Acta Mathematica Scientia
数学物理学报
2010,**30A**(1):97–102
http://actams.wipm.ac.cn

某些乘积图上接触过程的完全收敛定理的证明 *

姚强
(华东师范大学金融与统计学院统计与精算学系　上海 200241)

摘要：该文证明了当传染参数充分大时，乘积图 $G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z}$ 上的接触过程满足完全收敛定理，其中 G_1 和 G_2 是任意无穷、局部有限的可迁图 (从而度有界). 该结果在一定程度上推广了文献 [1] 的结果.

关键词：接触过程；完全收敛定理.

MR(2000) 主题分类: 60K35　**中图分类号**: O211.62　**文献标识码**: A

文章编号: 1003-3998(2010)01-97-06

1 引言

假设 G_1 和 G_2 是任意无穷、局部有限的可迁图 (从而度有界). $\{\xi^\mu(t):\ t \geq 0\}$ 是乘积图 $G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z}$ 上的接触过程，初始感染集以分布 μ 随机选取， $\lambda > 0$ 是传染参数．这里 “感染集” 是指所有被感染的顶点组成的集合．分别用 $V(G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z})$ 和 $E(G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z})$ 记图 $G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z}$ 的顶点集和边集．接触过程是定义在 $V(G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z})$ 的所有子集组成的集合上的连续时间马氏过程，转移速率如下

$$\begin{cases} A \to A \cup \{x\} & \text{以速率}\ \ \lambda \cdot \#\{y \in A:\ |y-x| = 1\}, & \text{如果}\ \ x \notin A, \\ A \to A \setminus \{x\} & \text{以速率}\ \ 1, & \text{如果}\ \ x \in A, \end{cases}$$

其中 $\#$ 表示集合的基数 (或势), $|\cdot|$ 表示 $G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z}$ 上的 “图模”, 即连结图 $G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z}$ 上两点的最短路径的长度. 类似地, 我们用 $\{\xi^A(t):\ t \geq 0\}$ 来表示初始感染集为 $A \subset V(G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z})$ 的接触过程，其中 A 是非随机的顶点集.

定义 $\tau^\mu := \inf\{t \geq 0:\ \xi^\mu(t) = \emptyset\}$ 为过程的灭绝时间. 并用 ν 表示过程的 “上不变测度”, 即 $\xi^{G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z}}(t)$ 当 $t \to \infty$ 时的弱极限. 这里 $\{\xi^{G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z}}(t)\}$ 表示初始感染集为 $V(G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z})$ 的过程，即在时刻 0 时， $V(G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z})$ 中的所有顶点均被感染．进一步，用 $\lambda_g(G_2 \times \mathbb{Z})$ 表示图 $G_2 \times \mathbb{Z}$ 上接触过程的全局临界值，并用 λ_d 表示格点 $Z^d (d \geq 1)$ 上接触过程的临界值．对于有关接触过程的更多背景的介绍，读者可参阅文献 [2].

本文的主要结果如下.

收稿日期：2007-12-11; 修订日期：2009-01-30
E-mail: gyao@sfs.ecnu.edu.cn
* 基金项目：国家自然科学基金杰出青年项目 (10625101) 、重点项目 (10531070) 和国家重点基础研究发展计划 (2006CB805900) 资助

定理 1.1 对任何大于 $\lambda_g(G_2\times\mathbb{Z})$ 且使 $G_2\times\mathbb{Z}$ 上接触过程的完全收敛定理成立的 λ 及任意初分布 μ, 当 $t\to\infty$ 时，有

$$\xi^{\mu}(t)\Rightarrow\mathbf{P}(\tau^{\mu}<\infty)\cdot\delta_{\emptyset}+\mathbf{P}(\tau^{\mu}=\infty)\cdot\nu. \tag{1}$$

其中 "$\Rightarrow$" 表示弱收敛．特别地，当 $\lambda>\lambda_1$ 时，(1) 式成立．

我们只需要证明 (1) 式，因为由文献 [3] 中的结果，知对 Z^1 上的接触过程而言，当 $\lambda>\lambda_1$ 时完全收敛定理成立．我们将运用文献 [4] 中第 383 页上的引理来证明 (1) 式．由于 $G_1\times G_2\times\mathbb{Z}$ 上的接触过程是 "自对偶" 的，我们可以构造过程的两个独立版本，分别记它们为 $\{\xi^A(t):\ t\geq 0\}$ 和 $\{\overline{\xi}^B(t):\ t\geq 0\}$, 其中 $A,B\subset V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z})$ 是各自的初始感染集．上面的引理说明：(1) 式等价于对任何的 $A,B\subset V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z})$, 其中 $0<|A|<\infty$, $0<|B|<\infty$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(\xi^A(t)\cap\overline{\xi}^B(t)=\emptyset,\ \tau^A=\infty,\ \overline{\tau}^B=\infty)=0. \tag{2}$$

其中

$$\tau^A:=\inf\{t\geq 0:\ \xi^A(t)=\emptyset\}$$

和

$$\overline{\tau}^B:=\inf\{t\geq 0:\ \overline{\xi}^B(t)=\emptyset\}$$

分别表示两个版本的灭绝时间．

本文的主要任务是证明 (2) 式．证明的思想是寻找 "嵌入" 的 $G_2\times\mathbb{Z}$ 上的接触过程．在第 2 部分我们将给出一些记号和注记，为 (2) 式的证明作准备．在第 3 部分我们将要证明 (2) 式．最后在第 4 部分，我们将要给出几个推论．

2 记号和注记

下文中对任意的 $x\in V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z})$, 记 $x=(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)})$. 其中 $x^{(1)}\in V(G_1)$ 是 x 的 G_1 分量，$x^{(2)}\in V(G_2)$ 是 x 的 G_2 分量，$x^{(3)}\in\mathbb{Z}$ 是 x 的 $\mathbb{Z}$ 分量.

定义 2.1 定义 $Q:\ V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}$, $Q(x)=x^{(3)}$, 其中 $x=(x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)})\in V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z})$, $x^{(1)}\in V(G_1)$, $x^{(2)}\in V(G_2)$, $x^{(3)}\in\mathbb{Z}$.

定义 2.2 给定 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $K_n:=\{(C,D)\subset V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z})\times V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z})$: $\exists\{c_1,\cdots,c_n\}\subset C$, $\exists\{d_1,\cdots,d_n\}\subset D$, 使得

$$Q(c_n)<Q(c_{n-1})<\cdots<Q(c_1)<Q(d_1)<\cdots<Q(d_{n-1})<Q(d_n)\}.$$

注意到 K_n 包含了所有具有以下性质的二元组 (C,D): $C\subset V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z})$, $D\subset V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z})$, 我们可以在 C 中找到 n 个点，在 D 中找到 n 个点，使得该 $2n$ 个点在它们的 $\mathbb{Z}$ 分量上有某种序关系.

由于 G_1 和 G_2 都是可迁图，我们可以选取一个特定的点 $O_{G_1}\in V(G_1)$ 作为 G_1 的 "原点", 并可以选取一个特定的点 $O_{G_2}\in V(G_2)$ 作为 G_2 的 "原点". 为了叙述下面的定义，我们需要首先给出图 $G_1\times G_2\times\mathbb{Z}$ 的 "球形邻域" 的定义.

定义 2.3 给定 $l\in\mathbb{N}$, 定义

$$\begin{aligned}B(l):=\{x\in V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z}):|x-(O_{G_1},x^{(2)},x^{(3)})|\leq l,\\ |x-(x^{(1)},O_{G_2},x^{(3)})|\leq l,|x-(x^{(1)},x^{(2)},0)|\leq l\},\end{aligned}$$

其中 $|\cdot|$ 表示 $G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z}$ 上的 “图模”, 即连结图 $G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z}$ 上两点的最短路径的长度.

给定满足定义 2.2 中条件的 $c_1, c_2, \cdots, c_n, d_1, d_2, \cdots, d_n$ 并选取 $l \in \mathbb{N}$, 使得对每个 i, 有

$$c_i \in B(l),\ d_i \in B(l).$$

由于 G_1 是无限连通图，我们可以在 G_1 中找到一条从 O_{G_1} 出发通向无穷远的路径．在该路径上顺次选取 n 个顶点 $\{V_i\}_{i=1}^n$, 使得对任意 $1 \le i \le n$, 有

$$|V_i - O_{G_1}|_{G_1} = l + i.$$

其中 $|\cdot|_{G_1}$ 表示 G_1 上的 “图模”, 即连结图 G_1 上两点的最短路径的长度.

对 $1 \le i \le n$, 按如下方式构造 $G_1 \times \mathbb{Z}$ 中的一维路径：在 $G_1 \times \{O_{G_2}\} \times \{c_i^{(3)}\}$ 中画出从 $(c_i^{(1)}, O_{G_2}, c_i^{(3)})$ 到 $(O_{G_1}, O_{G_2}, c_i^{(3)})$ 的最短路径；然后沿上段中提到的 $G_1 \times \{O_{G_2}\} \times \{c_i^{(3)}\}$ 中的路径连结 $(O_{G_1}, O_{G_2}, c_i^{(3)})$ 和 $(V_i, O_{G_2}, c_i^{(3)})$; 然后去掉圈并用一条线连结 $(V_i, O_{G_2}, c_i^{(3)})$ 和 $(V_i, O_{G_2}, d_i^{(3)})$. 接下来类似地沿上段中提到的 $G_1 \times \{O_{G_2}\} \times \{d_i^{(3)}\}$ 中的路径连结 $(V_i, O_{G_2}, d_i^{(3)})$ 和 $(O_{G_1}, O_{G_2}, d_i^{(3)})$, 在 $G_1 \times \{O_{G_2}\} \times \{d_i^{(3)}\}$ 画出从 $(O_{G_1}, O_{G_2}, d_i^{(3)})$ 到 $(d_i^{(1)}, O_{G_2}, d_i^{(3)})$ 的最短路径并去掉圈．这样我们可以得到 $G_1 \times \mathbb{Z}$ 中一条有限的一维路径，记为 $P_i^{(f)}$. 接下来，在 $G_1 \times \{O_{G_2}\} \times \{c_i^{(3)}\}$ 中画一条从点 $(c_i^{(1)}, O_{G_2}, c_i^{(3)})$ 出发通向无穷远并与 $P_i^{(f)}$ 不相交的无限路径．类似地，在 $G_1 \times \{O_{G_2}\} \times \{d_i^{(3)}\}$ 中画一条从点 $(d_i^{(1)}, O_{G_2}, d_i^{(3)})$ 出发通向无穷远并与 $P_i^{(f)}$ 不相交的无限路径．由于 G_1 是无限图，这些操作都可以实现.

现在我们得到了 $G_1 \times \mathbb{Z}$ 中的一条无限的一维路径，记为 P_i. 接下来对 $i = 1, 2, \cdots, n$, 定义

$$H_i := \{x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}):\ (x^{(1)}, x^{(3)}) \in P_i,\ x^{(2)} \in G_2\}$$

和

$$L_i := H_i \cap (G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z}).$$

注记 2.1 $c_i, d_i \in L_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

注记 2.2 如果 $i \ne j$, 则 $L_i \cap L_j = \emptyset$.

事实上，根据我们选取 $\{V_i\}_{i=1}^n$ 的方式，如果 $i \ne j$ 则 $P_i \cap P_j = \emptyset$, 从而 $H_i \cap H_j = \emptyset$. 进而 $L_i \cap L_j = \emptyset$.

定义 2.4 定义过程 $\{\xi^A(t)\}$ 的 “图表示”(详细说明见文献 [2]) 在每个 L_i 定义了一个与 $G_2 \times \mathbb{Z}$ 上的接触过程相对应的 “图表示”．我们只需要考虑 “图表示” 中连结 L_i 中顶点的箭头．用记号 $\{\xi_i(t)\}$ 来表示这些过程．类似地，对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$, 定义过程 $\{\overline{\xi}^B(t)\}$ 的 “图表示” 也在每个 L_i 上定义了过程 $\{\overline{\xi}_i(t)\}$.

注记 2.3 注记 2.2 说明了 $2n$ 个过程 $\{\xi_1(t)\}, \cdots, \{\xi_n(t)\}, \{\overline{\xi}_1(t)\}, \cdots, \{\overline{\xi}_n(t)\}$ 是相互独立的.

定义 2.5 给定 $n \in \mathbb{N}$, 定义停时

$$\Theta_n := \inf\{t \ge 0:\ (\xi^A(t), \overline{\xi}^B(t)) \in K_n\ \text{ 或 }\ (\overline{\xi}^B(t), \xi^A(t)) \in K_n\}.$$

定义 2.6 给定 $l \in \mathbb{N}$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$, 定义事件

$$E_{l,t} := [\text{ 对任意 } s \le t,\ \text{有 } \xi^A(s) \subset B(l),\ \overline{\xi}^B(s) \subset B(l)].$$

定义 2.7 给定 $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$, 定义事件

$$F_{n,l,t} := [\Theta_n \le t] \cap E_{l,t}.$$

注记 2.4 在下文中，对 $x \in V(G_1 \times G_2 \times \mathbb{Z})$, 我们将 $\xi^{\{x\}}(t)$ 简记为 $\xi^x(t)$.

3 定理 1.1 的证明

有了第 2 部分的准备，我们接下来证明 (2) 式，这是本文的主要任务.

对任意 $n\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{N}$ 和 $t_0\in\mathbb{R}^+$, 有

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\tau^A=\infty,\ \overline{\tau}^B=\infty,\ \xi^A(t)\cap\overline{\xi}^B(t)=\emptyset)\\ \le\ &\mathbf{P}(\tau^A=\infty,\ \overline{\tau}^B=\infty,\ (F_{n,l,t_0})^c)+\mathbf{P}(F_{n,l,t_0},\ \xi^A(t)\cap\overline{\xi}^B(t)=\emptyset)\\ \le\ &\mathbf{P}(\tau^A=\infty,\ \overline{\tau}^B=\infty,\ \Theta_n>t_0)+\mathbf{P}[(E_{l,t_0})^c]+\mathbf{P}(F_{n,l,t_0},\ \xi^A(t)\cap\overline{\xi}^B(t)=\emptyset).\end{aligned}\tag{3}$$

我们将要证明：对给定的 $\varepsilon>0$, 我们可以找到 n,l,t_0, 使得对充分大的 t, (3) 式右端的三项均小于 $\frac{\varepsilon}{3}$. 第一项按如下的方式控制：对固定的 n(它的具体值将在下面给出), 对每个 $i\in\mathbb{N}$ 定义事件 $J_i:=[\tau^A>i,\ \overline{\tau}^B>i,\ \Theta_n>i]$, 并定义

$$\begin{aligned}\alpha:=\mathbf{P}[&\xi^o(1)\supset\{(O_{G_1},O_{G_2},-n),(O_{G_1},O_{G_2},-n+1),\cdots,(O_{G_1},O_{G_2},n-1),(O_{G_1},O_{G_2},n)\}\ \text{且}\\ &\overline{\xi}^o(1)\supset\{(O_{G_1},O_{G_2},-n),(O_{G_1},O_{G_2},-n+1),\cdots,(O_{G_1},O_{G_2},n-1),(O_{G_1},O_{G_2},n)\}],\end{aligned}$$

其中 $o:=(O_{G_1},O_{G_2},0)$ 表示图 $G_1\times G_2\times\mathbb{Z}$ 的原点， $|\cdot|$ 表示 $G_1\times G_2\times\mathbb{Z}$ 上的 “图模”, 即连结图 $G_1\times G_2\times\mathbb{Z}$ 上两点的最短路径的长度. 我们有 $\alpha>0$. 由平移不变性、接触过程的可加性和 $A\neq\emptyset$, $B\neq\emptyset$ 的事实, 我们有： $\mathbf{P}(J_1)\le 1-\alpha$, 并且对 $i=2,3,\cdots$ 有 $\mathbf{P}(J_i|J_{i-1})\le 1-\alpha$. 从而 $\mathbf{P}(J_i)=P(J_i\cap J_{i-1})=P(J_i|J_{i-1})\cdot P(J_{i-1})\le(1-\alpha)\cdot P(J_{i-1})$, 进而对 $i=2,3,\cdots$ 有 $\mathbf{P}(J_i)\le(1-\alpha)^i$. 所以 $\mathbf{P}(\tau^A=\infty,\ \overline{\tau}^B=\infty,\ \Theta_n>t_0)\le P(J_{[t_0]})\le(1-\alpha)^{[t_0]}$, 其中 $[t_0]$ 表示 t_0 的整数部分. 从而我们可以选取 t_0, 使得

$$\mathbf{P}(\tau^A=\infty,\ \overline{\tau}^B=\infty,\ \Theta_n>t_0)<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{4}$$

对于第二项，对固定的 $t_0\in\mathbb{R}^+$, 几乎处处地有：对 $0\le t\le t_0$,

$$|\xi^A(t)|<\infty,\ |\overline{\xi}^B(t)|<\infty.$$

从而存在 $l\in\mathbb{N}$, 使得

$$\mathbf{P}[(E_{l,t_0})^c]<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{5}$$

为了控制 (3) 式右端的第三项，我们需要借助 “嵌入” 的 $G_2\times\mathbb{Z}$ 上的接触过程. 由于 (1) 式对 $G_2\times\mathbb{Z}$ 上的接触过程是正确的，所以 (2) 式在该情况下也成立. 特别地，对任意 $x,y\in V(G_2\times\mathbb{Z})$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}(\xi^x_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)\cap\overline{\xi}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)=\emptyset,\ \tau^x_{G_2\times\mathbb{Z}}=\infty,\ \overline{\tau}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}=\infty)=0,$$

其中 $\{\xi^x_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)\}$ 和 $\{\overline{\xi}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)\}$ 为 $G_2\times\mathbb{Z}$ 上的接触过程的两个独立版本，其初始感染集分别为单点集 $\{x\}$ 和 $\{y\}$, 且 $\tau^x_{G_2\times\mathbb{Z}}$ 和 $\overline{\tau}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}$ 分别表示各自的灭绝时间. 上式中的收敛对 $(x,y)\in V(G_2\times\mathbb{Z})\times V(G_2\times\mathbb{Z})$ 并非一致的，但对

$$(x,y)\in M:=\{(i,j)\in V(G_2\times\mathbb{Z})\times V(G_2\times\mathbb{Z}):\ |i-j|_{G_2\times\mathbb{Z}}\le 10l+2n\}$$

是一致的 (事实上，如果不考虑平移，这里只有有限种情况). 这里 $|\cdot|_{G_2\times\mathbb{Z}}$ 表示 $G_2\times\mathbb{Z}$ 上的 “图模”, 即连结图 $G_2\times\mathbb{Z}$ 上两点的最短路径的长度. 从而存在 $t_1>0$, 使得如果 $t\ge t_1$, 则对任意 $(x,y)\in M$, 有

$$\mathbf{P}(\xi^x_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)\cap\overline{\xi}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)=\emptyset,\ \tau^x_{G_2\times\mathbb{Z}}=\infty,\ \overline{\tau}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}=\infty)\le\frac{\rho^2}{2},$$

其中 $\rho := \mathbf{P}(\xi^o_{G_2\times\mathbb{Z}}(t) \neq \emptyset,\ \forall t \geq 0)$(这里 o 表示图 $G_2\times\mathbb{Z}$ 的原点). 则由 $\lambda > \lambda_g(G_2\times\mathbb{Z})$ 知：$\rho > 0$. 进而当 $t \geq t_1$ 时，有

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(\xi^x_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)\cap\overline{\xi}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)\neq\emptyset) \geq \mathbf{P}(\xi^x_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)\cap\overline{\xi}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)\neq\emptyset,\ \tau^x_{G_2\times\mathbb{Z}}=\infty,\ \overline{\tau}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}=\infty)\\ &= \mathbf{P}(\tau^x_{G_2\times\mathbb{Z}}=\infty,\ \overline{\tau}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}=\infty) - \mathbf{P}(\xi^x_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)\cap\overline{\xi}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}(t)=\emptyset,\ \tau^x_{G_2\times\mathbb{Z}}=\infty,\ \overline{\tau}^y_{G_2\times\mathbb{Z}}=\infty)\\ &\geq \rho^2 - \frac{\rho^2}{2} = \frac{\rho^2}{2}.\end{aligned} \tag{6}$$

下面我们将要利用 (6) 式和定义 2.4 中定义的过程来控制 (3) 式右端的第三项. 我们用对应于 $(\xi^A(\Theta_n), \overline{\xi}^B(\Theta_n)) \in K_n$ 情形的符号. 在该情形下，按定义 2.2 中的要求选取 $c_1,\cdots,c_n,d_1,\cdots,d_n \in V(G_1\times G_2\times\mathbb{Z})$, 使得 $\{c_1,\cdots,c_n\}\subset\xi^A(\Theta_n)$ 且 $\{d_1,\cdots,d_n\}\subset\overline{\xi}^B(\Theta_n)$. 可以类似地考虑 $(\overline{\xi}^B(\Theta_n), \xi^A(\Theta_n)) \in K_n$ 的情形，只是在下面的过程中交换 $\{c_1,\cdots,c_n\}$ 和 $\{d_1,\cdots,d_n\}$ 的角色即可. 我们借助过程 $\{\xi_i(t)\}$ 的初始时间为 Θ_n, 初始感染集为单点 $\{c_i\}$ 的版本，用符号 $\{{}_{\Theta_n}\xi_i^{c_i}(t):\ t\geq\Theta_n\}$ 来记它们. 并类似地定义过程 $\{{}_{\Theta_n}\overline{\xi}_i^{d_i}(t):\ t\geq\Theta_n\}$. 由接触过程的可加性，当 $t > t_0$ 时，有

$$[\xi^A(t)\cap\overline{\xi}^B(t)=\emptyset]\cap F_{n,l,t_0} \subset \bigcap_{i=1}^n [{}_{\Theta_n}\xi_i^{c_i}(t)\cap{}_{\Theta_n}\overline{\xi}_i^{d_i}(t)=\emptyset]\cap F_{n,l,t_0}. \tag{7}$$

在事件 F_{n,l,t_0} 上，我们有：沿着 H_i 的 c_i 和 d_i 两点之间的距离不会超过 $10l+2n$, 且有 $\Theta_n \leq t_0$. 由这些事实以及注记 2.3, 不等式 (6) 和强马氏性，当 $t > t_0 + t_1$ 时，有

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [{}_{\Theta_n}\xi_i^{c_i}(t)\cap{}_{\Theta_n}\overline{\xi}_i^{d_i}(t)=\emptyset]\cap F_{n,l,t_0}\right) \leq \left(1-\frac{\rho^2}{2}\right)^n. \tag{8}$$

从而我们只需固定 n 使得

$$\left(1-\frac{\rho^2}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

则 (7) 和 (8) 两式蕴含了

$$\mathbf{P}(F_{n,l,t_0},\ \xi^A(t)\cap\overline{\xi}^B(t)=\emptyset) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

将 (4), (5) 和 (9) 三式代入 (3) 式便完成了对整个定理的证明.

4 几个推论

推论 4.1 假设 $\{\xi^\mu(t):\ t\geq 0\}$ 是乘积图 $G_1\times G_2\times\mathbb{Z}$ 上的接触过程，初始感染集以分布 μ 随机选取， $\lambda > 0$ 是传染参数. 其中 G_1 和 G_2 是任意无穷、局部有限的可迁图 (从而度有界). 则对任何大于 $\lambda_g(G_2\times\mathbb{Z})$ 且使 $G_2\times\mathbb{Z}$ 上接触过程的完全收敛定理成立，或大于 $\lambda > \lambda_g(G_1\times\mathbb{Z})$ 且使 $G_1\times\mathbb{Z}$ 的上接触过程的完全收敛定理成立的 λ, 以及任意初分布 μ, 当 $t\to\infty$ 时，有

$$\xi^\mu(t) \Rightarrow \mathbf{P}(\tau^\mu < \infty)\cdot\delta_\emptyset + \mathbf{P}(\tau^\mu = \infty)\cdot\nu.$$

其中 “$\Rightarrow$” 表示弱收敛，符号 τ^μ 和 ν 的定义类似. 特别地，当 $\lambda > \lambda_1$ 时，结论成立.

注意到在乘积图 $G_1\times G_2\times\mathbb{Z}$ 中， G_1 和 G_2 的地位是对等的，从而上面的推论成立.

推论 4.2 假设 $\{\xi^\mu(t):\ t\geq 0\}$ 是乘积图 $G\times Z^d$ 上的接触过程，初始感染集以分布 μ 随机选取， $\lambda>0$ 是传染参数．其中 G 是任意无穷、局部有限的可迁图 (从而度有界)．则对任何 $\lambda>\lambda_d$(在第 1 部分中已定义) 和任意初分布 μ, 当 $t\to\infty$ 时，有

$$\xi^\mu(t)\Rightarrow \mathbf{P}(\tau^\mu<\infty)\cdot\delta_\emptyset+\mathbf{P}(\tau^\mu=\infty)\cdot\nu.$$

其中 "$\Rightarrow$" 表示弱收敛，符号 τ^μ 和 ν 的定义类似．

事实上，该结果是定理 1.1 在 $G_2=Z^{d-1}$ 时的特殊情形，注意到此时 $\lambda_g(G_2\times\mathbb{Z})=\lambda_d$, 且由文献 [5] 中的结果知当 $\lambda>\lambda_d$ 时， Z^d 上接触过程的完全收敛定理成立．

推论 4.3[1] 假设 $\{\xi^\mu(t):\ t\geq 0\}$ 是格点 $Z^d(d\geq 2)$ 上的接触过程，初始感染集以分布 μ 随机选取， $\lambda>0$ 是传染参数．则对任何 $\lambda>\lambda_1$ 和任意初分布 μ, 当 $t\to\infty$ 时，有

$$\xi^\mu(t)\Rightarrow \mathbf{P}(\tau^\mu<\infty)\cdot\delta_\emptyset+\mathbf{P}(\tau^\mu=\infty)\cdot\nu.$$

其中 "$\Rightarrow$" 表示弱收敛，符号 τ^μ 和 ν 的定义类似．

事实上，该结果是定理 1.1 在 $G_1=Z^{d-1}$ 和 $G_2=\{0\}$ 时的特殊情形，注意到此时 $\lambda_g(G_2\times\mathbb{Z})=\lambda_1$, 且由文献 [3] 中的结果知当 $\lambda>\lambda_1$ 时， Z^1 上接触过程的完全收敛定理成立．

参 考 文 献

[1] Schonmann R H. A new proof of the complete convergence theorem for contact processes in several dimensions with large infection parameter. Annals of Probability, 1987, **15**: 382–387

[2] Liggett T M. Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter and Exclusion Processes. Berlin, Heideberg: Springer, 1999

[3] Durrett R. On the growth of the one dimensional contact processes. Annals of Probability, 1980, **8**: 890–907

[4] Griffeath D. Limit theorems for nonergodic set-valued Markov processes. Annals of Probability, 1978, **6**: 379–387

[5] Bezuidenhout C, Grimmett G. The critical contact process dies out. Annals of Probability, 1990, **18**: 1462–1482

A Proof of the Complete Convergence Theorem for Contact Processes on Some Product Graphs

Yao Qiang

(*Department of Statistics and Actuarial Science, School of Finance and Statistics, East China Normal University, Shanghai 200241*)

Abstract: In this article a proof of the complete convergence theorem for the basic contact process on the product graph $G_1\times G_2\times\mathbb{Z}$ is given, provided that the infection parameter is large enough, where G_1 and G_2 are arbitrary infinite locally finite transitive graphs. It extends the result of Schonmann [1] in some content.

Key words: Contact process; Complete convergence theorem.

MR(2000) Subject Classification: 60K35