上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2014 年第 3 卷第 4 期

邹 腾

（H.G.Zeuthen, 1839-1920）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

目 录

刊首语

本期封面人物是丹麦数学家邹腾，出生于丹麦格日米斯托（Grimstrup）。

1849 年，邹腾随父来到西兰岛的索勒镇，就读于那里的索勒学院，主修的是大学预科的课程，包括拉丁文、希腊文、数学、法文、德文和希伯来文，1857 年从索勒学院毕业，然后进入哥本哈根大学深造。1858 年，邹腾以优异成绩通过了哲学考试，开始学习数学。创刊于 1859 年的《数学学报》（Matematisk Tidsskrift）是丹麦历史上第一份数学期刊，邹腾常常在该期刊上提出问题、刊登解答，还发表各类小文章，这给他的学习与研究带来了许多灵感。1862 年春，邹腾获得硕士学位。1863 年秋，24 岁的邹腾获奖学金去巴黎学习，成为沙勒的学生。1865 年 6 月，他将自己的工作整理成文作为博士论文递交，同年 10 月 22 日被答辩委员会接受，11 月 21 日顺利通过答辩，获得数学博士学位。

邹腾是丹麦历史上第一个在国际重要学术刊物上广发论文的数学家，也是丹麦历史上第一个多产的数学家，共发表论文约 150 篇，出版著作 10 部。其中，数学史论著约有 40 余种，其中一些已成为经典之作，并被翻译成成德语、法语、俄语和英语。邹腾的第一部重要数学史著作是 1884 年出版的《古代圆锥曲线的历史》，此书为我们展现了古代几何学的重要历史，其学术价值与沙勒的《几何方法的产生与发展历史概述》相伯仲。1896 年，邹腾出版了一部更具影响力的数学史著作《古代与中世纪数学史》，1903 年出版《16、17 世纪的数学史》，1917 年又出版了《归功于科学推理的数学改革——从柏拉图到欧几里得》。此外，他还为《丹麦传记辞典》撰写了许多 19 世纪丹麦数学家的传记。

1888 年，柏林科学院授予邹腾斯坦纳（Steiner）奖，表彰他在几何学上所取得的非凡成就。1902 年，在挪威首都克里斯蒂安（今奥斯陆）举行的阿贝尔百年诞辰纪念会上，他被授予荣誉数学博士。1903 年，法国科学院为了表彰他在数学史领域所做的贡献，授予他首届比努（Binoux）奖。

邹腾在数学以及数学史领域筚路蓝缕、辛勤开拓并硕果累累，对丹麦数学以及丹麦的大学数学教育产生了深远的影响。他十分重视数学史对数学教育的价值，认为学生通过数学史的学习，不仅可以获得一种历史感，而且，通过从新的角度看数学学科，他们将对数学产生更敏锐的理解力和鉴赏力。毫无疑问，他是北欧国家 HPM 领域的先驱者之一。

教材研究

20世纪初美国几何教材中的数学文化*

——以“建筑中的数学”为例

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海，200241）

摘　要：早在20世纪初，将数学文化融入数学教材，就已成为数学课程改革的途径之一。就“建筑中的数学”这一主题而言，以杜雷尔、贝兹、史密斯、帕默尔为代表的美国早期数学教育家们筚路蓝缕、精心搜求，根据不同建筑物、建筑元素和装饰性图案，编制出丰富多彩的作图问题、证明问题和计算问题，揭示几何学与现实世界的密切联系，凸显几何学的广泛应用和巨大价值，展现几何学的迷人魅力，从而大大丰富了中学几何课程的内涵，为中学几何教学注入了鲜活的生命力。这些早期教材为我们提供了丰富的教学素材和思想养料。

关键词：几何教材；数学文化；建筑；顺应式

1 引言

今天，数学文化对数学教育的意义（“为何”）已经成了人们的共识。相应地，将数学文化融入数学课程（“如何”）也就成了数学教育研究的重要课题之一。然而，这个课题并非只是到了今天才有。事实上，早在20世纪初，数学文化就已悄然成为课程改革的重要工具之一了。一些数学教材已完全摆脱欧几里得《几何原本》的束缚，融入了丰富的数学文化素材。

那么，这些教材的编写者为何要将数学文化融入数学教材？他们运用了哪些数学文化素材？他们又是如何运用这些素材的？为了回答上述问题，我们以“建筑中的数学”为数学文化主题，对美国20世纪第二个十年之内出版的四种数学教材[1][2][3][4][5]进行了深入考察。

* 国家社会科学基金“十一五”规划 2010 年度教育学重点课题“主要国家高中数学教材比较研究”（ADA100009）子课题九之部分研究成果。

表 1 给出了四种教材的具体信息。

其中，贝兹和韦布的平面几何教材和立体几何教材先后在不同时间分开出版，但我们也

表 1 美国早期的四种中学数学教材

教材名称	编　者	出版社	出版年份
平面与立体几何	杜雷尔	Charles E. Merrills Company	1911
平面与立体几何	贝兹、韦伯	Ginn & Company	1912-1916
初级中学数学	温特沃斯、史密斯、布朗	Ginn & Company	1917
平面与立体几何	帕尔默、泰勒	Scott, Foresman & Company,	1919

把它们合在一起考察。下文中，为了叙述方便，我们用编写者来指代教材。

2 教材编写者的几何价值观

1901 年，英国教育家培利（J. Perry, 1850-1920）在英国科学促进会格拉斯哥会议上发表演讲，抨击当时英国的数学教育，倡议摆脱欧几里得的束缚，重视实验几何和实际测量，更多地强调几何的实际应用，由此引发了著名的“培利运动”[6]。受培利的影响，美国数学家摩尔（E. H. Moore, 1862-1932）于翌年倡导实验教学法，呼吁人们在数学教学中关注数学与科学之间的联系，重视数学的应用。到 1904 年，“培利运动”的核心思想在美国被概括为五点，其中一点是：“对绝大多数学生来说，实用性要比哲学思辨重要得多”[7]。同年，德国著名数学家 F·克莱因（F. Klein, 1849-1925）起草《米兰大纲》，提出数学教学不应过分强调形式训练，而应重视应用。

自此，如何在数学教学中兼顾数学的逻辑思维训练价值和实际应用价值，摆在了数学教育家们的面前。1908-1909 年，美国数学和科学教师联盟与美国教育协会联合设立“十五人委员会”，致力于几何课程大纲的制订，该委员会的目标就是在“形式主义”和“实用主义”之间寻求平衡。在十五人委员会的最终报告中，专门有一节介绍有关“建筑、装饰和设计”的实际应用问题[8]。1911 年，美国数学史家史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）出版《几何教学法》，通过大量的实际例子来说明几何定理的应用[9]。无疑，培利运动、《米兰大纲》、十五人委员会报告以及史密斯的著作，都对当时的美国教科书产生了重要的影响。

杜雷尔（F. Durell, 1859-1946）是最早关注数学文化的教材编写者之一。他在《平面与立体几何》（1904）前言里指出，该教材的目的之一是让学生不仅仅将几何学理解为一系列

的演绎推理，而且还要认识几何学的价值和意义[1]。作为几何大纲“十五人委员会”成员之一的贝兹（W. Betz）在其《平面几何》的前言中指出，为了在传统和现实之间寻找平衡，他的这本教材试图赋予几何学以生命力，并将之与现实联系起来；同时也保持几何学小心求证的精神。教材开篇介绍了几何学的历史和价值。杜雷尔指出：一个人要想深入了解工程、建筑、设计、天文、测量、航海等领域，几何学是不可或缺的[2]。史密斯则将几何学分成“直观几何学”和“证明几何学”，他们认为，几何学的应用主要包含在直观几何学之中。[3]帕尔默（C. I. Palmer, 1871-1931）和泰勒（D. P. Taylor）在其《平面与立体几何》的前言中指出，该教材的目的是呈现几何学的基本知识及其应用。编者认为，在中学课程中，没有任何别的学科能比几何学更具实用价值。[5]

由此可见，在本文所考察的 20 世纪初美国四种教材的编者们眼里，几何学具有逻辑思维训练和实际应用的双重价值，他们都试图在两者之间寻求平衡。由此我们就不难理解，为什么四种教材中包含了那么多的数学文化素材了。对教材中的数学文化作进一步考察，我们发现，“建筑素材中的数学”是最突出、出现最频繁的主题。

3 四种教材中的建筑素材

3.1 建筑素材的分类

对四种教材进行统计分析，我们发现建筑素材可以分成如下几种类型：建筑物、建筑元素和装饰性图案三类。其中，建筑物包括实际建筑物（如金字塔、长城、帕特农神殿、比萨斜塔、凯旋门、林肯大教堂、总督宫、黄金宫等）、虚拟建筑物（如水塔、桁架桥、拱桥、桥墩、烟囱、粮仓、地窖等）、弧形铁轨和道路；建筑元素包括拱券、花窗、屋顶或教堂尖顶；装饰性图案包括花窗玻璃图案、地砖镶嵌图案、镶木地板图案、地板镶边图案、天花板图案、建筑上的脚线、涡卷形等。本文所指的建筑素材不包括建筑调查问题、针对虚拟建筑的测量问题等。

表 2 给出了各类素材在四种教材中的分布情况。从表中可见，三种素材在四种教材中的比重互有不同，反映出编者不同的倾向性。贝兹和韦布使用的建筑素材最多，很多习题涉及花窗、拱券、装饰性图案的尺规作图、证明或计算。帕尔默和泰勒使用建筑素材的数量仅次于贝兹和韦布，其中，涉及虚拟建筑物、拱券和装饰性图案的问题居多。杜雷尔倾向于圆弧形铁轨和道路的设计以及某些装饰性对称图案的尺规作法。温特沃斯和史密斯使用的建筑素材最少，作者倾向于装饰性对称图案的尺规作法以及针对建筑物平面图的比例尺问题。

表 2 四种教材中的建筑素材统计

建筑素材		杜雷尔	贝兹-韦布	温特沃斯-史密斯	帕尔默-泰勒
建筑物	实际建筑物	2	13	1	7
	虚拟建筑物	3	7	11	14
	弯道或墙角	12	1	0	3
建筑元素	拱券	5	14	0	10
	花窗	1	25	6	7
	屋顶或教堂尖顶	6	1	1	4
装饰性图案		11	17	17	10
合 计		40	78	36	55

3.2 建筑素材的运用方式

四种教材运用数学文化素材的方式可分为点缀式和顺应式两类。点缀式是指在正文中插入建筑物图片，其功能是美化和人性化教材，并服务于有关主题，与文字相配。顺应式是指利用建筑素材来编制数学问题，其功能是反映几何学的实际应用。图 1 给出了两类方式在四种教材中的分布情况。从图中可见，四种教材主要采用了顺应式，这很清楚地反映出了四种教材注重几何学实际应用的特点。

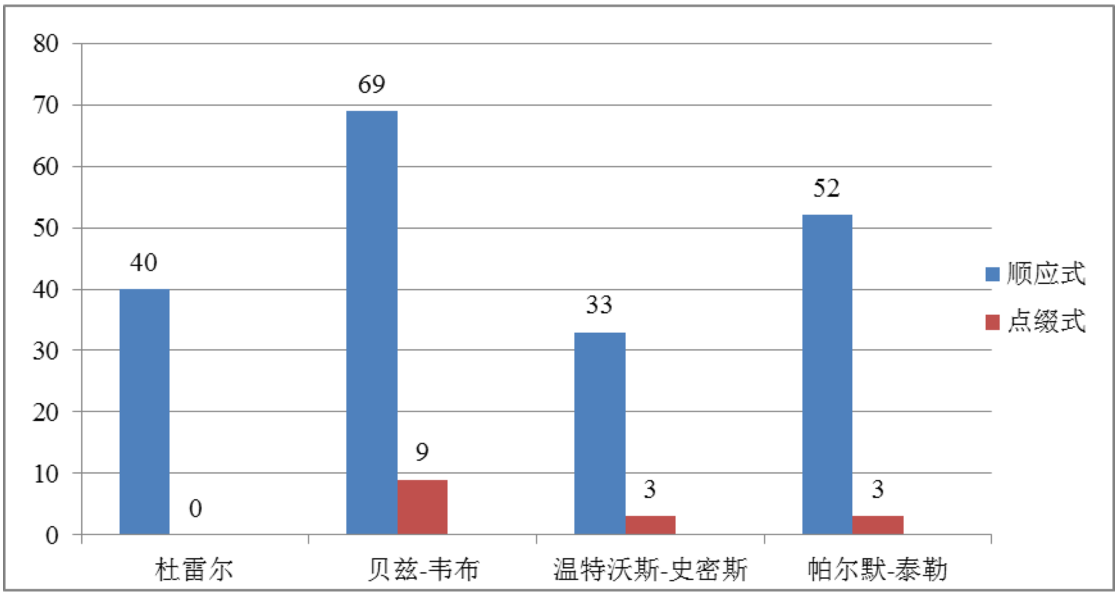


图 1 四种教材运用建筑素材的方式

以下我们对若干典型的顺应式建筑素材进行考察。

3.3 花窗与装饰性图案的设计

四种教材中，哥特式教堂的花窗与装饰性图案主要是一些由圆弧构成的旋转对称图形，分为三叶形、四叶形、五叶形、六叶形和八叶形。如图 2-4 所示。

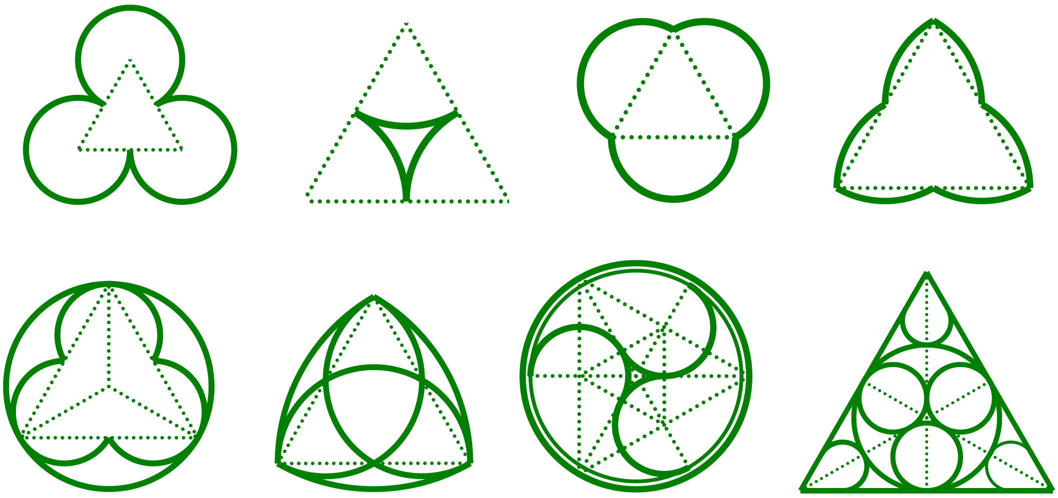


图 2 三叶形

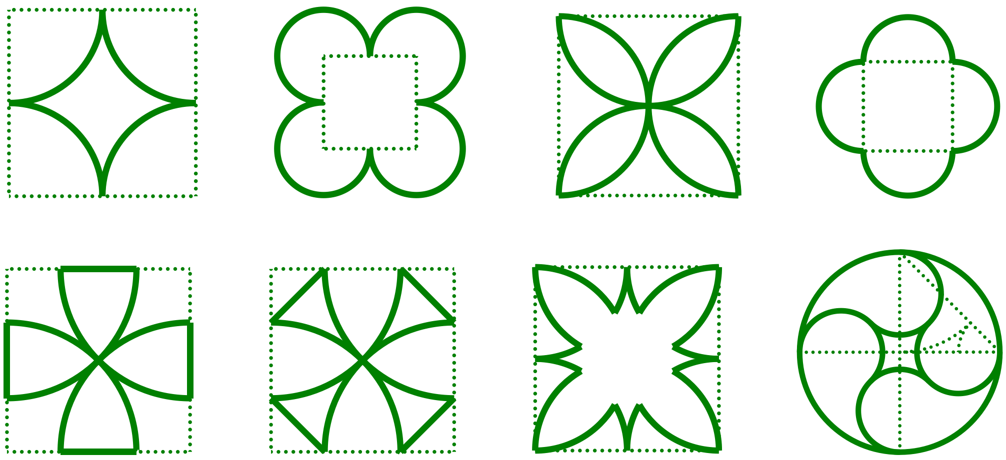
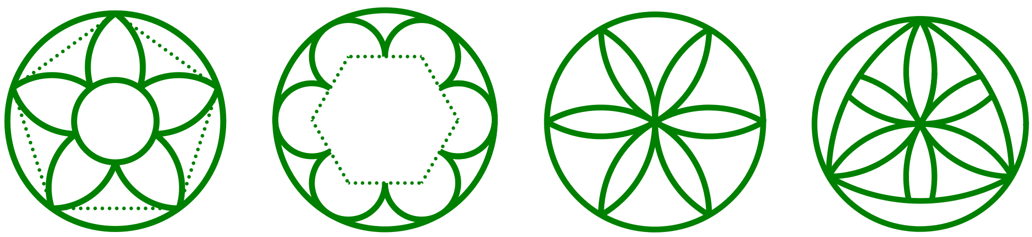


图 3 四叶形



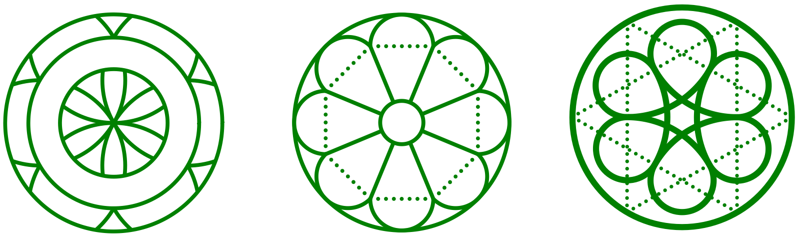


图 4 多叶形

四种教材中，各类图案大多出现在习题中，要求学生用尺规作出这些图形，并说明具体的作法。从图中的虚线可以看出相应的作图法。

四种教材中，由线段构成的花窗或装饰性图案很少。杜雷尔教材给出的各种装饰性图案中，有一幅图案如图 5 所示，这也是几何大纲十五人委员会报告中列举的图案。史密斯和温特沃斯在《初级中学数学》中采用了中世纪意大利某教堂的花窗图案，要求学生用尺规，并按自己喜欢的尺寸作出该图案，如图 6 所示。史密斯认为，这是中世纪最漂亮的花窗图案[1]。

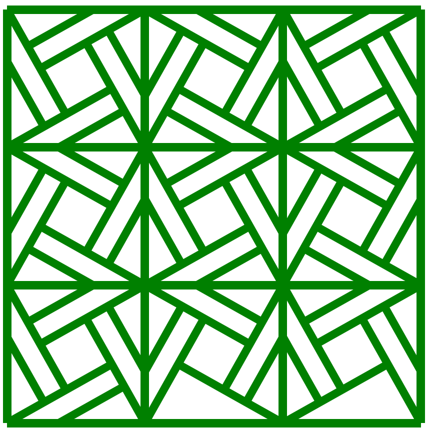


图 5 由线段构成的装饰性图案

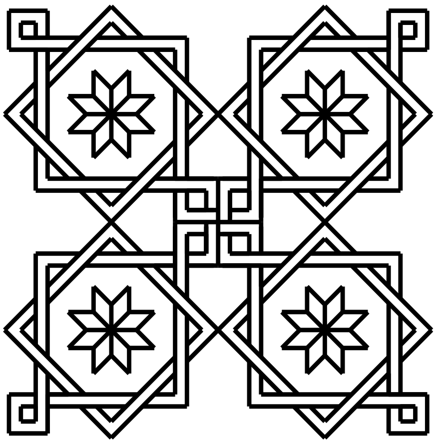


图 6 中世纪意大利教堂的镂花窗

3.4 拱券与相关数学问题

拱券是教堂建筑的基本元素之一，四种教材中，有三种都采用了拱券来编制问题，尤其是贝兹、韦布与帕尔默、泰勒的教材中，涉及多种类型的拱券，包括半圆拱、弓形拱、弓形尖拱、马蹄拱、等边拱、二心内心拱、二心外心拱、四心拱、土耳其拱、波斯拱等。威尼斯的著名建筑黄金宫，其二楼栏杆的上半部分乃是由波斯拱交错而成的，如图 7 所示。

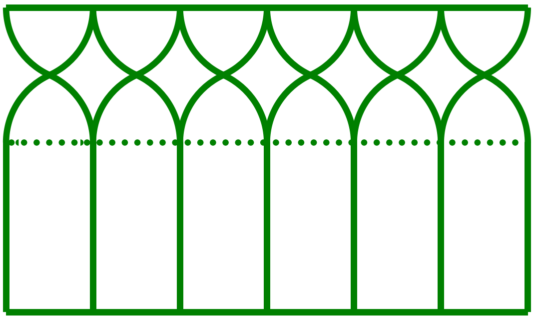
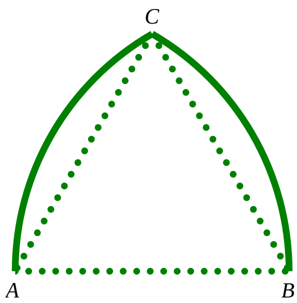
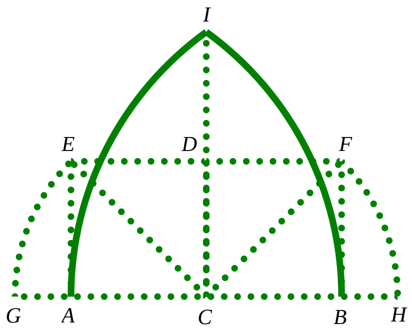
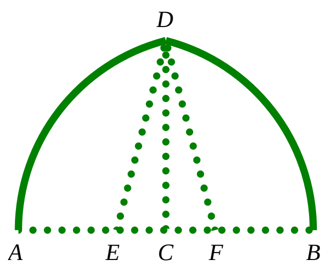
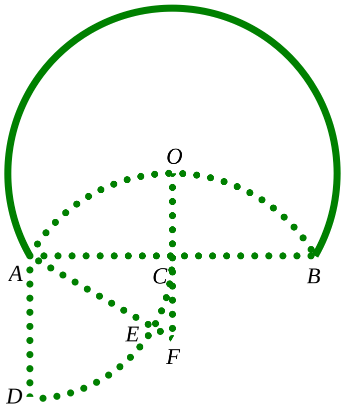
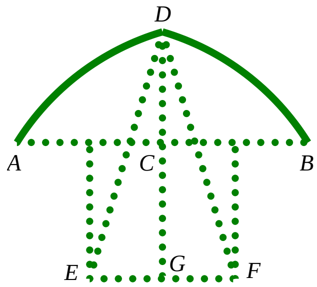
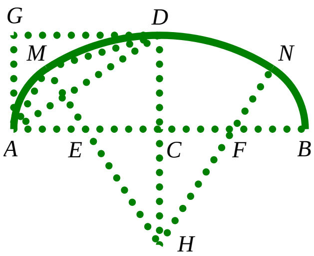
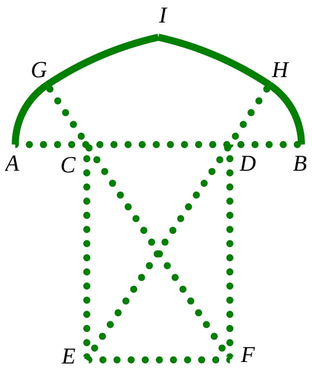
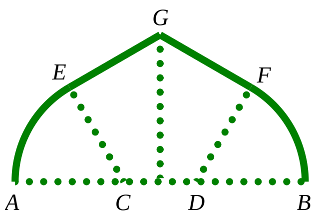


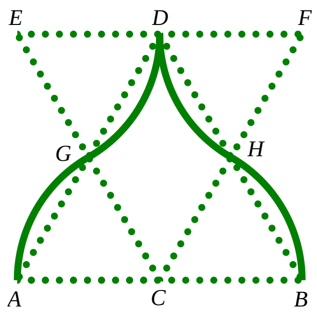
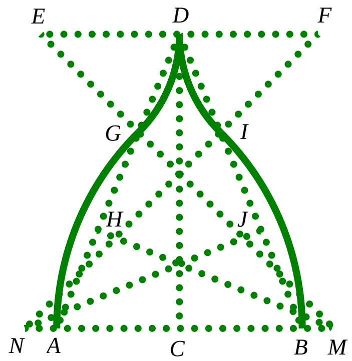
图 7 威尼斯黄金宫的拱券

我们看到，帕尔默和泰勒在其几何教材中，设置了这样的习题，通过让学生研究具体建筑物中的拱券的作图，产生出了许多丰富多彩的几何问题，见表 3。

表 3 拱形的作图与相应的数学问题

名称	图 形	作 法	问 题
等边哥特拱		分别以 A 和 B 为圆心，以 AB 为半径作圆弧，交于 C。	已知 $AB=a$，求拱的面积（即由 AB 和两弧所围图形的面积）。
二心外心桃尖拱		平分 AB 于 C，分别在 AC 和 CB 上作正方形，以 C 为心、CE 为半径作圆弧，交 AB、BA 的延长线于 G、H，分别以 G、H 为心，GB、HA 为半径作圆弧，交于 I。	已知 $AB=2a$，求拱高 CI。
二心内心桃尖拱		三等分 AB 于 E、F，分别以 E、F 为心，EB、FA 为半径作圆弧，交于 D。	已知 $AB=6a$，求拱高 CD。

马蹄形拱		平分 AB 于 C，作四分之一圆 CED，作三等分点 E，连 AE 并延长，交 AB 的中垂线于 F。以 F 为心，FA 为半径作圆弧，交 FC 的延长线于 O。以 O 为心，OA 为半径作优弧。	已知 $AB=2a$，求拱的高、周长和面积。
弓形尖拱		平分 AB 于 C，作矩形 CE、CF，使 $EG = GF = AC/2$。分别以 E、F 为圆心，以 EB、FA 为半径作圆弧，交于 D。	已知 $AB=4a$, $CG = b$，求 GD。
弓形拱		平分 AB 于 C，作矩形 CG，过三角形 GAD 的内心 M 作 AD 的垂线，交 AB 于 E，交 DC 延长线于 H。取 $CF=CE$。分别以 E、F、H 为心，EA、HM 为半径作圆弧。	根据作图法，证明 $EA=EM$，$HM = HD$。
四心拱		四等分 AB 于 C、D。以 CD 为边作矩形，使 $CE=CB$。分别以 C、D 为心，CA、DB 为半径作小圆弧，以 E、F 为心，以 EH、FG 为半径作大圆弧。	已知 $AB=4a$，求 FG 或 EH。
土耳其拱		将 AB 八等分，分别在 AC 和 DB 上作等边三角形 ACE 和 DBF，分别以 C 和 D 为心、CA 为半径作圆弧，再过 E 和 F 作圆弧的切线，交于 G。	已知 $AB=8a$，求拱的高、周长和面积。

波斯拱		三角形 *ABD* 和 *CEF* 为全等的等边三角形。分别以 *C*、*E* 和 *F* 为心、*CA* 为半径作圆弧。	证明拱的面积等于三角形 *ABD* 的面积。
		分别三等分 *AD*、*BD* 于 *G*、*H*、*I*、*J*，分别过 *H*、*J* 作 *AD*、*BD* 的垂线，交 *AB* 于 *M*、*N*，连 *MG* 和 *NI* 并延长，交过 *D* 且平行于 *AB* 的直线于 *E*、*F*。分别以 *M*、*N*、*E*、*F* 为心，以 *MA*、*NB*、*EG*、*FI* 为半径作圆弧。	根据作图法，证明圆弧 *AG* 与 *GD* 在点 *G* 处具有公共的切线。

3.5 拱券内切圆窗的设计

四种教材中，有三种教材都含有等边拱或半圆拱内切圆窗的设计问题。图 8-图 10 所示。其中，图 9 中的第二个图形是史密斯《几何教学法》、十五人委员会报告以及史密斯与温特沃斯的另一部教材《平面与立体几何》[10]中使用的图形。十五人委员会报告还介绍了一种等边拱内切圆窗的设计方法，如图 11 所示，其中 *CE* 和 *CF* 是圆心在直线 *AB* 上，半径为线段 *AB* 的圆弧。

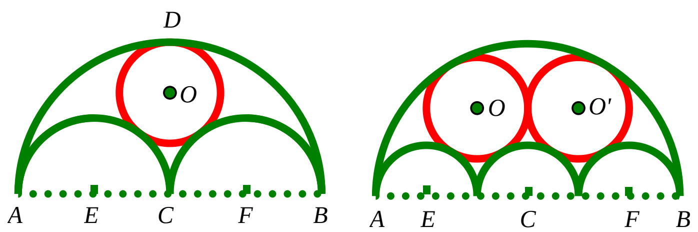


图 8 半圆拱内切圆窗的设计

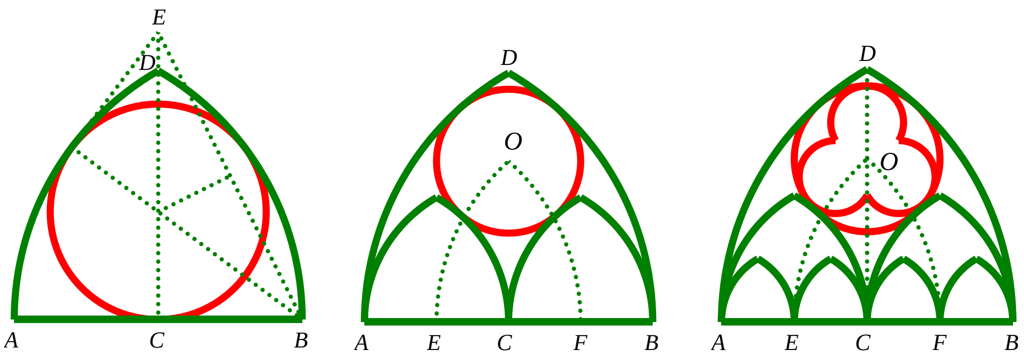


图 9 等边拱内切圆窗的设计

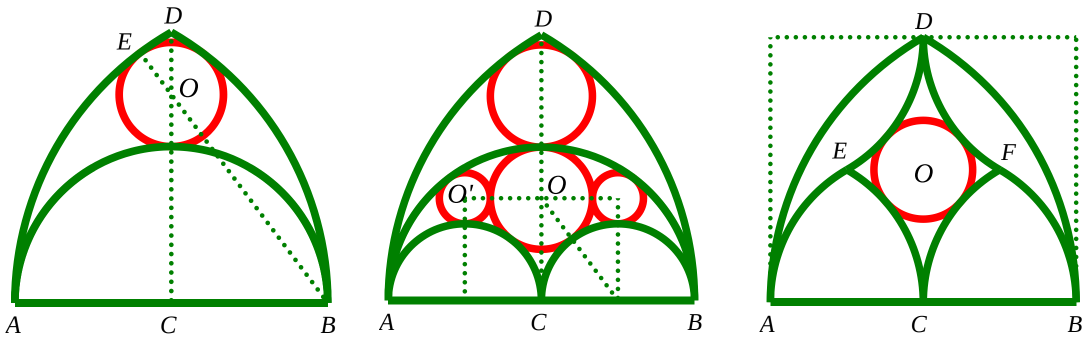


图 10 等边拱与半圆拱或波斯拱内切圆窗的设计

帕尔默还设置习题，要求学生研究实际建筑物中的圆花窗，如威尼斯著名建筑总督宫的圆花窗，三个圆窗两两相切，又与大的等边拱或小的波斯拱相切，如图 12 所示。

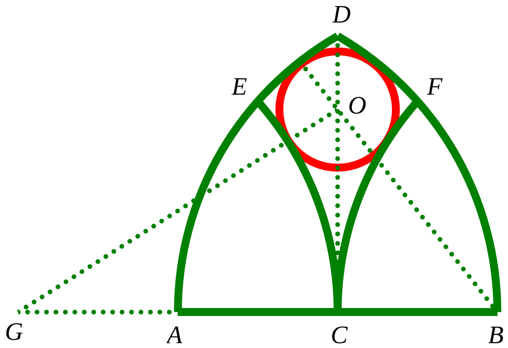


图 11 十五人委员会报告中的一种内切圆窗设计

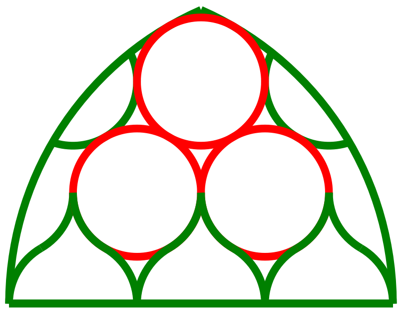


图 12 威尼斯总督宫的圆窗图

一般来说，拱券内切圆问题大多可以通过代数方法来解决，即假设内切圆已经作出，根据拱的跨度，求出内切圆的半径，从而获得尺规作图法。

限于篇幅，本文不再考察那些不具有西方文化特色的建筑素材。

4 结语

通过以上考察，我们可以得出结论：在数学教育发生剧烈变革的 20 世纪初，少数美国

的教材编写者已经将大量数学文化素材融入数学教材之中，因此，将数学文化融入数学教材，已经成为当时数学课程改革的途径之一，正是当时的课程改革的需要促进了数学文化的应用。就“建筑中的数学”这一主题而言，以杜雷尔、贝兹、温特沃斯、史密斯、帕默尔为代表的美国早期数学教育家们筚路蓝缕、精心搜求，根据不同建筑物、建筑元素和装饰性图案，编制出丰富多彩的作图问题、证明问题和计算问题，揭示几何学与现实世界的密切联系，凸显几何学的广泛应用和巨大价值，展现几何学的迷人魅力，从而大大丰富了中学几何课程的内涵，为中学几何教学注入了鲜活的生命力。他们当之无愧是一个数学教育新时代的弄潮儿。

一个世纪之前的数学教育与今天的数学教育已不可同日而语，一个世纪前的数学教材也早已尘封于被人遗忘的历史角落，但当我们翻开那泛黄的、印刷并不精美的书页时，我们却仍能从中汲取丰富的教学素材和有益的思想养料。

（1）一个国家的数学教材不能割裂这个国家的文化。本文所考察的几种早期教材中的大多数建筑素材都具有浓郁的西方建筑文化特征，从而更容易发挥数学文化的教育价值，更有效地反映几何学的实际应用，更能获得教师和学生的认同。我们在编写教材时，当然可以渗透本国的历史文化元素。

（2）我们在讨论如何将数学文化融入数学教材时，不应忘记，数学文化本身是需要深入研究的。早期美国教材中的建筑素材都是研究、借鉴、挖掘甚至实地测量的结果。从不同的知识领域中挖掘数学元素，应该成为数学教育研究的重要组成部分。

（3）数学文化在教材中的功能远远不止是点缀，只有在更高的水平上将其融入，才能发挥出更大的价值。根据数学文化素材来编制数学问题，供学生探究，不失为理想的运用方式，值得效仿。

（4）当我们研究教材中的数学文化时，不应局限于现行的教材，那些逝去时代留下的教材值同样值得我们去关注，理由很简单：数学教育不可能完全割裂历史。

参考文献

[1] Durell, F. *Plane and Solid Geometry*. New York: Charles E. Merrills Co., 1911. 490-498

[2] Betz, W., Webb, H. E. *Plane Geometry*. Boston: Ginn & Company, 1912

[3] Betz, W., Webb, H. E. *Solid Geometry*. Boston: Ginn & Company, 1916

[4] Wentworth, G. A., Smith, D. E., Brown, J. C. *Junior High School Mathematics* (Vol.1-3). Boston: Ginn & Company, 1917.

[5] Palmer, C. I., Taylor, D. P. *Plane and Solid Geometry*. Chicago: Scott, Foresman and Company, 1919

[6] Cajori, F. *A History of Elementary Mathematics*. New York: Macmillan, 1917. 291-297

[7] Mock, G. D. The Perry Movement. *Mathematics Teacher*, 1963, 55(3): 130-133

[8] National Education Association. Final report of the National Committee of Fifteen on geometry syllabus. *Mathematics Teacher*, 1912, 5(2): 46-160

[9] Smith, D. E. *The Teaching of Geometry*. Boston: Ginn and Company, 1911

[10] Wentworth, G. A., Smith, D. E. *Plane and Solid Geometry*. Boston: Ginn & Company, 1913.

Mathematical Culture in Early American Geometry Textbooks: The case of Architecture

Wang Xiaoqin

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai, 200241)

Abstract: Early in the 20th century, it was a way to reform the mathematics curricula to integrate mathematical culture into textbooks. The materials about architecture were mostly used in some mathematics textbooks, such as those compiled by Durell, Betz, Wentworth, Smith, Palmer. These early mathematics educators took pains in searching the materials from various buildings, architectural elements and ornamental designs and posed various interesting problems of construction, demonstration and calculation, which exposed the intimate connection between geometry and the real world, highlight the extensive application and great value of geometry and show the charming fascination of this subject. The mathematical culture greatly enriched the geometry curriculum and instill life into geometry teaching. The early mathematics textbooks supply us with abundant teaching materials and ideas.

Keywords: geometry textbooks; mathematical culture; architecture; accommodation approach

正弦定理的证明：从历史到教学

张小明

（浙江省诸暨中学，浙江 诸暨，311800）

随着 HPM(History and Pedagogy of Mathematics)研究的不断深入，数学史对数学教学的作用越来越受到数学教育工作者的重视，从教材的编写到普通的课堂教学设计，已经开始重视历史的维度，在历史的脉络中重新审视教材的编写和概念的教学逐步成为数学教学研究的一个重要方向。

作为中学数学重要内容的正弦定理，我国发行的各类数学课本中采用的证明方法几经变迁，先后采用过向量法、作高法、面积法等证明方法，现行人教 A 版教材则是以勾股定理作为知识的生长点，从特殊到一般，猜想出正弦定理，然后再通过作高将问题转化为直角三角形中三角比的问题，过程自然、简洁。遗憾地是，这一过程没有给出正弦定理的完整形式，没有和外接圆的直径做联结，虽然在课后习题中要求学生证明了 $\dfrac{a}{\sin A}=2R$，但学生还是会有疑问：怎么会想到外接圆？本文以 HPM 的视角，立足正弦定理的历史发展，对正弦定理的教学提出几点建议。

1 对正弦定理的历史回顾

三角学是一门古老的数学分支，人们很早就开始了对三角形边角关系的关注，随后的勾股定理的发现更是数学史上的一件盛事，传说毕达哥拉斯为此宰杀百牛设宴以示庆祝，而作为反映一般三角形边角关系的正弦定理，其发展过程则要漫长得多。

1.1 从弦表谈起

现代意义下的三角学创于古希腊天文学家希帕科斯（Hipparchus，190 B.C-120 B.C），他为了解决天文学中的计算问题，需要一个三角比率表，为此他将每一个三角形(包括球面三角形)都当做是某个圆的内接三角形，这样一来，三角形的边均变成圆的弦，接下来的任务就是研究弦与其所对的弧（或圆心角）之间的关系，希帕科斯写了 12 本计算弦长的书，

但都失传了，后来的托勒密（Ptolemy，90-168）继承了希帕科斯的工作，编制了一张精度很高的弦表，由于当时采用 60 进制，所以托勒密将圆的半径定为 60，如果圆心角为α，则弦长$d=120\sin\dfrac{\alpha}{2}$，一般地，如图 1，如果半径为 R，那么$d=2R\sin\dfrac{\alpha}{2}$。在使用这个表的过程中，要给圆心角除以 2，得到弦长时又要乘以 2，显得很麻烦，于是后来印度人对其进行的简化。约公元 400 年左右，印度天文学著作 *Surya Siddhanta* 中给出了一个依据托勒密弦表的“半弦表”，说明了圆心角的一半与“半弦”的关系，随后的印度数学家阿利亚塔哈首次提出了正弦的概念，他用“ardha-jya”表示半弦，现在我们使用正弦函数“sine”的词源正是“半弦”。[1]

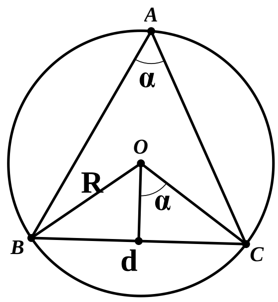


图 1

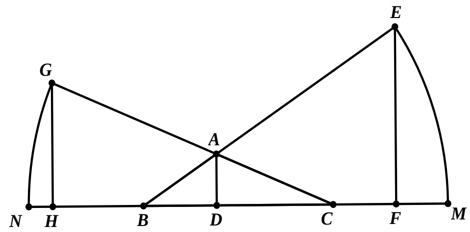


图 2

如前文所述，所谓的正弦本来就源自于圆的弦，而将三角形看成是圆的内接三角形这一方法自希帕科斯开始就被人们所沿用，这一做法也深刻地影响了后世数学家对正弦定理的发现和证明。

1.2 正弦定理的提出和证明

一般认为，最先提出并证明正弦定理的是伊斯兰天文学家家阿布·瓦法（Abul-Wafa，940-997），在《天文学大全》一书中，他提出并证明了球面三角形的正弦定理，而平面三角形的正弦定理的证明最先是纳绥尔丁·图西(Nasiral Dinal Tusi，1201-1274)给出的。

1.2.1 纳绥尔丁·图西的证明[2]

纳绥尔丁的证明和阿布瓦法给出的球面三角形正弦定理的证明方法基于同一个思路，即构造“半弦”来表示三角形内角的正弦。

如图 2，分别在 CA、BA 的延长线上取点 G、E，使 CG=BE，分别以 C、B 为圆心，CG 为半径作弧，交直线 BC 于 N、M，分别过 G、A、E 作直线 BC 的垂线，垂足为 H、D、F，于是半弦 GH=sinC，EF=sinB。由$\dfrac{b}{CG}=\dfrac{AD}{GH},\dfrac{c}{BE}=\dfrac{AD}{EF}$，两式相除，结合 CG=BE 知：

$$\frac{b}{c}=\frac{EF}{GH}=\frac{\sin B}{\sin C}。$$

1.2.2 雷吉奥蒙塔努斯（Regiomontanus,1436-1476）的证明[3]

成书于 1463 年的《论各种三角形》是第一本“纯”三角学著作，其作者雷吉奥蒙塔努斯在该书中给出的正弦定理的证明和纳绥尔丁的证明几乎完全一样（如图 3），所不同的是他以较长的一边 AC 为半径作两段半径相等的弧，从而构造出 sinB=DE，sinC=AF，接下来由 $\frac{AF}{DE}=\frac{AB}{BD}=\frac{AB}{CA}$，可知 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}$。

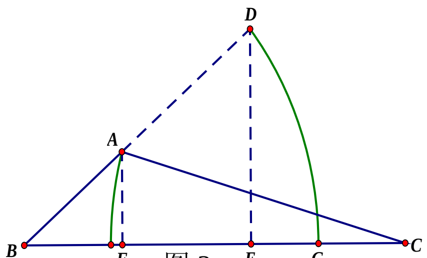


图 3

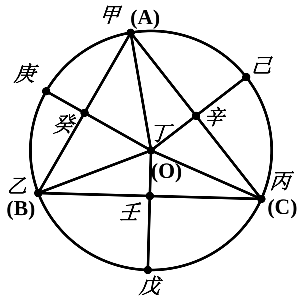


图 4

1.2.3 梅文鼎给出的证法[4]

前文所述的两个证明均以某线段长为半径作两个等圆，利用圆中的半弦表示三角形内角的正弦，如果将三角形的外接圆作出，利用外接圆的半弦亦即边长的一半表示三角形的内角正弦，则正弦定理几乎是不证自明的，我国清代最伟大的数学家梅文鼎在他的著作《平三角举要》中便采用了这种方法，限于篇幅，这里只给出锐角三角形的情形。

为了便于书写，我们将原图中的甲、乙、丙、丁分别用 A、B、C、O 代替（如图 4），则有 $BC=2R\sin\frac{1}{2}\angle BOC=2R\sin\angle BAC$，于是 $\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R$，同理可得 $\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=2R$。

这种证法不仅是简洁证明的典范，而且给出了正弦定理的完整形式。

1.2.4 利用三角比证明

十八世纪之前，正弦始终被认为是已知圆内与同一条弧有关的线段，受此影响，对正弦定理的证明基本上都是通过作圆的弦实现的。直到 1748 年，欧拉的代表作 《无穷分析引论》发表，在这本书中，欧拉指出：“三角函数是一种函数线与圆半径的比值”。比如说，以

角的顶点为圆心，以某定长为半径作圆，由角的一边与圆周的交点 P 向另一边作垂线 PM 后，所得的线段 MP(即函数线)与 OP 相互之间所取的比值即该角的正弦，欧拉的定义实际上将正弦定义为直角三角形的直角边与斜边的比值，这一发展立即带来了正弦定理证明的简化，如图 5，对于锐角三角形 ΔABC，由 sinB=AD:AB，sinC=AD: AC，立即就有 sinB：sinC=AC：AB，这一证明真是数学简洁美的典范，当然细心的读者一定会发现，这种以高 AD 为中介的证明思路与纳绥尔丁以及雷吉奥蒙塔努斯的证明如出一辙，唯一不同的是它脱离了外接圆，这一变化使得我们在享受简洁美的同时失去了正弦定理的完整形式，我们并不能直观地感受到三角形的边与对角的正弦之比与外接圆之间有什么关系。

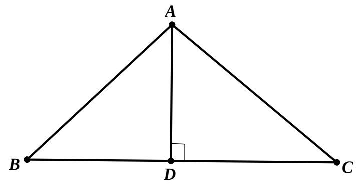


图 5

2　正弦定理证明的教学：基于 HPM 的观点

正如 M・克莱因所言：“课本中的字斟句酌的叙述，未能表现出创造过程中的斗争、挫折，以及在建立一个可观的结构之前，数学家所经历的艰苦漫长的道路。而学生一旦认识到这些，他将不仅获得真知灼见，还将获得顽强地追究他所攻问题的勇气。”这段论述说明学生适当了解数学知识的历史发展是必要的，同时也表达了克莱因对于课本忽视历史过程的不满。从当前正弦定理的教学来看，无论是教材的编写还是教师的教学，对其历史发展是普遍忽视的，这在一定程度上影响了学生的认知过程。

2.1 对三角函数几何意义的忽视使得学生的认知产生了困难

众所周知，三角函数素有圆函数之称，最先定义为圆上的一些线段的长，与三角函数相关的研究也在圆上进行，比如正弦定理的证明。相较而言，现行人教版课本中给出的欧拉定义确实是三角函数发展史上的一个里程碑，但是，笔者以为，在学习欧拉定义的同时，应当适度强调三角函数的几何意义，而并非简单强化解析化的表达，否则，学生在学习三角函数的同时，会产生许多疑惑，而这些疑惑很少得到老师的重视和解答，比如：

- 正弦、余弦与“弦”有关吗？否则为什么称之为“弦”？

- 正弦定理中，三角形的边与其对角的正弦之比为什么与外接圆直径有关，怎么会想到外接圆？
- 即使正弦、余弦等函数的确与圆的弦有关，对当今学生而言，有什么用？

透过三角学发展的历史，我们不难找到上述问题的答案，所以，笔者以为，在教学过程中，适当使用历史材料，重视三角函数的几何意义，能够有效解决学生的疑问。

2.2 有必要让学生了解“正弦”起源于圆中的弦

笔者曾多次对部分学生和老师做过访谈，问其正弦为何称之为“弦”？能够说清楚的人数寥寥，毫无疑问这与教材的编写、教师的教学不无关系。事实上，了解概念的起源不仅能够激发学生的兴趣、而且能够促进学生对概念的理解，即便站在颇为狭隘的解题教学的角度来看，也是非常必要的。这里我们给出两个例子。

例 1. 设$0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$，求$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2(\alpha+\beta)$成立的充要条件。（第 15 届希望杯数学竞赛试题）

如果我们熟知“**正弦可以看成某给定直径的圆中的弦，特别地，在直径为 1 的圆中，大小为α的圆周角所对的弦即为α的正弦 $\sin\alpha$**”这一结论，则结论跃然纸上。如图 6，在直径为 1 的圆中，条件马上转化为：$BC^2+AC^2=AB^2$，这等价于$\angle C=90°$，亦即$\alpha+\beta=90°$。这正是我们要求的充要条件。

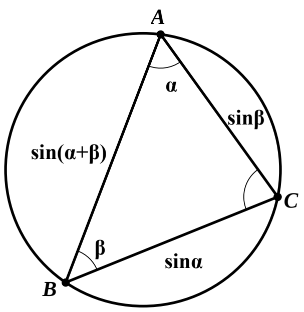


图 6

例 2. 求$\sin^2 21°+\sin^2 39°+\sin 21°\sin 39°$的值。

本题的常规解法是，先利用两倍角余弦公式降幂，然后再积化和差、和差化积求出结果，比较繁。如果将本题中的正弦也看成直径为 1 的圆的弦，结论便跃然纸上。

在图 6 中，我们取 $\alpha = 21°, \beta = 39°$，由于其所对弦分别为 $\sin 21°$ 和 $\sin 39°$，而角 C 的对边为 $\sin 120°$，于是，问题转化为：在 ΔABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $A = 21°, B = 39°$，求 $a^2 + b^2 + ab$ 的值。利用余弦定理我们马上可以求出结果，读者不妨一试。

2.3 通过恰当的形式为学生提供必要的材料使其了解正弦定理的历史和证法

根据前文所述，在三角学的学习过程中，我们有必要为学生提供关于正弦函数、正弦定理的相关历史材料，以帮助其解决认知过程中的困难，领略前人的智慧，体验数学的文化意涵，至于具体的形式，笔者以为，可以从教材的编写、教师的教学设计、学生自主学习几个方面来考虑。

对教材编写者而言，是否可以给出至少一种基于外接圆的证法？或者，在阅读材料中给出正弦定理证明的历史材料？以人教 A 版教材为例，本章给出的阅读材料是海伦公式，笔者以为，正弦定理的历史也不失为阅读材料的一个选项。除了教材，教师也可以通过恰当的教学设计，给学生弥补历史知识的缺陷，当然，在教学进度的压力下，教师未必愿意为此“浪费”有限的课堂教学时间，那么，引导学生通过查阅资料，自主学习也是不错的选择。

参考文献

[1] Eli Maor. Trgonometric Delights. 曹雪林、边晓娜（译），北京：人民邮电出版社，2010.

[2] 汪晓勤. 数学文化透视.上海：上海科学技术出版社，2013.

[3] Victor J. Katz. A History of Mathematics: An Introduction. ADDISON WESLEY Publishing Company Incorporated, 2009.

[4] 刘钝. 平三角举要提要. 郭树春《中国科学技术典籍通汇》(数学卷四). 郑州：河南教育出版社，1993.

译海拾贝

角的概念的发展历史（1）

——José Matos

李玲　编译

（华东师范大学数学系，上海， 200241）

两千多年前，欧几里得第五公设引发了对几何学基础的讨论，它重要到以至于我们都忽略了其他一些在几何学成形中同样重要的主题，而角的概念就是其中一个。两千多年来，关于角的概念的本质的讨论一直在持续进行着，直到今天还没有结束。

本文将为角的概念的发展提供一个历史依据，从而帮助大家理解数学家们构思“角”的方式、角的特征以及数学家们认为在他们的研究中已经解决和尚未解决的一些问题。本文的目的不在于探究数学上正确的定义角的方式，或者驳斥数学家们所表达的他们关于角的概念的观点。

我尝试去理解角的概念的发展是源于这样一个信念：一个概念的历史起源也许可以阐明它的心理发展。关于角的概念的几种形式，它们在几种文化中的不同发展，它们与其他数学主题的多元关系，以及它们在几种文化中的渗透，也许可以提供一些较为深刻的见解，以帮助教育者预测和建立儿童的数学理解模型。但这并不意味着历史发展折射出儿童思考的心理发展，实际上很多人反对这种观点，因为这种观点（1）暗含一种假定，即数学知识存在一个唯一的、不断增加的过程；（2）使我们对埃及的抄写员和现代儿童作一个心理辨别；（3）假定数学知识是与其他文化相分离的。

本文作以下假定：对一个数学概念起源的历史考察对指引数学教学是富有成效的。

新石器时代文化中的角和方向

尽管角的概念起源于近代，但其实古代文化中就有解决与角相关问题的一些手段，其中一个就是利用星星和行星的运动，很多文化都使用这种方法来预测天气的节令性变化的，以及确定什么时候该举行他们的仪式。

考古学家和天文学家已经报道过新石器时代或旧石器时代关于夏至和其他的天文事件。在大不列颠岛蓬勃发展的巨石文化产生了适合天文观测的石环，最著名的是英国乡村

Stonehenge 那一个（Hicks, 1984）。由平原印第安人的祖先留下的考古学中的印第安纳医学轮已经被用来预测 sundance 仪式的时间（Eddy, 1980）。在怀俄明州的比格霍恩山发现的美国大角医学轮半径长 27m，其中心有一个堆石标，辐射出 28 根辐条，另外外围还有 6 个堆石标。考古学家假定这个历史遗迹有以下功能：

- 毕宿五在天空中一闪一闪... 这是在提示你夏至到了。一个小时后，在该位置升起的太阳会证实这一点。因此日落预示着夜晚降临。一个月后（准确来说是 28 天），参宿七会出现在早晨的天空中。一个月后（准确来说是 28 天），天狼星会出现。这些事件也许仅仅表示断山事件在哪段事件发生。天狼星的升起是离开 medicine mountain 的一个好标志，因为它意味着冬天要来了（Eddy, 1980, p. 14）。

一个基本的系统是结合比较不同方向和通过 28 根辐条来分离连续的星星以测量天数。其他文化中也用天文事件来预测时间。比如，印加人在 Cuzco 西部的最高的山上建了一些圆柱形塔，从一个中心金字塔上他们观测到与这些塔相关的日升的位置，这让他们得以确定播种和举行相应宗教庆典的时间（Aveni, 1980; Broda, 1982）。

早期文化中也利用角来解决与建筑相关的问题。Uaxactun 的玛雅人以这样一种方式来完成他们的建筑，即：在中心位置的金字塔的顶部观察，可以让他们确定夏至和冬至的日出。二分点也蕴含在建筑排列中 （Aveni, 1980; Broda, 1982）。

然而，天文活动的并不仅仅用来预测自然现象。在这些文化中，宇宙，社会，礼仪是一个整体，因此，对蕴含宇宙规律的自然现象的认识探求，有助于调节人类的生活（Broda, 1982）。人类学数据表明，对某些文化来说，它们也是理解哲学，道德和形而上学等方面的一个过程 （Reichel-Dolmatoff, 1982）。安第斯时间空间以及它们之间与诸如城市组织、社会结构、礼和生活的关系，是由天文观测的一个复杂系统所组织。安第斯的村庄在进行天文观测的一个礼仪中心引出一系列线，这些线朝向当地一个重要的地理特征，显示一个重要天体上升和降落的位置。这些安排体现在一个与安第斯的生活规章制度密切相关的日历系统中。对印加人来说，这些空间划分是一年中在特定时间的特定宗派的责任。有趣的是，注意到克丘亚印第安人对空间和时间有相同的描述（Fabian, 1982）。在阿兹特克文化中也可以找到这种时间和空间的高度融合，在许多阿兹特克日历中，天数是与空间中的方向相联系的（Aveni, 1980）。

埃及人对角的运用

在埃及，金字塔和一些其他倾斜的建筑看起来似乎没有运用“角”的相关知识（Robins

& Shute, 1985），他们也没有关于“角”的专业术语。让我们看一下莱因德纸草书（大约公元前1650年）中的第56-60题，这样我们就可以知道他们是怎样解决与倾斜度有关的问题。第56题是：“如果金字塔高250腕尺，底座边长是360腕尺，它的seked是多少”（Chace,1986, p. 51）? “seked”（或 “seqet”）是一个埃及用语，它与今天的“倾斜度”的意思差不多（Heath,1931, p. 79），相当于求倾斜角的余切值。这个问题的解答是，将360 除以 2 得到底座边长的一半，然后得商 $180/250$ 。由于 1 腕尺= 7 个手宽，因此结果是7的倍数，可以用手宽来表示。 用今天的术语，解答用到了相似三角形或者说三角比的知识（Boyer,1968; Gillings, 1972）。一个类似的应用是在二维平面上的作图，不过这里用 6 个单位来替代了7（Robins & Shute, 1985）。

埃及天文学家发明了斜星钟，从公元前 2400 前开始使用（Neugebauer, 1957; Krupp, 1977），它与埃及日历一样，将 365 天分成 12 个月，每个月分成 3 周，每周是 10 天，再加上剩下的 5 天。每一周用一颗升起的星星标记，这就将星象仪分成 36 个区。斜星钟是一种简单的坐标方格，每一个方格代表一个日期或者一个时间，埃及人主要用星星或者星星群的位置来度量夜晚的时间。

大约在公元前 1500 年，这种方法被 Ramsside 星钟所替代，这种系统用到了坐标系，其中横轴代表时间，纵轴代表星星的位置（Krupp, 1977），但是星星位置的记录仍是不可或缺的性质（Neugebauer, 1957）。埃及人也用到了影钟，通过观察太阳下影子的长度得知白天的时间（Krupp, 1977）。

巴比伦人发明黄道圈测量

尽管与埃及人一样，巴比伦人也没有关于“角”的专业术语（Bruins, 1964），但是他们发展了用以记录和预测天体运动的精密技术。行星，比如太阳和月亮，在天空中的一个狭窄细带里运动，加快了这项技术的发展。

将星星组成的星座作为黄道十二宫的记号，这是他们首个用于记录行星运动的装置。这个方法遵循一种数字程序去记载天体的位置，与安第斯文化不同的是，这个过程将空间运动和时间联系起来。苏美尔人（3000 BC - 2500 BC）用来计算距离的一个单位是“mile”，大约等于10km。这个单位很自然地变成一种时间单位，1mile（时间）=走“1mile”（长度)所用的时间。天文学上有相似的情况。在公元前 1000 年，通过规定“一天中包含的‘mile’数=一次天体运行”，巴比伦文学家将“mile”转化成对天体事件的测量。每一天包含12mile（danna），因此空中的圆周也包含 12mile 。每一mile 有分成 30lenghts。因此将整个天空

分成 360 个部分，这就是将时间分成 360 度的历史起源，也是将圆的一周定义为 360 度的历史起源。这种“degrees”不仅是弧长的测量单位，也是时间的测量单位。这种用一种距离单位来测量时间的方式对希腊人和罗马人也产生了影响（Neugebauer, 1983）。

到公元前 700 年，巴比伦人将星星放在三条“道”上，中间是30°宽的赤道带。到这个时候有了对天文事件的有序观测，到公元前400年，巴比伦人发明了黄道圈。黄岛采用星座记号。但是仅仅是出于数学原因，介绍了定义一个大圈用以测量对应准确的 30°长的太阳和其他行星的运动过程（ Neugebauer, 1957）。

从此，巴比伦人就有了天文事件的精确表格，比如用每个黄道符号给出测量出的天数和位置的度数。他们的理论模型涉及到利用锯齿形函数计算一年中不同时期太阳的速度差异。它的预测是比较准确的，并且巴比伦人并不是太在意天体准确位置的确定。事实上，他们没有精确的装备去做这项工作。巴比伦人得到了月亮和一些其他行星的天文事件的精确表格，这对确定运动是否有利来说是必不可少的（Seidenberg,1975）。他们的计算涉及一些复杂的概念，比如天体运动的角速度，但是他们这些复杂的天文方法并没有发展成其他几何问题。

希腊前欧几里得时代角的概念和方向

早期希腊天文学基本上是定性研究。欧多克斯（408-355 BC）的一篇引文告诉我们早期希腊人是如何描述星星的位置的：

- 天蝎座的中间部分和狮子座的躯干纵向部分，处女座上半部分的一小部分，巨蛇座被夹住的脖子，蛇夫座的头部，天鹅座的颈部和其左翼，天马座的脚（quoted in Dicks, 1970, p. 158）。

这展示了那个时期对星星位置的口头描述的种类。尽管欧多克斯将星星刻画成从一个可以在天球上绘制并且可以分成12个部分的同心球发展而来，但他的描述本质上是定性的。

虽然相比于巴比伦人来讲希腊人的天文学方法是很原始的，但是希腊几何却是最先给角一个专业名词的（Gray, 1979），并且，如柏拉图所说的那样，希腊人也是最早对锐角、直角、钝角加以区分的（Heath,1956）。另外，他们也是最早提出几何证明的。例如，毕达哥拉斯学派的人证明了三角形内角和等于两个直角之和（Gray, 1979）。

亚里士多德是希腊早期的哲学家，他的数学观察有相关文件为证，他对角（包括直线、面和其他数学对象）做了详细的考察。一个有趣的讨论是在他的书《后分析篇》中，他认为每个三段论的两个前提中必有一个肯定命题和一个全称命题（Maziarz & Greenwood, 1968）。假如我们接受他所隐含的角的概念，我们就可以证明如下性质：“等腰三角形的底角相等”。

证明如下：

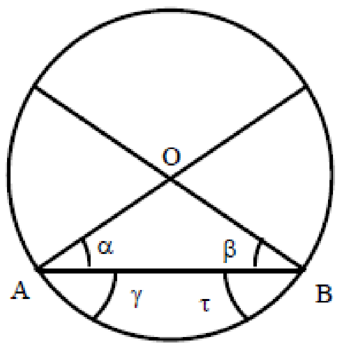


图 1

ΔAOB 是以 圆O 中的一个等腰三角形，∠A 是 OA 所在的直径与圆周所构成的混合角（在图1中等于 $\alpha+\gamma$）。同样地，有混和角∠B。由“半圆角相等”知∠A=∠B，由“同一条线段对应的角相等（这里的线段指的是弦）”知，$\gamma=\tau$。因此， $\alpha=A-\gamma=B-\tau=\beta$（Heath, 1956; Heath, 1949）。

如果我们接受“半圆角”和“线段角”这些概念的话，以上证明就是合乎逻辑的。他的工作没有涉及数学本质，因为虽然他在数学方面有较强的背景，但归根结底他是一个哲学家，而非数学家。 虽然亚里士多德的上述证明方法没有在他的观点中占有重要地位（Maziarz & Greenwood, 1968），但是他提供了角的概念。

亚里士多德关于几何物体的讨论中的一个中心主题是对它们本质的确定。例如，长度是一种量，平行是一种关系，三角形是一种质。亚里士多德认为角是一种质。在一些著作中，亚里士多德将角看成是一条线的偏离或者断折：“一条线，如果弯曲，但是依然连续，它就产生一个角（Heath, 1956, p. 159）”。

另一个主题是，不同类型的角之间的关系。他首先考虑直角和锐角谁更重要的问题。一方面，最先定义直角，因此直角更重要；另一方面，直角是由锐角组成的，似乎锐角更重要。以下是亚里士多德看来关于直角的一个较好的定义：当一个物体下落后反弹，在撞击点形成了两个相同的角，即为直角。这里直角似乎是看成一对角的极限。

早期希腊几何也关注切线这个主题，切线与角联系紧密。“切线与圆有几个交点”还引发了许多争论。毕达哥拉斯认为切线与圆的交点不止一个，交点间是有长度的。

欧几里得时代角的概念

欧几里得在《几何原本》第一卷中对角的定义是：“平面角是在一平面内但不在一条直

线上的两条相交线相互的倾斜度 ••• 当包含角的两条线都是直线时，这个角叫做直线角”（Heath, 1956, p. 176）。

一方面，欧几里得将角定义为由具有特殊性质的两条线构成。但另一方面，他认为角是两线间的一个区域。这是第一卷开端所给出的角的定义，除此之外还有点、线、面、图形、平行线等的定义。

欧几里得对直线角的定义中没有包括0°角和平角以及比平角更大的角，这与《几何原本》中的相关定义是一致的。当涉及到平角时，就用两个直角代替。即使可以利用第三卷命题20以及第六卷命题33来得到比两个直角更大的角，他也没有暗示这种可能性，而宁愿把它们看成是几个角组成的（Heath, 1926）。之后，数学家海伦在对《几何原本》第三卷命题20的讨论中，认为∠BEC是超过了两个直角的大小（如图 2）。直到中世纪，才有评论家（塔尔塔利亚等）把平角当成一个角，而不是两个直角（Heath, 1926）。

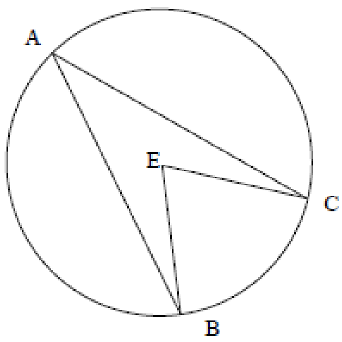


图 2

另一个可以用以说明欧式几何中没有平角的证据是对垂线的定义。当两条直线以相同的角相交，欧几里得就把这些角叫做直角，并且称其中一条线垂直于另一条线（定义10）。如果欧几里得考虑到了0°角和平角的话，这个定义就不再成立，因为两条重合直线也以相同的角相交，也相互垂直。欧几里得概念里的垂直意味着“自由降落”，这与铅垂线相联系起来（Heath, 1956）。普罗克鲁斯（Proclus）告诉我们，古时候垂直被称作“gnomon-wise”，因为指时针与地平线成直角（Morrow, 1970）。

欧几里得并没有遵循今天我们所遵循的角的边为射线的要求。在第三卷命题 20 中，当他谈到圆周上的角时，用我们的术语，欧几里得指的是圆的一部分作为角的底部（如图 3）。但是更为重要的是，欧几里得对角的定义既包括直边又包括曲边。这种不同类型的角在第三卷（Heath, 1926）中描述得更详细。

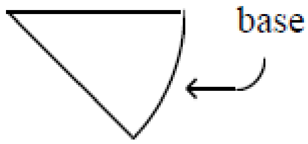


图 3

欧几里得将弓形定义为“由一条弦和一段弧所围成的图形”(如图 4),将弓形的角(angle of a segment)定义为“由一直线和一段圆弧所夹的角”,而将弓形角(angle in a segment)定义为“在一段圆弧上取一点,连接这一点和这一段圆弧的底的两个端点的二直线所夹的角”。

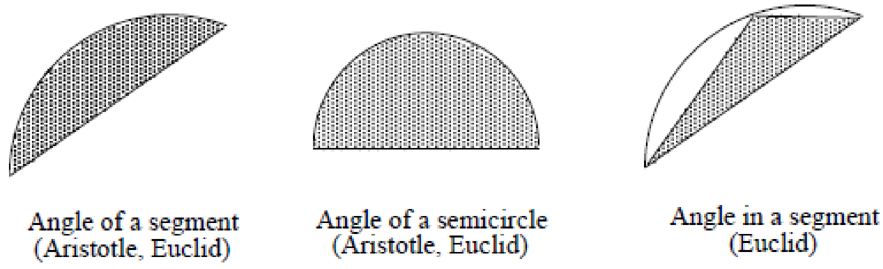


图 4

后来在第三卷中,欧几里得用到了剩余角这个概念,普罗克鲁斯则称它为“牛头角”(Morrow,1970)。

看起来欧几里得认为角的概念是“在可直可曲的两条线间的部分”。在一些命题中,他还特意强调是指直线角(比如第一卷中的命题9, 23, 42, 44, 45)。如我们所知,至少到 17 世纪为止,这种角引起了很大的争论(Heath, 1956)。在欧几里得时代,对于直线构成的角与半圆角之间的大小比较,《几何原本》里面提供了一种关键性证明。《几何原本》第三卷命题 16 说,半圆角比任何直线构成的锐角要大,而剩余角比任何直线构成的锐角要小。欧几里得分三步证明了这个命题。

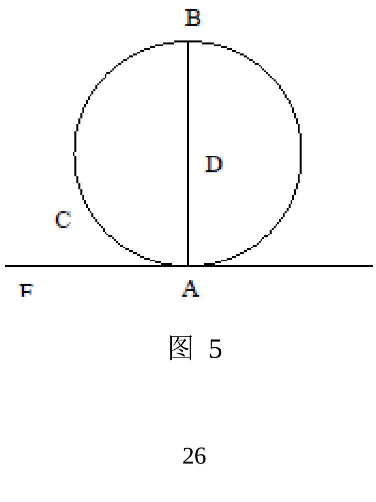


图 5

如图5，AB 是圆的直径。证明步骤如下：

（1）过 A 点作AE与 AB 成直角，则AE一定在圆外；

（2）没有直线落在 AE 与圆周之间；

（3）由直线 AB 与圆周构成的半圆角大于由直线构成的锐角，而由圆周和 AE 构成的剩余角大于任何由直线构成的锐角（Heath, 1926, p. 38）。

在希腊几何中，圆的切线问题是一个更有争议性的话题。欧几里得对这场争论作出了贡献，他的观点是“过圆上某点的直线是圆的切线，当且仅当包含这条直线上的点的其他任意直线也包含圆上的另一个点。”这种定义切线的方法也被亚里士多德所采用（Knorr, 1986）。尽管欧几里得没有用到“切线”这个词，但他画出了直线 AE（如图5），过圆的直径的一个端点作一个直角，它显然与圆相切。这条与圆相切的直线也出现在《几何原本》的其他许多地方，指的就是切线。欧几里得的这个命题是他对“切线本质是什么”这场争论作出的贡献。

后欧几里得时代角的概念

后欧氏几何关于角的性质的讨论主要集中在以下三个方面：

（1）角的比较恰当的定义是什么；

（2）角在哪些地方符合亚里士多德关于量、质以及关系的分类；

（3）由曲线构成的角的本质是什么。

普罗克鲁斯引用阿波罗尼奥斯（262-190 BC），给出了一种新的一般化的定义角的方法。他将角定义为“一条断折线下的点的收缩，或者一个断折面下一个立方体的收缩 （Morrow, 1970, p. 99）。”这个定义中蕴含了运动。他把圆锥体想象成由有相同顶点的直线所构成（Bello, 1983）。普罗克鲁斯也引用了 Geminus 的观点，称“当一条线弯折时，角就形成了（Morrow, 1970）”。

数学家海伦认为，涉及到点时，角是包含这个点的一个简单的量。Albertus Magnus 给这个定义作了如下解释（Bello, 1983）：

- 平面角是由线构成，因为它是一个一维量和一个二维量之间的部分。一个立体角终止于平面，是二维平面和三围立体空间之间的部分（Bello, 1983）。

例如圆锥体的面，看作是对圆锥体顶点而形成的立体角的环绕。海伦是巴比伦传统几何的代表，相对于以证明为核心的数学研究，他更关心问题的计算解（Bruins, 1964）。

另一个不同的观点来自于雅典的普鲁塔克（Plutarch），他是普罗克鲁斯的老师。普鲁塔克主张“角是点下面的第一个间隔，因为在包含线或者面的倾斜度下必然有第一个间隔存在

（Morrow, 1970, p. 101）”。普鲁塔克似乎在考虑不同线间的比率（Heath, 1956）。类似地，安提阿的毕达哥拉斯信徒卡布斯（Carpus）把角构想成一种量，也就是说角是包含它的两线或者两面之间的距离。但是自相矛盾的是，他不认为这种距离是一条线（Morrow, 1970）。

混和角和牛头角依然出现在文献中。海伦将它们用到他的书中，提奥（Theon） 也一样（Knorr, 1986）。狄奥克莱斯（Diocles），在大约公元前190-180的一本关于燃烧镜（burning mirrors）的书中也偶然用到了它们。如图6，在书中第二个命题中，他考虑直线 AB 在 B 点反射得到 BC，由此得到$\alpha=\beta$（Toomer, 1976）。

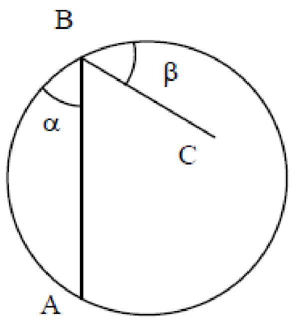


图 6

另一个关于混和角的应用可以在 *Bobbio Mathematical Fragment* 这本书中找到，这是一本起源有争议的包含一些数学片段的书，看起来受到狄奥克莱斯所做的一些工作的影响。手稿也许可以追溯到七世纪之前的近古时期，给出了抛物线焦点性质的证明。

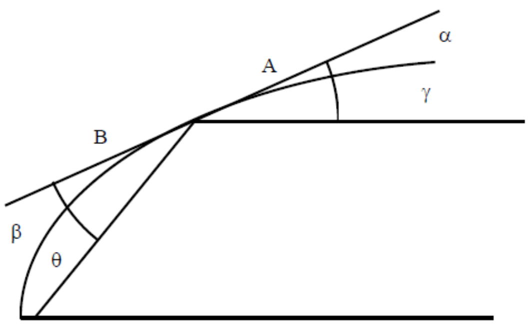


图7

图7是这个证明中重要的一部分。图中∠A和∠B是直线构成的角，所有希腊字母表示混和角，或者是抛物线和它的切线所形成的角（α 和 β）以及抛物线与其他直线构成的角（γ 和θ）。在证明中作者认为：$\angle\alpha=\angle\beta\Rightarrow\angle\gamma=\angle\theta$；他可能有到了∠A=∠B这个条件，

但是他在证明中并没有提到（Toomer, 1976）。这个证明一个出色之处在于作者让两个看起来似乎不等的混和角成为相等的。

三角学的发展

后欧氏几何中一个重要的发展是三角学的系统发展。阿利斯塔克（公元前 3 世纪）是希腊数学中三角学的奠基人，他在《论太阳和月亮的大小及距离》一书中证明了有关太阳、月亮、地球之间的距离和他们的表面直径的命题。在此过程中，他用到了我们今天所谓的“三角比”方法，并使用到了 3° 和1° 的正弦和余弦值。太阳、月亮、地球的表面直径在黄道圈中用其一部分表示出来。比如，估计太阳的表面直径是一个黄道符号的1/15（用我们的单位来说也就是2° ），这是一个略大的估计（Heath, 1931）。

公元前500年左右的许普西克勒斯（Hypsicles）是希腊第一个为将黄道十二宫划分成360° 提供证据的人。我们来看一下他的方法：

- 将黄道圈划分成 360 段相等的弧，把每一段弧叫作空间的一个单位，同样地，也将时间划分成 360 等份，将每一份叫做 1° 时间。

同时期，希帕克斯（Hipparchus）发展了天文学上的三角学方法，他是最早确定多于 850 颗星星在黄道十二宫中的经、纬度的人。

“角”在中国和印度

其他文化似乎没有分享希腊人对角的兴趣和欧氏几何中的一些几何话题。16世纪末，欧几里得的《几何原本》和一本关于算术的书传到中国，这是最早由西方译到中国的作品。它们包含了一些几何新名词，如：点、线、直线、曲线、平行线、角、直角、锐角、钝角、三角形、四边形等（Yan & Shirán, 1987）。

中国数学中包含了用比率来解决生活中有关几何问题的内容。《九章算术》还有运用两个相似三角形来计算一些长度（Yan & Shirán, 1987）。通过利用相似直角三角形和毕达哥拉斯定理，中国数学家用到了与今天所说的三角函数等价的方法，但是关于“把线段的比率看成函数”这个概念还是完全缺失的（Libbrecht, 1973）。

印度人也用到了比率。公元4世纪末5世纪初，*Siddhāntas*一书发展了关于半弦和圆心角的一半的关系，因此产生了我们今天的三角函数（Boyer, 1968）。印度教理论天文学通过运用与圆周的长度一样的单位来测量径向距离。他们也跟巴比伦人一样，将圆周长定为360° ，

这就迫使他们用一个 57°18' 的半径来得到圆周长为 360°（$2\pi \times 57°18' = 360°$）（Neugebauer, 1983）。

参考文献

[1] veni, A. (1980). Old and New World naked-eye astronomy.In K. Brecher & M. Feirtag (Eds.), *Astronomy of the ancients* (pp. 61-89). Cambridge, MA: MIT Press.

[2] Aveni, A. & Hartung, H. (1982). Precision in the layout of the Maya architecture. In A. Aveni & G. Urton (Eds.),*Ethnoastronomy and Archaeoastronomy in the American tropics* (pp. 63-80). New York: New York Academy of Sciences.

[3] Bello, A. (1983). Albertus Magnus and mathematics: A translation with annotations of those portions of the commentary on Euclid's Elements published by Bernhard Geyer. *Historia Mathematica*, *10*, 2-23.

[4] Boyer, C. (1968). *A history of mathematics*. New York: John Wiley.

[5] Broda, J. (1982). Astronomy, cosmovisión, and ideology in pre-Hispanic Mesoamerica. In A. Aveni & G. Urton, *Ethnoastronomy and Archaeoastronomy in the American tropics* (pp. 81-110). New York: New York Academy of Sciences.

[6] Bruins, E. (Ed.) (1964). *Heronis Alexandrini Metrica*. Leiden, Netherlands: E. J. Brill. Callinger, R. (1982). *Classics of mathematics*. Oak Park, Illinois: Moore Publishing.

[7] Chace, A. (1986). *The Rhind Mathematical Papyrus*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[8] Dicks, D. (1970). *Early Greek astronomy to Aristotle*. Ithaca, NY: Cornell University Press. Eddy, J. (1980). Medicine wheels and Plains Indian astronomy. In K. Brecher & M. Feirtag (Eds.), *Astronomy of the ancients* (pp. 1-24). Cambridge, MA: MIT Press.

[9] Fabian, S. (1982). Ethnoastronomy of the Eastern Bororo Indians of Mato Grosso, Brazil. In A. Aveni & G. Urton (Eds.), *Ethnoastronomy and Archaeoastronomy in the American tropics* (pp. 283-301). New York: New York Academy of Sciences.

[10] Gillings, R. (1972). *Mathematics in the time of the Pharaohs*. Cambridge, MA: MIT Press. Gray, J. (1979). *Ideas of space. Euclidean, non-Euclidean, and relativistic*. Oxford: Clarendon.

[11] Heath, T. (1926). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary* (Vol. II) (2nd ed.). Cambridge: University Press.

[12] Heath, T. (1931). *A manual of Greek mathematics*. Oxford: Clarendon.

[13] Heath, T. (1949). *Mathematics in Aristotle*. Oxford: Oxford University Press.

[14] Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary* (Vol. I). (2nd. ed.). New York: Dover.

[15] Hicks, R. (1984). Stones and henges: Megalithic astronomy reviewed. In E. Krupp (Ed.), *Archaeoastronomy and the roots of science* (pp. 169-210). Boulder, CO: Westview.

[16] Jones, A. (1983). *Pappus of Alexandria. Book 7 of the Collection* (2 vols.). New York: Springer-Verlag.

[17] Knorr, W. (1986). *The ancient tradition of geometric problems.* Boston: Birkhäuser.

[18] Krupp, E. (1977). Astronomers, pyramids, and priests. In E. Krupp (Ed.), *In search of ancient astronomers* (pp.203-239). New York: Doubleday.

[19] Libbrecht, U. (1973). *Chinese mathematics in the thirteenth century*. Cambridge, MA: MIT Press.

[20] Maziarz, E. & Greenwood, T. (1968). *Greek mathematical philosophy*. New York: Frederick Ungar.

[21] Morrow, G. (1970). *Proclus: A commentary on the first book of Euclid's Elements*. New Jersey: Princeton University Press.

[22] Neugebauer, O. (1957). *The exact sciences in antiquity*. Providence, Rhode Island: Brown University Press.

[23]Neugebauer, O. (1983). *Astronomy and history. Selected essays*. New York: Springer-Verlag.Reichel-Dolmatoff, G. (1982). Astronomical models of social behavior among some Indians of Colombia. In A. Aveni & G. Urton (Eds.), *Ethnoastronomy and Archaeoastronomy in the American tropics* (pp. 63-80). New York: New York Academy of Sciences.

[24] Robins, G. & Shute, C. (1985). Mathematical bases of ancient Egyptian architecture and graphic art. *Historia Mathematica, 12,* 107-122.

[25] Seidenberg, A. (1975). Did Euclid's Elements, Book I, develop geometry axiomatically? *Archive for History of Exact Sciences*, *14*, 263-295.

[26] Thomas, I. (1968). *Selections illustrating the history of Greek mathematics with an English translation. Vol. II From Aristarchus to Pappus*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

[27] Toomer, G. (1976). Diocles. *On burning mirrors*. Berlin: Springer-Verlag.

[28] Yan, L. & Shirán, D. (1987). *Chinese mathematics: A concise history*. Oxford: Clarendon.

Pi

——Wislawa Szymborska

叶晓娟　编译

（ 华东师范大学数学系，上海 200241）

令人钦佩的 Pi：

三点一四一

后面的数字都只是开始

五九二，从未停息

六五三五，无可企及

八九，是计算

七九，是想象

亦是谈笑间的三二二八，在攀比

四六，或是什么

二六四三，在这世界里

地球上最长的蛇不过三十英尺

神话和传说中的蛇也无分轩轾

组成 Pi 的数字列队进行逶迤

它不会在页边栖息

它会离开书桌，又穿过空气

越过墙壁、树叶、鸟巢和云霓

穿过深不见底

那彗星的尾巴显得多么短小

就像鼠尾和小辫子

而星光显得多么脆弱

撞在空间里便弯曲了轨迹

接着是二三一五，三百一十九

我的电话号码，标有尺寸的，你的衬衣

一九七三和六楼

住宅号，六十五分币

量臂围也是两根手指一个密码的游戏

伴着画眉歌唱般的欢愉

女士，先生们，不要叹气

即使天地都消失

Pi 也从不歇息

它还有个漂亮的五

和一个美妙的八

最后还待着一个七

永远地，不停歇地驶向那永恒的长河里

附：英文原文（ Translated by Joanna Trzeciak ）

Pi

The admirable number pi:

three point one four one.

All the following digits are also just a start,

five nine two because it never ends.

It can't be grasped, six five three five , at a glance,

eight nine, by calculation,

seven nine, through imagination,

or even three two three eight in jest, or by comparison

four six to anything

two six four three in the world.

The longest snake on earth ends at thirty-odd feet.

Same goes for fairy tale snakes, though they make it a little longer.

The caravan of digits that is pi

does not stop at the edge of the page,

but runs off the table and into the air,

over the wall, a leaf, a bird's nest, the clouds, straight into the sky,

through all the bloatedness and bottomlessness.
Oh how short, all but mouse-like is the comet's tail!
How frail is a ray of starlight, bending in any old space!
Meanwhile two three fifteen three hundred nineteen
my phone number your shirt size
the year nineteen hundred and seventy-three sixth floor
number of inhabitants sixty-five cents
hip measurement two fingers a charade and a code,
in which we find how blithe the trostle sings!
and please remain calm,
and heaven and earth shall pass away,
but not pi, that won't happen,
it still has an okay five,
and quite a fine eight,
and all but final seven,
prodding and prodding a plodding eternity
to last.

会议讯息

全国数学教育研究会 2014 年国际学术年会会议召开

洪燕君
（华东师范大学数学系，上海，200241）

2014 年 6 月 27 日-7 月 1 日，华东师大 HPM 团队的部分成员在汪晓勤教授的带领下在兰州参加了全国数学教育研究会 2014 年国际学术会议。

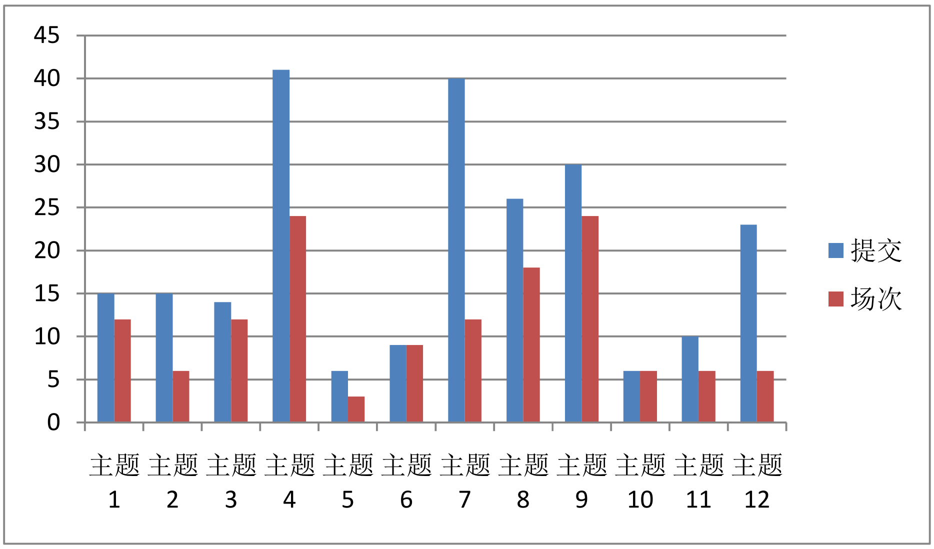
全国数学教育研究会是全国性、群众性的从事数学教育研究和交流的学术团体，其宗旨为：团结全国高等院校数学教育专业的教师、科研工作者以及其他从事数学教育研究的专业人员，开展数学教育学科的科学研究，推动学术交流，为提高本学科的理论水平和教学水平服务，为创建具有中国特色的数学教育学科体系服务。本会是我国数学教育领域最高级别的研究会，全国大部分高等院校的教育工作者都积极参与了本次学术活动。

本次大会设有大会主场报告 7 场:

- 香港大学梁贯成教授作了题为“**书写会影响视觉感知能力吗？——一项关于汉英儿童在视觉感知能力方面的比较研究**”的学术报告。
- 澳大利亚墨尔本大学 David Clarke 教授作了题为“**数学教育国际比较研究的相互启示作用**”的学术报告。
- 美国范德堡大学 Paul Cobb 教授作了题为“**走向行动研究——如何大面积推进教学改革提升教学质量**”的学术报告。
- 英国剑桥大学 Zsolt Lavicza 博士作了题为“**通过技术促进中学 STEM 整合**”的学术报告。
- 华东师范大学鲍建生教授作了题为“**数学课堂教学的设计研究**”的学术报告。
- 北京师范大学曹一鸣教授作了题为“**数学教学知识研究及其启示**”的学术报告。
- 西北师范大学吕世虎教授作了题为“**中学数学课程发展六十年——历程、特点与启示**”的学术报告。

并且，大会程序委员根据 12 个主题：（1）数学教育理论研究的回顾与反思；（2）数学课程改革与数学教师发展；（3）数学课程改革与数学教师专业发展；（4）中小学数学课程与教材研究；（5）现代信息技术与数学教育改革；（6）大学数学课程建设与教学改革；（7）数

学课堂教学的理论与实践；（8）数学学习心理研究；（9）数学史、数学文化与数学教育；（10）少数民族数学教育；（11）数学教师职前培养模式与课程建设；（12）数学教师职后培训研究，分成 26 个小组进行了小组论文报告。各主题报告提交的论文及经筛选安排报告场次如下：



由此，我们看到此次会议内容具有以下特点：

1 重视课程与教材的研究

教材是课程的灵魂，也是普及知识的依据。主题 4 不仅从提交论文的数量还是遴选出来作报告的文章数量来说都是最多的，说明课程与教材的研究倍受学者关注。从报告的文章内容来看，不仅有教材内容的具体研究，如“从语文的视角看数学课程内容”、“高中数学阅读文本开发研究”等，还有教材比较、教材编排、课程演变及课程大纲的研究，如“人教社三种教材中圆的课程内容比较研究”、“小学数学教科书非常规问题编写的思考与建议”、“课改以来初中数学教科书研究回顾与反思”、“小学二年级学生‘排列组合’学习过程与特征刻画研究”等等，可谓“麻雀虽小，五脏俱全”。

2 提升教学理论与实践的研究水平

主题 7 的研究呈现出“提交多，报告少”的特点，说明提升理论与实践的研究水平迫在眉睫。从报告的文章中我们看到起涉及的内容有“导学讲评式教学的研究”、“数学学习方式的转变：现实抑或虚幻”、“数学问题教学的五个探索点”、“‘变教为学’困难分析”、“高中数学课堂有效教学案例研究”等等。

3 关注 HPM 研究

从主题 9：数学史、数学文化与数学教育报告的 24 篇文章中，有“民国时期中学数学教科书发展”、“中国彩陶中的数学文化”、“民国时期中学课程标准内容的发展演变及启示”等等，其中关于 HPM 的文章有 14 篇，内容包括“从对数设计看文化的影响”、“‘平均数’概念的源流及其文化性探析”、“数学史与数学教育的整合探究”、“数学文化融入数学教科书的编写探析”等。诚然，数学史是一面镜子，它只有融入到了数学教学中才能反射出数学思想的光彩。

4 加强教师职后培训方法论的研究

主题 12 的研究也呈现出“提交多，报告少”的特点，报告的文章内容有“师资培育生对于数学教育课程使用数学日记反思之研究”、“小学数学教师专业成长中的论文写作：现状与对策”、“教师专业发展视阈下的课堂分析研究”、“四川省少数民族地区校本培训现状调查”、“农村小学数学教师‘国培计划’培训内容和模式研究与实践”以及“数学教师培训的应然选择：突出特色，强化改进——以 2011-2013 山东小学数学教师培训为例”等。从形式和内容上来讲，关于教师职后培训在方法和理论上都有待创新。

5 教育心理学的研究方兴未艾

主题 8 是关于数学学习心理的研究，我们看到了“布鲁纳数学教育思想探析”、“空间感对小学数学学习的影响”、“数学认识信念：影响数学学习过程的重要变量”、“初三学生数学态度现状调查”以及“均值不等式问题特征对其解法类比迁移的影响”等等。

此外，关于主题 5：现代信息技术与数学教育改革需要说明的是，虽然它在这个分会报告中所占比例很少，并不说明它不被重视，在工作坊的活动中这是个重点话题。

本次会议还安排了三节高中数学教学现场观摩课，其中南京市中华中学吕娜与西北师范大学一附中但立平以“几何概型”为主题进行了同课异构教学展示，来自美国 California High School in the Whittier Union High School District 的 Melissa Palmer 老师执教了“Linear equations and multiple presentations of the linear model”。

据悉此次年会共收到学术论文 210 余篇，组委会学术委员推荐了分组报告论文 152 篇，并对提交论文进行了评奖，评出一等奖 20 名、二等奖 32 名、优秀奖 42 名。

会议期间，汪晓勤教授主持了主题 9“数学史、数学文化与数学教育”的分会场会议，

并作了“世纪初美国几何教材中的数学文化—‘建筑中的数学’为例”报告；团队成员邹佳晨、洪燕君、齐春燕、过静分别做了“椭圆概念与方程推导的教材历史比较”、“台湾 HPM 研究的内容与特点”、“职初教师关于数学史课程的观点”、“高校文科生对数学文化课程内容的倾向性”等分会场报告；而且，蒲淑萍、吴骏、邹佳晨、洪燕君等同学提交的会议论文还分别荣获了会议论文评选的一等奖、二等奖、优秀奖。

6 月 29 日晚上，第七届常务理事会换届选举，汪晓勤教授担任了新一届理事会副理事长。此次会议的闭幕式由代钦教授主持，吕世虎教授代表组委会作大会总结。会议最后宣布 2015 年常务理事会会议在内蒙古召开，2016 年学术年会在武汉召开。

我们将满怀憧憬，期待更多的精彩！

（来自华师大的参会人员合影）

ESU-7 的内容与启示

洪燕君

（华东师范大学数学系，上海，200241）

摘 要：第七届欧洲暑期大学之数学教育中的历史与认识论国际会议（ESU-7）于 2014 年 7 月 14 日-7 月 18 日在丹麦的哥本哈根举行。会议主题是:（1）历史和认识论的工具，在数学教育中融入数学史的理论以及概念性的框架;（2）课堂实验和教学材料，从认知或情感的角度的深思，课程和教材的问卷调查;（3）课堂上使用的原始资料，以及实际的教育效果;（4）在数学和科学的教学中，以历史和认识论为工具的跨学科方法;（5）文化与数学;（6）数学教育的历史;（7）北欧国家的数学史研究。会议由大会报告、专题讨论、工作坊、口头报告，以及简短口头报告和海报展示等组成。ESU-7 对我国 HPM 研究具有如下启示：加强古文本史料教育取向和教育实践的研究；在教学实践中要注重“为教育而历史”；关注教育新技术的应用。

关键词： ESU-7；HPM；工作坊

2014 年 7 月 14 日-7 月 18 日，来自丹麦、挪威、瑞典、芬兰、冰岛、美国、法国、英国、德国、意大利、加拿大、波兰、巴西、捷克、葡萄牙、比利时、匈牙利、以色列、土耳其、希腊、中国等 21 个国家的对数学史如何融入数学教学感兴趣的中小学教师和大学师生，以及对数学、数学史与认识论之间有所研究的数学史家、数学家和教育工作者共计约 140 余人在丹麦奥胡斯大学（Aarhus University）哥本哈根校区参加了第七届欧洲暑期大学之数学教育中的历史与认识论国际会议（European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education，以下简称 ESU-7）。

ESU-7 是 HPM 的一个主要的国际性活动，HPM 是国际数学教育委员会 ICMI（International Commission on Mathematical Instrction）附属的研究数学史与数学教学关系的国际研究组织，即 International Group for the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics 的简称。目前，ESU 和国际数学教育大会 HPM 卫星会议是国际 HPM 组织仅有的两个国际性会议。

1 ESU-7 内容介绍

1.1 ESU 概述

“欧洲暑期大学”（European Summer University，ESU）源起于八十年代初期，由法国

的数学教育研究院（Institutes of Research on Mathematical Education）发起。自 1993 年起，整个会议的主题就逐渐聚焦于数学史和数学认识论的范畴上，因此，会议的全名就称为 European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education。1993 年在法国的蒙彼利埃（Montpellier）举办了第一届数学教育中的历史与认识论欧洲暑期大学。自此之后，ESU 大会每隔三年举办一次，从 2010 年起，执行委员会议决定把 ESU 改为每四年举办一次。

ESU 涉及各个层次的教育，从小学教育到高等教育，也包括在职教师的培训。她不仅仅是研究者的大会，也是一个提供教师和研究人员会面并一起探讨的地方，她还是初学者、经验丰富研究人员和教师展示自己的教学经验，并希翼能从会场上得到建设性反馈的平台。

具体而言，ESU 从数学的历史、认识论和文化的角度，为学校提供教学工作上的帮助，重点关注实际执行；她给数学教师，教育工作者和研究人员提供一个机会，让他们分享与历史视角有关的教学思想和课堂教学经验；她促进了世界范围内数学教师和 HPM 研究者之间的合作，并试图揭示数学知识不但要在一个演绎结构化理论的环境中形成，而且要通过原始指引或可能使其形成的过程中形成，从数学史与认识论的角度强调数学教学应该重视“做数学”，以及数学作为人类智力结晶生机盎然的当前和尚未预见的未来这些层面。从而，强化建立起数学是众多不同文化共同努力发展的结果，它已经不断地在跟其他科学、艺术以及工艺技术交流，已经成为科学、技术、艺术以及社会发展的永恒动力，且数学哲理已经经历了很多世纪的演化，经历了很多代人的发展这样的意识。

ESU 会议以大会报告、专题讨论、工作坊、口头报告，以及简短口头报告和海报展示等形式围绕会议主题展开，其中大会报告和工作坊是主要的研讨方式。每个主题至少有一个大会报告，一般来说是针对工作坊研讨会的介绍性报告；专题讨论的参会者可以提前一起合作，以便于在专题讨论过程中，彼此与小组主持之间进行真正的讨论；工作坊的研讨报告是同时进行的，且时间长短不同， 2 个小时工作坊是关于教育和教学材料的研讨，3 个小时工作坊研讨的是关于历史和认识论的材料，均由组织者准备有关历史、认识论、教学法以及教学材料（如历史文本，学生的学习单等等），分发给参与者进行阅读和思考，然后现场展开充分探论。如果可能，工作坊的研讨会也可以阐述一些在大会报告上展示过的一些想法；口头报告一般持续 30 分钟，25 分钟的展示，5 分钟的讨论，这是研究性大会最活跃的一种形式。另外，大会也有一些特殊的时间段是用来针对海报展进行 15 分钟的简短口头交流，也可能还会有书本或其他教学材料的展示。

下面，我们就围绕 ESU-7 的主题来进一步介绍此次盛会。

1.2 ESU-7 会议

本次会议共设大会主场报告 6 场，专题讨论 2 场，另外由于个别报告人缺席，我们初步统计下来，2 小时工作坊有 22 场，3 小时工作坊 16 场，口头报告 36 场，以及简短口头报告和海报展示 8 场。和许多国际会议不同的是，ESU 没有特别预定会议话题，所以报告人可以自由发挥，这样与会者可以聆听到不同领域学者的观点。接下来，我们将围绕此次会议的七大主题和大家一起分享其中的部分观点。

主题 1：历史和认识论的工具，在数学教育中融入数学史的理论以及概念性的框架。

法国南特大学的 Evelyne Barbin（前任 HPM 主席）作了题为“近 30 年来历史与教育的的认识论和理论的发展概况”的大会主场报告，报告介绍了 1983 年国际数学家大会弗赖登塔尔（Hans Freudenthal）的“数学史与数学教育的隐性哲学”报告中提出了要从“教孩子，我们从古老数学史中能学什么”转变到“教导孩子，从理解古人的角度我们能了解什么”的观点，而今我们将以最近的 HPM 文献而不仅仅是基于工作坊的原始文献或历史文本，用诠释学从数学史以及相关联的教育史来解释为什么用“认识论”来代替“哲学”，并例举了从曲线到微积分的概念等例子。

在 2 小时工作坊的报告中有 2 场、3 小时工作坊的报告中有 5 场是关于主题 1 的，比如，Evelyne Barbin 对之前做的主场报告进行了呼应，就“曲线的历史和教学：问题、意义和类别”与大家探讨了从希腊几何到现代数学中曲线的重要作用，验证了曲线发展中的几个历史阶段，给曲线的生动教学提供了借鉴，并以此方式促进了欧洲教育工作者和研究者的合作学习；来自德国的学者 Desirée Kröger 和 Sara Confalonieri 在“从 18 世纪的德国和法国教材中学习数学：以负数学习为例”的工作坊活动中，他们给每个合作小组分发了德国和法国的不同语种、不同版本的教材资料，通过问题框架引领大家体验了 18 世纪教科书中负数的历史呈现特点，给与会者关于负数教学的思考带来了启示。

关于主题 1 的口头报告有 17 场，比如，华东师范大学 HPM 团队的汪晓勤教授在“中国大陆的 HPM 概观”报告中给出了数学史融入数学教学的附加式、复制式、顺应式和重构式等四种模式，并介绍了 HPM 教学设计框架及对应案例；王科博士提出了包含调研与分析、开发与设计、执行与操作、分析与评估、应用与推广等五个阶段的“设计研究——HPM 研究领域的新范式”，并建立了教师知识领域、数学教育者知识领域和数学史专家知识领域的 HPM 三棱锥模型；硕士林佳乐同学在“一个 HPM 的理论框架”报告中从 HPM 的角度对教学三角形进行了新的诠释；此外，德国学者 Hans Niels Jahnke 阐述了“1926 年托普利兹的

论文：发生教学法的意义和内容”；法国学者 Thomas Hausberger 则介绍了“基于在 Montpellier 大学实施的教学实验所得到的关于历史和认识论的理论及实践框架”。

与主题 1 有关的 15 分钟简短口头报告有 1 场，由意大利学者 Miglena Asenova 和 Giorgio 介绍了“数学教育中的历史和认识论的诠释学：一个概率的例子”，他认为诠释学可以在不同认识论间搭建一座桥梁，并且能有效地改变教师的信念。

主题 2：课堂实验和教学材料，从认知或情感的角度的深思，课程和教材的问卷调查。

主题 3：课堂上使用的原始资料，以及实际的教育效果。

主题 2 和主题 3 的内容有交叉，有时难以严格区分，因此在大会主场报告和口头报告环节，相关内容都归入了主题 2&3。

意大利 Genoa 大学的 Adriano Demattè 作了大会主场报告“课堂中的历史：教育的时机和开问题”，他对“诠释学和发生教学法能共存吗，数学史能提高哪些跨学科的能力，哪一类学生能从中受益，或者反过来说，学生又会从中产生哪些额外的困难，哪些会受到课程的限制”等问题进行了批判性分析，并介绍了自己在课堂教学中的一些案例；同时他还强调，“回答上述问题不是最终的目的，由于日常课堂教学活动的复杂性，希望通过自己的抛砖引玉让与会者有兴趣继续深入研究”。

关于主题 2 的 2 小时工作坊报告有 6 场。例如，来自法国的高中教师 Ghislaine ldabouk 展示了如何在初一和初三的课堂中把数学史融入到算法的教学活动。在初一的课堂学习单是基于花拉子米（Al Khwarizmi，约 780-约 850）的一个问题通过计算机辅助练习对二次函数的学习导入，第二个活动是对初三学生用海伦（Heron，10-75？）求平方根近似值方法的一个引导性学习。最后通过现场问卷的形式对数学史材料的使用及这种教学方法的评估。

关于主题 3 的 2 小时工作坊报告有 6 场、3 小时工作坊报告有 5 场，其中，意大利的学者 Adriano Demattè在 2 小时工作坊里以“是的，我愿意在课堂上运用数学史，因为……”为主题继续对大会主场报告作了回应，他以学习单的形式介绍了“平方根乘以平方根”的案例，学习单选取了 16 世纪的意大利数学家邦贝利（Bombelli，1526-1572）1579 年《代数》和克拉维斯（Francesco Ghaligai，1537-1612）1583 年出版的《实用算术概论》中相关内容，并提出了“使用哪位学者的符号系统能帮助学生解决一些困难、历史文本进入课堂要对学生做什么样的准备、诠释法能改进学生的哪种能力”等问题，引起了与会者的积极思考；来自法国的学者 Renaud Chorlay 就“通过历史材料和 ICT 的结合来理解导数”的话题展开了 3 个小时的工作坊活动，他用动态几何软件、电子数据表、官方计算软件等技术展现了历史上 3 个不同的方法，旨在讲授微积分的历史而不是教导数，而且他设计的教学活动不基于那些

划时代意义的数学史课本。对于原始文本的选择他从目标和标准两方面和与会者展开了热烈的研讨。

关于主题 2&3 的口头报告有 8 场，来自华东师大 HPM 团队的邹佳晨、洪燕君、田方琳等研究生从 HPM 设计的视角给大家分享了椭圆、圆的面积、对数的教学课例；墨西哥学者 Mario Sanchez Aguilar 作了“使用差值法分析圆的量之间的关系”，他指出在适当考虑常规课堂教学某些局限性的前提下，小学生应该使用动态几何软件 GeoGebra 来学习几何图形和性质。

15 分钟的简短口头报告及海报展示中有 5 场属于主题 2&3，如意大利学者 Michela Maschietto 作了“帕斯卡：从历史到课堂” 的报告；墨西哥学者 Leticia del Rocío Pardo-Mota 通过《九章算术》、《张丘建算经》和《四元玉鉴》对中国古代数学中级数和序列进行了研究；华东师范大学朱琳同学介绍了数学史融入导数几何意义的教学案例；美国学者 Laurence Kirby 展示了 “普林顿 322 泥板”视频，以此见证古代数学思想在 21 世纪的社会和技术方面仍然发挥着至关重要的作用，从而激励学生学习数学。这部电影介绍了“形数记号”和“毕达哥拉斯三元数”这两个题目，给数学史融入课堂的研究做了借鉴。

主题 4：在数学和科学的教学中，以历史和认识论为工具的跨学科方法。

主题 4 的大会报告是法国巴黎七大 Cécile de Hosson 的“通过使用早期希腊和中国宇宙学中的历史材料提升跨学科教学”。虽然传统教学中，数学和科学这两个学科是相互分离的。但她通过把古代希腊和中国宇宙学中的两个历史片段融入到数学和科学的跨学科教学中，在一定程度上增强了学生对于科学本质的认识。最后，组织者就这种跨学科能力提升的程度、收集历史资料的收获以及历史资料的使用条件给大家留下了思考的空间。

关于主题 4 的 2 小时工作坊报告有 1 场，由德国学者 Ysette Weiss-Pidstrygach 以“历史上的教师教育中的数学模型”为题和与会者进行了跨学科研究和探讨。

关于主题 4 的 3 小时工作坊报告有 3 场，来自法国的学者 Carole Nahum 介绍了“双折射定理：一个贯穿 19 世纪的数学和物理的有力合作”，他认为数学和物理就同一个主题内容来说，它们可以有各自不同的方法，但他们可以互相促进、发展；法国学者 Frédéric Metin and Patrick Guyot 提出了“从罗奥（Jacques Rohault，1620-1675，法国哲学家、物理学家、数学家，笛卡尔思想的忠实信徒）的数学和物理课上我们能学到什么”和与会者进行了思想交流。

主题 5：文化与数学。

来自冰岛大学的学者 Kristin Bjarnadottir 作了题为“历法和货币-融入文化、自然、社会和语言”的大会报告。她说民俗数学是一个热门的研究领域，它被作为一种文化而认知和尊

重。在报告中她举例介绍在不同的社会中所使用的历法和货币，显示它们是在所处的文化和语言环境中的不同反映，以此来促进对于不同文化环境中数学教学理念的理解。

关于主题 5 的 2 小时工作坊报告有 4 场。其中，冰岛的 Kristin Bjarnadottir 以“太阳活动周期和日历、货币与数字—社会与文化的关系”与大家继续展开了研讨；来自香港大学的萧文强学者介绍了“马尔法蒂问题（the Malfatti Problem）：来自日本、欧洲、中国的解法”。马尔法蒂问题，即在一个已知三角形内画三个圆，每个圆与其他两个圆以及三角形的两边相切。这个数学问题不仅很有趣，而且从历史的、文化的角度展示出了不同时期不同国家对同一个问题的不同目的。以此引起大家的兴趣，继而讨论，继而从中受益；北爱尔兰的学者 Harm Jan Smid 介绍了“数学行走：布尔哈夫（Boerhaave）博物馆”。布尔哈夫博物馆是一座位于荷兰莱顿的科学史与医学史博物馆，该博物馆藏有自 16 世纪至 20 世纪的各科学分支的历史上的科学仪器，它也收集数学教学仪器和设备，比如四分仪，博物馆为不同年龄的孩子根据学校课程计划组织一些特殊的展览和活动。其中，“数学行走”是针对 15 岁左右的孩子的教育活动，他们会在导游的安排下以在博物馆做作业的形式接受历史、文化的熏陶，以此激发学习数学的兴趣和热情。在这个工作坊的活动中，主持人除了给大家展示了博物馆藏品的一些图片，还和与会者围绕这些历史素材就挖掘数学教育活动的意义做了交流。

围绕主题 5 的口头报告有 2 场，美国学者 James F. Kiernan 以《西方文明》课程的开设为例，和与会者就关注数学课程的多样化发展问题展开了探讨。巴西学者介绍了“一本数学教材及（非度量）测量系统的使用”，展示了 2007 年弗里堡的人种志研究成果。

关于主题 5 的 15 分钟的简短口头报告及海报展示只有 1 场，由丹麦的博士生 Julio Corrêa 通过对“数学，教育和战争”的诠释，帮助教师们理解数学领域间的关联，然后教师再给学生认识不同背景和文化下的人类其他领域的活动提供帮助。

主题 6: 关于数学教育历史的主题。

德国学者 Gert Schubring 的作了“数学教育史的一些新方法和结果”的大会主场报告。他介绍，数学教育史的第一篇博士论文始于 20 世纪初，其后的相关研究都是关于国家和文化的历史。ICME 在 2004 年创立数学教育史主题研究小组，2006 年创立第一个国际期刊 IJHME 之后，研究的重点致力于数学教育史的国际对比研究。该报告介绍了方法论的思考、用历史上的例子来说明以及提出了进一步研究的视角。

关于主题 6 的 2 小时工作坊报告有 3 场，来自葡萄牙的学者 Helder Pinto 给大家展示了“1853 年波尔图（Porto）报纸上的数学课（小学教育）”的一些细节和成果，表明此课程可以在课堂上使用，并介绍了它是怎样有趣的巩固数学学科的基本概念的；美国学者 Kathleen

Clark 和 Emmet Harrington 给大家“解密保罗·迪拉克（Paul A.M. Dirac，1902-1984）论文的数学涂鸦之作《鞋盒集》”；来自德国的学者 Tanja Hamann 通过 1968-1975 年间的两个小学教材与大家分析探讨了“新数运动—一个彻底的失败？”的原因，包括教学方法、可能的意外及学习中的困难等等。

关于主题 6 的 3 小时工作坊报告有 2 场，来自法国的学者 Thomas Preveraud 作了“美国 19 世纪几何的教学：一项勒让德几何翻译所的研究”的报告，通过分析这些翻译的资料来比较课本教材的演变，从而进一步揭示美国教学中几何在 1850 年前和后地位和作用的变化；其中，德国学者 Gert Schubring 给与会者展示了运用“工作坊的新方法和研究结果走进数学史教育”，呼应了之前的主题报告。

围绕主题 6 的口头报告有 7 场，来自法国的学者 Jérôme Auvinet 介绍了“一本面向孩子的书：查尔斯（Charles-Ange Laisant）的启蒙数学”，书中有 65 节数学史融入教学的课程，Jérôme Auvinet 在报告中通过分析具体机制来强调这种形式的教学影响；德国学者 Thomas Morel 作了“采矿专业教数学：一种 18 世纪末的看法”的报告，通过实例说明在教学中广泛使用档案、原始手稿及手写的讲义和测试报告，这种教法带来了好的教学效果；西班牙学者 Luis Puig 阐述了“16 世纪西班牙代数的开端：Marco Aurel 的算术代数”；比利时学者 Dirk De Bock 介绍了“比利时数学与教育杂志（1953-1974）”；捷克学者 Karel Lepka 的报告“马萨里克（T.G.Masaryk）总统和数学家”让我们看到了总统杰出的数学贡献；葡萄牙学者 Mária Cristina de Almeida 介绍了“葡萄牙第一本独特的必修代数教材（1950 年）”；法国学者 Hervé Renaud 作了“当现代数学对中学数学教育（1905-1910）的教学方法产生质疑”的报告，研究表明，对数学原则的讨论会影响那个时期的中学数学教育。

关于主题 6 的 15 分钟的简短口头报告及海报展示有 1 场，由墨西哥学者 Alejandro Rosas-Mendoza 通过墨西哥学校和高校的年表，对残疾学生这一特殊教育的数学课程作了介绍。

主题 7：北欧国家的数学史。

南丹麦大学 Bjarne Toft 教授的“图论的出现：彼得森（J. Petersen, 1839-1910）和西尔维斯特（J. J. Sylvester, 1814-1897）”报告，为大家介绍了丹麦数学家彼得森在正则图理论诞生过程中发生的历史故事。

关于主题 7 的 3 小时工作坊报告有 1 场，由法国学者 Francois Plantade 介绍了法国数学家、天文学家侯埃尔（J.Houël, 1823-1886）在 19 世纪后半期与北欧数学家友好往来的往事。

主题 7 口头报告 2 场，来自瑞典的学者 Kajsa Bråting 作了“认识论和教学视角下 E.G

Björling 关于数学分析基础概念的观点”的报告，他认为提供数学发展变化的历史背景有助于让学生全面的理解古人的数学思想；德国学者 Harald Groppjieshaole 介绍了丹麦天文学家克劳森（T. Clausen, 1801-1885）的生平，让我们看到了他如何成为天文学教授的历程以及他在数学和理论天文学上的贡献。

除此以外，本次大会有两场专题讨论，每场先由 5 名学者分别阐述观点，然后和与会者互动讨论。第一场专题讨论的内容为“数学教育中信息技术的历史和哲学方法”，讨论围绕如下 3 个问题展开：（1）教学活动中计算机技术的使用是如何改变数学学习过程的？这种改变的程度如何？数学是什么？数学是如何理解和学习的？（2）数学教育中要持续使用计算机技术吗？（3）计算机技术在做数学和学数学中有哪些不同？专题讨论中提到了影响数学教育的不同领域，并且强调要特别关注一些实证研究问题以及教育实践；第二场专题讨论的内容是“在数学史融入数学课堂中的评估的问题和经验的评估”，由来自英国、美国、德国、加拿大、法国的 5 名学者介绍了在数学史材料融入课堂教学的过程中，如何建立定性和定量的评价模式，来评估课堂教学活动的效果。

2 若干启示

ESU-7 会议除了主题大会报告以外，其余形式的报告比例如下：

<table>
<tr><th>形式
主题</th><th>2 小时工作坊</th><th>3 小时工作坊</th><th>30 分钟口头报告</th><th>15 分钟简短报告及海报展示</th></tr>
<tr><td>主题 1：历史与认知论的工具，理论与概念框架</td><td>9.09%</td><td>31.25%</td><td>47.23%</td><td>12.5%</td></tr>
<tr><td>主题 2：教学实验和教学材料</td><td>27.27%</td><td>0%</td><td rowspan="2">22.23%</td><td rowspan="2">62.5%</td></tr>
<tr><td>主题 3：课堂使用的原始材料及教学效果</td><td>27.27%</td><td>31.25%</td></tr>
<tr><td>主题 4：以历史和认识论为工具的跨学科教学</td><td>4.55%</td><td>18.75%</td><td>0%</td><td>0%</td></tr>
<tr><td>主题 5：文化与数学</td><td>18.18%</td><td>0%</td><td>5.55%</td><td>12.5%</td></tr>
<tr><td>主题 6：数学教育史</td><td>13.64%</td><td>12.5%</td><td>19.44%</td><td>12.5%</td></tr>
<tr><td>主题 7：北欧国家的数学史</td><td>0%</td><td>6.25%</td><td>5.55%</td><td>0%</td></tr>
</table>

主题 1 和主题 2&3 的报告在这四种形式中所占比重遥遥领先，可谓理论与实务兼具；其次是主题 6“数学教育史”；而主题 7 的报告数目比重最小，原因之一是相对于 ESU-6 来说，这个主题 7 是新增的。

由此，我们看到 ESU-7 主要聚焦在数学史和认识论研究指导下的课堂实践教学，也关注有教学意义的理论观点和历史分析，结合之前的内容阐述，我们看到国际 HPM 研究给我们带来了如下启示：

（1）加强古文本史料教育取向和教育实践的研究。

本次会议中，关于主题 2&3 的报告很多都是以认识论的角度，设计教学实验，以探究数学史融入教学实践的成效，而且一些学者还与大家分享了欧洲各国如何将数学史融入教科书和师资培育之中的话题。这显示出国际 HPM 研究走出了纸上谈兵的窠臼，加强古文本史料教育取向和教育实践的研究不仅是国际 HPM 研究在教学场域中驰骋一直坚守的战略思想，也是我国 HPM 研究一直以来努力的目标和方向。

（2）为教育而历史。

对于主题 1 的报告，无论是工作坊还是口头报告的形式在数目比重上它仅仅次于主题 2&3，另外主题 4 的“以历史和认识论为工具的跨学科教学”研究也为我国的 HPM 研究打开了一个新的“方向”。但是面对“从历史到课堂”的这个过程，我们要有清醒的认识，一方面切忌因为过分强调教学目的而忽略或扭曲数学历史发展的本质，另一方面又不能太拘泥于历史的诠释，即不能“为历史而历史”，因为历史的诠释或者史家的观点一直呈现一种动态的流变，太强调史观，反而会使教学丧失许多乐趣[1]。所以我们认为，在具体实践中不能“尔爱其羊，吾爱其礼”，只要符合知识接受的规律以及教学发生原理，都应是我们教育工作者实践的好方法，即我们要注重“为教育而历史”。

（3）关注教育新技术的应用。

HPM 研究的主要目标之一是推动数学史在数学教育中的应用工作，即利用数学史的研究成果以及数学史与数学教育的互动，来提升数学教与学的成效。第七届欧洲暑期大学之数学教育中的历史与认识论国际会议（ESU-7）中不仅强调了历史和认识论在数学教与学中的多重作用，专题讨论会的主题还显示出 HPM 研究也要重视应用教育技术的特点，因为数学虽然是一门历史悠久的科学，但在数学史在融入教学的过程中通过技术的实现可以让我们看到它鲜活的过去、生动的现在以及一个尚未预见的未来。

本次会议，华东师范大学汪晓勤教授带领的 HPM 研究团队共有 7 人参会，是唯一的一支大陆学者代表团。通过交流，不仅展示了中国大陆 HPM 研究的风貌，而且使我国的 HPM 研究跨上了一个新的台阶。

“路漫漫其修远兮”， HPM 的研究任重而道远。我们将会为了她灿烂的明天继续上下求索！

参考文献

[1] 刘柏宏. 2010 年维也纳欧洲暑期大学之行.台湾 HPM 通讯，2010，13（7-8）:1-5.

[2] 第七届欧洲暑期大学之数学教育中的历史与认识论国际会议（ESU-7）官方网站 http://conferences.au.dk/ESU-7/.

哥本哈根 ESU-7 华东师大团队合影

法国南特大学 Evelyne Barbin 的大会报告

专题研讨会

茶歇时的交流