

编者按:在大学物理教学中,组织本科生进行一些切合实际的课题的研究,是指导教师的一项极为有效、非常良好的教学措施.这样做,既打通了师生间的教学通道,又使学生在与人合作、道德精神方面有所获益;并且在制订课题研究计划、动手实验、查阅文献、总结写作等一系列环节中使学生在动手、实践、阅读、写作等方面的能力得到很大提高.本文在这方面可以说是一个范例.

光衍射法研究水表面波的性质

倪宏程,林锦达,王思慧,周进,周惠君

(南京大学物理系,江苏南京 210093)

摘要:将水的表面波视作一种正弦相位型光栅,导出了水表面波衍射光斑间距与其波长的关系,从而利用水表面波对激光的衍射测定了水波波长,确定了表面波成分,即在所用实验频率范围内毛细波占主导地位,验证了表面波的色散关系.

关键词:水波;表面波;相位型光栅;毛细波;色散关系

中图分类号:O 436.1

文献标识码:A

文章编号:1000-0712(2007)10-0060-04

众所周知,当水受到扰动之后,水面会形成表面波,即水波.物质的表面波又叫做瑞利波(Rayleigh waves).固体和液体表面都能形成瑞利波,瑞利波在凝聚态物理中有着重要而广泛的应用.如果我们研究的水波波长或者振幅比较小,我们就无法用肉眼看到它,这给水波性质的研究带来一定的困难.为解决这个问题,最近有人采用激光干涉方法^[1]精确地测定了水表面波的色散关系,但是其仪器比较复杂昂贵且不易搭建;还有人采用激光衍射方法^[2],利用干涉水波通过测量其衍射光斑强度来研究水波结构.本文拓展后者思路,通过测量衍射光斑间距,利用简单的实验装置方便准确地测定了水表面波波长,确定了表面波成分,即在我们实验频率范围内毛细波占主导地位,并验证了色散关系.

1 实验原理

1.1 实验构架

如图 1 所示,我们在一个扬声器的振动膜上固定一个大头针,把大头针的大头端没入水槽中的水面之下,用一个音频信号发生器输出正弦音频信号驱动扬声器.这样,扬声器表面振动膜的振动带动大头针振动,从而带动水面在大头针的周围形成同心圆式的水波.由于实验中形成的水波波长非常小(毫米量级),远小于水槽中的水深,所以水面可以形成正弦波.我们将一束激光(He-Ne 激光, $\lambda = 632.8$ nm)投射到针尖附近,并使入射点稍远离大头针而入

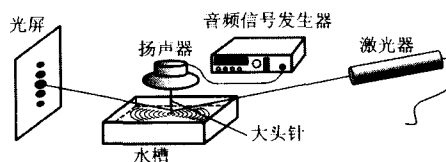


图 1 实验装置示意图

射面与大头针较接近却又不通过大头针,否则将引入大头针的衍射.在我们所用的频率范围($f = 100 \sim 500$ Hz)内,激光束在水面上光点的线度范围内水波的振幅可以视为恒定,这是因为水波的衰减长度为 $\delta = 3\sigma/4\eta\Omega$ ^[2,3],其中 σ 为水的表面张力系数, $\sigma = 7.2 \times 10^{-2}$ N/m; η 为水的黏度,在 25℃ 时, $\eta = 8.9 \times 10^{-4}$ N·s/m²; Ω 为信号圆频率.取频率 $f = 300$ Hz,有 $\delta = 32$ mm,它远大于光点的大小.以下我们把水波视为一种正弦相位型光栅.

我们按照图 1 搭建实验装置,水槽和激光器置于防震台上,以减轻环境噪声的影响,水槽底部衬有黑纸来消除激光束经水面折射后的光线.图 2 是实验过程中屏上出现的光斑,用数码相机记录(已经用 Photoshop 除去了背景噪声).

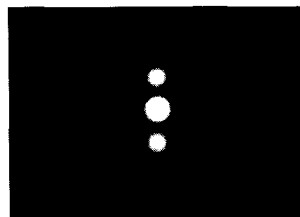


图 2 屏上的衍射斑

为了定量解释光斑的产生与水表面波的关系,我们先作些理论分析.

1.2 水表面波衍射的理论推导

水的表面波如图 3 所示(图中明显夸大了水波振幅).

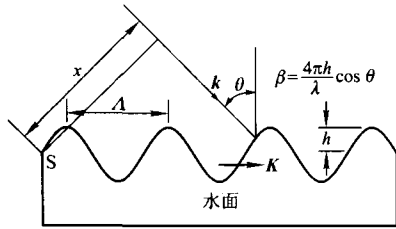


图 3 水的表面波

设激光波长为 λ ,波矢为 k ,入射角为 θ ,水波波长为 Λ ,波矢为 K ,振幅为 h .那么,水波对激光束的相位变换函数^[4-6]为^[2]

$$\phi(x) = k \left[(2h \cos \theta) \sin \left(\frac{Kx}{\cos \theta} - \Omega t \right) \right] \quad (1)$$

式中 $k = 2\pi/\lambda$, $K = 2\pi/\Lambda$, x 是激光入射点到针尖 S (波源) 的距离在入射激光束波面上的投影; $2h \cos \theta$ 是水波对光程所作的调制幅度(水波所造成的光程变化范围), Ωt 来自于水波结构随时间的变化; $K/\cos \theta$ 则是水波在入射激光束波面方向投影的空间频率.所以 $2h \cos \theta \sin \left(\frac{Kx}{\cos \theta} - \Omega t \right)$ 是水表面波对激光束的光程变换函数, ϕ 是对激光束的相位变换函数.

令 $\beta = 2hk \cos \theta = 4\pi h \cos \theta / \lambda$, 则式(1)化为

$$\phi(x) = \beta \sin \left(\frac{Kx}{\cos \theta} - \Omega t \right) \quad (2)$$

所以,水表面波的屏函数^[4-6]为

$$\exp[i\phi(x)] = \exp \left[i\beta \sin \left(\frac{Kx}{\cos \theta} - \Omega t \right) \right] \quad (3)$$

在我们的实验中,激光入射点到接收屏的水平距离 z 比较大($z = 5.66 \text{ m}$),并且激光的准直性又很好,所以我们在屏上看到的是水表面波的 Fraunhofer 衍射,出射光的复振幅 E 是屏函数的 Fourier 变换^[4-6],即

$$E = A \mathcal{F} \left\{ \exp \left[i\beta \sin \left(\frac{Kx}{\cos \theta} - \Omega t \right) \right] \right\} \quad (4)$$

其中, A 是一个复常数.利用 Bessel 函数可以简化运算,为此,考虑 Bessel 函数的生成函数^[7]

$$G(\beta, t) = \exp \left[\frac{\beta}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_n t^n J_n(\beta) \quad (5)$$

式中 J_n 是 n 阶第一类 Bessel 函数, n 是从 $-\infty$ 到

$+\infty$ 的整数.令 $t = \exp(i\phi)$, 得到

$$e^{i\beta \sin \phi} = \sum_n e^{in\phi} J_n(\beta) \quad (6)$$

利用式(6),式(4)成:

$$\begin{aligned} E &= A \mathcal{F} \left[\sum_n e^{in \left(\frac{Kx}{\cos \theta} - \Omega t \right)} J_n(\beta) \right] = \\ &= A \sum_n J_n(\beta) \mathcal{F} \left[e^{in \left(\frac{Kx}{\cos \theta} - \Omega t \right)} \right] = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sum_n J_n(\beta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{in \left(\frac{Kx}{\cos \theta} - \Omega t \right)} e^{-i\omega_n x} dx = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sum_n J_n(\beta) e^{-in\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \left(\frac{nK}{\cos \theta} - \omega_n \right) x} dx = \\ &= A \sqrt{2\pi} \sum_n J_n(\beta) e^{-in\Omega t} \delta \left(\frac{nK}{\cos \theta} - \omega_n \right) = \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sum_n J_n(\beta) e^{-in\Omega t} \delta \left(\frac{n}{\Lambda \cos \theta} - f_n \right) \quad (7) \end{aligned}$$

推导过程中,运用了^[7]

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx \quad (8)$$

及

$$\delta(aw) = \frac{1}{|a|} \delta(w) \quad (9)$$

式(7)中, δ 是 Dirac 函数, f_n 是出射光的空间频率,其表达式为^[4-6] $f_n = \frac{d_n \sin \theta}{\lambda z}$. 其中, d_n 为接收屏上 n 级衍射光斑相对于中心零级衍射光斑的距离, z 为激光入射点到接收屏的水平距离, $\sin \theta$ 来源于于竖直方向光斑间距向波面方向光斑间距的换算. 于是

$$E = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \sum_n J_n(\beta) e^{-in\Omega t} \delta \left(\frac{n}{\Lambda \cos \theta} - \frac{d_n \sin \theta}{\lambda z} \right) \quad (10)$$

接收屏上的光强分布为

$$I = E^* E = \frac{|A|^2}{2\pi} \sum_n J_n^2(\beta) \delta^2 \left(\frac{n}{\Lambda \cos \theta} - \frac{d_n \sin \theta}{\lambda z} \right) \quad (11)$$

式中没有交叉项是因为两个不同 Dirac 函数相乘, d_n 一旦确定最多只能使其其中之一不为零. 从光强分布函数式(11)来看,水波的衍射图样是一个个离散的光点,光点出现在接收屏上的位置为

$$\frac{d_n \sin \theta}{\lambda z} = \frac{n}{\Lambda \cos \theta} \quad (12)$$

从式(12)中我们可以看出,在特定的情形下(即 θ 、 λ 、 z 及 Λ 固定),衍射斑的间距都是相等的;而在实验中,我们也发现了这一点.因此,我们可以只关注

第一级衍射斑的情况. 在式(12)中, 令 $n=1$, 并记 $d=d_1$, 则有

$$\frac{d}{\lambda z} = \frac{2}{\Lambda \sin 2\theta} \quad (13)$$

本实验就是利用这一点, 测定第一级衍射光斑与中心零级衍射光斑的距离从而测定水的表面波波长 Λ (实际操作时, 为减小误差, 可以测量 n 级衍射光斑与中心零级衍射光斑的距离, 再除以 n 即可).

1.3 色散关系的引入

水的表面波满足色散关系^[8-10]

$$\Omega^2 = gK + \frac{\sigma K^3}{\rho} \quad (14)$$

式中, 第一项对应重力波, g 是重力加速度; 第二项对应毛细波^[8,10,11], σ 是水的表面张力系数, ρ 是水的密度. 我们可以通过估算比较两项的相对大小:

$$\frac{gK}{\sigma K^3/\rho} = \frac{g\rho}{\sigma K^2} \quad (15)$$

取 $f=300$ Hz, $\sigma=7.2 \times 10^{-2}$ N/m, 此时式(14)给出 $K=3.66 \times 10^3$ m⁻¹, 代入式(15)得到此比值为 0.010. 可见, 与毛细波贡献相比, 重力波贡献可以忽略不计, 水的表面张力在我们所用的频率范围内对水表面波起主要作用. 这一事实亦将在实验中得到验证. 于是式(14)可以略去第一项, 色散关系简化为

$$\Omega^2 = \frac{\sigma K^3}{\rho} \quad (16)$$

即

$$f^2 = \frac{2\pi\sigma}{\rho\Lambda^3} \quad (17)$$

其中, f 是驱动力频率. 代入式(13)消去 Λ 得到

$$\frac{d^3}{f^2} = \frac{4\rho}{\pi\sigma} \left(\frac{\lambda z}{\sin 2\theta} \right)^3 \quad (18)$$

两边取自然对数, 得

$$\ln d = \frac{2}{3} \ln f + C \quad (19)$$

其中, $C = \ln(4\rho/\pi\sigma)/3 + \ln(\lambda z/\sin 2\theta)$ 是与实验有关的常数. 我们将从实验上来验证这个关系.

2 实验

实验采用 He-Ne 激光, $\lambda=632.8$ nm, 入射角 $\theta=83.5^\circ$. 调节仪器方位及激光束入射点, 使屏上出现的衍射斑呈非常规则的圆形, 然后固定输入功率, 再测量不同驱动频率下第一级衍射斑与中心零级衍射斑的距离. 驱动频率从 100 Hz 到 490 Hz, 每次改变 10 Hz, 测量 d 的变化, 继而画出 $\ln d - \ln F$ 图

像, 并作线性拟合, 得到图 4.

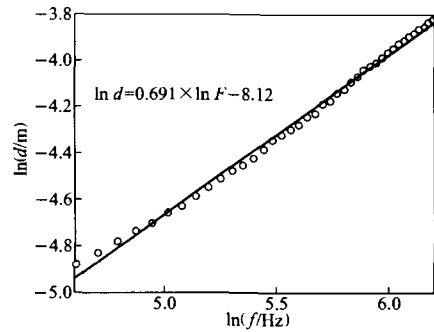


图4 数据及拟合

图像中的表达式是线性拟合后 $\ln d$ 与 $\ln F$ 的关系式, $\ln d = 0.691 \times \ln F - 8.12$. 从斜率 0.691 来看, 实验与理论(理论值为 $2/3$, 见式(19))符合得很好. 可见在实验中确实是毛细波占主导地位. 若重力波占主导地位, $\Omega^2 = gK$, 则同样的计算给出 $\ln d = 2 \ln F + C'$, 拟合曲线的斜率应为 2 而不是 $2/3$. 同时, 我们也间接验证了水表面波的色散关系. 色散关系的直接验证将在下面给出.

实验中, 我们可以通过式(13)计算特定光斑间距 d 对应的水的表面波波长; 理论上, 我们也可以利用色散关系式(14)或式(16)来计算水的表面波波长, 从而比较实验结果和理论预期. 不过, 应该注意的是, 实验测到的并不是波长实际值. 我们在前面实验构架中已经提到, 不可能使激光束正好通过大头针, 因此激光入射面不可能沿着水波同心圆的径向, 测量到的波长是其有效值 Λ' . 考虑到这个因素之后, 我们对测到的波长作出了修正, 继而我们将修正后的波长实验值及波长理论值随驱动频率的变化关系绘于图 5 中. 可以看到实验结果与理论符合得很好. 这样, 我们实际上测定了 100 ~ 500 Hz 频率范围内水表面波的波长. 从另一个角度来看, 图 5 也是对色散关系式(17)的直接验证.

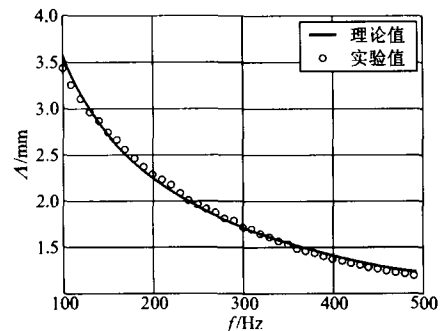


图5 波长实验值及理论值随驱动频率的变化关系

由于水波波长与水的表面张力有关,我们也可以通
过测量水波波长来研究表面张力。

3 结论

本实验中我们导出了水波的衍射光斑间距与其波长的关系,确定了水表面波成分,即在实验采用的频率范围内,毛细波占主导地位。实验中,我们还测定了水的表面波波长,验证了水表面波的色散关系,得到了比较好的结果。

致谢:在本实验过程中,我们得到了实验室老师的热情帮助。孔德稳同学在测量、拍摄方面给了我们很多帮助,尤亦庄、陈劲丹、孟庆芳、陆闻静、陈慧同学及河海大学友人单冯提出了宝贵的意见,尤亦庄同学还为我们精心绘制了部分图片,在此一并表示感谢。

参考文献:

- [1] Behroozi F, Perkins A. Direct measurement of the dispersion relation of capillary waves by laser interferometry [J]. *Am J Phys*, 2006, 74: 957.
- [2] Barik T K, Anushree A, Kar S. A simple experiment on diffraction of light by interfering liquid surface waves[J]. *Am J Phys*, 2005, 73: 725.
- [3] Lee K Y, Chou T, Chung D S, et al. Direct measurement of the spatial damping of capillary waves at liquid-vapor interface[J]. *J Phys Chem*, 1993, 97: 12 876.
- [4] Goodman J W. *Introduction to Fourier Optics* [M]. San Francisco: McGraw-Hill, 1968: 5, 8-9, 33-34, 40, 49, 61-62.
- [5] 赵凯华, 钟锡华. 光学: 下册 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1998: 40-42, 54.
- [6] 游璞, 于国萍. 光学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 101, 107-109.
- [7] 邵惠民. 数学物理方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2005: 121, 376-377.
- [8] Klemens P G. Dispersion relations for waves on liquid surfaces[J]. *Am J Phys*, 1984, 52: 451.
- [9] Watson F R. Surface tension at the interface of two liquids determined experimentally by the method of ripple waves[J]. *Phys Rev (Series I)*, 1901, 12: 257.
- [10] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程·力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1995: 315.
- [11] Dexin Lu. *University Physics* [M]. Second Edition. Beijing: Higher Education Press, 2003: 143.

The property of surface waves of water studied by diffraction of light

NI Hong-cheng, LIN Jin-da, WANG Si-hui, ZHOU Jin, ZHOU Hui-jun

(Department of Physics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Abstract: The surface wave of water is regarded as a grating of sine phase type and the laser diffraction pattern thereby is related to the wavelength thereof. It turns out that the composition of the surface wave is mainly the capillary wave, at last the dispersion relation of this wave is verified.

Key words: water surface waves; phase grating; capillary waves; dispersion relation

(上接 37 页)

Brief introduction of capacitance parameter digital surveying principle

ZHAO Zheng-quan

(College of Physical - Chemical Science, Xihua University, Pengzhou, Sichuan 611930, China)

Abstract: A circuit on capacitance parameter digital surveying is designed by $C - V$ transformation and $V - T$ transformation. The capacitance parameter digital surveying principles are introduced.

Key words: capacitance parameter; digital surveying; $C - V$ transformation; $V - T$ transformation