立的知识点。

就推导方法而言，绝大多数教科书不约而同地采用了几何的推导方法：借助特殊三角形与勾股定理得到它们的三角函数值，这与当今教材的处理方式相同，简单直观。Lardner（1828）另辟蹊径，给出了一种代数推导方法：利用 45°与自身互余，结合同角三角关系得到 $\sin^2 45°+\sin^2\left(90°-45°\right)=1$；利用二倍角公式 $\sin 60°=2\sin 30°\cos 30°$，借助 30°与 60°的互余关系得 $\sin 60°=2\cos 60°\sin 60°$，从而求得三个特殊角度的三角函数值[3]。这种方法虽巧妙，但与当今教科书编排顺序相悖。

3.2 18°角

41 种教科书讨论了 18°角的三角函数值，频次仅次于最常见的三个特殊角，且在 19 世纪出现最为频繁。推导方法可以分为几何方法和代数方法两类，其中 28 种采用了代数方法，15 种采用了几何方法，2 种教科书同时采用了两种方法。部分教科书还进一步推导出与其相关的 9°，36°等特殊角的三角函数值。

3.2.1 代数方法

方法一：利用特殊恒等式

最早出现 18°角的两种教科书均利用特殊恒等式 $\sin\left(45°-A\right)=\sqrt{\dfrac{1-\sin 2A}{2}}$ 求解 18°角的三角函数值。Emerson（1749）首先根据两角和差公式、同角三角函数基本关系和二倍角公式构造出恒等式

$$\sin^2(45°+A)+\sin^2(45°-A)=\sin^2 A+\cos^2 A=1,$$

$$\sin^2(45°+A)-\sin^2(45°-A)=2\sin A\cos A=\sin 2A,$$

两式相减得

$$2\sin^2(45°-A)=1-\sin 2A,$$

即得到特殊恒等式

$$\sin\left(45°-A\right)=\sqrt{\frac{1-\sin 2A}{2}}。$$

一方面，令上式中的 $A=9°$，则

$$\sin 36°=\sin\left(45°-9°\right)=\sqrt{\frac{1-\sin 18°}{2}},$$

另一方面，由二倍角公式 $\sin 36°=2\sin 18°\cos 18°$，可得关于 $\sin 18°$ 的方程

$$2\sin 18°\sqrt{1-\sin^2 18°}=\sqrt{\frac{1-\sin 18°}{2}},$$

即 $8\sin^3 18°+8\sin^2 18°-1=0$，其唯一的正根 $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ 即为所求。[4]

方法二：利用二倍角及三倍角公式

26 种教科书用到了三倍角公式。具体而言，首先由 18°的二倍角 36°和三倍角 54°互余，可得 $\sin 36°=\cos 54°$；然后两边分别应用二倍角公式和三倍角公式，展开得

$$2\sin 18°\cos 18°=4\cos^3 18°-3\cos 18°,$$

由 $\cos 18°\neq 0$，上式可化简为

$$2\sin 18°=4\cos^2 18°-3=1-4\sin^2 18°,$$

即 $\sin 18°$ 是方程 $4x^2+2x-1=0$ 的正根，解得 $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$。部分教科书利用 $\cos 36°=\sin 54°$，与上同理，两边分别应用二倍角公式和三倍角公式，可得 $\sin 18°$ 是方程 $4x^3-2x^2-3x+1=0$ 的正根。

两种方法虽无本质差别，但从方程次数来看，后者需要解三次方程，前者只需解二次方程。Nixon（1892）注意到了更一般的情况：由 $(m+n)\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，可得 $\sin m\alpha=\cos n\alpha$ 或 $\cos m\alpha=\sin n\alpha$，两边应用多倍角公式可得关于 $\sin\alpha$ 的方程。若 $m+n$ 为奇数，则 m，n 必为一奇

一偶，不妨设 m 为奇数，n 为偶数，则由 $\cos m\alpha=\sin n\alpha$ 得到关于 $\sin\alpha$ 的方程比由 $\sin m\alpha=\cos n\alpha$ 得到的方程次数更低，更便于计算。[5]

方法三：利用五倍角及半角公式

Thomson（1825）利用正弦形式的五倍角公式

$$\sin 5A=16\sin^5 A-20\sin^3 A+5\sin A,$$

由 $\sin(5\times 36°)=\sin(5\times 72°)=0$，可知方程 $16\sin^5 A-20\sin^3 A+5\sin A=0$ 的两个正根

$$\sin A=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \text{ 与 } \sin A=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

恰为 $\sin 36°$ 与 $\sin 72°$ 的值，54°与 18°的三角函数值随之易得。进一步利用半角公式还可求得 $\sin 9°=\frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}-\frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$。[6]

事实上，利用余弦形式的五倍角公式 $\cos 5A=16\cos^5 A-20\cos^3 A+5\cos A$，及 $\cos(5\times 18°)=\cos(5\times 54°)=0$ 可以同理求得相关的三角函数值。

3.2.2 几何方法

方法一：黄金分割法

Galbraith（1863）和Newcomb（1883）运用了“圆内接正十边形的边长等于将半径黄金分割后较长的一段”的结论，这一结论来源于欧几里得《几何原本》第 4 卷命题 10。证明这一命题需要借助第 3 卷命题 37 和第 3 卷命题 32，实际上是切割线定理逆定理和弦切角定理，这里便不再证明，下面介绍第 4 卷命题 10 的证明过程。

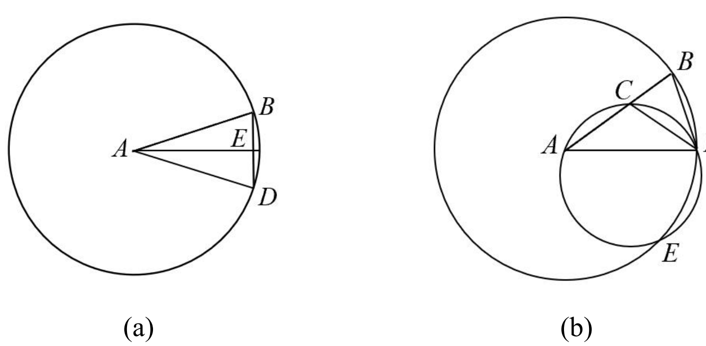


图 3 黄金分割法

第 4 卷命题 10：求作一个等腰三角形，使它的每一个底角都是顶角的两倍。

如图 3(a)所示，任取一条线段 AB，将线段 AB 作黄金分割[2]，即取 AB 上一点 C，使 $AB\times BC=AC^2$，AC 即为将 AB 黄金分割后较长的一段。以 A 为圆心 AB 长为半径作圆 A，在圆上取一点 D 使得 $BD=AC$；连结 AD，DC；作△ACD 的外接圆 ACD。

由 $AB\times BC=AC^2$，$BD=AC$，即得 $AB\times BC=BD^2$，由切割线定理逆定理知 BD 与圆 ACD 相切。又由弦切角定理知 $\angle BDC=\angle DAC$。由 $\angle BDC+\angle CDA=\angle DAC+\angle CDA$，故 $\angle BDA=\angle BCD$。又由 $AD=AB$，知 $\angle BDA=\angle DBA$，故 $\angle DBA=\angle BCD=\angle BDA$，从而 $BD=DC$。而已知 $BD=AC$，故 $AC=CD$，从而 $\angle CDA=\angle DAC$，最终得到 $\angle BCD=2\angle DAC=\angle BDA=\angle DBA$，于是所作的△$ABD$ 满足条件。

由命题 10 得到的△ABD 实为顶角为 36°，两底角为 72°的等腰三角形，又称“黄金三角形”。由此，易知图 3(b)中的 BD 长等于圆内接正十边形的边长，即将圆半径黄金分割后较长的一段。从而 $BD=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，取 BD 中点 E，因为△ABD 是黄金三角形，故 $\angle BAE=\dfrac{1}{2}\angle BAD=18^\circ$，$AE\perp BD$，从而得到 $\sin 18^\circ=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{\frac{1}{2}BD}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$。[7-8]

方法二：黄金三角形法

12 种教科书利用相似三角形的性质构造黄金三角形以得到 $\sin 18^\circ$ 的值，这种方法较方法一而言更为简单直接。

如图 4，构造黄金三角形△CAD，即 $\angle ACD=36^\circ$，$\angle CAD=\angle CDA=72^\circ$。作 $\angle ACD$ 的角平分线 CB 交 AD 于 B，由等腰三角形三线合一性质知 $CB\perp AD$。作 $\angle CDA$ 的角平分线 DE 交 AC 于 E，故 $\angle EDA=36^\circ$，$\angle AED=72^\circ=\angle CAD$。于是 $AD=ED=EC$，且 $\triangle ACD\sim\triangle ADE$。

设 $AC=b$，$\sin 18^\circ=x$，则 $AB=bx$，$AD=2bx$，$AE=b-2bx$。由 $\triangle ACD\sim\triangle ADE$，得 $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AD}{AE}$，即 $\dfrac{b}{2bx}=\dfrac{2bx}{b-2bx}$，化简得关于 x 的一元二次方程 $4x^2+2x-1=0$，其唯一正根即为所求，即 $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$。若过点 E 构造 $EF\perp CD$ 于 F，易在 Rt△CFE 中获得 36°的三角函数值。[9]

[2] 黄金分割的作图过程在《几何原本》第 2 卷命题 11 给出。

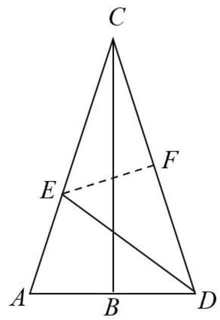


图 4 黄金三角形法

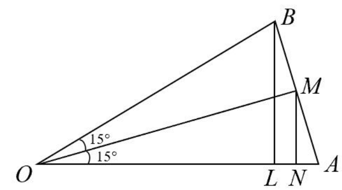


图 5 构造角平分线法

3.3 15°角

20 种教科书使用代数方法，在例题或习题中计算了 15°的三角函数值：利用已知的 30°，45°的三角函数值，借助半角公式或两角差的三角函数公式即可求得。值得注意的是，4 种教科书分别提出了求 15°角的三角函数值的不同几何方法。

方法一：构造角平分线法

Nixon（1892）方法的关键步骤为构造 30°的角平分线。如图 5，$\triangle AOB$ 为顶角 $\angle AOB=30°$ 的等腰三角形，作 $\angle AOB$ 的角平分线交AB于点M，易知 $OM\perp AB$，且M为AB中点。再作 $BL\perp OA$ 于L，$MN\perp OA$ 于N。不妨令 $BL=1$，则 $OB=\dfrac{BL}{\sin 30°}=2$，$MN=\dfrac{1}{2}BL=\dfrac{1}{2}$。设 $BM=x$，$OM=y$，则 $\tan 15°=\dfrac{x}{y}$。易知 $\triangle OMB\sim\triangle ONM$，故 $\dfrac{BM}{OB}=\dfrac{MN}{OM}$，得 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{y}$，即 $xy=1$。在 $\mathrm{Rt}\triangle OMB$ 中应用勾股定理，得 $x^2+y^2=4$，从而 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=4$，即 $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-4\left(\dfrac{x}{y}\right)=-1$，又因 $\tan 15°<1$，故 $\tan 15°=2-\sqrt{3}$。[5]

方法二：构造圆中角法

Loney（1893）利用了圆周角定理给出了第二种证明。如图 6，在$\odot C$ 中，OQ为直径，作点 P 满足 $\angle PCQ=30°$，$PN\perp OQ$ 于点 Q。设 $CP=2a$，故 $CN=2a\cos 30°=a\sqrt{3}$，$NP=2a\sin 30°=a$，从而 $ON=OC+CN=a\left(2+\sqrt{3}\right)$，$NQ=CQ-CN=a\left(2-\sqrt{3}\right)$，由射影定理得

$$OP^2 = ON \cdot OQ = a\left(2+\sqrt{3}\right) \times 4a,$$

即 $OP = a\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$，同理

$$PQ^2 = QN \cdot QO = a(2-\sqrt{3}) \times 4a,$$

即 $PQ = a\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$，根据圆周角定理，$\angle POQ = \frac{1}{2}\angle PCQ = 15°$，所以[10]

$$\sin 15° = \frac{PQ}{OQ} = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4a} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},$$

$$\cos 15° = \frac{OP}{OQ} = \frac{a\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4a} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}。$$

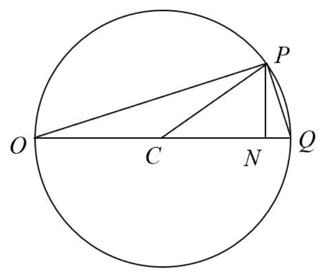


图 6 构造圆中角法

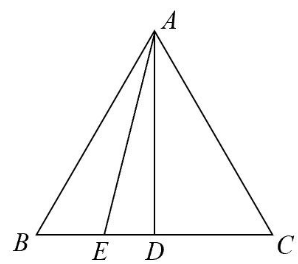


图 7 二次平分法

方法三：二次平分法

Hobson & Jessop（1896）想到 15°角可通过两次平分 60°角得到。如图 7，作等边三角形 ABC，AD 平分 $\angle BAC$，AE 平分 $\angle BAD$，那么 $\angle BAE = 15°$。由角平分线定理，$\frac{DE}{EB} = \frac{DA}{AB} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$，因此 $\frac{BD}{DE} = 1 + \frac{EB}{DE} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$。因为 $\frac{DA}{DB} = \tan 60° = \sqrt{3}$，所以 $\frac{BD}{DE} \cdot \frac{DA}{DB} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}$，故 $\cot 15° = \frac{DA}{DE} = 2+\sqrt{3}$。[11]

方法四：构造差角法

Vance（1954）将 15°角巧妙地构造为 60°和 45°的差角。如图 8，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 30°$，$\angle C = 90°$，在 AC 上取一点 D 使得 DC=BC，所以 $\angle CBD = 45°$，$\angle DBA = 60° - 45° = 15°$，不妨设 $BC = DC = a$，易知 $AD = AC - DC = (\sqrt{3}-1)a$，$DB = \sqrt{2}a$。作 $DK \perp AB$ 于 K，则在 $\triangle AKD$ 中，$DK = AD\sin 30° = \frac{(\sqrt{3}-1)a}{2}$，故 $\sin 15° = \sin\angle DBK = \frac{DK}{DB} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$。[12]

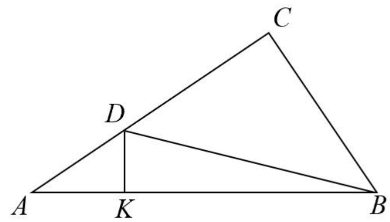


图 8 构造差角法

3.4 3°整数倍角度

9 种教科书在计算出 18°与 15°的三角函数值后指出，利用两角差的公式可求得

$$\sin 3° = \sin(18° - 15°) = \sin 18° \cos 15° - \cos 18° \sin \cos 15°$$
$$= \frac{\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{15 + 3\sqrt{5}} + 2\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{16},$$

进而可以得到所有 3°的整数倍角的三角函数值。Vance（1954）更得出一个有趣的结论：3°的整数倍角度构成的集合恰为可以通过平面尺规作图得到的所有整数角度的集合。然而他并未给出这一结论的证明。

波尔德（B. Bold）在《著名几何问题及其解法：尺规作图的历史》中简要说明了 3°是可以尺规作图的最小整数度角：“我们能尺规作出正十二边形和正十五边形，因此能作出 30°与 24°角，作这两个角的差，最后平分 6°角以作出 3°角。我们不能作 2°角，这是因为若能作 2°角，那么将其平分即能作 1°角，从而可以作任意整数度角。特别地，若可以尺规作出 40°角，则与正九边形不能尺规作图矛盾[3]，从而假设不成立，即 3°是可以尺规作图的最小整数度角。”[13]

4 特殊角三角函数的应用

随着时间的推移，特殊角三角函数的应用价值也历经演变：古希腊时期，特殊角对应的弦长在弦表编制时发挥重要作用；在 18-19 世纪的教科书中，特殊角的三角函数多被应用于检验三角函数表的准确性；20 世纪之后，特殊角三角函数的实用性日渐式微。

公元 2 世纪，托勒密在希帕霍斯（Hipparchus, 约前 190-约前 120）工作的基础上，制作出

[3]正九边形尺规作图不能问题的证明可参看文献[13]。

一张记载了从 0°到 180°每隔半度圆心角所对弦长的弦表，其功能相当于从 0°到 90°每隔 $\frac{1}{4}$° 的正弦函数表。他根据《几何原本》的逻辑体系，构造了圆内接正十边形、正六边形、正五边形等正多边形，先获得 36°，60°，72°等特殊角对应的弦长，进而推算出整个弦表[1]。

一千多年后，在所考察的 18-19 世纪的三角学教科书中，三角函数表的构造仍是重要话题之一。Woodhouse（1819）指出：三角函数表构造是一个逐步推导的过程，倘若在某一步骤出现错误，则会像蝴蝶效应一般，不可避免地影响后续的所有结果，故必要对表格进行检验[14]。

早期教科书中借助特殊角检验三角函数表的方法可以大致分为两种类型。11 本教科书介绍了第一类方法：先计算从 0°到 90°以 9°或 3°为间隔的角的三角函数值，它们能够用根号表示，从而可以计算得到足够精确的小数形式，再比较其与三角函数表中对应角度的三角函数值，以起到检验作用。然而这种方法只能检验部分特殊三角函数值，有一定局限性。

19 种教科书介绍了第二种更普遍的方法：利用某些特殊角三角函数，结合和差化积公式，得到不同角度三角函数值的关系式。这种方法只需要进行简单的加减运算，十分便捷。其中，最为广泛应用的一组检验公式的推导过程如下：已知 36°，72°的三角函数值，利用和差化积公式可得到

$$\sin(36^\circ + A) - \sin(36^\circ - A) = 2\cos 36^\circ \sin A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\sin A\text{，}$$

$$\sin(72^\circ + A) - \sin(72^\circ - A) = 2\cos 72^\circ \sin A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\sin A\text{，}$$

两式相减并化简得

$$\sin A = \sin(36^\circ + A) - \sin(36^\circ - A) - \sin(72^\circ + A) + \sin(72^\circ - A)\text{。}$$

同理

$$\cos A = \cos(36^\circ + A) + \cos(36^\circ - A) - \cos(72^\circ + A) - \cos(72^\circ - A)\text{。}$$

这一组公式出现在瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）的《无穷分析引论》中，故多种教科书将其称为欧拉检验公式（Euler’s formula of verification）。如果将上述公式中的 A 用 $90^\circ - A$ 替代，它们也可以表示为

$$\sin A = \cos(54^\circ - A) - \cos(54^\circ + A) - \cos(18^\circ - A) + \cos(18^\circ + A)\text{，}$$

$$\cos A = \sin\left(54° - A\right) + \sin\left(54° + A\right) - \sin\left(18° - A\right) - \sin\left(18° + A\right)。$$

这组公式被称为勒让德检验公式（Legendre's formula of verification）。将具体角度值代入任一组检验公式，根据等式是否成立以检验三角函数表的正确性。也有部分教科书提及了由 60°，45°等其他特殊角的三角函数值推导出的检验公式，但无论是实用性还是美观性，它们都远不及以上两组。

20 世纪往后的教科书常常选择直接给出三角函数表供学生参考使用，特殊角三角函数值的实用性也随之减弱。

5 结 语

综上，与今日教科书相比，美英早期教科书中出现的特殊角类型更加丰富，推导方法兼顾几何与代数。曾经，由于构造、检验三角函数表的需要，这些能够通过几何或代数方法推导出三角函数值的角度逐渐被视为特殊角；而今随着科学技术的发展，人们可以使用计算器便捷地计算任意角的三角函数值，但是对于教师而言，一种数学知识的实用价值和教育价值是截然不同的，这些特殊角三角函数精彩纷呈的推导过程依然能为今日教学提供诸多启示。

其一，融会贯通。特殊角三角函数值的推导囊括了三角学中的多个知识点：代数方法综合应用了多种三角恒等式，几何方法囊括了全等三角形、相似三角形、等腰三角形、角平分线定理、勾股定理等平面几何知识。教学实践中，教师应注重挖掘知识之间的联系，譬如将探究 18° 角的三角函数值与黄金分割、正十边形的尺规作图等内容相结合，构建知识之谐，同时注重数学思想方法引领，如由方程思想，结合三角恒等式巧设未知数，彰显方法之美。

其二，合理延伸。《义务教育数学课程标准（2022 年版）》明确提出“增加代数推理，加强几何直观”的主张，与《普通高中数学课程标准（2017 版 2020 年修订）》的要求一致[15]。初中学段，教师可以在完成 30°，45°，60°的三角函数教学后，组织高认知水平的探究活动，如鼓励学生通过构造不同的几何图形探索 15°角的三角函数值，拓展思维，培养几何直观，营造探究之乐。高中学段，巧妙的欧拉检验公式、勒让德检验公式及爱默生（Emerson, 1701-1782）在探索 18°角三角函数值时构造的特殊三角恒等式皆可补充为三角恒等式的教学素材；教师可以组织学生头脑风暴，充分发挥三角恒等式的构造作用，用代数方法计算 15°，18°，

30°，45°，60°等特殊角的三角函数值，尝试比对、分析代数方法与几何方法的异同与优劣。特别地，教师可引导学生发现 15°角三角函数值的不同几何求法中实则蕴含了半角、倍角、差角公式的几何意义，充分渗透数形转化的思想。

其三，回溯历史。历史揭示了特殊角三角函数值的计算是三角函数表不断完善、不断发展的重要因素，由此教师可以带领学生跨越时空，经历古人构造和检验三角函数表的过程，体验原始数学思维活动，感受特殊角三角函数的早期应用价值，提升逻辑推理、数学运算、直观想象等数学核心素养。由数学家坚持不懈的探索精神，还可以鼓励学生追求创新，体会数学之理性，达成立德树人之效。

参考文献

[1] 姚芳, 刘晓婷. 历史上最早构造的三角函数表——弦表[J]. 数学通报, 2008, 47(11): 23-26.

[2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 69.

[3] Lardner, D. *An Analytic Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: John Taylor, 1828: 38-39.

[4] Emerson, W. *The Elements of Trigonometry*[M]. London: W. Innys, 1749: 15-24.

[5] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892: 106-107, 348-349.

[6] Thomson, J. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Belfast: Joseph Smyth, 1825: 53.

[7] Galbraith, J. A. *Manual of Plane Trigonometry*[M]. London: Cassell, Petter & Galpin, 1863: 27-28.

[8] Newcomb, S. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1883: 26-27.

[9] Whitaker, H. C. *Elements of Trigonometry*[M]. Philadelphia: D. Anson Partridge, 1898: 30.

[10] Loney, S. L. *Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1893: 107.

[11] Hobson, E. W. & Jessop, C. M. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1896: 37-38.

[12] Vance, E. P. *Trigonometry*[M]. Cambridge: Addison-Wesley Publishing Co., 1954: 65.

[13] B・波尔德. 著名几何问题及其解法: 尺规作图的历史[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 106-107.

[14] Woodhouse, R. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1819: 74-76.

[15] 史宁中.《义务教育数学课程标准（2022 年版）》的修订与核心素养[J]. 教师教育学报，2022, 31(3): 92-96.

牛顿迭代法求方程近似解：从历史到课堂

韩 粟

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

随着人类社会迈入人工智能时代，“算法是核心竞争力”的理念不断深入。从国际基础教育改革的趋势看，算法内容被整合在多个发达国家的基础教育课程中，指向发展学生的算法思维（Algorithmtic Thinking）[1]。然而，相比 2003 年颁布的《普通高中数学课程标准（实验稿）》将算法初步列为 12 课时的必修内容而言[2]，我国最新颁布的《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》（下称《课标》）中，算法内容大幅减少，仅教学案例 34 保留了求方程近似解的计算问题，并指出迭代算法是现代计算数学的基本方法[3]。

现行高中教科书中，沪教版在“数列”章设置“用迭代序列求 $\sqrt{2}$ 的近似值”一节作为选学，以求 $\sqrt{2}$ 的近似值为例说明迭代算法之一的巴比伦算法（Babylonian method）[4]，人教 A 版在“导数及其应用”章的探究栏目中介绍牛顿法求方程的近似解[5]，苏教版在探究栏目中直接采用《课标》的教学案例引入牛顿切线法[6]。牛顿法、牛顿切线法又称牛顿迭代法，巴比伦算法被认为是牛顿迭代法最古老的源头[7]。无独有偶，成书于约公元 1 世纪的《九章算术》中记载了求一元二次及三次方程数值解的迭代算法——开方术[8]，体现了我国古代数学以算法见长的历史传统。遗憾的是，我们很少能在现行教科书中看到古今中外各种算法的继承与联系。

牛顿迭代法是科学计算的基本算法之一，它既与中学阶段方程、数列及导数等诸多知识密切相关，又内蕴着丰富的数学文化及独特的德育价值，其历史更被誉为“一部诸多大数学家‘前仆后继’的传奇史”。鉴于此，本文拟溯源牛顿迭代法的历史，并借鉴其知识发生脉络，在 HPM 视角下设计牛顿迭代法求方程近似解的教学。

2 牛顿迭代法求方程近似解的历史

2.1 追本溯源：巴比伦算法

约四千年前的泥版 YBC7289 留下了古巴比伦人计算正方形对角线的实物证据[9]。如图 1 所示，正方形的边长为 30，对角线上标有 1; 24, 51, 10 和 42; 25, 35。古巴比伦人使用六十进制表示数，将两数换算成十进制表示，得到 1; 24, 51, 10 约为 1.4142155，42; 25, 35 约为 42.4264，前者与我们利用计算器得出的 $\sqrt{2}$ 的近似值 1.4142135 相差无几，后者等于前者与正方形边长 30 的乘积，说明古巴比伦人能够根据 $\sqrt{2}$ 的近似值，计算得出任一正方形对角线的长。另有两块分别载有勾股定理应用题及大量勾股数的泥版 BM85196 及 Plimpton322[9]，它们可以佐证古巴比伦人能够运用勾股定理计算单位正方形对角线长，但古巴比伦人究竟怎样获得如此准确的近似值？没有一块泥版给出明确记载。

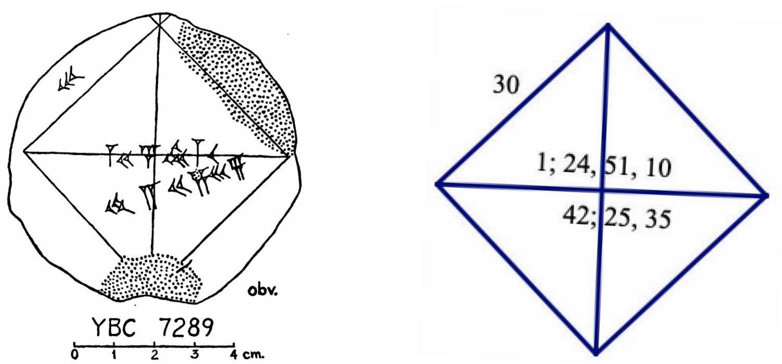


图 1 泥版 YBC7289

美国数学史家卡茨（V. J. Katz）猜测古巴比伦人很可能运用了完全平方公式 $\left(x+y\right)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ 的几何表征[10]。如图 2 所示，假设有一个面积为 N 的正方形 AC，要求其边长 $\sqrt{N}$：选择一个 $\alpha_1 < \sqrt{N}$ 作为初值，则 $\alpha_1^{\,2}$ 表示正方形 EI 的面积。

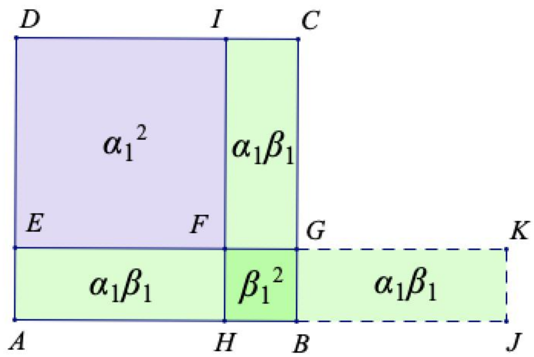


图 2 完全平方公式的几何表征

记正方形 AC 和 EI 的面积之差

$$e = N - \alpha_1{}^2 \tag{1}$$

由图 2，e 是剩余曲尺形（gnomon）的面积

$$e = 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1{}^2 \tag{2}$$

其中 $\beta_1 = \sqrt{N} - \alpha_1$。当 α_1 足够接近 $\sqrt{N}$ 时，由（1），e 应该足够小。将曲尺形变换为相对“狭长”的长方形 AK。可见，长方形 AK 中，相比于长方形 AF 和 BK，正方形 HG 的面积更小，小到可以忽略不计，即（2）中可以舍去 $\beta_1{}^2$，再代入（1）式，得

$$\beta_1 \approx \frac{e}{2\alpha_1} = \frac{N - \alpha_1{}^2}{2\alpha_1} \tag{3}$$

据此得到一个更准确的 $\sqrt{N}$ 的近似值

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 + \frac{N - \alpha_1{}^2}{2\alpha_1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \frac{N}{\alpha_1}\right) \tag{4}$$

依此类推，可以建立计算 $\sqrt{N}$ 近似值的迭代公式

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \frac{N}{\alpha_n}\right) \tag{5}$$

按照（5）重复计算，获得的 $\sqrt{N}$ 的近似值会越来越准确。非裔数学史家约瑟夫（G. G. Joseph）选取 $\alpha_1 = 1$ 作为估计 $\sqrt{2}$ 的初值，仅用两步就得到了泥版 YBC7289 上的数[11]。美国数学史家诺

伊格鲍尔（O. Neugebbauer, 1899-1990）和萨克斯（A. Sachs, 1915-1983）将（5）式解读为 $\sqrt{N}$ 的不足近似值 α_n 和过剩近似值 $\dfrac{N}{\alpha_n}$ 的算术平均值 α_{n+1}，又因容易验证 $\dfrac{N}{\alpha_n}$ 是上一对不足近似值 α_{n-1} 和过剩近似值 $\dfrac{N}{\alpha_{n-1}}$ 的调和平均值（$n \geq 2$），所以他们认为古巴比伦人很可能通过重复计算上一对近似值的算术平均值和调和平均值以逼近 $\sqrt{N}$ [9]。

数学史上，巴比伦算法更多地被称为海伦法（Heron 's method）。海伦（Heron，约 10-约 75）是古希腊时期的数学家，他在应用冠以其名的海伦公式求三边长分别为 7, 8, 9 的三角形面积时，以面积 $\sqrt{720}$ 为例提出计算平方根的方法，其《测量》一书中首次以文字形式记载了这一开平方算法[12]，法国数学教科书 *Math* 3*e* 在“平方根”一章的阅读材料中便详细介绍了海伦法求 $\sqrt{2}$ 近似值的步骤[13]。

2.2 异曲同工：《九章算术》开方术

如果说古巴比伦人对开方的需求源于求给定边长正方形的对角线长，那么中国古代则源于求给定面积正方形的边长。开方一词在中算史中有狭义与广义之分，狭义指开平方，求一元二次方程的（正）根；广义指开任意次方，即求一元 n 次方程（$n \in \mathbf{N}$）的根[8]。开方术是体现中国古典数学“机械化”特征的典型算法，早在《周髀算经》的陈子答容方问中便有“句股[4]各自乘，并而开方除之，得邪至日”一说[14]，但《周髀算经》和巴比伦泥版一般，没有给出步骤清晰的开方程序。

《九章算术》的开方术是世界上现存最早的多位数开方程序，按照术文统率例题的体例，少广章第 12 至 16 题共 5 题论述开平方问题。以第 12 题为例：

“今有积五万五千二百二十五步，问：为方几何？”

译为：“假设有面积 55225（步），问变成正方形，边长是多少？”[8]通过“借算”[5]，问题被转换为求解一元二次方程

$$x^2 = 55225 \tag{6}$$

[4] 即勾股

[5] 借一枚算筹，表示使未知数二次项的系数为 1

我们用现代数学语言陈述开方术的步骤如下：首先根据十进位值制，确定根的位数为 3，并作倍根变换 $x=10^{\frac{5-1}{2}}a_1=100a_1$，将原方程变为

$$\left(100a_1\right)^2=55225 \tag{7}$$

由（7）“议商”，即估计得根的第一位得数 $a_1=2$，得到根的第一个近似值 $x_1=200$；然后作减根变换 $10a_2=x-x_1$，代入（6），并将常数项移至等式左边

$$\left(10a_2\right)^2+2x_1\cdot 10a_2=55225-200^2 \tag{8}$$

略去关于 a_2 的平方项 $100{a_2}^2$，以一次项系数除常数项

$$10a_2\approx\frac{55225-200^2}{2x_1}=\frac{15225}{400} \tag{9}$$

由（9）估计得根的第二位得数 $a_2=3$，得到根的第二个近似值

$$x_2=x_1+10a_2=230 \tag{10}$$

为求根的第三位得数，再作减根变换 $a_3=x-x_2$，代入（6）

$${a_3}^2+2x_2a_3=55225-230^2=55225-(200+30)^2=15225-2\times230-30^2=2325 \tag{11}$$

同理，估计得根的第三位得数 $a_3=5$。由 $2x_2+a_3=465$ 整除（11）的常数项 2325，即得方程 $x^2=55225$ 的正根为 235。

魏晋时期的数学家刘徽（约 220-约 280）在注释《九章算术》时，创造性地给出开方术的几何解释，如图 3 所示。以（8）为例，等号左边表示两个“朱幂”（红色长方形）和一个“黄乙”（黄色正方形乙）组成的曲尺形的面积，等号右边表示从面积为 55225 的大正方形中割去已知边长为 200 的“黄甲”后剩余的面积。当开方未尽时，左边恒小于右边，因此两边实为不等关系；当开方完毕时，相等关系成立，即（11）式。

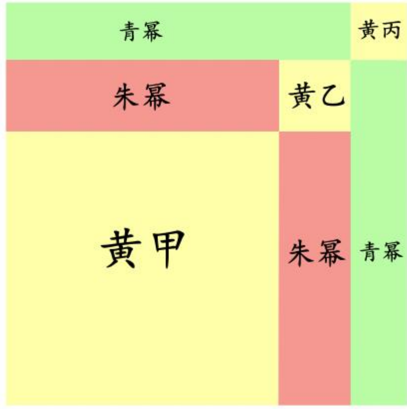


图 3 刘徽对开方术的几何解释

虽然少广章第 12 至 16 题中的面积均为可以开尽的整数或带分数，但文后亦说明了开方不尽的情况。当时有人以 $a+\frac{N-a^2}{2a}$ 作为 $\sqrt{N}$ 的近似值（a 为整数部分），刘徽却认为“虽粗相近，不可用也”，即对于整数部分之外的分数，不应只迭代 1 次，而应“求其微数”，按照开方程序继续开方，通过十进分数逼近无理根[8]。

对比（3）、（4）和（9）、（10），我们发现巴比伦算法的估计误差步骤和《九章算术》开方术的“议商”步骤在代数形式上几乎完全相同，且从几何解释来看，巴比伦算法只是比刘徽注中多了一步，即将曲尺形面积转化为长方形 AK 的面积，其余步骤都可以等价转换，比如在图 2 中舍去相对较小的正方形 HG 的面积，等价于在图 3 中割去黄色正方形乙的面积。由此可见，虽然两种迭代算法出现在不同的历史时空，目的也为解决不同的几何问题，但它们的原理和步骤却惊人地相似。然而，直至目前，我们还未能揭示这一“相似性”背后的数学本质。

2.3 薪火相传：牛顿-拉夫森法

《九章算术》不仅论及开平方，也论及开立方，刘徽在作注时，利用正方体为开立方术赋予了同样生动的几何解释[8]。中算史上，从开立方到“开带从立方”，即求解形如 $ax^3+bx^2+cx=N$（b, c 至少有一个不为 0）的三次方程正根，再到“开带从方”，即求解形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x=N$（$a_{n-1}$，$a_{n-2}$，$\cdots$，$a_1$ 至少有一个不为 0）的高次方程正根，经历了漫长的时间。直到 11 世纪中叶，才由北宋数学家贾宪（约 1010-约 1070）通过改进开方术得到的“增乘开方法”予以突破，两百余年后，南宋数学家秦九韶（1202-1261）通过规定方程

的常数项恒为负，彻底实现了增乘开方法中“随乘随加”的程序化，史称“正负开方术”[15]。放眼世界，两百年后的阿拉伯数学家阿尔·卡西（al-Kashi, 约 1380-1429）集前人之大成，在《算术之钥》中给出了与“增乘开方法”仅形式不同的一类增乘算法[16]，再到 1600 年，法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）又提出一种几何学背景下的方程解法[7]。尽管阿尔·卡西懂得如何迭代求解 $\sin 1°$ 的近似值，但方法仍然是基于多项式方程[17]。因此，直至 17 世纪初期，仍未有数学家提出求含非多项式方程在内的非线性方程近似解的通法。

数学史上一般认为是由两位英国数学家牛顿（I. Newton, 1643-1727）和拉夫森（J. Raphson, 1648-1715）共同完成了这一壮举，故该算法多被称为牛顿-拉夫森法（Newton-Raphson method）[18]。也有数学史家提出，若以使用导数符号作为牛顿迭代法的基本特征，则该算法真正的创始人应该是英国数学家辛普森（T. Simpson, 1710-1761）[19]。

我们用现代微积分语言简要叙述牛顿迭代法如下：对于非线性方程 $f(x)=0$ ，往往不是直接找它的精确解 x_* ，而是通过构造迭代序列 $\{x_n\}$ ，逐次逼近，直到获得所需精度的近似解。若函数 $f(x)$ 二阶连续可微，则 $f(x)$ 在 x_n 处可以泰勒展开为

$$f(x)=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)+O((x-x_n)^2) \qquad （12）$$

将（12）线性化（linearization），即忽略 $O((x-x_n)^2)$

$$f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)=0 \qquad （13）$$

获得迭代公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \qquad （14）$$

放在坐标系中看，即作过点 $(x_n, f(x_n))$ 的切线，得到该切线与 x 轴交点的横坐标 x_{n+1} ，通过反复过交点、作切线来逼近精确解 x_* 。由图 4 不难想到，初值 x_0 的选择将极大地影响迭代的效果。

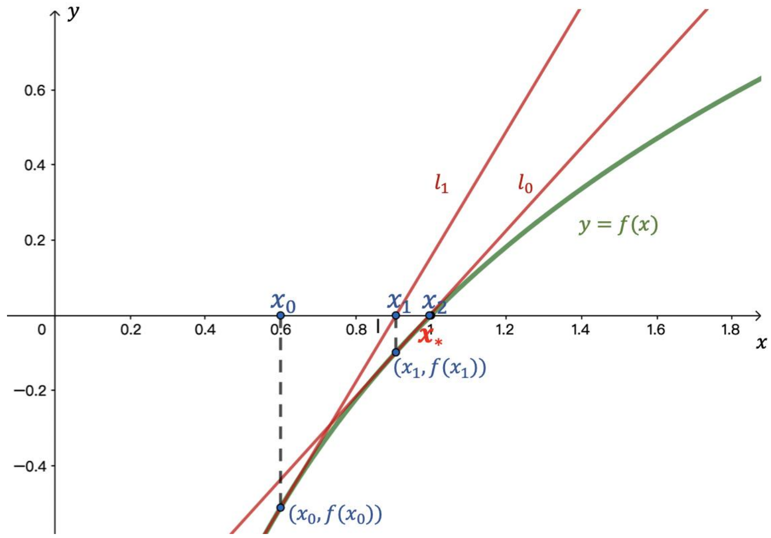


图 4 牛顿迭代法的几何解释

回看前文，巴比伦算法无疑是牛顿迭代法的特例：设 $f(x)=x^2-N$，则（5）式等价于

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{N}{x_n}\right)=x_n-\frac{{x_n}^2-N}{2x_n}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{15}$$

图 5 呈现了巴比伦算法的几何解释，可见：选取 $x_0=1$ 为求方程 $x^2-2=0$ 近似解的初值，迭代速度非常快，这印证了 2.1 节中一众数学史家的猜想。

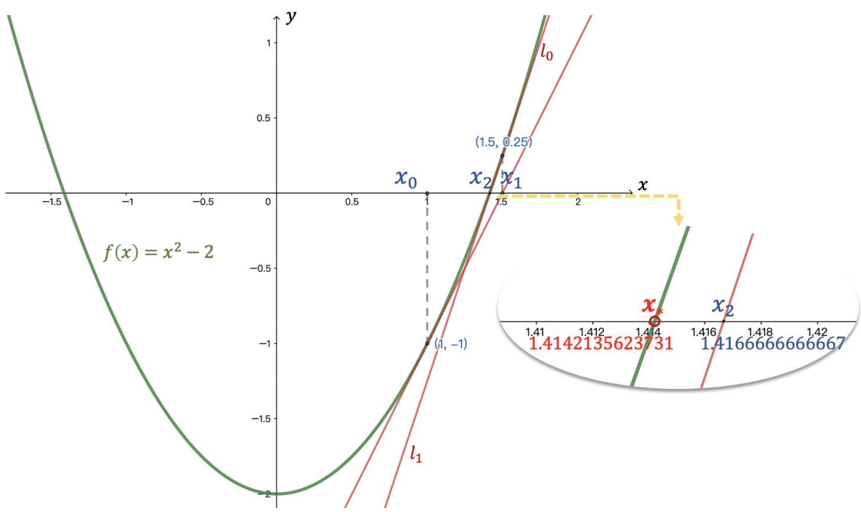


图 5 巴比伦算法的几何解释

再看《九章算术》开方术中的“议商”步骤，即略去高次项后以一次项系数除常数项，其分析上的基础同为（15）式，因为一次项系数 $2x_n$ 正是函数 $f(x)=x^2-N$ 关于 x_n 的一阶导数，至此，

我们终于揭示了巴比伦算法和《九章算术》开方术“异曲同工”的本质原因。事实上，不止是以上两者，贾宪的增乘开方术，阿尔·卡西的增乘算法，都可以视作牛顿迭代法在不同时期、不同地区，以机械化程序的形式呈现，用来求高次方程近似解的特例。

综上，通过考察若干原始数学文献及数学史专著，我们划分出牛顿迭代法发生发展的 3 个重要节点，以现代数学语言简明扼要地描述了各算法的原理，呈现其步骤，梳理其联系，并补充了丰富的历史细节。华人数学家曾钟钢和丁玖曾言：“一项科学发现常常只能被幸运地发现一次，而牛顿迭代法一次次被重新推广和修正，且每一次的发展、推广和创新都是实质性的，不仅仅是修边角式的改善。”从求二次方程、三次方程的近似解，到求解高次方程、超越方程；从孤立数值的迭代计算，到统一的迭代公式；以最朴素的平面几何问题为起点，逐渐生长出计算数学这一活跃的数学分支，而关于牛顿迭代法的研究至今仍是数学、工学乃至自然科学领域的热点问题。

3 牛顿迭代法求方程近似解的教学

牛顿迭代法并非高中数学课程中唯一的迭代算法，《课标》在函数应用部分指出二分法是求方程近似解的基本方法，教学案例 34 即用牛顿迭代法和二分法求黄金分割方程式 $x^2+x-1=0$ 的近似解，并比较两种算法的求解速度[3]。本节以《课标》教学案例 34 为蓝本，基于 HPM 视角，设计重构牛顿迭代法求方程近似解的教学。

【问题 1】给定面积为 N 的矩形，如何使其更“方正”？

说明：问题1采自美国康奈尔大学“MATLAB计算导论”课程。如图6所示，引入面积同为N的正方形，则其边长为 $\sqrt{N}$ 。设矩形长为l，宽为w（不妨设 $w<l$ ），则 $lw=N$ 且 $w<\sqrt{N}<l$ 。然后用 $l_{new}=\dfrac{l+w}{2}$ 代替l， $w_{new}=\dfrac{N}{l_{new}}$ 代替w，反复执行这一“矩形平均”过程，则l和w会越来越接近 $\sqrt{N}$ ，矩形将越来越方正[20]。

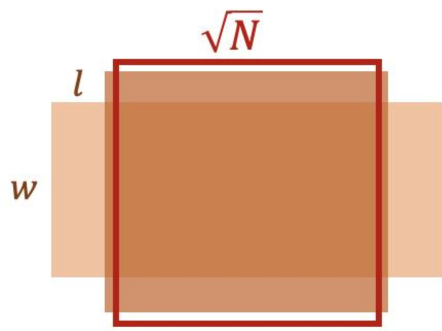


图 6 矩形平均过程

【问题2】问题1中不断更新的矩形长和宽分别构成数列$\{l_n\}$和$\{w_n\}$。以$\{l_n\}$为例，你能写出它的递推公式吗？

说明：易得$l_n=\dfrac{1}{2}\left(l_{n-1}+\dfrac{N}{l_{n-1}}\right)$（$n\in\mathbf{N}$），由此定义$\{l_n\}$是逼近$\sqrt{N}$的一个**迭代序列**，**初值**$l_0$和**递推公式**$l_n=\dfrac{1}{2}\left(l_{n-1}+\dfrac{N}{l_{n-1}}\right)$构成求方程$x^2=N$近似解的一个**迭代算法**。

【问题3】问题2中的迭代算法又称巴比伦算法。思考它能否应用于求更一般的方程的近似解，如数学史上著名的黄金分割方程$x^2+x-1=0$？

说明：教师可以先介绍巴比伦算法诞生的几何背景，后揭示巴比伦算法源于正方形的局限性，所以仅能应用于求形如$x^2=N$这一类特殊方程的近似解，为后续引入通用的牛顿迭代法埋下伏笔。

【问题4】我们在必修部分学习了求方程近似解的二分法，试用二分法求出黄金分割方程正根的一个近似解（精确度为0.001）。你认为二分法的速度如何？受到哪些因素的影响？

说明：问题4以学生熟悉的二分法为桥梁，一方面，引导学生将求方程的近似解等价转换为求对应函数零点的近似值，建立起函数的观点；另一方面，启发学生思考初值选取对迭代速度的影响。

【问题5】从函数$f(x)=x^2+x-1$的图像出发，联系我们正在学习的导数概念及其几何意义，能否设计一种求方程近似解的新算法？

说明：问题5具有一定的开放性。首先，教师可以借助GeoGebra作出过函数$y=f(x)$零点

附近若干点的切线，使学生直观地感知到选取的初始点$\left(x_0, f(x_0)\right)$越接近零点，其切线与x轴的交点与零点也越来越近。其次，为建立迭代序列$\{x_n\}$持续逼近函数零点，教师可以启发学生思考能否继续以切线作为工具，由此想到重复作切线，即过点$\left(x_k, f(x_k)\right)$作函数的切线，得到切线与x轴交点的横坐标x_{k+1}。最后，根据导数的几何意义，可以解得$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$（$f'(x_k)\neq 0$），此即牛顿迭代公式，这一算法史称牛顿迭代法。

【问题 6】取初值$x_0=1$，用牛顿迭代法求方程$x^2+x-1=0$的近似解。联系问题 3，比较二分法和牛顿迭代法的求解速度，你认为哪个更快？

说明：当精确度同为 0.001 时，二分法在第 4 步求得近似解 0.625，而牛顿迭代法在第 3 步求得近似解 0.618，后者正是我们熟悉的黄金分割数。经历具体的运算过程后，学生可以明显感受到牛顿迭代法要比二分法快得多。从高观点来看，二分法只保证每次迭代区间缩短$\dfrac{1}{2}$，收敛速度较慢，只能做到总体收敛，而牛顿迭代法因为包含了导数作为“信息”，收敛速度很快，当x^*为方程$f(x)=0$的单根时，能做到二阶收敛[21]。

【问题 7】牛顿迭代法是求方程近似解的通用算法，奠定了计算数学领域的基础，但它的创立不能仅仅归功于大数学家牛顿一人。想想看，问题 2 中的巴比伦算法和牛顿迭代法有什么联系？观看微视频，进一步思考：同样是求方程$x^2=N$的近似解，《九章算术》开方术和巴比伦算法有什么异同？和牛顿迭代法又有何联系？

说明：教师可以引导学生推导出（15）式，说明巴比伦算法是牛顿迭代法的特例。由于课堂容量有限，对于第 2 节介绍的《九章算术》开方术及其他史料，教师可以适当裁剪后制作成微视频，以渗透牛顿迭代法蕴含的多元文化，同时展现中国古代数学的算法成就。

【问题 8】随着信息技术的发展，我们可以便捷地上机实现牛顿迭代法。以开普勒方程$x-e\sin x=M$为例，课后感兴趣的同学可以上机编写和运行牛顿迭代法的程序，探究开普勒方程的近似解。

说明：《课标》在教学建议部分指出：教师应注重信息技术与数学课程的深度融合，实现传统教学手段难以达到的效果，如利用计算机探究算法等[3]。教师可以先引导学生用流程图、

伪代码等形式描述牛顿迭代法，进行无电脑编程（Computerless Programming），然后适时适量地介绍 MATLAB、Python 等编程语言所需的基本语法。

4 结 语

溯源牛顿迭代法的历史，我们看到其创立并非牛顿的一枝独秀，还有海伦的无心插柳，刘徽的匠心独运，拉夫森的承前启后等，充分体现了数学的多元文化进路，有助于学生深刻领会数学的文化价值及数学史的文化之魅[22]。以巴比伦算法为起点学习牛顿迭代法求方程近似解，认识含二分法及《九章算术》开方术在内的不同迭代算法的异同，学生可以亲历理解运算对象、把握运算规律、表达运算过程等一系列数学运算的思维活动，从而提升数学运算素养，发展算法思维。

算法是中国古代数学的瑰宝，将中算史融入冠以西方数学家之名的算法的教学中，能够帮助我们更加理性地看待中国古代数学家的工作。一方面，避免崇洋媚外、数典忘祖，如了解刘徽通过“微数”逼近无理根，贾宪将开方术推广到任意高次方等历史，可以促使我们坚定文化自信；另一方面，客观认识中算的局限性，比如中国古代方程理论的研究对象仅为多项式方程，究其原因是三角学的迟迟未现[17]，体现了丰富数学各分支研究的深远意义。

最后，尽管我们在历史研究一节指出《九章算术》开方术与巴比伦算法异曲同工，同属牛顿迭代法的特例，但对今天的中学生而言，显然前者更为艰深晦涩。为增强中算史融入高中数学教学的可行性，需要教师努力提升史学素养，优化教学策略，在历史与课堂间搭建一座古今对话的桥梁，如将高度机械化的开方术步骤“翻译”为学生可接受的，更为通俗易懂的现代数学语言，并辅以刘徽注的几何解释，借助中算形数结合思想的巨大力量，切实传播中华优秀传统文化。

参考文献

[1] 麦克斯・斯蒂芬斯, 章勤琼, 陈肖颖. 基础教育中的算法思维及其教学——墨尔本大学 Max Stephens 教授访谈录(上)[J]. 小学数学教师, 2019, 41(06): 4-7.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(实验稿)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2003: 2-

4.

[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 22-23, 83, 167-169.

[4] 李大潜等. 普通高中教科书・数学(选择性必修 第一册)[M]. 上海: 上海教育出版社, 2020: 158-161.

[5] 章建跃等. 普通高中教科书・数学(选择性必修 第二册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 82-83.

[6] 单墫等. 普通高中教科书・数学(选择性必修 第一册)[M]. 南京: 江苏凤凰教育出版社, 2020: 207.

[7] Ypma, T. J. Historical Development of the Newton-Raphson Method[J]. *SIAM Review*, 1995, 37(04)：531-551.

[8] 郭书春译注. 九章算术译注[M]. 上海: 上海古籍出版社, 2021: 2, 155-177.

[9] Neugebbauer, O. & Sachs, A. *Mathematical Cuneiform Texts*[M]. New Haven: Lancaster Press Inc, 1945: 38-43, 88-89.

[10] Katz, V. J. *A History of Mathematics: An Introduction*[M]. Boston: Pearson Education, Inc., 2009: 17-19.

[11] Joseph, G. G. *The Crest of the Peacock*: *Non-European Roots of Mathematics*[M]. New Jersey: Princeton University Press, 2011: 144-147.

[12] Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics Education*[M]. London: Oxford University Press, 1921: 323-326.

[13] Cuaz, L. et al. *Math* 3*e*[M]. Paris: Belin, 2008: 80.

[14] 程贞一, 闻人军译注. 周髀算经译注[M]. 上海: 上海古籍出版社, 2012: 16.

[15] 梅荣照. 贾宪的增乘开方法——高次方程数值解的关键一步[J]. 自然科学史研究, 1989, 8(01): 1-8

[16] 郭园园. 《算术之钥》与中算若干问题的比较研究[J]. 自然科学史研究, 2012, 31(01): 107-128.

[17] 甘向阳. 中外若干算法的比较研究[D]. 西北大学, 2004: 96, 114.

[18] Cajori, F. Historical note on the Newton-Raphson method of approximation[J]. *American Mathematical Monthly*, 1911, 18(02): 29-32.

[19] Kollerstrom, N. Thomas Simpson and ‘Newton’s method of approximation’： an enduring myth[J]. *The British Journal for the History of Science*, 1992, 25(03): 347-354.

[20] Van Loan, C. F., Fan, K. -Y. D. *Insight Through Computing: A MATLAB Introuduction to Computational Science and Engineering*[M]. Philadelphia: SIAM , 2009: 97-108.

[21] 孙文瑜, 杜其奎, 陈金如. 计算方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 110-115.

[22] 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵课例分析[J]. 上海课程教学研究, 2019, 28(02): 37-43.

教学实践

HPM 视角下的球体积公式课例研究

朱亮雅[1]，刘叶青[2]

（1. 华东师范大学松江实验高级中学，上海 201620；

2. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》明确指出数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用。高中的数学教育应该帮助学生掌握现代生活和进一步学习所必需的数学知识、技能、思想和方法；提升学生的数学素养，引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界。[1]在新课标的指引下，上海高中数学教科书也进行了全新的设计。以“球的体积”为例，旧版教科书将其编排在“几何体的体积”当中，与球的表面积分开设置，且直接给出计算公式而不给予严谨的证明；新版教科书则将两者统一编排在“球”一节中，并且对于计算公式给出了严格的证明。这样的编排不仅体现了知识的连贯性与整体性，更进一步落实了新课程标准中对学生理性精神、逻辑思维的培养的要求。

根据 HPM 的“历史相似性”原理，球体积公式的严格论证困扰了中外数学家很久，因此，学生在学习时势必也会遇到较大的困难，也许这正是旧版教材不强调推导，仅给出公式的原因。那么，如何开展教学才能更好地帮助学生理解论证的方法，体会背后的数学思想，从而落实课程标准及教科书的要求，这是摆在每一位高中数学教师面前的问题。笔者尝试在 HPM 的视角下对球体积公式进行思考，希望借助于古今中外丰富的数学思想和前人的智慧来铺平学生的学习之路。综合考虑课标、教材及学情，笔者确定本节课的教学目标。

（1）理解祖暅原理，知道其在球体积公式严格推导证明中的作用，能够利用球体积公式解决简单的问题。

（2）学生经历球体积公式探究、猜想、论证的完整过程，并掌握此过程中所涉及的类比、

转化、极限等数学思想。

（3）学生能够体会到数学的理性精神，感受到数学方法之美，并领略到中国在数学发展史上所做出的杰出贡献，增强民族自信。

2 史料的梳理及选择

2.1 史料的梳理

球是日常生活中常见的几何体，古今中外诸多数学家在探求球体积公式的道路上展现出了人类的无穷智慧。他们所提供的各种论证方法的背后蕴含着大量值得我们不断体会和学习的数学思想。因此，在教学设计的准备阶段，笔者首先对数学著作及 19-20 世纪欧美早期几何教科书中出现的论证方法加以梳理（表 1），以理清它们的论证原理及所蕴含的数学思想。

通过对史料的梳理，笔者发现：

（1）除阿基米德（Archimedes, 前 287-前 212）的物理方法之外，所有数学论证的方法均利用了无穷的思想，并且本质上都将球体积的计算转化为简单几何体（如锥体、柱体等）的体积计算。

（2）球体积公式与球表面积的公式并无必然的先后关系，可以基于表面积推导球的体积，也可以直接推导球的体积。

（3）相比而言，锥体分割法、多面体逼近法最为直观，也最容易理解，但是论证的严谨性略微欠缺；基于祖暅原理的方法，构造等体积几何体具有一定的难度，对思维要求较高，但是却蕴含了丰富的创造性；旋转体逼近法、球心角体法需要利用到三角形围绕经过其某一顶点的直线旋转后生成几何体的体积公式，此公式难度较大，推导过程较为复杂。

表 1 球体积公式的多种论证方法

人名	国家	相关著作	发表时间	论证方法	核心思想	是否以球表面积公式为基础
欧几里得*	古希腊	《几何原本》	约公元前300年	第12卷第18个命题提到球与球的比等于其直径的立方比	无	——
阿基米德	古希腊	《论球和圆柱》	约公元前250年	穷竭法、物理法	无限逼近	否
刘徽*	中国	《九章算术注》	公元260年左右	在《开立圆术》中将球体积的求解转化为牟合方盖体积的求解	转化	——
祖冲之父子	中国	——	公元6世纪初	祖暅原理	转化、极限	否
开普勒	德国	《测量酒桶的新立体几何》	1615年	锥体分割法	无限分割、转化	是
卡瓦列里	意大利	《连续不可分量的几何学》	1635年	卡瓦列里原理	转化、极限	否
Hayward	英国	《几何》[2]	1829年	内接、外切旋转体双向逼近法	极限	否
Davies	美国	《几何》[3]	1841年	内接多面体逼近法	极限	是
Loomis	美国	《几何与圆锥曲线》[4]	1849年	内接旋转体逼近法	极限	是
Wentworth	美国	《平面几何与立体几何》[5]	1880年	外切多面体逼近法	极限	是
Halsted	美国	《几何》[6]	1885年	祖暅原理（构建四面体）	转化、极限	否
Wells	美国	《几何》[7]	1886年	球心角体法	转化、极限	否
Beman & Smith	美国	《新平面几何与立体几何》[8]	1900年	祖暅原理（构建圆柱与圆锥）	转化、极限	否

*注：欧几里得虽然没有给出球体积公式的论证，但《几何原本》中出现的相关命题足以证明人类对球体积探索历史之悠久；刘徽虽然没有求得精确的球体积公式，但其构造的牟合方盖为后续祖冲之父子的工作提供了极大的启发，故将此两人也列入表中。

2.2 史料的选择

史料梳理之后，综合教学目标、学情等，笔者制定了以下标准，对史料进行筛选：

（1）认知基础：所选史料基于学生已学的基础知识，难度适中，通过课堂的学习，大多数学生能够理解选择的论证方法。

（2）探究机会：所选史料可以为学生提供探究的机会，学生在类比、思考、探究的过程中，能够有所发现，能够体会到其中的数学思想，感受到数学的方法之美。

（3）德育价值：学生能够从史料感受到中国在数学发展史上的杰出贡献，体会先贤们坚持不懈之精神，增强民族自信。

（4）切实可行：与现行教科书尽量兼容，教师能够在一节课中完成相应教学。

基于以上标准，笔者对史料中的论证方法做出如下选择：

（1）保留阿基米德的物理方法，但仅将其作为课前阅读材料，目的在于让学生初步体会学科融合解决问题的奇妙。

（2）保留开普勒（J. Kepler, 1571-1630）的锥体分割法，目的在于借助此方法的直观性，引导学生探究、发现球体积的公式。

（3）保留祖暅原理，目的在于保证球体积公式论证严谨性，同时也为学生提供探究机会，鼓励学生发现不同的转化方法。

（4）舍弃旋转体逼近法、球心角体法、多面体逼近法。

3 教学设计

在整个教学设计的过程中，笔者重点做了以下两点安排：

（1）球表面积公式教学的前置：为引导学生借助锥体分割法探究出球的体积公式，在本节课教学之前，笔者给学生讲授了球的表面积公式。

（2）课前学习单的安排：考虑到本节课内容的难度，如果将所有探究过程安排在课堂中，则可能会出现学生探究时间不够，探究深度不足甚至出现无法取得有效进展的情况，因此将利用祖暅原理构建与球等体积的几何体的任务前置到课前学习单中。

3.1 课前学习单的设计

课前学习单主要包括三个部分：

（1）阅读部分：讲解古希腊阿基米德与球体积公式的故事，呈现其利用物理方法证明球体积的过程，激发学生兴趣。

（2）回顾部分：要求学生回忆并写出圆面积公式的推导过程。

（3）探究部分：要求学生类比圆面积公式的推导，猜想并利用锥体分割法推导球体积的公式（提供切西瓜的图）；要求学生复习教科书中的祖暅原理，并利用祖暅原理去构建截面积与球截面相等的几何体，并通过计算论证球的体积。

另外，为了满足部分学有余力的同学需求，在学习单末尾附加了球体积公式证明方法的相关论文链接。

3.2 课堂教学环节的设计

整个课堂教学设计以阿基米德的名言导入，自然过渡，巧妙设问“想撬起地球，就得知道地球有多重，那么也就要知道地球的体积有多大”，从而引出本节课的探究对象“球的体积”。

带领同学回顾圆面积公式的推导过程，引导学生体会对圆形进行无限分割，将其分成无数个以圆心为顶点的扇形进而求解面积的方法，为学生后续发现锥体分割法搭建脚手架。

引导学生类比圆面积的推导过程，从二维到三维，思考、探究球体积公式的推导方法。

在此之后，引导学生发现锥体分割法的不严谨性，引出祖暅原理，并通过实物展示，帮助学生直观理解祖暅原理。

在学生理解祖暅原理之后，设置小组探究活动，引导学生利用祖暅原理尝试求解球的体积。基于课前学习单中的任务，学生以小组为单位进行讨论，并分享自己的方法。教师则利用 GeoGebra 动态呈现学生的方法，以促进学生的理解。

最后，通过微视频向学生展示整个数学史上人类对球体积公式的探究过程，对本节课进行总结与升华。

4 教学实施

4.1 类比探究，发现球体积公式

问题 1 我们曾推导过圆的面积公式，你记得是如何求得的吗？

将圆等分为以圆心为顶点，半径为直边，圆周为弧的若干个扇形，这样圆的面积便等于所有扇形的面积之和（图 1）。倘若无限等分下去，每一个小扇形的弧将“化曲为直”，小扇形也就变成小三角形，这样圆形的面积便等于这些小三角形的面积之和，而这每一个小三角形的底边就是扇形的弧长，高就是圆的半径。

将这无数个小三角形如图 2 所示摆放[9]，设每个“小三角形”的面积为 S_i，由此得到

$$S_{圆}=S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots=\frac{1}{2}l_1r+\frac{1}{2}l_2r+\cdots+\frac{1}{2}l_nr+\cdots=\frac{1}{2}(l_1+l_2+\cdots+l_n+\cdots)\cdot r=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2。$$

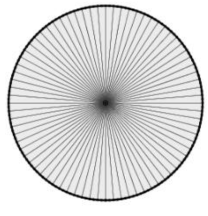


图 1 对圆进行分割

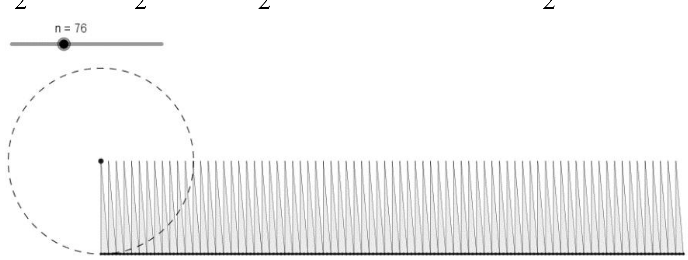


图 2 将分割所得扇形摆成一排

问题 2 在推导圆的面积公式的过程中，我们巧妙地对圆周进行了分割，构造了无数个以圆心为顶点的扇形。类比这种方法，从二维到三维，我们可以对球进行怎样的分割呢？

展现课前任务中学生分割的作品照片：（1）对半切开，得到两个半球；（2）纵横方向分割，得到 4 个形状大小相同的物体；（3）将球体切成若干层，每一层都是一个薄片；（4）学生将泡沫球制作成了蘑菇等更加不规则的手工作品；（5）过球心切割，结果是一个个类似三棱锥的小块；（6）像切西瓜一样，平均分割为多个小锥体，每个小锥体体积相等。

引导学生对比圆面积公式推导时分割的技巧，从同学们多种多样的分割方法中，选出与之最类似的球体的分割方法。

在此过程中，引导学生类比：圆心和圆周上的分割点连起来得小扇形，那么对于球的话，可以用球心 O 和球面的一个个小的分割面连接得到小锥体，从而引出锥体分割法。然后，古今对照，利用 GeoGebra 软件展示数学史上物理学家开普勒的方法，将球面分割为无数个网格（图 3）。

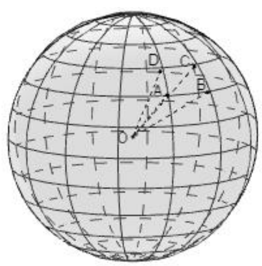


图 3 锥体分割法

问题 3 根据锥体分割法，你能推导出球的体积吗？

继续引导学生通过类比，从二维到三维，将球体积转化为所有小棱锥的体积之和，从而发现球体积的公式，即“小锥体”的体积为 V_i ，则球的体积为 $V_i = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n + \cdots$ 。如果网格分的越细（n 趋向于无穷大），则“小锥体”就越接近小棱锥。小锥体的高就趋近于球的半径 R，对球无限分割下去，可化曲面为平面，底面为曲面的小锥体可转化为底面为平面的小棱锥，无数个小棱锥体积之和为球的体积。这无数个小锥体的底面积之和就是球体的表面积，它们的高就是球体的半径。由于笔者在上节课已经给学生讲解了球体表面积的相关内容，因此学生在此可以通过计算发现 $V = \frac{1}{3} \times 4\pi R^2 \cdot R = \frac{4}{3}\pi R^3$ 。

4.2 球体积公式的推导

在学生们发现了球体积公式之后，指出锥体分割法在数学上的不严谨性，引出祖暅原理。借助实物展示，帮助学生理解祖暅原理，并利用祖暅原理进行球体积公式的严密推导。

问题 4 祖暅原理能否直接求出球的体积呢？

祖暅原理："夫叠棊成立积，缘幂势既同，则积不容异。"

教师展示"500 张大小相同的圆形纸片叠在一起得到圆柱"，再展示木制叠叠乐玩具："圆形木片由大至小堆放可搭建出圆锥"，这两者都是"叠棊成立积"的动态体现，理解立体图形可由一些薄片搭建得到。

研究球截面：取半球，求出球截面的半径 r，明确幂（截面面积）和势（高 R）（图 4）

$$S_{球截面}=\pi r^2=\pi(R^2-h^2)=\pi R^2-\pi h^2, h\in[0,R]。$$

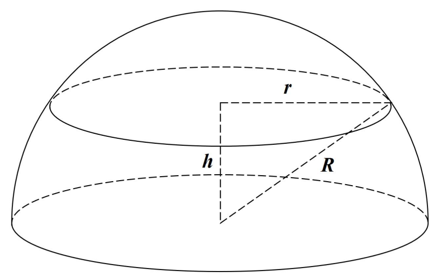


图 4 利用平行于半球底面大圆的平面截半球

问题 5 你能由球截面面积想到祖暅原理怎么用吗？

$$S_{截面}=\pi R^2-\pi h^2, h\in[0,R]。$$

复习教材中展示祖暅原理的图示，明确祖暅原理：①可以将不规则的物体体积转化为规则物体求体积；②柱体的水平截面面积不随高度改变；③锥体的水平截面面积随高度增加而改变；④锥体的截面面积之比与底面面积之比为高之比（相似比）的平方。πR^2 不变可看作柱体的截面积，πh^2 随 h 的增大而增大可猜想为锥体的截面面积，利用相似比验证πh^2 为高 R 的倒立锥体在 h 高处的截面面积。因此球截面看作两个立体图形的截面面积之差，可与已经学过的图形面积公式联系起来。

生：球的截面面积等于同高处柱体的截面面积减去锥体的截面面积。

师：数学史上阿基米德也说过：球的切片面积等于筒切片面积减去锥切片面积。

问题 6 你能分别构造截面积为πR^2和截面积为πh^2，$h\in[0,R]$，高均为 R 的立体图形吗？

生 1（课前跟老师交流过，他构造出的是和卡瓦列里一样的模型）将πR^2和πh^2分别看作圆的面积，猜想：（1）截面积为πR^2，高为 R 的立体图形是圆柱；（2）截面面积πh^2是的立体图形是高为 R 且倒立的圆锥。通过相似比计算验证：因 $\dfrac{S_{锥截面}}{S_{锥底面}}=\left(\dfrac{h}{R}\right)^2=\dfrac{S_{锥截面}}{\pi R^2}$，可得当锥体的底面和高都是 R 时，高为 h 时对应的截面面积为πh^2。

师：（GeoGebra 动态演示）取球的半径 R=1，创建滑动条 h，h 从 0 到 1 变化。h 变化时半球的截面面积的值始终等于同高等底的圆柱截面面积与圆锥截面面积的差（图 5）。

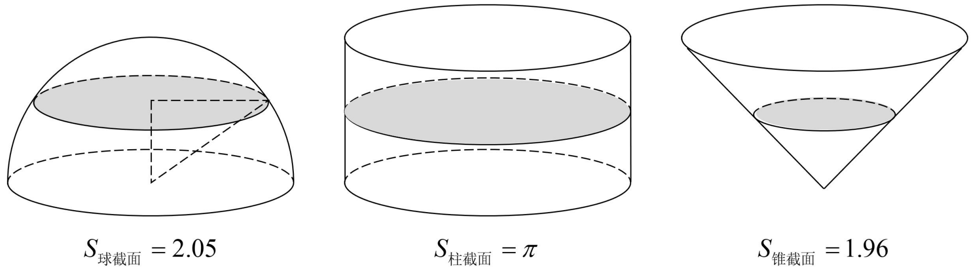


图 5 GeoGebra 动态演示图

再反向操作，感受“叠棊成立积”，隐去圆柱和圆锥，当 h 从 0 到 1 变化时两个截面追踪轨迹，分别生成一个圆柱和一个倒立的圆锥。二者体积相减，可将圆锥体平移到圆柱体中构造出新的组合体，由祖暅原理，其与半球的体积相等，因此，半球体积等于圆柱体积减去圆锥体积（三者同底等高）

$$V_{半球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3,\quad V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3。$$

基于课前学生的研究成果：由“图形”计算“面积”是唯一的，反之，由面积构造图形，是任意的。截面面积对应的几何图形不唯一，自然能构造出多种简洁的模型来转换球的体积。接下来由学生展示并介绍自己的研究成果。

（1）学生 A 构造的模型（图 6）：$\pi R^2=\pi R\cdot R=S_{矩}$ 与达芬奇将圆的面积转化为矩形面积一致，又使用了祖暅原理，构造出简洁的模型。

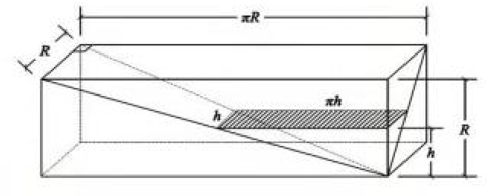


图 6 将 πR^2 看作矩形面积

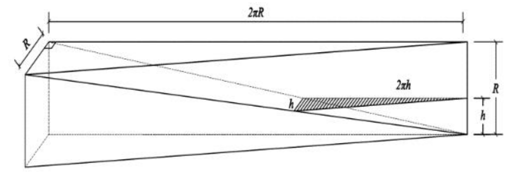


图 7 将 πR^2 看作三角形面积

（2）学生 B 构造的模型（图 7）：$\pi R^2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = S_{Rt\Delta}$ 与阿基米德求圆面积时将圆的面积转化为直角三角形的面积惊人的一致，综合祖暅原理运用得到的简洁的模型。

生：通过以上转化可以发现，半球的体积等于与之同高等底的柱体体积的 $\frac{2}{3}$。

师: 阿基米德在《论球与圆柱》第一卷中，发现球与其外切圆柱的体积比率为 2:3。

4.3 了解历史，总结反思

教师播放微视频介绍球体积公式的历史，课堂进入尾声，又有同学提出将 πR^2 用三角形面积来表示，高为 R、底为 $2\pi R$ 的任意三角形都可以，也画出了简洁的模型。还有同学要将 πR^2 转化为五角星的面积来构造等等，似乎意犹未尽，学生不仅仅满足于模型简单还想要其美观。

将球的体积转化成棱柱体积减棱锥体积的模型，对照刘徽（约 220-约 280）的牟合方盖，我们发现完成了古人化圆为方思想的传承，体现出东西方文化的融合，这是 HPM 视角下多元文化碰撞的成果。HPM 重构式课堂，在知识探索的关键步骤上，借用数学史料给予学生思考的能量，让学生以数学家的方式思考问题，不仅能减少他们的学习弯路，还能迸发出创造的火花，这是 HPM 课堂带来的惊喜。

5 教学反思

本节课学生体现出来的火热的思考以及创造性思维的形成，是 HPM 融入课堂所收获的。学生在学习中得到了充分的史料滋养，从中感受到数学家执着不懈的探究精神，同时还打破了自身固有的思维桎梏，拓展了视野，培养了自信，对形成自身良好的数学思维奠定了基础。既达到了数学促进个人智力发展的目的，又体现了数学学科的育人价值。这是与双新的目标一致

的，因此 HPM 是落实双新的好帮手。因本节课需要思考的点比较多，有一些学生探索出来并分享了成果，他们对祖暅原理有了更深刻的理解；也有学生通过老师和同学在课堂上的分析与讲解掌握了该原理，这部分同学课后反馈更偏爱于锥体分割法；课后问卷中学生都能回答出球体积公式推导用到了转化、划归的思想，知道了球体积公式推导的历史。在学生回答“当你了解到历史上数学家为推导球的体积公式所作的不屈不挠的努力以及所体现出的坚韧不拔的意志之后，如果在数学学习中又遇到困难，你愿意付出努力克服困难吗？”学生的答案都是“愿意”。本节课的缺憾是教师的课堂调动能力欠缺，没能在课堂上诱导出学生的激情表达，因此课堂气氛不够热烈，另外学生回应问题较慢时需耐心等待，这是教师以后需要改进的地方。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 1-2.

[2] Hayward, J. *Elements of Geometry*[M]. Cambridge: Hilliard & Brown, 1829: 113.

[3] Davies, C. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: A. S. Barnes & Company, 1841: 210-211.

[4] Loomis, E. *Elements of Geometry and Conic Sections* [M]. New York: Harper &Brothers, 1849: 173.

[5] Wentworth, G. A. *Elements of Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Heath, 1880: 394.

[6] Halsted, G. B. *The Elements of Geometry*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1885: 387.

[7] Wells, W. *The Elements of Geometry*[M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1886: 364-365.

[8] Beman, W. W. & Smith, D. E. New *Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1900: 360.

[9] 狄迈, 汪晓勤. 西方早期几何教科书中的圆面积公式[J]. 数学通报, 2022, 61(02): 7-11.

HPM 视角下平方根与开平方同课异构课例分析

钱秦，韦润蓉，刘思璐

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

“平方根与开平方”是沪教版七年级下册数学教科书“实数”章的第二节内容，在此之前，学生已经认识了无理数，知道了实数的概念。教科书以正方形桌子的边长问题引入，直接给出平方根的定义与开平方运算。已有的教学设计大多从乘方运算的逆运算或沿用教材的思路从正方形面积与边长关系引入[1]，以探求平方根的概念，却忽视了概念学习的必要性和概念生成的过程性，而 HPM 视角下的教学设计大多关注“算术平方根的估算”[2]，而非“平方根与开平方”的概念。

来自 HPM 工作室的教师 A 和 B 各从 HPM 视角设计和实施了“平方根与开平方”第一课时的教学。两位教师一起经历了选题与准备、研讨与设计、实施与评价、整理与写作的课例研究过程，授课班级来自同一所学校。由于教学风格、教学信念和教学目标等方面的差异，他们所选择的数学史素材和运用方式也不同，最后呈现出来的课堂自然也有不同的特点。本文根据 HPM 课例评价框架对两节课进行比较分析，以期为 HPM 视角下的数学教学研究提供参考。HPM 课例评价框架主要包括内容呈现、认知需求、学习机会、学生表现和评价应用五个评价指标。其中内容呈现是指数学史料的准确、连贯与合理性程度；认知需求即数学史的应用对学生理解和掌握数学概念的支持程度；学习机会指数学史对全体学生参与数学活动的支持程度；学生表现是基于数学史的数学活动，学生在任务完成、想法及其讨论上的贡献程度；评价应用是基于数学史的数学活动中，教师揭示学生思维、利用学生想法或处理学生错误的程度。[3]

1 两节课的教学过程

1.1 教学目标

两位教师的教学目标基本相似：（1）理解平方根、开平方的概念和平方根的符号表示；（2）理解正平方根与平方根的区别，知道正数的两个平方根之间的关系及实数范围内负数没有平方根；（3）会求完全平方数的平方根。不同之处在于，教师 A 强调平方与开平方运算的互逆性，

引导学生将开平方问题转化为平方运算问题解决。教师 B 注重理解平方根产生的背景，开平方运算的意义和运算性质。

此外，B 还设置了思想方法和数学文化上的目标：（4）经历观察、分析的过程，培养探究精神，形成分类讨论、数形结合思想，了解无理数的发展史，感受数学文化之美。A 所拟定的教学目标并没有体现数学史在本节课中的独特价值。

1.2 教学过程

两位教师的教学过程主要包括新知引入、概念形成、性质探究和课堂小结四个教学环节，详见表 1。

表 1 两位教师的教学环节

教学环节	教师 A	教师 B
新知引入	依次呈现《九章算术》中的求面积问题和求边长问题，引导学生用逆向思维解决问题。接着让学生用自己的语言描述什么是平方根。	播放中国共产党建党 100 周年大会阅兵片段并根据方阵提出开方问题。然后介绍《算法统宗》和《九章算术》中的开平方问题，接着请学生提出类似的问题。
概念形成	将学生对平方根的理解与早期教科书中数学家的定义进行对照，再给出课本上的平方根定义。让学生思考开平方运算的含义。	呈现历史上平方根的多种定义，让学生对其加以比较，引出课本上的定义。回顾开平方问题，介绍历史上求平方根的几何法和分解素因数法，再让学生选择自己喜欢的方法解决新的求平方根问题。
性质探究	根据例题分类讨论，归纳平方根的性质。接着播放关于根号演变历史的微视频。然后进一步辨析概念，根据平方运算与开平方运算之间的互逆关系，归纳出复合运算的等式，并将符号语言与文字语言进行相互转换。接	根据例题总结平方根的特点。以 2 的平方根为例引出根号产生的必要性，播放关于根号演变历史的微视频。接着让学生判断含根号式子的意义并加以分类，进而根据平方运算与开平方运算之间的互逆关系，建立复合运算

	着用符号语言来表达古人的平方根定义，最后以“方箭”问题作为应用。	的等式。
课堂小结	学生汇报学习体会和感悟，并布置课后思考问题。	引导学生从知识、方法和问题解决几个方面进行课堂总结。

由表 1 知，教师 A 和 B 的教学过程中存在许多相似的教学活动，但各有侧重。在引入环节，两位教师都使用了历史上的开方问题引出主题，揭示开平方的必要性。A 鼓励学生自己给出平方根的定义，而 B 设计了学生问题提出的活动。在概念形成环节，A 和 B 均采用了美国早期教科书中的平方根定义，且 B 还呈现了开平方的不同方法。在性质探究环节，两节课都突出了开平方运算与平方运算之间的互逆关系，并且都用微视频来展现根号符号的漫长演进历史，让学生感受数学符号的发展过程。A 更注重解题过程的规范性，也强调符号语言和文字语言之间的转换，B 则鼓励学生用多种方法求平方根。在小结环节，两位教师都希望学生能多谈谈收获，相比之下，教师 B 的提问指向更加明确。教师 A 还给学生布置了思考题，引导学生课后进一步探究。

2 数学史的内容呈现

课堂上呈现的数学史料应满足科学性、可学性、有效性、趣味性和人文性五项原则。两位教师课上使用的古籍中的开方术和开方问题出自汉代的《九章算术》和明代程大位（1533-1606）的《算法统宗》，根号的历史采自美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 1859-1930）的《数学符号史》，平方根定义源于美国早期代数教科书。这些史料有明确的文献出处、符合史实，均满足科学性。

2.1 教师 A 选用的历史素材

在新知引入环节，教师 A 从汉代《九章算术》和明代《算法统宗》中各选一个问题作为引例。

- 问题 1：“今有田广一里，从一里，问：为田几何？”[4]
- 问题 2：“今有方田积三千一百三十六步，问：平一面若干？”[5]

教师采取了“请同学翻译”的方式，避免了古汉语引起的阅读障碍，体现了可学性。这两个问题有助于达成“理解平方与开平方运算的互逆关系”这一教学目标，体现了有效性。

在概念形成环节，针对学生的平方根定义，教师给出了美国早期教科书 Mitchel（1845）和 Beman & Smith（1902）中关于平方根的定义，让学生进行古今对照：

• 定义 1：“因为任何一个量的平方都是由它自身相乘得到的，所以平方根是这样一个量，与它自身相乘，得到的是二次幂或平方。”[6]

• 定义 2：“二次幂的两个相等因子之一称为该幂的平方根。”[7]

古今联系的评价方式不仅有助于加深学生对平方根概念的理解，也能提升学生的自信心，从而体现了数学史料的有效性。

在性质探究环节，教师播放微视频，追溯根号的演变史[8]，视频的主要内容见图 1。生动形象的动画体现了趣味性，内容简单易懂体现了可学性。展现数学家在数学符号发展中的不懈努力，体现了人文性。同时，视频中介绍了根号上一横的来由和含义，帮助学生突破符号表达上的易错点，实现了“理解平方根的符号表示”的目标，体现了有效性。

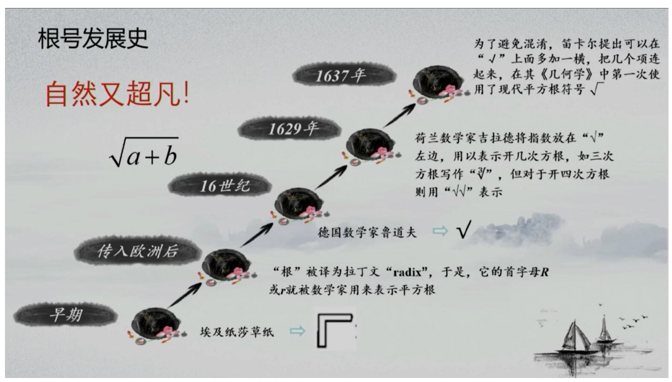


图 1 教师 A 的微视频内容

最后的课堂小结环节，教师以《算法统宗》里的“方箭”问题作为应用题，以检验学生的学习成果，

• 问题 3：“今有方箭八十一根，问：外周若干？”[5]

该问题体现了可学性和有效性。

2.2 教师 B 选用的历史素材

在新知引入环节，教师 B 也从《九章算术》和《算法统宗》中各选一个问题作为引例。

- 问题 1：“今有积五万五千二百二十五步，问：为方几何？”[4]
- 问题 2：“三百六十一只缸，任君分作几船装，不许一船多一只，不许一船少一缸。”[5]

教师并不要求学生解决这两个问题，只是让学生提出类似的问题并加以总结，为开平方运算的提出做好了铺垫，也与“理解平方根产生的背景”的教学目标一致，体现了可学性和有效性。同时，“船缸均载”问题朗朗上口，体现了史料的趣味性。

在概念形成环节，教师同样呈现了 Mitchel（1845）和 Beman & Smith（1902）中的平方根定义，让学生选择自己更喜欢的一种，以此突出平方根概念的不断完善过程，有助于学生“理解平方根、开平方的概念”。早期教科书中的平方根定义，体现了可学性和有效性。

教师还借鉴了《九章算术》中的开方法。以 $\sqrt{55225}$ 为例，其解法为：先估计 55225 的平方根是一个三位数 $100a+10b+c$，经简单估算得出 $a=2$。如图 2，大正方形面积为 55225，从中挖去小正方形 S_1，余下大磬折形，其面积满足

$$\begin{cases}55225-S_1>2S_2\\55225-S_1-S_3>2S_2\end{cases},$$

即 b 应该满足

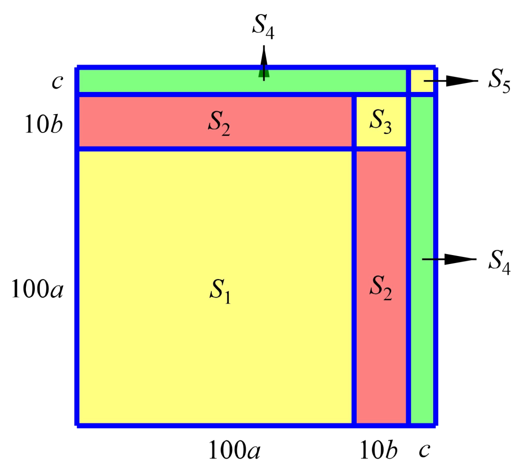


图 2 《九章算术》中的开方法

$$\begin{cases} 2\times(100a)\times(10b)<15225 \\ 2\times(100a)\times(10b)+(10b)^2<15225 \end{cases},$$

校验得 $b=3$ 。同理可得 $c=5$ 。[4]

上述方法用到了多次估算，思维要求较高，教师 B 没有全盘照搬，而是进行顺应式改编，并引导学生踊跃参与方法的探究，体现了可学性。最终，学生逐步提出了数形结合、利用完全平方和公式、分解素因数等精彩的想法来完善几何开方法，体现了有效性。

在性质探究环节，教师 B 也通过微视频追溯根号的演变历史[8]（图 3）。微视频将根号演变的关键历史展现出来，易于接受，体现了可学性。带有数学家头像的动画激发了学生的兴趣。微视频展现了不同地区、不同时期的平方根符号，对应了“了解符号的动态发展，感受数学文化之美”这一教学目标，体现有效性；又揭示了数学家的艰辛工作，体现人文性。

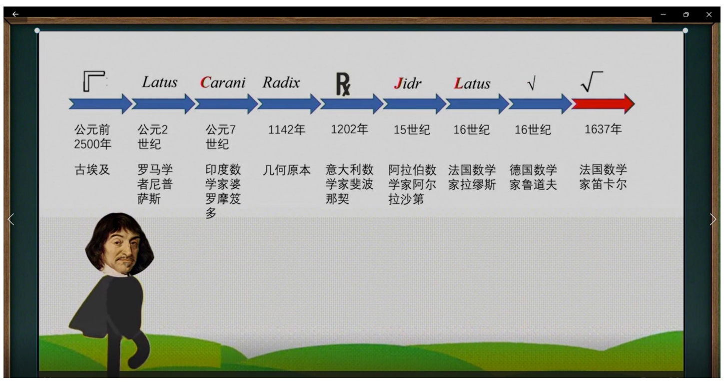


图 3 教师 B 的微视频内容

3 认知需求

教师可使用附加式、复制式、顺应式和重构式的方式将数学史融入教学以帮助学生理解和掌握数学概念，满足学生的认知需求。

当史料适用于学生的认知基础时，可以直接使用复制式融入课堂，如问题 3。当史料不易理解时，则需对史料进行一定的改编，如历史上的问题 1，根据秦汉时 1 里等于 300 步，于是教师 A 在新知引入环节根据教学需要对该问题进行改编：“假设一块田广 300 步，纵 300 步，问田的面积有多少？”。在概念形成环节，教师 A 首先让学生对平方根下定义，然后采用“古今联系”的策略，用数学家的定义来评价学生的定义。在性质探究环节，教师 A 让学生用今

天的符号来表达早期数学家的平方根定义。以上两个活动均属于顺应式。关于根号演变历史的微视频，属于附加式。

教师 B 在新知引入环节原原本本采用了历史上的开平方问题，然后让学生归纳、总结这些问题，并提出类似的问题，以理解开平方运算的实质。在概念形成环节，教师 B 同样采用复制式，呈现了相隔五十余年的美国早期教科书中两种不同的平方根定义，并让学生加以比较，展现数学概念的动态发展过程。接着以学生容易理解的方式介绍《九章算术》中的开平方法，并将被开方数由 55225 改成 361，属于顺应式。此外，B 的微视频也属于附加式。

要满足学生的认知需求，教师需要为学生提供足够的思维空间和各种方式的挑战，杜绝填鸭式教学，应该让学生自己去探究、发现。总体来看，两位教师都使用了附加式、复制式和顺应式，给学生提供了“自己给平方根下定义”、“总结开平方运算的本质”等挑战。但两位教师未采用重构式，这可能是教师受限于手头没有足够的平方根概念的发展史料所致。

4 学习机会

教师要为学生提供公平、丰富、有效的学习机会，基于数学史的数学活动也应支持全体学生获得学习机会。课堂中的学习机会可从数学问题、学习共同体和教育技术三个指标观察。[9]

在数学问题上，教师要借助数学史问题尽可能地让每个人学生去参与课堂的分享环节。课堂观察表明，教师 A 在平方根概念辨析等未涉及数学史的活动中，通过全班游戏等方式为学生提供了丰富的参与机会。但在“给平方根下定义”“求解方箭问题”等基于数学史的活动中，教师抛出问题之后，往往仅让一两个学生回答就匆匆收尾。教师 B 的课堂通过设置“自行选择喜欢的方法来求平方根”的活动，让学生感受方法之美的同时，增加了学生间思想交流的可能性，为学生提供了相对更多的基于数学史的学习机会。但在其它基于数学史的问题上，B 所提供的学习机会同样较少。

在学习共同体上，两堂课都采用了分组的圆桌式座位设计。但在教学实施的过程中，两位教师都没有利用这一优势，课堂缺乏小组讨论与交流环节，重师生对话而轻生生互动。如若今后采用小组合作学习的形式，让学生互相分享彼此的想法，不仅能够提高学生在组内学习的参与度，还能促进小组之间的思想碰撞，给学生创造了更多表达自己想法的机会。

在教育技术上，教师使用 HPM 微视频为学生提供了有效、直观的学习机会，每个学生都能轻松地参与到学习中去。此外，希沃白板和投影等技术手段能够更加清晰、便利地展示学生的想法，为学生之间的思想交流提供了技术支持。

由于 A 和 B 的授课班级都不是他们平时自己任教的班级，因而他们对学生的情况不太熟悉，这也许是导致两者在学习机会维度上表现较弱的原因之一。

5 学生表现

学生表现关注的是学生参与课堂学习的意愿、参与度和在想法上的贡献程度。

教师 A 的教学片段 1

师：想想如果你在那个年代，你是数学家，你能不能描述一下什么是平方根？

生：如果一个数的平方是另一个数，第一个数就是第二个数的平方根。

师：他说得好不好，给他一点掌声！看看这里他跟哪位数学家说得有点类似呀？

生：第二个。

师：很棒，和数学家的定义有惊人的相似之处。

【评析】学生积极发表自己的平方根定义，体现了其参与学习活动的积极性。并且，学生的定义不同于教材中的定义，与历史上的平方根概念具有相似之处，学生表现出了创造性。可惜的是，教师只让一位学生分享了定义，忽略了也许同学们还有其他同样值得表扬的定义，这一点主要是学习机会不足所导致的。

教师 A 的教学片段 2

师：我们今天做个小老师，把同学们当作古人，告诉他们作为现代人的你是怎么想的。

生：81 根箭围成一个正方形点阵，可以理解成正方形的面积为 81。81 的正平方根为 9，最外围的箭就是 4 乘 9 再减去重叠的 4 根，共 32 根箭。

师：听清楚了吗？给他鼓鼓掌。

【评析】以上我们可以看到，学生应用所学知识解决实际开方问题的答案是准确的，学生的回答是有逻辑的和有依据的，语言表达也很流利。但这节课没有让学生探究开平方运算的多种方法，无法看到学生表现出更多精彩的想法。并且，由于教师在性质探究和问题解决的过程中都未开展设计小组讨论，因此本节课在同伴交流上有所缺失。

教师 B 的教学片段 1

师：（呈现古籍中的问题 4 和问题 5）你还能提出类似的问题吗？

生 1：一百四十四只缸，任君分作几船装，不许一船多一只，不许一船少一缸。

师：老师以为大家会用白话文来举一个例子，没想到同学还是用文言文举的，很厉害。

生 2：当π取 3 时，圆的面积为 10，求圆的半径。

师：太棒了，用圆的半径和面积的关系来考察大家。类似这样的问题有很多，你能举得完例子吗？……类似这样的问题，可以归结为怎样的一种问题？

（沉默了几秒）

师：那老师来说说看，我可以用一句话来进行总结……

【评析】教师 B 设置了问题提出活动，让学生提出类似的开平方问题，两位学生积极分享。生 1 的回答其实模仿了“船缸均载”问题，只是换了一个数字，但是生 2 的回答就体现出了较高的创造性，他由正方形边长与面积的关系联想到了圆的半径与面积的关系，说明学生真正理解了开平方运算的实质。遗憾的是，B 未能在多等一段时间让学生去归纳总结这一类的问题。

教师 B 的教学片段 2

师：请大家用自己喜欢的方法求解面积为 1521 平方米的正方形边长是多少？

师：看看我们刚刚讲到的方法，或者我们没讲到但你的方法都可以用。

生 1：利用短除法分解素因数，求得 39。

师：同学一会就算好了，你们都比古人聪明噢……

生 2：因为 40 的平方是 1600 比 1521 要大，就需要减掉一个数，因为九九八十一，可以试一下 39，39 的平方算出来就是 1521。

师：好厉害！她发现了一个更好的方法，用完全平方差类似的方法解决。其实就是在边长为 40 的正方形中有一个面积为 1521 的小正方形（图 4），求得 x 就能算出黄色正方形的边长了……

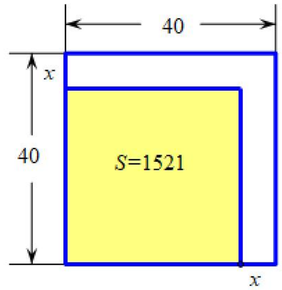


图 4 开方的几何方法

【评析】在做这道练习题之前，学生们学习了分解素因数和《九章算术》中的几何开方法两种方法来求解平方根，鼓励学生采用不同的方法来解决问题。两位学生分别分享了自己的做法，体现了学习的主动性，两位同学的解法都是正确的，学生的想法贡献度很高。特别是，第二位同学使用了一种全新的方法来求解平方根，对所学的内容是有所拓展，体现了创造性延伸。

6 评价运用

通过评价反馈，教师要揭示学生思维的价值，从而厘清概念、解决学生存在的困惑，并增强学生的数学自信心。对于学生的回答，教师应做到及时回应、适时追问。如果学生出现了错误，教师应以此为契机，通过讨论的方式解决，避免其他学生再犯这类错误。

A 和 B 都采用了“古今联系”的方式来评价学生。“古今联系”策略让学生仿佛穿越时空与数学家对话，有效地激发了学生的兴趣，对于学生的自信心也有着极大的鼓舞作用。比如在连线配对活动中学生顺利解决了问题，教师 A 感叹到 “太好了，数学家 Mitchel 一定会很高兴，你把他这么长一句话翻译成了如此简洁、漂亮的数学式子”。再如，当学生没看懂早期教科书中的平方根定义时，教师 B 告知学生古人也同样遇到过这样的困难，给学生带来心理安慰。还有，在解题环节中教师 B 用“这位同学的分析很有道理，如果你早出生几千年，你可能就是一位名人了！”这段话肯定了同学的想法。

同时，A 和 B 的形成性评价也强调了数学的严谨性和系统性，及时回应学生的错误。两堂

课学生都提到了“负数没有平方根”，这一论述在初中来看并不算错误，但长期来看不利于学生的系统学习。针对学生的这一观点，教师 A 立刻补充强调道“一定要注意数的范围，在实数范围内负数没有平方根”。类似地，教师 B 也补充道：“在初中阶段，负数是没有平方根的，如果你想进一步研究，可以等到高中的时候。”这为之后的复数教学埋下了伏笔。

教师 A 的课堂还多次使用了同伴评价的方式让课堂评价主体更加多元，如“他说得好不好？给他一点掌声”和“听清楚了吗？给他鼓鼓掌。”

7 结 语

综上所述，两节课在史料的选取上都符合科学性、可学性、趣味性与有效性，但人文性稍显逊色。数学史运用方式则倾向于复制式、附加式与顺应式，缺乏重构式，学生无法体会平方根这一概念的生成过程。在课堂互动中两位老师都缺乏生生互动的意识，所给予的学习机会偏少。教师 A 更注重课堂的条理性，学生创造力发展不足，而教师 B 则强调启发式，学生的课堂表现与思维发散性较强。

通过对两节课的比较分析，得到如下教学启示：

（1）优化教学目标，凸显文化价值。

实践证明，将数学史融入数学教学，有助于构建知识之谐，彰显方法之美，实现能力之助，营造探究之乐，展示文化之魅，达成德育之效，因此，在采用 HPM 视角进行教学设计的时候，教师首先需要深入思考数学史所具有的独特价值，并对教学目标进行优化，进而围绕教学目标，选择史料与运用方式。

（2）深剖史料内涵，重构概念教学。

重构式在概念教学中能够让学生亲历知识的发生过程，具有桥梁与支架作用。但在教学实践中，重构式的做法最为少见，原因大致有二：一是教师缺乏对重构式的认识；二是史料不足或对其缺少挖掘与剖析。从“平方根与开平方”的发展历程看，其产生源于丈量土地问题，其定义虽未毕现，却已在图形中显露端倪。深掘史料，才能重现知识生成。

（3）重视生生互动，尝试探究教学。

两位教师在课堂上虽尝试与学生互动，但缺少小组合作意识，致使部分学生参与感不强、缺少创新性思维。基于数学史的探究活动能更大程度发挥学生的主体地位，给予不同水平学生丰富的参与机会，或能收获其创造性的想法。因此，教师可根据学情与内容知识，适当在课堂上安排合理的探究活动。

参考文献

[1] 张先锋, 陈婷. 为有源头活水来——例谈“算术平方根”概念教学设计[J]. 数学教学通讯, 2021(23): 39-40.

[2] 杨豫晖, 戎海武, 李学良. HPM 视角下“算术平方根估算”的教学[J]. 中学数学教学参考, 2019(12): 67-69.

[3] 汪晓勤. 关于 HPM 课堂教学评价的案例分析[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 1-6.

[4] 郭书春. 九章算术译注[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1998: 50, 95-97.

[5] 郭书春. 中国科学技术典籍通汇・数学卷(第二册) [M]. 河南: 河南教育出版社, 1993: 1310-1329.

[6] Mitchel, O. M. *An Elementary Treatise on Algebra*[M]. Cincinnati: E. Morgan & Company, 1845: 102.

[7] Beman, W. W. & Smith, D. E. *Academic Algebra*[M]. Boston: Ginn & Company, 1902: 7.

[8] Cajori, F. *A History of Mathematical Notations (Vol. I)*[M]. La Salle: The Open Court Publishing Company, 1928: 360-378.

[9] 刘思璐. HPM 课堂教学评价框架构建及其应用[D]. 上海: 华东师范大学, 2021: 27-30.

他山之石

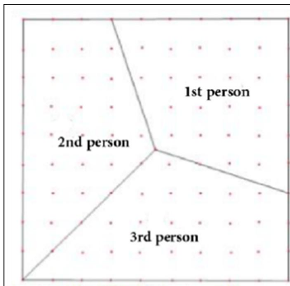
关注面积模型：职前教师连接分数和几何测量的能力

苏福梅

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 研究背景与研究设计

在计算分数时，人们常常用面积模型（例如：圆形饼块、矩形阵列、岩地板等）、长度模型（例如：分数条、菜杆、数字线等）和集合模型（例如：计数器、统计数等）等帮助人们理解分数。在这三种模型中，面积模型是用面积的“部分-整体”表示分数，这个模型清楚地说明了分数中部分与整体的概念，以及部分相对于整体的大小的意义。然而，一些研究人员认为，学生和教师使用面积模型时只采用典型的方式，即把面积分解成可识别的图形如圆、正方形和矩形等来理解分数，对于那些非典型性的方式关注比较少。因此作者以“蛋糕问题”（图 1）来探究职前教师对于面积模型中非典型方式的认识。基于此，本研究提出了以下三个问题：（1）职前教师在正确解决“蛋糕问题”中所采用的推理类型显示了什么知识？（2）职前教师对“蛋糕问题”的错误答案或推理中明显的困难来源显示了什么知识?（3）职前教师将分数知识和几何测量知识联系起来的能力与他们使用面积模型的复杂程度有什么关系？



注:这个点在正方形的中间

如图所示，三个人想平均分整个蛋糕，你认为每个人会得到三分之一的蛋糕吗?你认为每个部分代表蛋糕的三分之一吗?

如果“是”，画出并解释你的工作，以证明每个部分代表了蛋糕的三分之一。

如果“否”，说明原因。

你的解释应该集中在原因上，与你的推理联系起来，并用易懂的语言解释，使 K-8 年级的学生能够理解的。

图 1 蛋糕问题

这项研究涉及 82 名职前教师，首先，对职前教师进行书面调查，要求回答每个部分是否

代表整个蛋糕的三分之一，并写出可以提供给小学生的解释。然后，作者对其中的 22 名职前教师进行了基于个体任务的访谈，并记录访谈结果。

2 研究结果分析

大约 48%的职前教师回答正确，认为每个部分等于整个蛋糕的 1/3；52%的职前教师表示这三个部分并不相等。虽然答案只是是或否，但职前教师使用了各种策略来证明他们的答案。值得注意的是，同样的策略并不总是得出相同的结论，这表明答案的正确与否并不能反映职前教师的思维特征。因此，作者将职前教师的回答分为两类：（a）回答正确；（b）回答错误或回答正确但推理错误。在 82 名职前教师中，27 名属于前者，55 名属于后者。然后，作者讨论了给出正确答案所用的推理过程以及回答错误或回答正确但推理错误的类型。

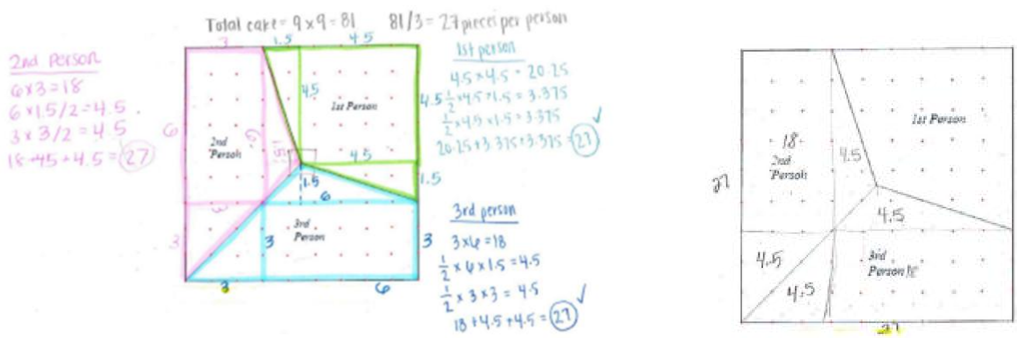
2.1 给出正确答案

策略类型 1：计算正方形单元数

使用该策略的 17 名职前教师清楚地识别了正确的测量属性（面积）和单位（面积的正方形单元）。13 名职前教师比较了每个部分是否相同，而没有计算整个蛋糕的面积。4 名职前教师确定了整个蛋糕的正方形单元数（81 个正方形单元），并计算每部分的正方形单元数是否是整体的 1/3，也就是验证每个部分是 27 个正方形单元。

策略类型 2：分解形状

有 10 名职前教师通过将形状分解为更简单的形状（如三角形、矩形和正方形），并应用面积公式和其他数值操作来计算每个部分的面积。其中 8 名职前教师计算三个部分的面积，验证每个部分是否等于 27 个正方形单元（图 2(a)）；另外 2 名职前教师求出两部分的面积，然后用整体面积减去这两部分计算出第三部分的面积（图 2(b)）。



（a）　　　　　　　　　　　　　　　　（b）

图 2 分解形状

2.2 错误答案或无效推理

55 名职前教师给出错误的答案或无效的推理或两者兼而有之。大致归类为以下五个方面：（1）错误使用虚线网格（n=3）；（2）对面积的错误理解（n=23）；（3）依赖视觉评估（n=33）；（4）对分数计算中面积模型的错误理解（n=5）；（5）对任务的刻板思考（n=3）。由于对分类进行了多重编码，其总和大于 55。

对于第一种错误，主要是职前教师使用点线网格时对点和线的混淆。如图 3，职前教师通过乘以正方形两侧的点数（即 10×9=90）来确定整个正方形的面积，然后他们把整个面积分成三个部分，发现每部分应该有 30 个正方形单元。虽然在本例中，职前教师识别了面积并试图应用面积公式，但他们并未正确识别面积单位，也没有验证这三个部分是如何相等的。

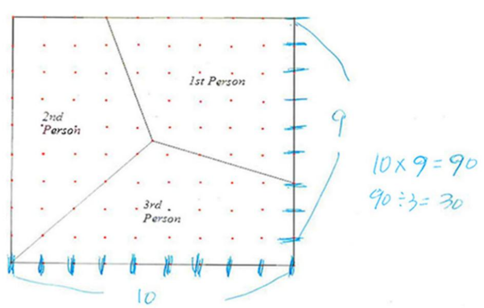


图 3 错误使用虚线网格的例子

23 名职前教师错误地理解了面积概念，他们错误的方式包括，用点的数量（n=19）、每个部分的周长（n=3）或线的长度（n=1）来计算面积而不是数正方形单元的数量来计算面积。例如，有职前教师认为，图片的每一部分都包含不同数量的点（图 4），第一部分有 20 个点，第

二部分有 19 个点，第三部分有 19 个点。由于点的数量彼此不相等，这意味着这些形状的大小不相同。

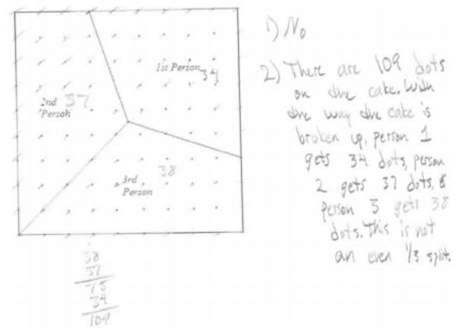
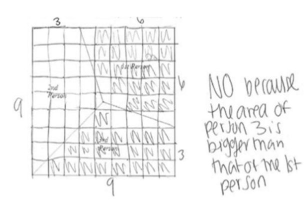
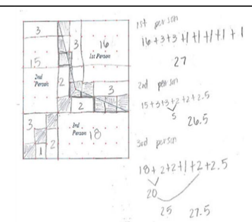


图 4 对面积错误理解的例子

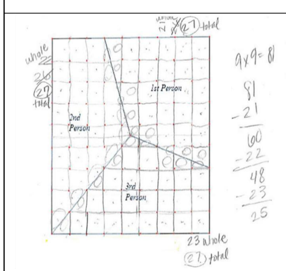
对于第三种错误，职前教师试图通过连接特定的点来构造正方形单元，但当他们不能构造完整正方形单元时，他们只是估算了该单元的大小，并未精确计算从而导致了不正确的答案（图 5(a)(b)）；有的职前教师假设每个部分为整体的 1/3，而没有验证这个假设，所以他们在没有证明的情况下得出了正确的结论（图 5(c)）。



（a）错误答案



（b）错误答案



“首先，算出正方形的面积是 9×9=81，然后计算完整正方形单元数：第一个人（21 个单元），第二人（22 个单元），第三人（23 个单元），之后估算不足正方形单元数，合在一起后，第一个人有（26 个单元），第二人（26 个单元），第三人称（27 个单元）。”

“当把这三个量加起来，会得到 79。因为整体面积是 81 个正方形单元，所以修改估算的部分把这两个 26 改成 27。”

（c）答案正确但推理错误

图 5 依赖视觉评估的例子

对于第四种错误，有的职前教师认为“每个部分不代表整体的 1/3，因为“三个部分形状不同”“如果你画出第一块的角度，你无法通过平移、旋转或翻转某个角度使第一块变为第二个和第三个形状”以及“仅仅因为有 3 块蛋糕被分开，并不意味着它们是整体的三个相等部分，如果相等，那它们应该有一致的形状。”这显示了他们对面积模型的错误理解。

对于第五种错误，有职前教师认为，“如果过程不支持数字表示，这三部分不能被认为是相等的。“这类似于 Zazkis & Liljedahl（2002）的发现，一些职前教师认为他们基于代数推理的正确解决方案是不充分的，因为他们没有涉及代数符号。

3 讨论与建议

针对上述结果，作者进行了分析与讨论，并给出了如下建议。

首先，教育者可以设计挑战职前教师刻板印象的任务。本研究中的一些职前教师关注任务中三个部分形状是否相同，表明它们认为面积模型必须分成相同的部分。因此，我们建议教师教育者仔细考虑对“平等部分”一词的使用，这通常被认为是理所当然的，但在本研究中，其解释方式不同。我们认为，利用精心设计的非典型视觉表征图形可以鼓励职前教师来检验他们自己是否有先入为主之见，以此更多地去关注数学概念的意义。

其次，教育者可以设计包含多个知识的任务提高职前教师对数学内容的理解。例如，本研究中使用的“蛋糕问题”需要分数、测量和几何方面的知识，以便充分解释分数的面积模型。教师教育者需要设计丰富的任务，使职前教师关注于知识网络，而不是孤立的概念或问题。

通过对本研究的推介，笔者希望能有更多的人了解分数教学中面积模型非典型性的呈现。

参考文献

[1] Lee, M.Y.& Lee, JE. Spotlight on Area Models: Pre-service Teachers’ Ability to Link Fractions and Geometric Measurement[J]. *Int J of Sci and Math Educ*, 2021, 19(5): 1079–1102.

创造你自己的问题！当给出真实世界的描述时，学生是否能够提出并解决建模问题？

刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

数学建模能让学生在现实情境中借助数学工具来解决问题，因而对于学生的生活是非常重要的，同时，数学建模也是世界各地课程中的重要组成部分。已有研究表明，学生在解决建模问题时经常遇到困难。还有研究表明，问题提出是培养学生问题解决能力的一种成功的教学方法，而数学建模被认为是解决问题的活动，因此，问题提出也可能提高学生的建模能力。迄今为止，几乎没有研究者通过问题提出来研究学生的数学建模能力。鉴于此，本研究通过呈现给学生六个不同的现实情境，试图回答以下问题：

Q1：要求学生根据现实情境提出问题时，他们会提出什么类型的问题？

（a）学生会提出数学问题吗？

（b）学生会提出什么类型的数学问题？

Q2：学生如何解决他们自己提出的建模问题或应用题？

（a）对学生来说，自己提出的建模问题比自己提出的应用题更难解决吗？

（b）学生在解决自己提出的建模问题和应用题时会遇到什么困难？

2 数据来源及研究方法

2.1 数据来源

本研究选取 82 名九年级和十年级学生，其中 49%是女生。学生来自 2 所不同的德国学校的 3 个班级，其中，有 29%的学生来自高轨班，71%的学生来自中轨班。学生的年龄在 14 到 17 岁之间，并且这些学生在这之前都没有问题提出的经验。

2.2 研究过程

我们为学生提供了六种现实情境，并向他们提供以下信息。

在这本小册子中，你会发现许多不同于现实世界的情况。不像你熟悉的大多数任务，在这些活动中没有数学问题需要你解决，因为今天你将自己提出问题。首先，阅读给定的现实情境，然后考虑一个数学问题，并把它写下来，最后解决你所提出的问题。

学生可以花费足够的时间来提出问题和解决问题。为了确保学生能够提出基于现实情境的不同问题，我们从现实世界中选择情境，让学生提出几个问题。本文使用已有建模研究中的情境，我们从建模任务中删除了已有问题，并添加关于情境的更多信息，以便学生提出不同数学领域的问题。

2.3 数据分析

2.3.1 学生提出的问题

为了回答第一个研究问题，我们使用 Mayring（2015）的内容分析框架对数据进行编码。表 1 给出了问题的编码方案的类别，它由“数学性”“现实性”“开放性”三个类别组成。

表 1 问题的编码方案的类别

类别	每个类别的范围			科恩的 kappa 系数
数学性	数学问题	非数学问题		0.81-1.00
现实性	与现实有真实联系	与现实有人为联系	与现实无联系	0.67-1.00
开放性	开放问题	封闭问题		0.61-1.00

学生提出的问题首先被分为数学问题和非数学问题。其中，不需要数学证明或直接应用数学模型的问题归类为非数学问题，这些问题可以用已有的信息直接解决。对于数学问题，我们进一步区分问题的现实性和开放性。这里将与现实有真实联系的开放性问题归类为建模问题；与现实有人为联系或具有封闭性的现实问题归类为应用题；与现实没有联系的问题归类为数学内部的问题。

2.3.2 学生对自己提出问题的解决方案

第二个研究问题是学生如何解决他们自己提出的问题。首先，对学生给出的解决方案编码，我们将其分为三个步骤，即数学模型、数学结果和解释。编码 0 表示错误或遗漏解的步骤；编码 1 表示提出了适当的数学模型、数学结果或解释。然后，我们将编码的分数累加，于是分数从 0 分到 3 分不等。此外，对于学生是否做出了关于现实情境的假设，如果没有假设，编码为 0，如果有假设，编码为 1。由于学生只需要在解决开放问题时进行假设，因此我们单独考虑这一方面，没有将其纳入上述分数。

3 研究结果

根据两个研究问题，可以将研究结果分为两个部分。第一部分分析学生提出的问题，第二部分分析学生自己提出的问题的解决方案。

3.1 学生提出的问题

为了回答第一个研究问题，我们分析了学生基于现实情境提出的问题。在 82 名学生中，有 55 名学生在任何特定情境下都会提出问题，38 名学生基于至少一种情境提出了不止一个问题，并且所有学生总体上至少提出了一个问题。学生共提出 495 个问题，其中，483 个问题归类为数学问题。有 54%的学生基于每种情境提出了一个数学问题，并且所有学生总体上至少提出了一个数学问题。

学生对提出数学问题特别感兴趣，因此，我们进一步分析这些问题是否符合建模问题的特征，即具有现实性和开放性。研究发现，学生针对“消防队”这一情境提出的问题具有多样性，因此，我们以这些问题为例，来说明学生提出的数学问题的特点。图 1 给出了学生提出的问题的特征分布情况。

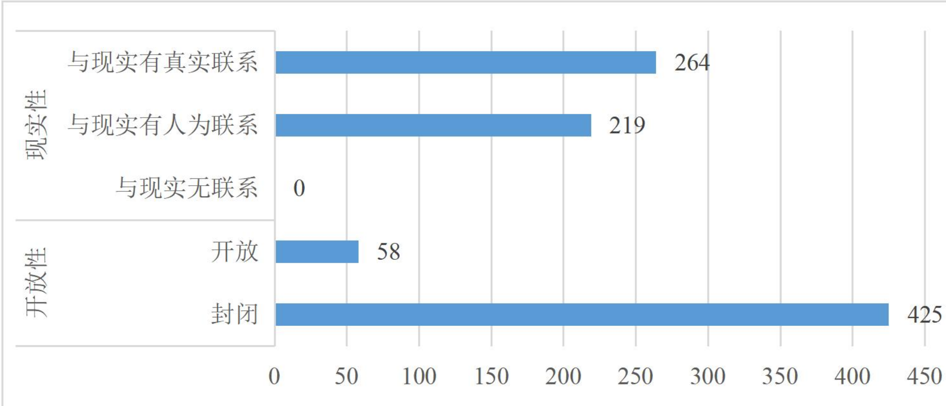


图 1 学生提出的问题的特征分布

由图可见，所有学生提出的数学问题都与现实有关，因此可以归类为与现实有关的问题。在这些问题中，更多的是与现实有真实联系，而不是与现实有人为联系。同时，大多数问题都是封闭的，只有 12%的问题是开放的。

此外，在学生提出的问题中，有 9%的问题符合建模问题的特征。44%的学生提出了建模问题，其中，38%的学生至少提出了一个建模问题，只有 6%的学生提出了不止一个建模问题。同时，62%的建模问题是基于“消防队”情境，其次有 21%的建模问题基于“筷子”情境，而没有学生基于“运动场”情境提出建模问题。

3.2 学生对自己提出问题的解决方案

3.2.1 学生解题成绩的差异

表 2 给出了学生对自己提出的建模问题和应用题的解决方案的分数的均值和标准差。

表 2 学生对自己提出的建模问题和应用题的解决方案的分数

问题类型	问题总数	解决方案的分数	
		均值	标准差
建模问题	N=42	M=1.86	SD=0.84
应用题	N=441	M=2.03	SD=1.05

由表可知，学生在解决建模问题和应用题上的得分没有显著差异（$t(480)=-1.03,\ p=0.304, d_{Cohen}=0.16$）。

3.2.2 学生解决自己提出的问题的困难

为了了解学生在解决自己提出的建模问题和应用题上的困难，我们分析了学生的解决方案，即学生成功地写出了哪些解决步骤和他们没有解决的内容。

研究发现，对于 71%的开放问题，学生无法对现实情境的各个方面做出额外的假设；49%的数学问题，学生未能建立正确的数学模型；28%的解决方案，由于计算错误，学生未能得出正确的数学结果；因为学生没有基于现实情境对数学结果进行解释，22%的问题未能得出足够真实的结果。总而言之，在 483 道数学问题中，只有 198 道问题学生能够完全正确地解决。

此外，我们比较了建模问题和应用题的解决步骤。由于只有在解决开放问题时才需要进行假设，此处分析了两类问题的解决方案，即建模问题和开放应用题。研究发现，只有 33%的建模问题和 19%的开放应用题，学生会对现实情境的各个方面做出了额外的假设。卡方检验表明学生对建模问题和开放应用题上的假设没有显著差异（$\chi^2(1)=0.49, p=0.484, \phi=-0.098$）。

表 3 针对学生提出的建模问题和应用题，给出了学生的解决方案中各个步骤得到正确处理的百分比情况。

表 3 学生的解决方案中各个步骤得到正确处理的百分比

问题类型	正确的解决方案的步骤		
	数学模型（%）	数学结果（%）	解释（%）
建模问题	28	72	84
应用题	53	72	78

由表可知，针对建模问题构建正确的数学模型比应用题困难得多（$\chi^2(2)=11.03,\ p=0.001, \phi=0.159$）。关于其他解决步骤，没有显著差异（数学结果：$\chi^2(1)=0.00, p=0.957,\ \phi=0.003$；解释：$\chi^2(1)=0.30, p=0.584, \phi=-0.026$）。

4 局限性和未来方向

在本研究中，我们要求学生基于现实情境提出数学问题，并予以解决。因为学生以前没有任何问题提出的经验，因而我们选择了这些情境，以确保学生能够提出问题。然而，我们相信，

如果使用不同的情境，学生提出的问题可能会有所不同。

在对学生的解决方案进行评分时，我们只划分了建模过程中的某些步骤，但是，这个分数无法包括建模过程中的每一个步骤，例如，简化、结构化和数学化等，这也是本研究的局限性之一。为了解决这一问题，我们需要对学生给出的解决方案进行深入分析，以揭示问题提出对建模的影响机制。

目前的研究结合了建模和问题提出这两个研究方向，以考虑如何通过问题提出来培养学生的建模能力。为了更深入地了解问题提出和建模过程之间的联系，我们认为未来可以进一步研究：（1）问题提出和建模过程是否以及如何相互作用，以及提出自己的问题是否影响学生的建模表现；（2）当要求学生尽可能多地提出问题，或要求他们根据给定的现实情境提出不同难度的问题时，学生提出的问题是否不同，以及基于现实情境提出问题是否会影响学生提出和解决数学问题的能力。

5 结 论

综上，学生能够提出和解决与现实相关的数学问题。因此，基于现实情境提出问题似乎是培养学生建模能力的有效方法。然而，学生表现出提出封闭问题的强烈倾向，解决这些问题不需要学生做出假设或构建现实情境的模型。此外，一些提出建模问题的学生或忽略了现实的各个方面，或考虑了现实的各个方面，但没有将其整合到数学模型中，因而他们也没有充分解决这些问题。总而言之，教师在进行数学建模的教学设计时，可以安排学生进行问题提出的活动，并应将上述研究结果考虑在内，从而促进学生建模能力的发展。

参考文献

[1] Hartmann, LM., Krawitz, J. & Schukajlow, S. Create your own problem! When given descriptions of real-world situations, do students pose and solve modelling problems?[J]. *ZDM Mathematics Education*, 2021, 53(4): 919–935.

活动讯息

满树嫩晴春雨歇，等比数列研讨时

第二期 HPM 高中网络研修班——“等比数列”研修活动顺利举行

韦润蓉[1]，杨舒捷[1]，雷沛瑶[2]

（1. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2. 华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

数列是一种特殊的函数，既是数学学科领域重要的研究对象，也是研究其他问题的有力工具，其内涵丰富，蕴含了函数思想、分类讨论、特殊到一般、数形结合等数学思想方法。因此，第二期 HPM 高中网络研修班对“等比数列”这一主题展开了学习与讨论。

网络研修班的中学教师按照各自的课程安排自行选题，选择等比数列主题的教师共 10 名。研修主要分为两个阶段，第一阶段是阅读与设计、汇报与交流；第二阶段是思考与研讨、分享与优化。

1 阅读与设计、汇报与交流

第一部分是全体学员学习阅读材料，进行初步的教学设计后集体研讨交流。2022 年 4 月初，华东师范大学教师教育学院 HPM 研究团队将撰写的学习材料上传至研修群，主要包括：历史材料、课标解读与教材分析。其后，小组的每位学员认真阅读材料，并在研修班第一次线上研讨活动之前，根据阅读材料完成初版的教学设计

第一次集体研讨于 2022 年 4 月 9 日 19:30 在腾讯会议上举行，会议持续了 2 个小时。首先由华东师范大学教师教育学院硕士研究生韩粟汇报部分历史材料（图 1），杨舒捷汇报部分历史材料并解读课标与教材（图 2）。然后，华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授从知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效六个维度阐述了数学史在数列单元教学中的应用与意义。

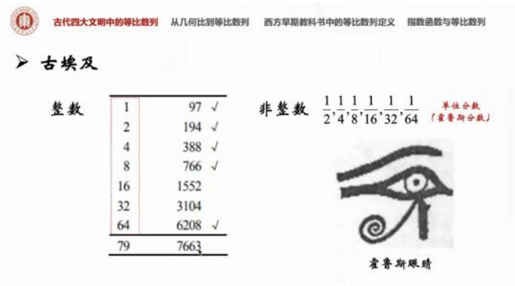
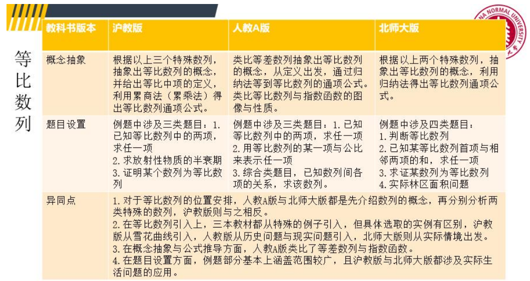


图 1“等比数列”的阅读材料



等比数列

教科书版本	沪教版	人教A版	北师大版
概念抽象	根据以上三个特殊数列，抽象出等比数列的概念，并给出等比中项的定义，利用累商法（累乘法）得出等比数列通项公式。	类比等差数列抽象出等比数列的概念，从定义出发，通过归纳法等到等比数列的通项公式。类比等比数列与指数函数的图像与性质。	根据以上两个特殊数列，抽象出等比数列的概念，利用归纳法得出等比数列通项公式。
题目设置	例题中涉及三类题目：1. 已知等比数列中的两项，求任一项 2. 求放射性物质的半衰期 3. 证明某个数列为等比数列	例题中涉及三类题目：1. 已知等比数列中的两项，求任一项 2. 用等比数列的某一项与公比来表示任一项 3. 综合类题目，已知数列间各项的关系，求该数列。	例题中涉及四类题目： 1. 判断等比数列 2. 已知某等比数列首项与相邻两项的和，求任一项 3. 求证某数列为等比数列 4. 实际林区面积问题
异同点	1. 对于等比数列的位置安排，人教A版与北师大版都是先介绍数列的概念，再分别分析两类特殊的数列，沪教版则与之相反。 2. 在等比数列引入上，三本教材都从特殊的例子引入，但具体选取的实例有区别，沪教版从雪花曲线引入，人教版从历史问题与现实问题引入，北师大版则从实际情境出发。 3. 在概念抽象与公式推导方面，人教A版类比了等差数列与指数函数。 4. 在题目设置方面，例题部分基本上涵盖范围较广，且沪教版与北师大版都涉及实际生活问题的应用。		

图 2 课程标准和教科书的分析

第二次集体研讨于 2022 年 4 月 10 日 9:00 在腾讯会议上举行，会议持续了 2 个小时（图 3-4）。小组成员依次汇报自己的教学设计，其他成员和团队的研究生、博士共同参与研讨，针对每一份教学设计分享自己的观点和改进建议，结合本次汇报的情况，共有五份教学设计脱颖而出。研讨结束后，每位老师根据研讨中其它成员的建议完善自己的初版教学设计，并提交修改后的教学设计，小组内部研讨被选出的五位老师的教学设计，提出修改意见，以小组为单位进行汇总。

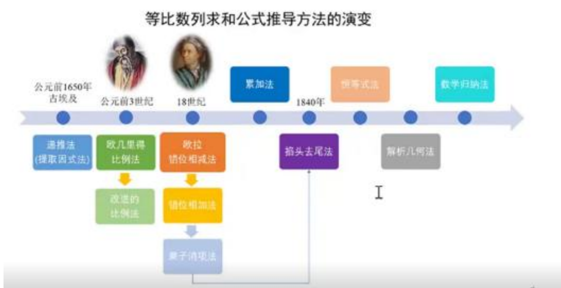


图 3 王鑫老师汇报的教学设计

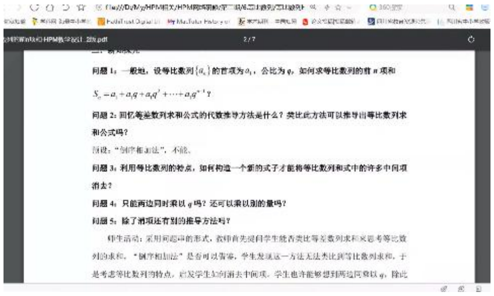
（游戏链接：https://cn.newdoku.com/2048.php）

图 4 盛晓君老师汇报的教学设计

2 思考与研讨、分享与优化

第三次集体研修于 2022 年 4 月 16 日 19:30 在腾讯会议上开展（图 5-6）。主要内容包括两个部分，首先，由五位老师进行优秀教学设计的分享，分享教师有内蒙古呼和浩特二中的杨艳华老师，分享内容为等比数列及其通项公式；此外，树德中学王鑫老师、高俊一中盛晓君老师、宣汉中学孙佳老师也分享了自己关于等比数列前 n 项和的教学设计；高境一中陈骏老师分享了等比数列拓展课的教学设计。接下来，其余老师以小组的形式对上述五位老师的教学设计进行了思考并提出建议。而后，硕士生韩粟和上海市长宁区教育学院教研员栗小妮老师分别从数学史料的应用方面回答的部分老师的疑问以及在课堂预设、题目难度方面给与了点评。最后，华

东师范大学教师教育学院邹佳晨老师从单元设计与教材变化的视角启发教师从数列到导数、甚至微积分过渡的连贯性，同时，强调数学史的应用承载着知识获取、方法学习和德育渗透。



问题 1：一般地，设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公比为 q，如何求等比数列的前 n 项和 $S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$？

问题 2：回忆等差数列求和公式的代数推导方法是什么？类比此方法可以推导出等比数列求和公式吗？

预设：“倒序相加法”，不能。

问题 3：利用等比数列的特点，如何构造一个新的式子才能将等比数列和式中的许多中间项消去？

问题 4：只能两边同时乘以 q 吗？还可以乘以别的量吗？

问题 5：除了消项还有别的推导方法吗？

师生活动：采用问题串的形式，教师首先提问学生能否类比等差数列求和来思考等比数列的求和，“倒序相加法”是否可以奏效，学生发现这一方法无法类比到等比数列求和，于是考虑等比数列的特点，启发学生如何消去中间项，学生也许能够想到两边同乘以 q，除此

图 5 优秀教学设计汇报

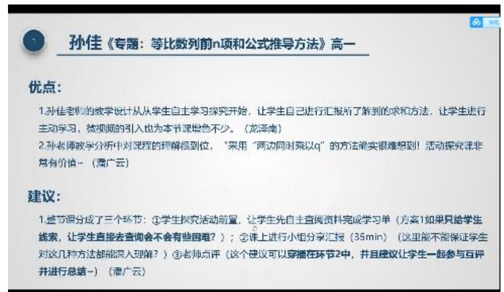


图 6 学员点评

四月中旬，长达半个月的以“等比数列”为主题的研究活动临近结束，但老师们学习的热情依旧有增无减，五位老师在本次研究过后不仅继续完善自己的教学设计，也对数学史的运用有了新的感悟与体会，从而为我们展现了精彩的教学视频。远路不须愁日暮，相信在 HPM 网络研修班的学习与专家老师的带领下，各位成员都将满载而归、受益匪浅。

观精彩课例，集百家之长

第二期 HPM 高中网络研修班——“等比数列”课例展示活动顺利举行

韦润蓉[1]，雷沛瑶[2]

（1. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2. 华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

2022 年 5 月 28 日晚上 7 点半，第二期数学史与数学教育（HPM）高中教师网络研修班研修活动如期举行。本次活动的主题为等比数列课例观摩与交流（图 1）。本次活动由数学史与数学教育（HPM）工作室主办，在华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授及其团队的带领下，天南地北的老师们能够相聚云端、同观优秀课例。

数学史与数学教育（HPM）工作室

HPM 网络研修班-等比数列课例展示活动

5 月 28 日 晚上 19:30-21:30 腾讯会议号：350-541-773	
19:30-20:50	HPM 视角下的等比数列课例展示 王鑫 四川省成都树德中学 杨艳华 内蒙古呼和浩特市第二中学
20:50-21:10	HPM 视角下的等比数列课例实践经验分享
21:10-21:30	评课与交流

图 1 研修活动安排

本次研修活动主要分为三个部分，分别是优秀课例展示、课例实践经验分享与评课交流。第一节展示课是由四川省树德中学的王鑫老师（图 2）为大家带来的“HPM 视角下等比数列前 n 项和公式”（图 3）。王老师以古代趣味数学问题作为情境，引发学生对等比数列前 5 项和的思考，由特殊到一般，为后续求等比数列前 n 项和公式进行了铺垫。在公式探究部分，王老师展示了学生们自己推导出的四种方法，并以时间轴的方式向学生展示了等比数列前 n 项和公式的历史发展，古今对照，给予学生数学学习的信心。随后，王老师再通过趣味问题与棋盘问题巩固学生的理解，并以校园贷为例警示学生，体现本节课的德育价值。小结部分，除等比数列求和公式与推导方法外，王老师还总结了本节课程中运用的分类讨论思想、方程思想与整体运算思想等，给学生回顾了整节课程清晰的脉络。

图 2 王鑫老师

图 3 王鑫老师的课堂教学视频

第二节展示课为内蒙古呼和浩特市第二中学的杨艳华老师（图 4）所授的 “HPM 视角下等比数列及其通项公式”一课（图 5）。杨老师从等差数列的旧知复习引入，并融合水滴筹的信息传递、霍鲁斯分数、《塔木德经》中“看望病人”等多个情境引出等比数列，以丰富的例子，给学生以直观的感受。接下来，杨老师给予学生总结等比数列定义的机会，学生们提出了比值定义和乘法定义，杨老师在补充其他定义的同时，向学生展示了等比数列定义的发展历程，以古观今，深化理解。并利用微视频向学生解释公比所使用的字母 q 的由来。在等比数列通项公式推导上，采用与等差数列类比的方式，从而以累乘的方法进行推导。在课程小结部分，杨老师也从知识总结与思想方法上进行归纳，并利用所学的等比数列激励学生不断努力，实现德育之效。在课堂的最后，学生们感动于杨老师的激励，自发地为老师、为自己鼓掌，为我们呈现出立德树人的和谐课堂。

图 4 杨艳华老师

图 5 杨艳华老师的课堂教学视频

两位老师在展示了自己的课程视频后，又对自己的课例进行总结，并为大家分享了自己的课例经验（图 6-7）。王老师分享了自己对课例开发过程的理解，提到“历史是教学的指南，课堂是历史的再现”。此外，王老师还展示了自己所撰写的课例论文，为其他研修班老师提供了一个可参考的流程。杨老师则从学习心得、实践过程、实践心得与课后反思四个方面总结其收获，展示了在专家团队的指导下，课例的精心雕琢过程，体现了 HPM 网络研修班对待课例的严谨程度。

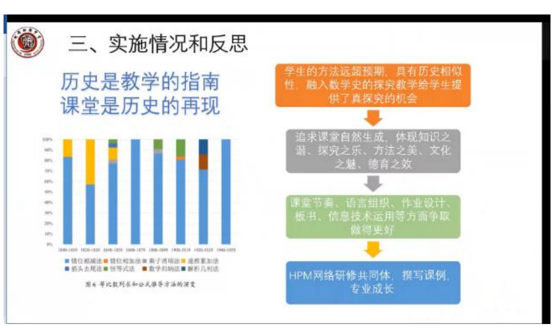


图 6 王老师的课例经验分享

图 7 杨老师的课例经验分享

在随后的交流环节，上海市中原中学的倪艳老师从德育与数学的结合、历史相似性的运用等方面分享了自己的观点。上海平和学校的倪骎远老师则从课堂前后呼应、定义的发展过程方面谈及收获。

最后的专家点评环节，上海市长宁区教育学院教研员栗小妮老师从数学史的融入与探究活动方面对王鑫老师的课例给予了肯定，并给出语速把控上的建议；从情境选择与德育价值上表达了对杨老师课程的赞赏与感悟，同时，给出更细致的情境补充，以作升华。华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师从四个角度对课程进行点评。首先，两位老师的留白式教学，向学生呈现了方法之美与发现之白；其次，在留白式教学的基础上，两位老师都达成了核心素养、知识的创造与收获；随后，在数学史的融入上，这两节课程的呈现都非常自然与适切；最后，肯定了两位老师课程中德育价值的凸显。华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授也对所观摩的两节课程进行了点评，在内容呈现上肯定了两位老师教学过程中的数学史融入的适当性与丰富性，从认知需求上强调复制式与顺应式在课堂中的有益之处；在学习机会方面也提出要在课堂上为学生提供一定的探究活动，加强生生交流；从学生的表现上，即陈述、交流、情感方面给予一定的建议，最后在评价运用方面，指出除古今对照外，还可以更多地利用生生评价。经过本次观摩课活动，大家都收获颇丰，相信在 HPM 专业共同体与各位老师的集体努力下，将会呈现更多教育理论与实践相结合的优秀课例。