应用概率统计 第 34 卷
第 3 期 2018 年 6 月

Chinese Journal of Applied Probability and Statistics
Jun., 2018, Vol. 34, No. 3, pp. 275-283
doi: 10.3969/j.issn.1001-4268.2018.03.005

乘积图 $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \ldots, l-1\}$ 的常返性的初等证明 *

朱 琳
(中国人民大学统计与大数据研究院, 北京, 100872)

姚 强⋆
(华东师范大学统计学院, 上海, 200241)

摘 要: 我们已知二维整数格点 $\mathbb{Z}^2$ 是常返的, 而三维整数格点 $\mathbb{Z}^3$ 是非常返的. 本文严格证明了二维整数格点 $\mathbb{Z}^2$ 与有限线段 $\{0, 1, \ldots, l-1\}$ 的乘积图是常返的. 证明过程只用到了概率论中的初等方法而没有用到电网络的术语.

关键词: 随机游动; 乘积图; 常返性

中图分类号: O211.62

英文引用格式: ZHU L, YAO Q. An elementary proof for the recurrence of the product graph $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \ldots, l-1\}$ [J]. Chinese J Appl Probab Statist, 2018, 34(3): 275–283. (in Chinese)

§1. 引 言

随机游动是一类简单的马氏过程, 它在理论和应用方面均有着重要的作用. 图上的简单对称随机游动的定义如下 (参见文献 [1]): 给定一局部有限 (指每个顶点的度有限) 的连通图 $G = (V, E)$, 图 G 上的简单对称随机游动 $\{S_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是状态空间为 V 的时齐马氏链, 其一步转移概率为

$$p_{xy} := \mathsf{P}(S_{n+1} = y \,|\, S_n = x) = \frac{1}{\deg(x)} \qquad (x \sim y),$$

其中 "$x \sim y$" 表示 y 是 x 的邻居, 而 "$\deg(x)$" 表示顶点 x 的度数. 利用 Kolmogorov-Chapman 方程可以递归定义 n 步转移概率

$$p_{xy}(n+1) := \sum_{z \in V} p_{xz}(n) p_{zy} \qquad (x, y \in V).$$

如果

$$\mathsf{P}(\exists\, \text{无穷多个}\ n,\ \text{使得}\ S_n = x \,|\, S_0 = x) = 1,$$

则称随机游动 $\{S_n\}$ 是常返的, 否则称它是非常返的 (或暂留的). 由于连通图上的简单对称随机游动是不可约的 (即任意两个状态互通), 所以上面的定义与起点 x 的选取无关. 常返

*国家自然科学基金项目 (批准号: 11126236、11201150、11671145)、上海市自然科学基金项目 (批准号: 16ZR1409700) 和 111 引智计划 (批准号: B14019) 部分资助.

⋆通讯作者, E-mail: qyao@sfs.ecnu.edu.cn.

本文 2016 年 9 月 22 日收到, 2017 年 8 月 17 日收到修改稿.

的直观解释是从某点出发可以无穷多次回到起点 (以概率 1). 进一步, 如果一局部有限连通图 G 上的简单对称随机游动是常返的 (相应地, 非常返的), 则称图 G 是常返的 (相应地, 非常返的).

由马氏链的已知结论 (参见文献 [2]), $\{S_n\}$ 常返当且仅当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{xx}(n) = \infty$. 同样, 上式成立与否与顶点 x 的选取无关. 关于整数格点 $\mathbb{Z}^d$, 熟知的结论是它当 $d = 1, 2$ 时是常返的, 而当 $d \geqslant 3$ 时是非常返的, 见文献 [1] 和 [3]. Shizuo Kakutani 说过 "A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever" (参见文献 [3]), 形象地描述了 $\mathbb{Z}^2$ 是常返的而 $\mathbb{Z}^3$ 是非常返的这个事实.

本文探讨乘积图 $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \ldots, l-1\}$ $(l \geqslant 2)$ 的常返性, 其中 $\mathbb{Z}^2$ 为二维整数格点, 而 $\{0, 1, \ldots, l-1\}$ 为含有 l 个点的一维线段. 乘积图 $\mathbb{Z}^d \times \{0, 1, \ldots, l-1\}$ 在某些文献中被称作 "梯图" (ladder graph, 参见文献 [4]), 原因是当 $d = 1$, $l = 2$ 时图形呈梯子状. 上面提到 "三维空间中的鸟会永远迷失", 考虑到实际情形时, 第三个维度 (高度) 的范围要远小于另两个维度 (长度、宽度) 的范围, 因此把鸟的活动范围看作高度有限的三维空间更合适些. 本文的主要结论如下.

定理 1 对任意 $l \geqslant 2$, 乘积图 $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \ldots, l-1\}$ 是常返的.

本文用初等方法证明定理 1. 当 $l = 2$ 时, 乘积图 $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ 是齐次图, 且其结构比较简单, 可以给出直接证明. 而当 $l \geqslant 3$ 时, 乘积图 $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \ldots, l-1\}$ 并不是齐次图, 这给计算 n 步转移概率带来了困难. 对于 $l \geqslant 3$ 的情形我们首先证明如下命题.

命题 2 对任意 $l \geqslant 3$, 乘积图 $\mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z})$ 是常返的, 其中 $\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z}$ 表示含有 l 个点的一维圆环, 即将线段 $\{0, 1, \ldots, l\}$ 的两个端点粘在一起.

容易看出 $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \ldots, l-1\}$ 是 $\mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z})$ 的子图. 由电网络理论中的 Rayleigh 单调律 (参见文献 [3]), 由 $\mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z})$ 常返可直接得到 $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \ldots, l-1\}$ 常返, 由于本文力图给出初等证明 (不用电网络的语言), 我们在证明完命题 2 后给出定理 1 (当 $l \geqslant 3$ 的情形) 的直接初等证明.

本文的结构如下: 第 1 部分介绍问题的背景和主要结论, 第 2 部分证明定理 1 在 $l = 2$ 时的情形, 第 3 部分证明命题 2, 第 4 部分证明定理 1 在 $l \geqslant 3$ 时的情形.

§2. 定理 1 的证明 ($l = 2$ 的情形)

用 o 表示图 $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ 的原点, 易见从 o 点出发偶数步后才有可能回到 o 点, 所以当 n 为奇数时 $p_{oo}(n) = 0$, 从而下面只计算 $p_{oo}(2n)$ 即可. 由于 $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$ 是齐次图, 它的每个顶点的度数为 5, 所以只需计算从 o 点出发 $2n$ 步后回到 o 点的路径数, 然后乘以 $(1/5)^{2n}$

即可. 由排列组合的基本公式知该路径数为

$$\sum_{m=0}^{n} C_{2n}^{2m}\cdot\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(2n-2m)!}{(k!)^2((n-m-k)!)^2}=\sum_{m=0}^{n} C_{2n}^{2m}\cdot\big(C_{2n-2m}^{n-m}\big)^2.$$

因此对 $n=0,1,2,\dots$ 有

$$\begin{aligned}p_{oo}(2n)&=\Big(\frac{1}{5}\Big)^{2n}\cdot\sum_{m=0}^{n} C_{2n}^{2m}\cdot\big(C_{2n-2m}^{n-m}\big)^2\\&=\sum_{m=0}^{n}\Big[\big(C_{2n-2m}^{n-m}\big)^2\cdot\Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n-2m}\Big]\cdot\Big[C_{2n}^{2m}\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^{2m}\cdot\Big(\frac{4}{5}\Big)^{2n-2m}\Big].\end{aligned}\tag{1}$$

由 Stirling 公式

$$\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+1/2}\cdot \mathrm{e}^{-n}\leqslant n!\leqslant \mathrm{e}\cdot n^{n+1/2}\cdot\mathrm{e}^{-n},\qquad n=1,2,\dots$$

(详见文献 [2]) 可得对任意的 $0\leqslant m\leqslant n$ 有

$$\begin{aligned}\big(C_{2n-2m}^{n-m}\big)^2\cdot\Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n-2m}&\geqslant\frac{\big(\sqrt{2\pi}\cdot(2n-2m)^{2n-2m+1/2}\cdot\mathrm{e}^{-(2n-2m)}\big)^2}{\big(\mathrm{e}\cdot(n-m)^{n-m+1/2}\cdot\mathrm{e}^{-(n-m)}\big)^4}\cdot\Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n-2m}\\&=\frac{4\pi}{\mathrm{e}^4(n-m)}\geqslant\frac{4\pi}{\mathrm{e}^4 n}.\end{aligned}\tag{2}$$

将 (2) 代入 (1), 得

$$\begin{aligned}p_{oo}(2n)&\geqslant\frac{4\pi}{\mathrm{e}^4 n}\cdot\sum_{m=0}^{n} C_{2n}^{2m}\cdot\Big(\frac{1}{5}\Big)^{2m}\cdot\Big(\frac{4}{5}\Big)^{2n-2m}=\frac{2\pi}{\mathrm{e}^4 n}\Big[1+\Big(\frac{3}{5}\Big)^{2n}\Big]\\&\geqslant\frac{2\pi}{\mathrm{e}^4 n}.\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{oo}(2n)\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\pi}{\mathrm{e}^4 n}=\infty,$$

定理 1 (当 $l=2$ 的情形) 得证.

§3. 命题 2 的证明

用 o 表示图 $\mathbb{Z}^2\times(\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z})$ 的原点 ($l\geqslant 3$). 由于

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{oo}(n)\geqslant\sum_{n=0}^{\infty} p_{oo}(2n),$$

因此只需证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{oo}(2n)=\infty$ 即可. 由于当 $l\geqslant 3$ 时 $\mathbb{Z}^2\times(\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z})$ 是齐次图, 它的每个顶点的度数为 6, 所以计算 $p_{oo}(2n)$ 时只需计算从 o 点出发 $2n$ 步后回到 o 点的路径数, 然后乘以 $(1/6)^{2n}$ 即可. 由排列组合的基本公式知该路径数为

$$\sum_{m=0}^{n} C_{2n}^{2m}\cdot D_{2m,l}\cdot\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(2n-2m)!}{(k!)^2((n-m-k)!)^2}=\sum_{m=0}^{n} C_{2n}^{2m}\cdot\big(C_{2n-2m}^{n-m}\big)^2\cdot D_{2m,l},$$

其中 $D_{2m,l}$ 表示在圈 $\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z}$ 上从 0 点出发 $2m$ 步后回到 0 点的路径数 $(m=0,1,2,\ldots)$. 因此有

$$p_{oo}(2n)=\Big(\frac{1}{6}\Big)^{2n}\cdot\sum_{m=0}^{n}C_{2n}^{2m}\cdot\big(C_{2n-2m}^{n-m}\big)^2\cdot D_{2m,\,l},\qquad n=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

可见推导的关键是估计 $D_{2m,l}$. 我们有如下引理.

引理 3 对任意 $l\geqslant 3$ 和 $m\geqslant 0$, 有 $D_{2m,l}\geqslant 2^{2m-l}$.

证明: 注意到当 l 为偶数时, $D_{2m,l}$ 等于 $\mathbb{Z}$ 上的简单对称随机游动从 0 点出发 $2m$ 步后到达 l 的整数倍位置的路径数; 而当 l 为奇数时, $D_{2m,l}$ 等于 $\mathbb{Z}$ 上的简单对称随机游动从 0 点出发 $2m$ 步后到达 l 的偶数倍位置的路径数. 因此

$$D_{2m,l}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k:\,-2m\leqslant kl\leqslant 2m}C_{2m}^{m+kl/2}=2\sum_{k=1}^{[2m/l]}C_{2m}^{m+kl/2}+C_{2m}^{m}, & \text{当 } l \text{ 为偶数时;}\\ \displaystyle\sum_{k:\,-2m\leqslant 2kl\leqslant 2m}C_{2m}^{m+kl}=2\sum_{k=1}^{[m/l]}C_{2m}^{m+kl}+C_{2m}^{m}, & \text{当 } l \text{ 为奇数时,}\end{cases} \tag{4}$$

其中 $[\cdot]$ 表示不超过某数的最大整数.

下面只对 l 为奇数的情形进行证明, l 为偶数时的情形完全类似可证 (将下面证明过程中的 l 改为 $l/2$ 即可). 对 $n\geqslant 2$, $l\geqslant 3$ 及 $i=0,1,\ldots,n$, 定义

$$a_{n,\,l,\,i}=\sum_{k:\,0\leqslant i+kl\leqslant n}C_n^{i+kl},$$

并定义

$$A_{n,\,l}=\min_{0\leqslant i\leqslant n}a_{n,\,l,\,i}.$$

由于对任意的 $l\geqslant 3$, $n\geqslant l$ 和 $i=0,1,\ldots,n$ 有

$$a_{n,\,l,\,i}=\begin{cases}a_{n-1,\,l,\,i-1}+a_{n-1,\,l,\,i}\geqslant 2A_{n-1,\,l}, & \text{当 } 1\leqslant i\leqslant n-1 \text{ 时;}\\ a_{n-1,\,l,\,l-1}+a_{n-1,\,l,\,0}\geqslant 2A_{n-1,\,l}, & \text{当 } i=0 \text{ 时;}\\ a_{n-1,\,l,\,n-1}+a_{n-1,\,l,\,n-l}\geqslant 2A_{n-1,\,l}, & \text{当 } i=n \text{ 时,}\end{cases}$$

所以当 $n\geqslant l$ 时有 $A_{n,l}\geqslant 2A_{n-1,l}$. 从而可递归得到 $A_{n,l}\geqslant 2^{n-l}A_{l,l}\geqslant 2^{n-l}$. 又由于当 $m\geqslant 1$ 时, $D_{2m,l}$ 等于 $a_{2m,\,l,\,0},a_{2m,\,l,\,1},\ldots,a_{2m,\,l,\,2m}$ 中的一个, 所以

$$D_{2m,l}\geqslant A_{2m,l}\geqslant 2^{2m-l}.$$

而当 $m=0$ 时显然有 $D_{2m,l}\geqslant 2^{2m-l}$, 从而引理得证. □

以下的证明步骤完全类似于本文第 2 部分的证明. 将引理 3 的结论代入 (3) 式, 可得

$$p_{oo}(2n)\geqslant\frac{1}{6^{2n}2^{l}}\cdot\sum_{m=0}^{n}C_{2n}^{2m}\cdot\big(C_{2n-2m}^{n-m}\big)^2\cdot 2^{2m}$$

$$=\frac{1}{2^l}\cdot\sum_{m=0}^{n}\Big[\big(C_{2n-2m}^{n-m}\big)^2\cdot\Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n-2m}\Big]\cdot\Big[C_{2n}^{2m}\cdot\Big(\frac{1}{3}\Big)^{2m}\cdot\Big(\frac{2}{3}\Big)^{2n-2m}\Big]. \tag{5}$$

由 Stirling 公式

$$\sqrt{2\pi}\cdot n^{n+1/2}\cdot \mathrm{e}^{-n}\leqslant n!\leqslant \mathrm{e}\cdot n^{n+1/2}\cdot\mathrm{e}^{-n},\qquad n=1,2,\ldots$$

(详见文献 [2]) 可得对任意的 $0\leqslant m\leqslant n$ 有

$$\begin{aligned}\big(C_{2n-2m}^{n-m}\big)^2\cdot\Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n-2m}&\geqslant\frac{\big(\sqrt{2\pi}\cdot(2n-2m)^{2n-2m+1/2}\cdot\mathrm{e}^{-(2n-2m)}\big)^2}{\big(\mathrm{e}\cdot(n-m)^{n-m+1/2}\cdot\mathrm{e}^{-(n-m)}\big)^4}\cdot\Big(\frac{1}{4}\Big)^{2n-2m}\\&=\frac{4\pi}{\mathrm{e}^4(n-m)}\geqslant\frac{4\pi}{\mathrm{e}^4 n}.\end{aligned}\tag{6}$$

将 (6) 代入 (5), 得

$$\begin{aligned}p_{oo}(2n)&\geqslant\frac{4\pi}{2^l\mathrm{e}^4 n}\cdot\sum_{m=0}^{n}C_{2n}^{2m}\cdot\Big(\frac{1}{3}\Big)^{2m}\cdot\Big(\frac{2}{3}\Big)^{2n-2m}=\frac{2\pi}{2^l\mathrm{e}^4 n}\Big[1+\Big(\frac{1}{3}\Big)^{2n}\Big]\\&\geqslant\frac{2\pi}{2^l\mathrm{e}^4 n}.\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_{oo}(n)\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}p_{oo}(2n)\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\pi}{2^l\mathrm{e}^4 n}=\infty,$$

命题 2 得证.

§4. 定理 1 的证明 ($l\geqslant 3$ 的情形)

在本节中, 我们将要比较图 $\mathbb{Z}^2\times\{0,1,\ldots,l-1\}$ 和图 $\mathbb{Z}^2\times(\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z})$ 上的简单对称随机游动 ($l\geqslant 3$). 为了方便起见, 我们用相同的符号记两张图上的随机游动以及相关停时, 而将它们对应的概率测度分别用 P 和 $\overline{\mathsf{P}}$ 表示, 以加以区分. 注意到图 $\mathbb{Z}^2\times\{0,1,\ldots,l-1\}$ 和图 $\mathbb{Z}^2\times(\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z})$ 有相同的顶点集 V. 设它们的边集分别为 E_l 和 E_c (下标 "l" 和 "c" 分别表示 line 和 circle), 则 E_l 是 E_c 的真子集. 此外, 用 "$x\overset{l}{\sim}y$" (相应地, "$x\overset{c}{\sim}y$") 表示 x 和 y 在图 (V,E_l) (相应地, 图 (V,E_c)) 中是邻居, 而用 $\deg(x)$ (相应地, $\overline{\deg}(x)$) 表示顶点 x 在图 (V,E_l) (相应地, 图 (V,E_c)) 中的度数.

记简单对称随机游动为 $\{S_n: n=0,1,\ldots\}$, 对任意 $x\in V$, 令

$$\mathsf{P}_x(\cdot)=\mathsf{P}(\cdot\,|\,S_0=x),\qquad \overline{\mathsf{P}}_x(\cdot)=\overline{\mathsf{P}}(\cdot\,|\,S_0=x).$$

此外, 对 $A\subseteq V$, 令 $\tau_A=\inf\{n\geqslant 0: S_n\in A\}$ 为随机游动首次到达顶点集 A 的时刻, 而令 $T_A=\inf\{n\geqslant 1: S_n\in A\}$ 为随机游动首次返回顶点集 A 的时刻. 当 A 取单点集 $\{x\}$ 时, 将 $\tau_{\{x\}}$ 和 $T_{\{x\}}$ 分别简记为 τ_x 和 T_x. 用 o 表示图的原点 $(0,0,0)$, 对任意 $n\geqslant 1$, 令顶点集

$$A_n=\{(x,y,z): |x|=n \text{ 或 } |y|=n,\ z\in\{0,1,\ldots,l-1\}\}.$$

首先我们有如下引理.

引理 4 对任意 $n \geqslant 1$, 有

$$\sum_{y \overset{l}{\sim} x} [\mathsf{P}_x(\tau_o < \tau_{A_n}) - \mathsf{P}_y(\tau_o < \tau_{A_n})] = \begin{cases} \deg(o) \cdot \mathsf{P}_o(T_o > T_{A_n}), & \text{当 } x = o \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x \neq o \text{ 时.} \end{cases} \tag{7}$$

$$\sum_{y \overset{c}{\sim} x} [\overline{\mathsf{P}}_x(\tau_o < \tau_{A_n}) - \overline{\mathsf{P}}_y(\tau_o < \tau_{A_n})] = \begin{cases} \overline{\deg}(o) \cdot \overline{\mathsf{P}}_o(T_o > T_{A_n}), & \text{当 } x = o \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x \neq o \text{ 时.} \end{cases} \tag{8}$$

证明: 我们只证明 (7) 式, 可完全类似地证明 (8) 式. 由于 $\{S_n\}$ 是简单对称随机游动, 所以当 $x \neq o$ 时有

$$\mathsf{P}_x(\tau_o < \tau_{A_n}) = \frac{1}{\deg(x)} \cdot \sum_{y \overset{l}{\sim} x} \mathsf{P}_y(\tau_o < \tau_{A_n}),$$

从而此时有

$$\begin{aligned} & \sum_{y \overset{l}{\sim} x} [\mathsf{P}_x(\tau_o < \tau_{A_n}) - \mathsf{P}_y(\tau_o < \tau_{A_n})] \\ = \ & \deg(x) \cdot \frac{1}{\deg(x)} \cdot \sum_{y \overset{l}{\sim} x} \mathsf{P}_y(\tau_o < \tau_{A_n}) - \sum_{y \overset{l}{\sim} x} \mathsf{P}_y(\tau_o < \tau_{A_n}) = 0. \end{aligned}$$

又当 $x = o$ 时有

$$\begin{aligned} \sum_{y \overset{l}{\sim} o} [\mathsf{P}_o(\tau_o < \tau_{A_n}) - \mathsf{P}_y(\tau_o < \tau_{A_n})] &= \sum_{y \overset{l}{\sim} o} \mathsf{P}_y(\tau_o > \tau_{A_n}) \\ &= \deg(o) \cdot \mathsf{P}_o(T_o > T_{A_n}), \end{aligned}$$

从而引理得证. □

进一步可以证明如下引理.

引理 5 对任意 $n \geqslant 1$, 有

$$\sum_{(x,y) \in E_l} [\mathsf{P}_x(\tau_o < \tau_{A_n}) - \mathsf{P}_y(\tau_o < \tau_{A_n})]^2 = 2 \deg(o) \cdot \mathsf{P}_o(T_o > T_{A_n}), \tag{9}$$

$$\sum_{(x,y) \in E_c} [\overline{\mathsf{P}}_x(\tau_o < \tau_{A_n}) - \overline{\mathsf{P}}_y(\tau_o < \tau_{A_n})]^2 = 2\overline{\deg}(o) \cdot \overline{\mathsf{P}}_o(T_o > T_{A_n}). \tag{10}$$

证明: 我们只证明 (9) 式, 可完全类似地证明 (10) 式. 由 (7) 式知

$$\sum_{(x,y) \in E_l} [\mathsf{P}_x(\tau_o < \tau_{A_n}) - \mathsf{P}_y(\tau_o < \tau_{A_n})]^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{x\in V}\mathsf{P}_x(\tau_o<\tau_{A_n})\sum_{y\overset{l}{\sim}x}[\mathsf{P}_x(\tau_o<\tau_{A_n})-\mathsf{P}_y(\tau_o<\tau_{A_n})]\\
&\quad+\sum_{y\in V}\mathsf{P}_y(\tau_o<\tau_{A_n})\sum_{x\overset{l}{\sim}y}[\mathsf{P}_y(\tau_o<\tau_{A_n})-\mathsf{P}_x(\tau_o<\tau_{A_n})]\\
&=2\deg(o)\cdot\mathsf{P}_o(T_o>T_{A_n}),
\end{aligned}
$$

得证.　　□

下面的引理是证明定理 1 (当 $l\geqslant 3$ 的情形) 的关键.

引理 6　对任意 $n\geqslant 1$, 有

$$\mathsf{P}_o(T_o>T_{A_n})\leqslant\frac{6}{5}\cdot\overline{\mathsf{P}}_o(T_o>T_{A_n}).$$

证明:　对任意 $x,y\in V$, 定义

$$
a_{xy}=\begin{cases}\dfrac{\mathsf{P}_x(\tau_o<\tau_{A_n})-\mathsf{P}_y(\tau_o<\tau_{A_n})}{\deg(o)\cdot\mathsf{P}_o(T_o>T_{A_n})}, & \text{当 } (x,y)\in E_l \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } (x,y)\notin E_l \text{ 时}.\end{cases}
$$

$$
b_{xy}=\begin{cases}\dfrac{\overline{\mathsf{P}}_x(\tau_o<\tau_{A_n})-\overline{\mathsf{P}}_y(\tau_o<\tau_{A_n})}{\overline{\deg}(o)\cdot\overline{\mathsf{P}}_o(T_o>T_{A_n})}, & \text{当 } (x,y)\in E_c \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } (x,y)\notin E_c \text{ 时}.\end{cases}
$$

则由引理 4 的结论知对任意 $x\in V$ 有

$$
\sum_{y\overset{l}{\sim}x}a_{xy}=\sum_{y\overset{c}{\sim}x}b_{xy}=\begin{cases}1, & \text{当 } x=o \text{ 时};\\ 0, & \text{当 } x\neq o \text{ 时}.\end{cases}\tag{11}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
0&\leqslant\sum_{(x,y)\in E_l}(a_{xy}-b_{xy})^2+\sum_{(x,y)\in E_c\setminus E_l}b_{xy}^2\\
&=\sum_{(x,y)\in E_l}a_{xy}^2+\sum_{(x,y)\in E_c}b_{xy}^2-2\sum_{(x,y)\in E_l}a_{xy}b_{xy}.
\end{aligned}\tag{12}
$$

由引理 5 知

$$
\sum_{(x,y)\in E_l}a_{xy}^2=\frac{2}{\deg(o)\cdot\mathsf{P}_o(T_o>T_{A_n})},\qquad\sum_{(x,y)\in E_c}b_{xy}^2=\frac{2}{\overline{\deg}(o)\cdot\overline{\mathsf{P}}_o(T_o>T_{A_n})}.\tag{13}
$$

又由 b_{xy} 的定义及 (11) 知

$$\sum_{(x,y)\in E_l}a_{xy}b_{xy}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\overline{\deg}(o)\cdot\overline{\mathsf{P}}_o(T_o > T_{A_n})} \cdot \sum_{(x,y)\in E_l} a_{xy}[\overline{\mathsf{P}}_x(\tau_o < \tau_{A_n}) - \overline{\mathsf{P}}_y(\tau_o < \tau_{A_n})] \\
&= \frac{1}{\overline{\deg}(o)\cdot\overline{\mathsf{P}}_o(T_o > T_{A_n})} \cdot \Big[\sum_{x\in V} \overline{\mathsf{P}}_x(\tau_o < \tau_{A_n}) \sum_{y\overset{l}{\sim}x} a_{xy} + \sum_{y\in V} \overline{\mathsf{P}}_y(\tau_o < \tau_{A_n}) \sum_{x\overset{l}{\sim}y} a_{yx}\Big] \\
&= \frac{2}{\overline{\deg}(o)\cdot\overline{\mathsf{P}}_o(T_o > T_{A_n})}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

将 (13) 和 (14) 两式代入 (12), 得

$$\frac{2}{\deg(o)\cdot\mathsf{P}_o(T_o > T_{A_n})} \geqslant \frac{2}{\overline{\deg}(o)\cdot\overline{\mathsf{P}}_o(T_o > T_{A_n})}.$$

从而有

$$\mathsf{P}_o(T_o > T_{A_n}) \leqslant \frac{\overline{\deg}(o)}{\deg(o)}\cdot\overline{\mathsf{P}}_o(T_o > T_{A_n}) = \frac{6}{5}\cdot\overline{\mathsf{P}}_o(T_o > T_{A_n}),$$

得证. □

定理 1 (当 $l \geqslant 3$ 的情形) 的证明: 由于对任意的 $n \geqslant 1$ 有 $T_{A_n} \geqslant n$, 所以

$$\{T_o > T_{A_n}\} \overset{n\to\infty}{\searrow} \bigcap_{n=1}^{\infty}\{T_o > T_{A_n}\} = \{T_o = \infty\}.$$

将引理 6 结论的不等式的两端同取 $n \to \infty$ 的极限, 得

$$\mathsf{P}_o(T_o = \infty) \leqslant \frac{6}{5}\cdot\overline{\mathsf{P}}_o(T_o = \infty). \tag{15}$$

由命题 2 知当 $l \geqslant 3$ 时, 乘积图 $\mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Z}/l\,\mathbb{Z})$ 上的简单对称随机游动是常返的, 所以

$$\overline{\mathsf{P}}_o(T_o = \infty) = 0.$$

由 (15) 式可得

$$\mathsf{P}_o(T_o = \infty) = 0,$$

从而当 $l \geqslant 3$ 时, 乘积图 $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1, \ldots, l-1\}$ 上的简单对称随机游动是常返的, 定理 1 (当 $l \geqslant 3$ 的情形) 得证. □

注记 7 本文中给出的初等证明方法可以进行推广, 以证明更多种图的常返性. 一方面, 可以把乘积图中的 $\mathbb{Z}^2$ 分量推广为其它二维格点 (如六边形格点、三角形格点等); 另一方面, 可以把乘积图中的 $\{0, 1, \ldots, l-1\}$ 分量推广为 $\{0, 1, \ldots, l-1\}^m$ $(m \geqslant 1)$. 利用本文中证明方法的思想, 可以证明这些图也是常返的, 其证明过程要繁琐一些.

参 考 文 献

[1] LYONS R, PERES Y. *Probability on Trees and Networks* [M]. New York: Cambridge University Press, 2016.

[2] DURRETT R. *Probability: Theory and Examples* [M]. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

[3] DOYLE P G, SNELL J L. *Random Walks and Electrical Networks* [M]. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1984.

[4] SELLKE T. Recurrence of reinforced random walk on a ladder [J]. *Electron J Probab*, 2006, **11**: 301–310.

An Elementary Proof for the Recurrence of the Product Graph $\mathbb{Z}^2 \times \{0,1,\dots,l-1\}$

ZHU Lin

(*Institute of Statistics and Big Data, Renmin University of China, Beijing, 100872, China*)

YAO Qiang

(*School of Statistics, East China Normal University, Shanghai, 200241, China*)

Abstract: It is well known that the two dimensional integer lattice $\mathbb{Z}^2$ is recurrent, while the three dimensional integer lattice is transient. In this paper we show that the product graph $\mathbb{Z}^2 \times \{0,1,\dots,l-1\}$ is recurrent. The proof approach only utilizes the elementary methods in probability theory (without the words of electric networks).

Keywords: random walk; product graph; recurrence

2010 Mathematics Subject Classification: 60G50