HISTORY and PEDAGOGY of MATHEMATICS *

HPM

Shanghai

CHINA

上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2023 年第 12 卷第 07 期

沈周《茶磨屿图》

《上海HPM通讯》编委会名单

刊首新语

倾听与留白

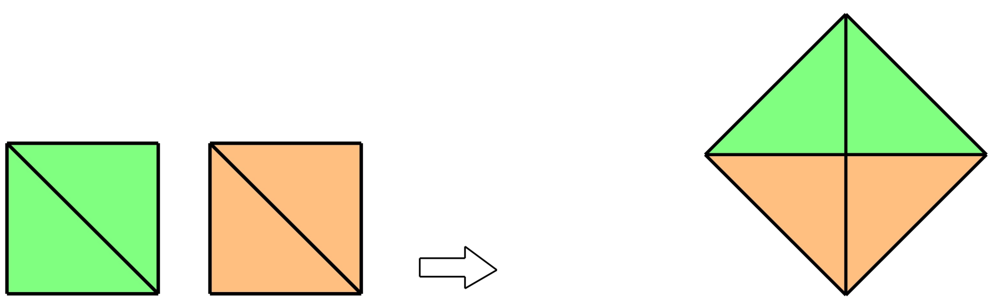
汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

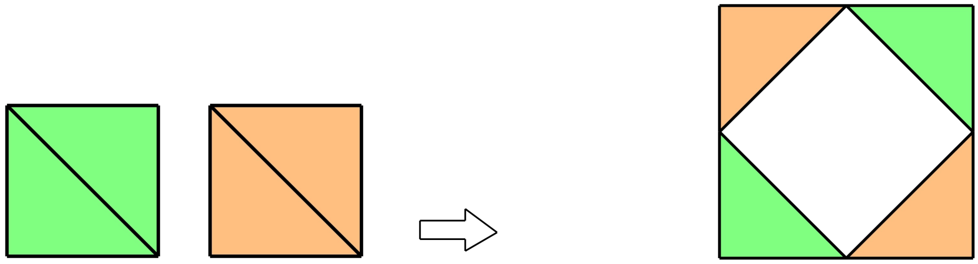
近年来，为了顺应拔尖创新人才培养的需要，以王华老师为代表的上海基础教育名师与高校研究者一起开展了“留白创造式教学”的理论与实践研究。所谓“留白创造式教学”，就是立足育人目标，为学生留下足够的思维空间和探究机会，让学生在自主学习中创获新知、陶熔品性的教学方式，其核心就是“以留白促创新”。

然而，留白创造式教学的实施并非易事。首先，教师缺乏留白的意识，总是自己讲得多，唯恐少讲一点，就会影响学生的成绩；其次，教师即使有留白的意识，但缺乏完整的留白框架与有效的留白策略；再次，教师留白之后，对于学生的补白成果缺乏应有的评价。以上总总，均与教师的倾听意识和倾听习惯的缺失有关。教师应该知道，班里数十位学生不可能没有新的想法，而要倾听学生的想法，就需要留白。

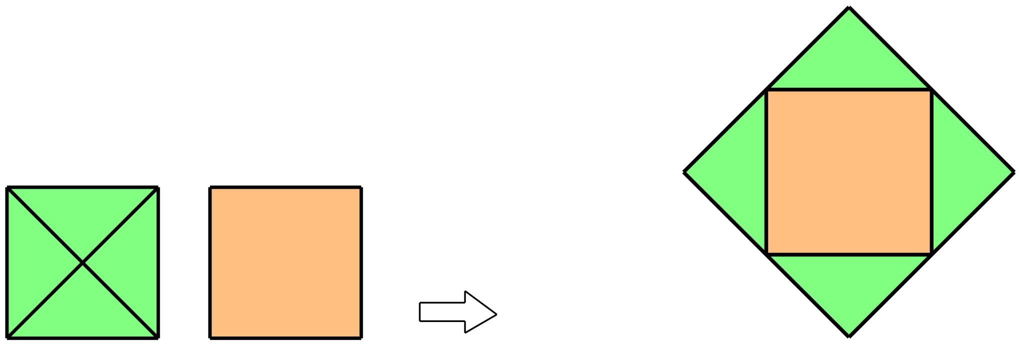
以“无理数的概念”为例，通过折纸活动，教师让学生根据单位正方形构造出面积为 2 的正方形或可导出方程 $x^2=2$ 的其他图形，由此引入无理数 $\sqrt{2}$。经过小组合作探究，学生给出方案以下拼图方案。



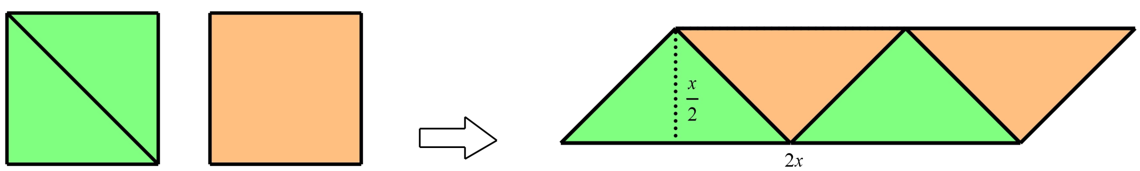
方案 1



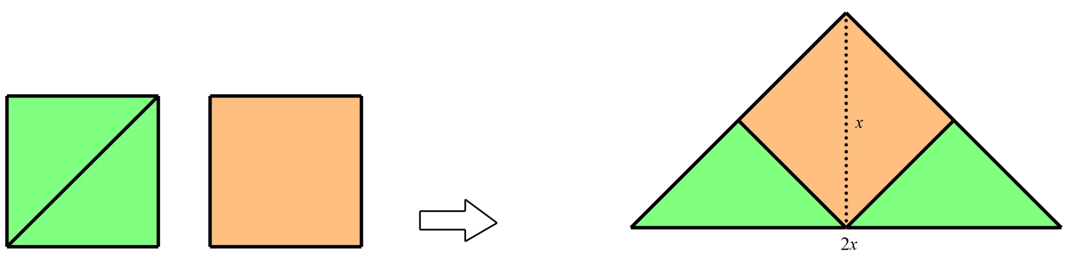
方案 2



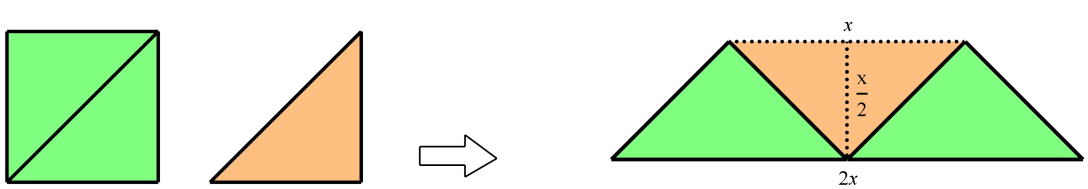
方案 3



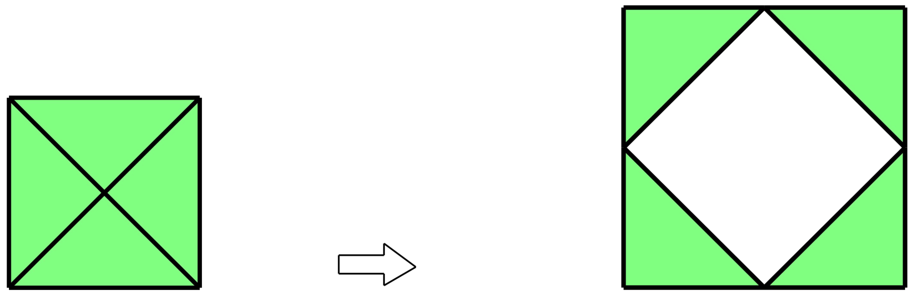
方案 4



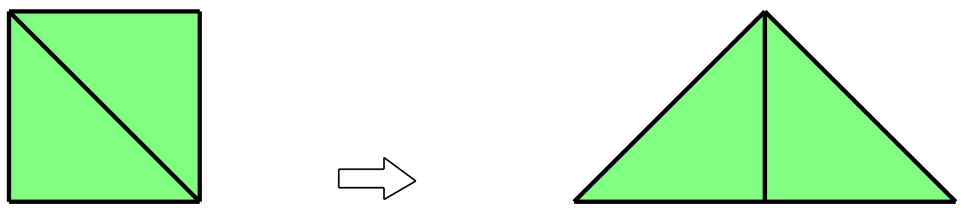
方案 5



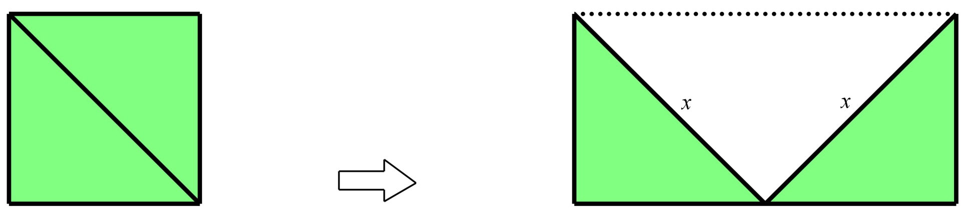
方案 6



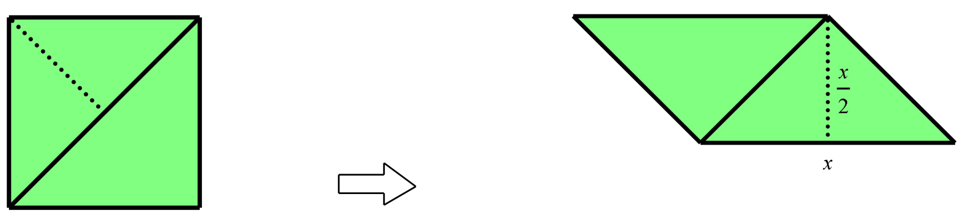
方案 7



方法 8



方案 9



方案 10

其中，方案 1-5 利用了两个单位正方形，方案 6 利用了一个单位正方形外加半个单位正方形，方案 7-10 只用了一个单位正方形。我们惊讶地发现，关于面积为 2 的正方形或可导出方程 $x^2=2$ 的其他图形的构造方法，远比自己所设想的要多得多。

又如，关于直角三角形的性质“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”，学生能想出十余种证明方法。

方法 1：如图 1，取 AC（BC）的中点 E（F），连结 DE（DF），因 DE（DF）为 Rt$\triangle ABC$ 的中位线，故 $DE\perp AC$（$DF\perp BC$），因此有 $DA=DC$（$DB=DC$）。

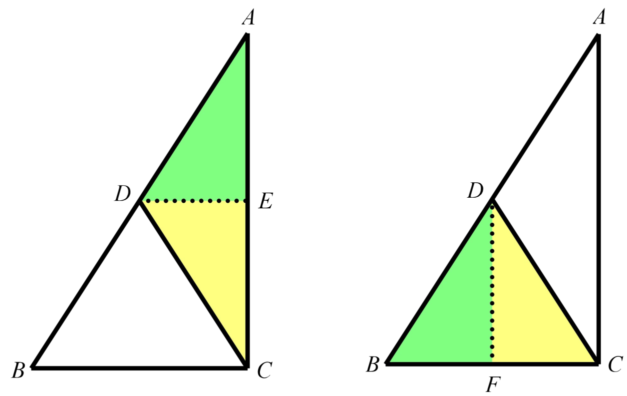


图 1 方法 1

方法 2：如图 2，取 AC（BC）的中点 E（F），连结 DE（DF）并延长至点 G（H），使得 $EG = DE$（$FH = DF$），于是，四边形 $ADCG$（$DBHC$）为菱形，故得 $DA = DC$（$DB = DC$）。

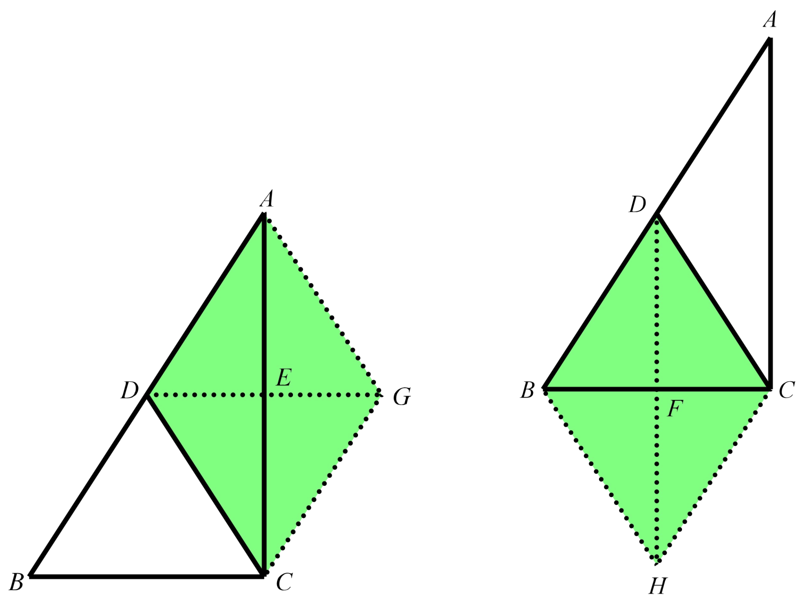


图 2 方法 2

方法 3：如图 3，延长 CD 至点 G，使 $DG = DC$，连结 BG（AG），易证 Rt$\triangle GBC \cong$ Rt$\triangle ACB$（Rt$\triangle CAG \cong$ Rt$\triangle ACB$），故得 $AB = GC = 2DC$。

方法 4：如图 4，延长 CD 至点 G，使 $DG = DC$，连结 AG 和 BG，易证四边形 $ACBG$ 为矩形，故得 $AB = GC = 2DC$。

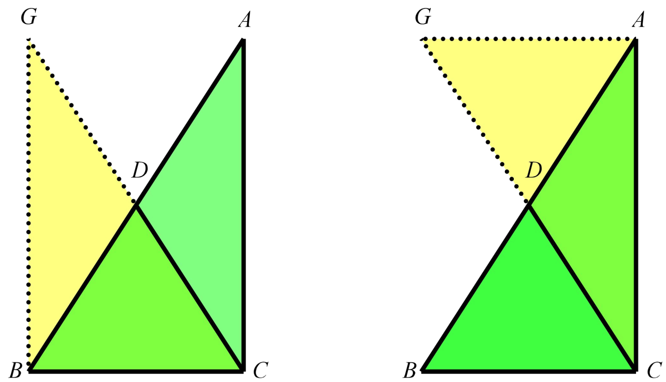


图 3 方法 3

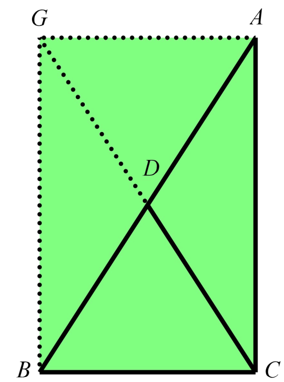


图 4 方法 4

方法 5：如图 5，延长 BC（AC）至点 H（I），使 $CH=BC$（$CI=AC$），连结 AH（BI），易证 $AB=AH=2DC$（$BA=BI=2DC$）。

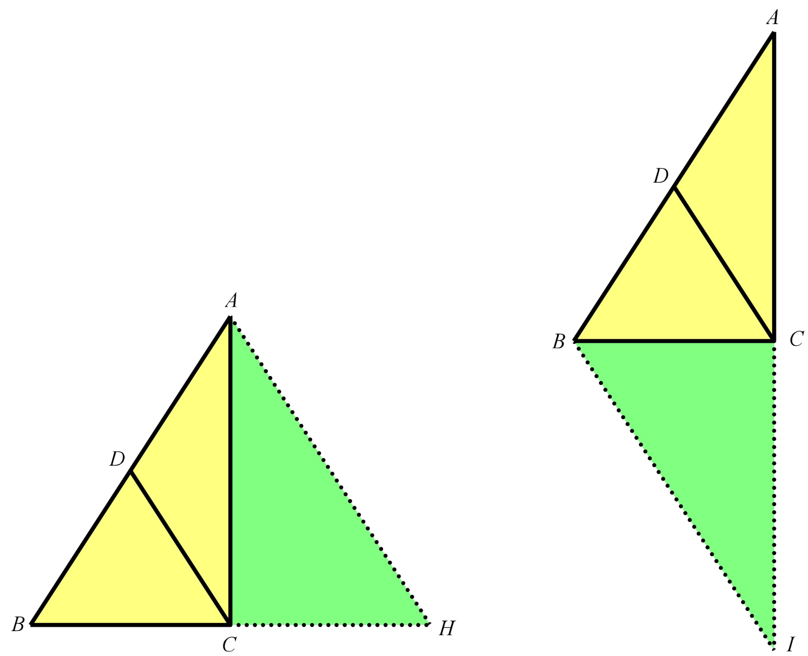


图 5 方法 5

方法 6：如图 6，分别取 AC 和 BC 的中点 E 和 F，连结 DE、DF 和 EF。易证四边形 $DFCE$ 是矩形，故得 $DC=EF=\frac{1}{2}AB$。

方法 7：如图 7，过点 D 作 BC（AC）的垂线，垂足为点 F（E）；过点 A（B）作 BC（AC）的平行线，交 FD（ED）于点 K（L）。易证 $\mathrm{Rt}\triangle AKD \cong \mathrm{Rt}\triangle CFD$（$\mathrm{Rt}\triangle BLD \cong \mathrm{Rt}\triangle CED$），故得 $DA=DC$（$DB=DC$）。

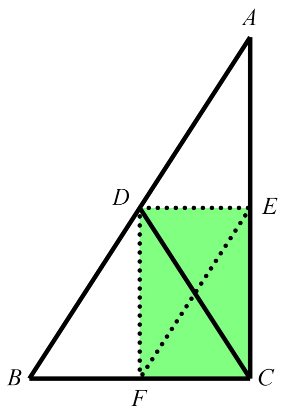


图 8 方法 6

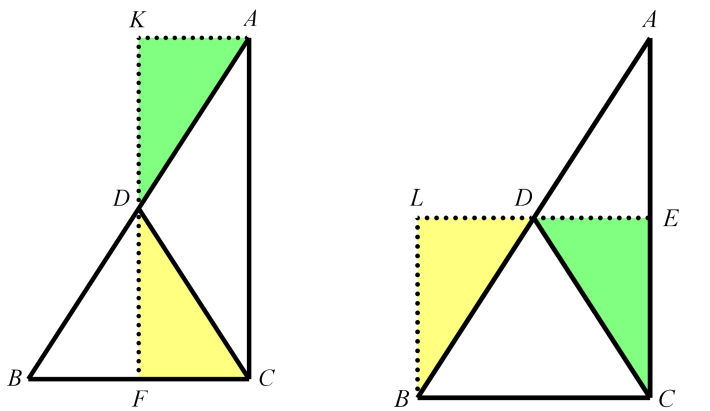


图 7 方法 7

方法 8：如图 8，取 AC（BC）的中点 E（F），连结 DE（DF），延长 BC（AC）至点 S（T），使 $CS = DE$（$CT = DF$），连结 ES（FT）。易证 Rt△AED ≌ RT△ECS（Rt△BFD ≌ Rt△FCT），且四边形 $DCSE$（$DCTF$）是平行四边形，从而知 $DC = ES = AD = DB$（$DC = FT = BD = DA$）。

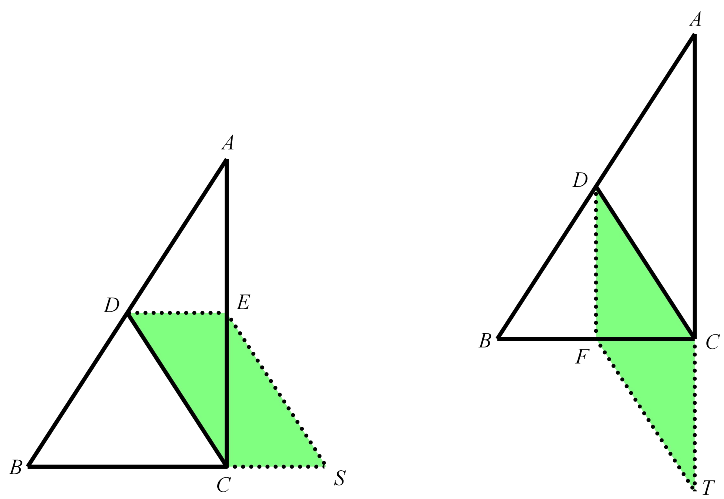


图 8 方法 8

方法 9：如图 9，由射影定理得 $CE^2 = AE \times BE = \left(BD + DE\right)\left(BD - DE\right) = BD^2 - DE^2$，又由勾股定理得 $CE^2 = CD^2 - DE^2$，故得 $BD = CD$。

方法 10：如图 10，设 $AD = BD = x$，$CD = y$，分别过点 A 和 B 作 CD 的垂线，垂足为 M 和 N，易知 $MD = DN$，设 $MD = DN = t$，则由勾股定理得

$$4x^2 = \left(x^2 - t^2\right) + \left(y - t\right)^2 + \left(x^2 - t^2\right) + \left(y + t\right)^2 = 2x^2 + 2y^2,$$

故得 $x = y$。

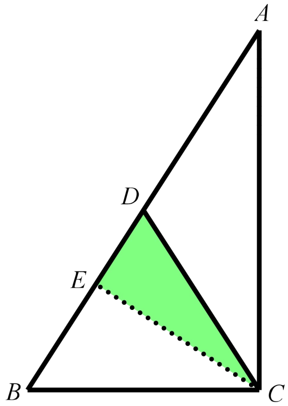


图 9 方法 9

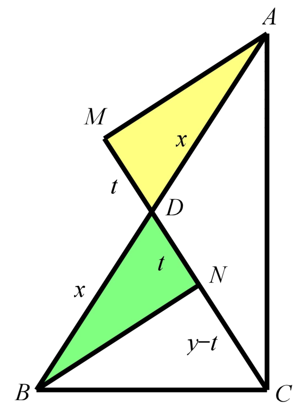


图 10 方法 10

方法 11：如图 11，以 AB 为直径作圆，假设直角顶点 C 不在圆周上，延长 DC，交圆于点 C'，则 $\angle AC'B = 90°$。若点 C 在圆内，则 $\angle ACB > 90°$；若点 C 在圆外，则 $\angle ACB < 90°$。两种情形都与已知条件相矛盾。因此，点 C 必在圆周上，从而知 $DA = DB = DC$。

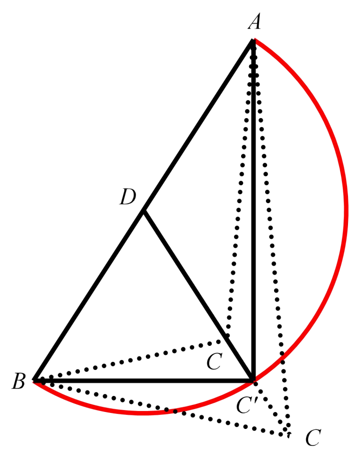


图 11 方法 11

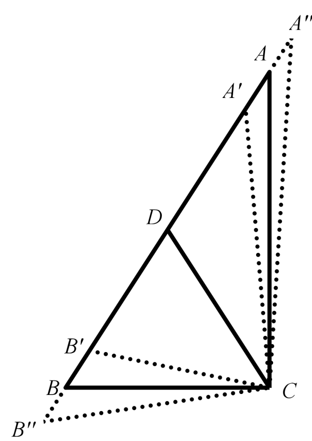


图 12 方法 12

方法 12：如图 12，假设 $DC \neq DA$，若 $DC < DA$，在 AB 上取点 A' 和 B'，使得 $DA' = DB' = DC$，则 $\angle A'CB' = 90° = \angle ACB$，矛盾。类似地，若 $DC > DA$，也导致矛盾。因此，必有 $DA = DB = DC$。

再如，关于三角形中线的性质“三角形的重心将中线分成 2:1”，学生可以想出十余种证明方法，如图 13-22 所示。

其中，证法 1-4 采用的是过三角形中点作辅助线的思路；证法 5-6 采用的是过三角形顶点做辅助线的思路；证法 7-8 采用的是过三角形重心作辅助线的思路。

证法 1：如图 13，连结 DF，则 $DF // BC$，由 $\triangle ODF \backsim \triangle OCB$ 即得

$OD:OC=OF:OB=1:2$。

证法 2：如图 14，过点 E 作 BF 的平行线，交 AC 于点 K。易知点 K 为 FC 的中点，故得 $AO:OE=AF:FK=2:1$。

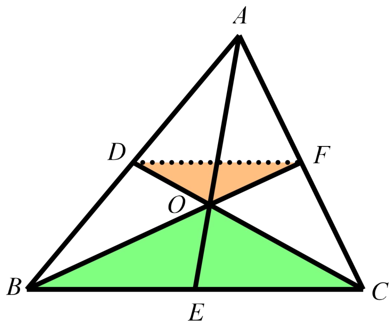


图 13 证法 1

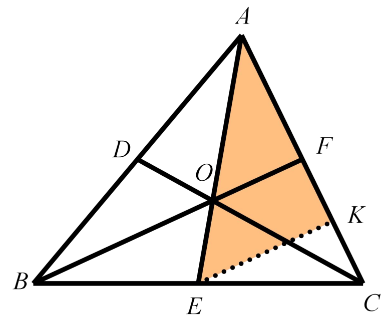


图 14 证法 2

证法 3：如图 15，过点 E 作 BF 的平行线，交 OC 于点 H，连结 FH。易知点 H 为 OC 的中点，四边形 $OEHF$ 为平行四边形，故得 $BO=2EH=2OF$， $AO=2FH=2OE$。

证法 4：如图 16，过点 E 作 AB 的平行线，交 OC 于点 M。易知 $AD=DB=2EM$，由△AOD ∽ △EOM，即得 $AO:OE=2:1$。

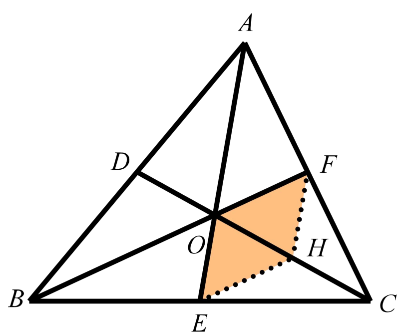


图 15 证法 3

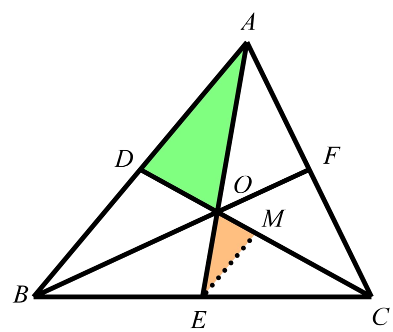


图 16 证法 4

证法 5：如图 17，取 OB 和 OC 的中点 G 和 H，连结 DG、GH、HF 和 DF，易知四边形 $DGHF$ 试平行四边形，故得 $DO=OH=HC$，$FO=OG=GB$，即 $BO=2OF$， $CO=2OD$。

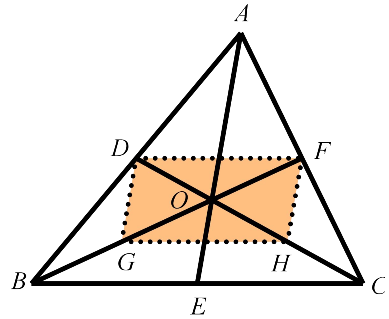


图 17 证法 5

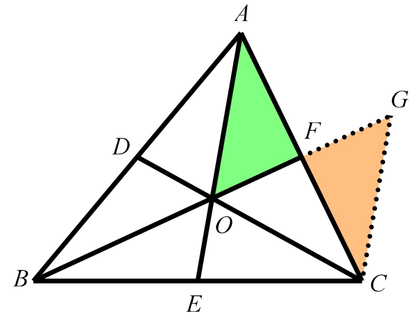


图 18 证法 6

证法 6：如图 18，过点 C 作 AE 的平行线，交 BF 的延长线于点 G。易知 $AO = CG = 2EO$。

证法 7：如图 19，过点 C 作 AB 的平行线，交 BF 的延长线于点 I。易知 $CO:OD = CI:BD = AB:BD = 2:1$。

证法 8：如图 20，过点 O 作 BC 的平行线，分别交 AB 和 AC 于点 P 和 Q；又过点 O 作 AC 的平行线，分别交 AB 和 BC 于点 S 和 T，连结 QT。易知 $OP = OQ$，$OS = OT$。于是得 $BT = 2PQ$，$TC = OQ$，故有 $BC = 3OP = 3OQ$。因此，$DO:DC = FO:FB = 1:3$，即 $DO:OC = FO:OB = 1:2$。

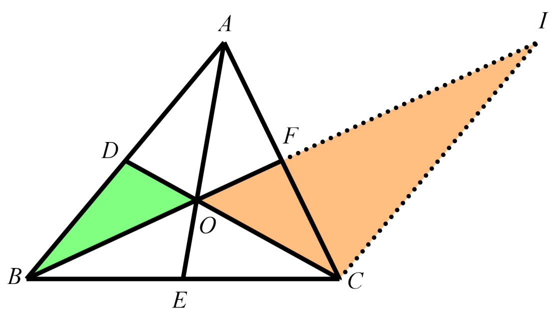


图 19 证法 7

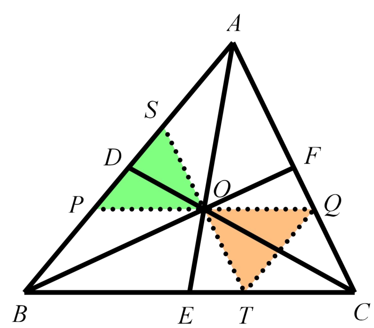


图 20 证法 8

证法 9：如图 21，过点 O 作 BC 的平行线，分别交 AB 和 AC 于点 P 和 Q；又过点 Q 作 AB 的平行线，分别交 OC 和 BC 于点 U 和 R。易知 $QU = UR$，从而 $OQ = RC$。又因 $PQ = BR$，故得 $BC = 3OP = 3OQ$。因此，$DO:DC = FO:FB = 1:3$，即 $DO:OC = FO:OB = 1:2$。

证法 10：如图 22，过点 O 作 BC 的平行线，交 AC 于点 Q，则有

$$\frac{OQ}{BC} = \frac{OQ}{2EC} = \frac{FQ}{FC} \tag{1}$$

$$\frac{OQ}{EC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{AF + FQ}{2FC} = \frac{FC + FQ}{2FC} \tag{2}$$

比较（1）和（2）得

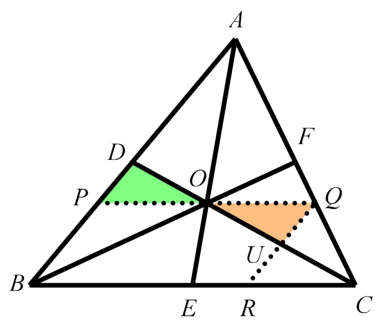


图 21 证法 9

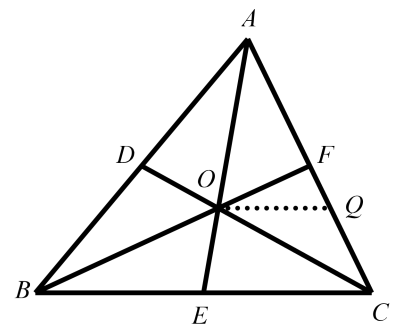


图 22 证法 10

$$\frac{FC+FQ}{2FC}=\frac{2FQ}{FC},$$

于是得 $FC=3FQ$，$QC=2FQ$，$AQ=2QC$。因此，$AO=2OE$，$BO=2OF$。

如果没有倾听意识，教师恐怕会和众多精彩的方法失之交臂。有理由相信，在未来的留白课堂中，关于上述定理，必将产生更多的证明。

以上例子足以说明留白创造式教学的巨大价值。正如数学史家 D・E・史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）所言：一个人的观点是狭隘的，一个村庄的观点是狭隘的，一个城镇、甚至一个国家的观点也是狭隘的。这个世界上没有人不需要倾听和交流。要实施留白创造式教学，教师首先就需要抛弃“自我为中心”的思维习惯，放下“对学生不放心”的心态，以倾听促留白。此外，学会了倾听，就会多一条学习路径，事实上，留白创造式教学过程就是一个“教学相长”的过程，教师可以从学生的补白中学到很多很多。

目 录

CONTENT

历史研究

美英早期解析几何教科书中的“曲线与方程”概念

朱轶萱

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

任何学科的形成都不是一蹴而就的。解析几何诞生以前，古希腊数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius, 约前 262-约前 190）与中世纪法国数学家奥雷姆（N. Oresme, 1323-1382）相继借助坐标轴来研究曲线，而 16 世纪法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）已用代数方法研究过几何问题，直至 17 世纪，笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）与费马（P. de Fermat, 1601-1665）集二者之大成，在坐标系下研究曲线与方程的联系[1]，这一漫长的历程预示着学生在学习曲线与方程时不可避免会遇到困难。研究表明，曲线与方程是高中“十大难点概念”之一：定义的文字表述冗长抽象，像绕口令；教材从纯粹性与完备性两方面给出定义，但后期求出曲线方程后又注明无需证明，以致该定义在学生心中成为附赘悬疣；极坐标系下的曲线与方程定义与笛卡儿坐标系下有所不同，造成理解的负迁移。此外，相关高考试题不容乐观的作答情况与对学生认知障碍的实证研究亦反映出学生长期囿于技巧性训练，缺乏对曲线与方程概念本质理解的现状[2-4]。

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》（下简称“课标”）删去了“曲线与方程”概念以求降低抽象程度，认为应当将曲线与方程的一一对应思想潜移默化地渗透于具体知识点中[5]。不同版本教科书的处理不尽相同，沪教版在圆锥曲线章设立“曲线与方程”选学小节；人教 A 版在圆锥曲线章末小结部分叙述了曲线与方程的概念；苏教版则在直线方程章以旁白形式呈现。可见，在各版本教科书中，曲线与方程的关系均不再作为定理出现，然而，将这一基础概念一笔带过是否会陷入舍本逐末的误区？历史是教学的指南，针对以上问题，我们期待从数学史中寻找答案。

鉴于此，本文聚焦曲线与方程的定义，对美英早期解析几何教科书进行考察，试图回答以下问题：早期教科书是如何定义曲线与方程概念的？这些定义位于哪些章节，又是如何演变的？极坐标系下与笛卡儿坐标系下的曲线与方程定义有何区别？

2 研究对象

本文选取 1826-1963 年间在美国和英国出版的 84 种解析几何教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

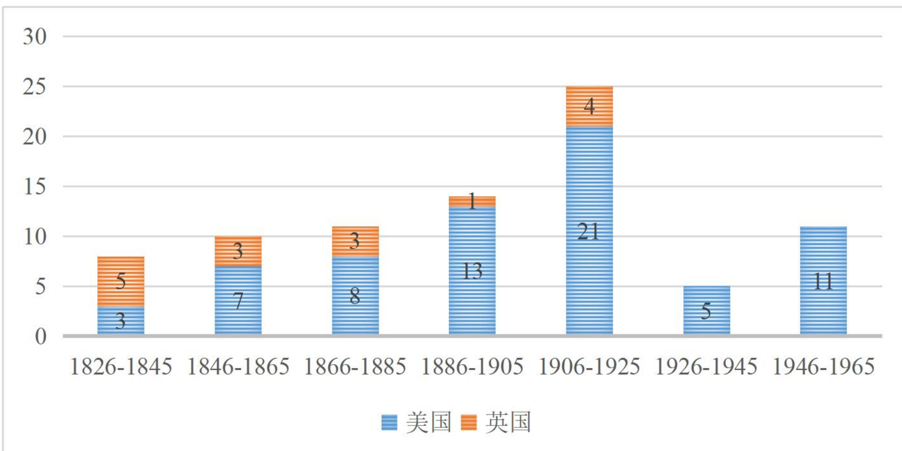


图 1 84 种美英早期解析几何教科书的出版时间分布

早期教科书对曲线与方程概念的编排可分为三类，第一类是作为学习解析几何的“预备知识”提前学习，第二类是在“直线方程”“圆方程”等具体知识章节提及；第三类则是作为独立章节的核心知识点，常见章名包括“曲线的方程”“方程的曲线”“曲线与方程”“坐标与方程”和“方程的图象”等。图 2 给出了曲线与方程概念所在章节的时间分布情况，可见，19 世纪中叶以前的教科书多倾向于在“直线方程”或“预备知识”章节呈现这一概念，自 19 世纪下半叶开始，越来越多的教科书开始设立独立章节讨论曲线与方程的关系，尽管这种趋势在 20 世纪中叶有所下降，但毋庸置疑的是，后期的教科书作者均转而倾向于将这一概念独立于直线、圆等具体知识点进行讨论。

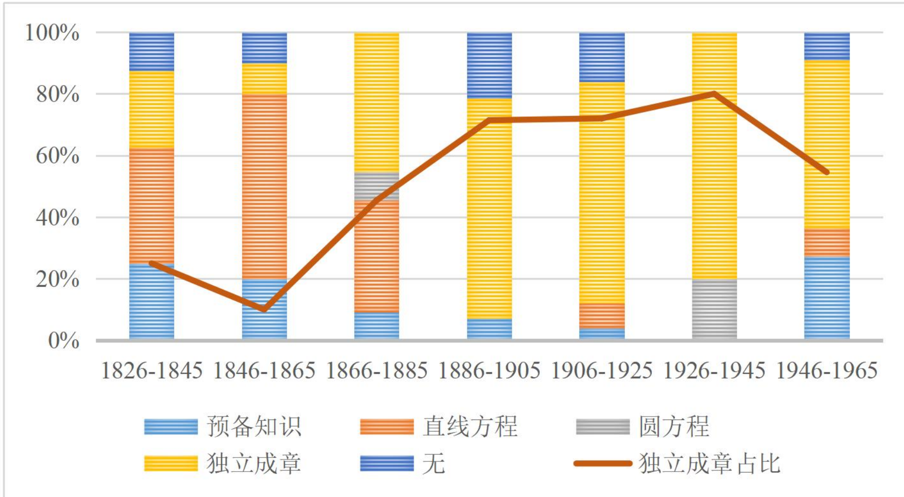


图 2 曲线与方程概念所在章节的时间分布

3 直角坐标系下的曲线与方程概念

Lacroix（1837）揭示了曲线的三种表示方式，其中前两种分别为运动过程导向的动态表示和性质导向的静态表示，它们最终均指向第三种，即用方程表示曲线：“为了描述曲线，必须知道曲线上不同点所满足的规律，这个规律可以通过三种方式给出：一是叙述运动过程，曲线可以用一个连续的运动来描述，以圆为例，它是通过使一条给定的线段在平面上围绕一个给定的点旋转来描述的；二是寻找曲线性质，即曲线上每一点所满足的一些性质；三是用方程表示曲线，我们通常认为曲线就是这样表示的，因为前两种方法都有助于找到表达这个规律的方程。”[6]

Briggs（1881）强调：“曲线和方程之间的这种密切关系，是我们这门学科的基础，研究得再仔细也不为过。掌握这一思想之后，这门学科的学习将是自然而容易的；而对于一个忽视它或对它的概念不甚了了的人而言，解析几何一定是难以理解的。”[7]尽管曲线与方程的思想已随着笛卡儿、费马的著作萌生，但当时的坐标仍仅限于正数，直至沃利斯（J. Wallis, 1616-1703）首次有意识地引入负坐标，平面曲线与二元方程更加完备的一一对应才得以呈现于世人眼前。此后，人们经历了很长一段时间才建立起对曲线与方程概念的严谨认识，这一艰苦卓绝的历程在早期教科书中得以印证，其中的曲线与方程定义经历了从不严谨到严谨的过渡。

3.1 不严谨定义

部分早期教科书中给出了“曲线与方程”的不严谨的定义，包括模糊定义、单向定义与函数定义三类，第一类仅意识到曲线与方程之间具备某种联系，但未表达出严格对应的本质；第二类尽管有意强调“每一点均需满足”，但仅关注了纯粹性与完备性之一；第三类则混淆了“曲线与方程”与“函数与图象”两个概念。

3.1.1 模糊定义

15 种教科书采取了模糊定义，如 Biot（1840）叙述了曲线与不定方程之间的相互表示：“我们认为，每一条曲线都可以用两个不定变量之间的方程来表示；反之，两个不定量之间的每一个方程，都可以用几何的方法来解释，认为它表示一条曲线。正是代数在几何中的这种更广泛的应用，构成了解析几何学。”[8]Nichols（1906）从运动的观点阐释了这种关系：“当点按照轨迹方程所表达的规律运动时，轨迹方程就是该轨迹上的点所遵循规律的代数表达式。”[9]Lardner（1831）指出，曲线与方程的思想源于对适定几何（即用代数方法解决确定几何问题）的恰当类比：“通过一个惊人的类比，给出了用方程表示曲线图形的一种方法，这种方法介于不定几何问题和两个未知量的方程之间。”[10]

3.1.2 单向定义

14 种教科书陷入单向定义的误区，如 Hardy（1897）在定义轨迹的方程时忽视了完备性：“轨迹的方程是关于轨迹上每个点的坐标的方程，且轨迹上所有点的坐标都必须满足该方程。”[11]相反地，Young（1830）在叙述方程的轨迹时忽视了纯粹性：“若任何满足方程的点(x, y)都在一曲线上，则该曲线称为该方程的轨迹。”[12]这类作者实际上都陷入了将“方程的曲线”与“曲线的方程”两概念孤立开来的误区，而两者实则为“曲线与方程”概念不可分割的两方面，任缺其一都会扩大概念的外延。

3.1.3 函数定义

Riggs（1911）将 “方程”与“函数”概念相混淆：“我们将考虑一些点的简单轨迹，并推导出表示轨迹上任何一点的纵坐标对该点横坐标依赖关系的方程，这个方程被称为轨迹方程。”[13]无独有偶，Dowling（1914）也犯了同样的错误：“轨迹方程将 y 定义为 x 的函数而轨

迹本身就是这个函数的图象。”[14]试于滥觞处究其原因，我们发现，源于伯努利（J. Bernoulli, 1667-1748）和欧拉（L. Euler, 1707-1783）的函数表达式定义与 19 世纪代数教科书中最为风靡的方程表达式定义在形式上极为相似，之后处于函数变量依赖关系定义阶段的早期代数教科书也多从方程出发给出函数定义，而德国数学家 F·克莱因（F. Klein, 1849-1925）在 20 世纪初提出以函数概念统一数学教育内容的思想，又导致早期教科书反过来利用函数来定义方程[15]。可见，“方程”与“函数”两者的纠葛是有迹可循的。

再观“曲线与方程”和“函数与图象”的关系，从历史上看，前者为后者铺平了道路。早在函数概念尚未被充分认识的 17 世纪，绝大部分函数，如指数函数、对数函数、正弦函数等，均被当作曲线来研究[16]。函数概念产生之后，曲线与方程思想也为直观研究函数提供了可能性，19 世纪法国数学家库尔诺（A. A. Cournot, 1801-1877）曾在其《函数论与微积分》中梳理了曲线与方程思想对研究函数的贡献：“众所周知，笛卡儿的出发点是将代数应用于几何，并为此通过每个点的坐标之间的方程来表示曲线。反之，该想法也为将几何应用于代数奠定了基础，在这种意义上，曲线只不过是代数定律的图形和约定符号，它把变量联系在一起。值得注意的是，这个约定符号非常适合所指事物的本质，它把那些关系带回纯粹直觉的事实，而这些关系是头脑在抽象的本质中不会毫不费力地掌握的，从而为函数提供图象感知。”[17]可见，有别于曲线与方程相辅相成的平等关系，图象不过是作为研究函数的一种直观载体。

3.2 严谨定义

随着时间的推移，越来越多的教科书能够严谨正确地陈述曲线与方程的对应关系，根据叙述方式的不同，可分为描述性定义、集合定义和充要条件定义。

3.2.1 描述性定义

早期教科书中出现了三类实则等价的描述性定义，典型叙述见表 1，可根据情况不同选择适当的判定方式。

表 1 三类描述性定义的典型叙述

年份	作者	定义叙述	抽象语言
1876	Peck	满足给定条件的点的轨迹方程是一个用变量 x 和 y 表示坐标的方程，使得轨迹上每一点的坐标都满足这个方程；反之，每一个坐标满足方程的点，都在轨迹上。[18]	若 A 则 B，若 B 则 A
1888	Runkle	如果我们可以用代数表示出运动点的坐标在其任意位置上的相互关系，则由此得到的方程就是轨迹方程。该方程对轨迹上的所有点都成立，但对其他点不成立。[19]	若 A 则 B，若非 A 则非 B
1901	Ashton	曲线包含了满足方程的所有点，而不包含其他点，我们称之为方程的轨迹。[20]	若 B 则 A，若非 B 则非 A

3.2.2 集合定义

共 6 种教科书利用集合定义曲线与方程的关系，Hamilton（1826）最早指出："设 $f(x, y)$ 为 x 和 y 之间的任意不定方程，因此，点 (x, y) 的集合将形成一条曲线，这条曲线称为方程 $f(x, y) = 0$ 的轨迹。"值得注意的是，尽管 Hamilton（1826）给出了严谨定义，但在证明一次方程的轨迹是直线时，却假定了一条直线 BC，并论证了其方程为一次式[21]，可见，作者误将纯粹性与完备性混为一谈。究其原因，或与集合这一数学概念彼时仍未成熟有关。

随着康托尔集合论被广泛传播和接受，早期教科书中开始出现一些集合符号表述，如 Taylor（1962）用集合的交与并表示两条曲线的交并。然而遗憾的是，在所考察的教科书中并未出现曲线与方程定义的集合符号语言叙述[22]。

3.2.3 充要条件定义

部分教科书借助逻辑用语提供了更简洁的定义表述，如 Taylor（1959）在给出曲线与方程的描述性定义后指出："也就是说，对特定的点 (x, y) 而言，有序数对 (x, y) 满足方程是点 (x, y) 在曲线上的充分必要条件。"[23]

4 直角坐标系下曲线与方程概念的演变

以上分析所呈现的不严谨定义暴露出早期人们对于曲线与方程概念认知的多重误区，严谨定义则指向同一内涵的多样表述方式。图 3 以 20 年为单位，展示了早期教科书中曲线与方程定义的演变情况。

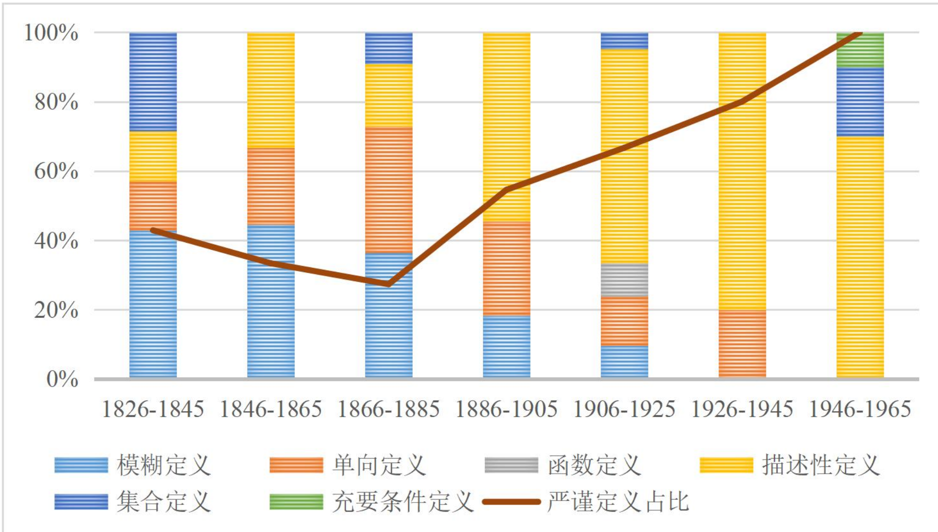


图 3 早期教科书中曲线与方程定义的演变情况

由图 3 可知，在 20 世纪前，超过半数的教科书给出的定义缺乏严谨性且模糊定义居多，这反映出部分教科书编写者对曲线与方程关系的认知局限于感性层面。步入 20 世纪后，给出严谨定义的教科书比例日渐上升，其中，描述性定义始终占据主流。值得注意的是，虽然越来越多的教科书编写者试图从“量”的角度建立起对曲线与方程关系的理性认识，但他们时常陷入仅关注纯粹性与完备性之一的误区，这种错误认知甚至到 20 世纪中叶仍未消除。

5 完备性的验证

Peck（1876）在给出曲线与方程的描述性定义后强调：“该定义表明，轨迹方程在推导出来之后，必须经过检验。”[18]早期教科书验证完备性的方式可大致归纳为反证法、回溯法和代入法。

5.1 反证法

Tanner & Allen（1898）在得到过 $P_1(3,2)$ 与 $P_2(12,5)$ 两点的直线上的点都满足方程 $3y-x-3=0$ 后，提供了两类反证法说明“任何不在曲线上的点都不满足该方程”（图 4）。方法一：在推导方程的过程中采用了相似三角形对应边成比例的法则，若某点不在直线上，就无法构成相似三角形，从而比例式 $\frac{y-2}{5-2}=\frac{x-3}{12-3}$ 无法成立。方法二：设 $P_3(x_3,y_3)$ 不在过 P_1P_2 的直线上，过 P_3 作 x 轴垂线与 P_1P_2 交于 $P_4(x_4,y_4)$，则 $x_3=x_4$，$y_3\neq y_4$，且 $3y_4-x_4-3=0$，因此 $3y_3-x_3-3\neq 0$，由 P_3 的任意性可知不在直线上的任意点皆不满足方程 $3y-x-3=0$。[24]

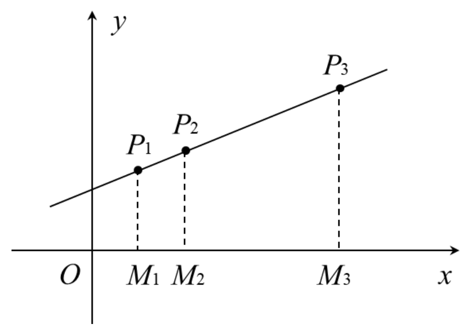


图 4 方程 $3y–x–3=0$ 表示的直线

5.2 回溯法

Young 等人（1936）在利用

$$PF_1+PF_2=2a \tag{1}$$

推导出椭圆标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

后，验证了满足（2）的点必然符合（1）：通过由（2）回溯推导步骤，发现开方后得出的

$$\pm\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\ (a^2-c^2=b^2),$$

共有四种情形，分别为（a）＋＋；（b）－＋；（c）＋－；（d）－－。接着只需证明仅情形（a）满足即可。情形（b）和（c）的几何意义均为 PF_1 与 PF_2 距离之差等于 $2a$，由此 $\triangle PF_1F_2$ 的两

边之差大于第三边 $2c$，得出矛盾；情形（d）等式左侧恒为负，而右侧恒为正，亦矛盾。综上可得，只有情形（a）符合要求，即（2）必然推出（1）。[25]

特别地，Cell（1951）指出："由于第二部分的证明可以通过仅仅颠倒代数化简的步骤来完成，我们通常将省略这部分的推导（若在推导过程中已经适当地注意了每一步的等价性）。"[26]

5.3 代入法

Smith 等人（1954）在推导出方程 $2x-y-1=0$ 是满足与 $P_1(3,0)$ 和 $P_2(-1,2)$ 距离相等的点的轨迹方程后，设点 $P_0(x_0,2x_0-1)$ 满足方程，将其代入算出 P_0P_1 和 P_0P_2 的距离公式，验证得两者相等，从而完备性得以检验。[27]

以上三类方法均具普适性，可根据具体情形合理选择。20 世纪出版的部分教科书编写者认为完备性的检验可适当省略，例如 Roberts & Colpitts（1918）指出："这一步在所有的例子中都是如此相似，除非要求，否则学生不需要给出它，但永远不应该忽视这样一个事实，即这是确定轨迹方程的基本条件之一。"[28]

6 极坐标系下的曲线与方程概念

早期教科书中的多样化定义使得揭示了直角坐标系下点与坐标、曲线与方程的对应关系，那么这种关系能否类比到极坐标系？Purcell（1958）给出了答案："不同于笛卡儿坐标系，极坐标系无法建立平面点与有序实数对之间的一一对应关系，这种失败导致了一些在笛卡儿坐标系中不会遇到的困难。例如，点 $P(-2,270°)$ 不满足方程 $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$，但点 P 在该方程表示的曲线上，这是因为点 P 对应的另一组极坐标 $(2,90°)$ 满足该方程，因此我们得出这样的结论：在极坐标系中，某点对应的一组坐标不能满足给定的方程，并不能保证该点不在该方程的轨迹上。我们定义：当且仅当某点的至少一组极坐标满足给定方程时，该点位于极坐标方程的位置上。"[29]

因此，Nelson（1949）指出：在确定两个极坐标方程交点时须辅以草图："两条极坐标曲

线可能有公共点，然其极坐标并不相同。例如 $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 满足方程 $r=-1$ 但不满足方程 $r=1-\cos\theta$，而坐标 $\left(1,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 满足后者但不满足前者，但事实上两个坐标表示同一点，即它是两条曲线的交点。这些例子表明，在通常的求解过程中，还应结合方程的作图。”[30]

7 结论与启示

综上所述，曲线与方程概念经历了从模糊到清晰、从不严谨到严谨的过程，不严谨定义包括模糊定义、单向定义与函数定义，严谨定义则分为描述性定义、集合定义和充要条件定义。在对曲线与方程概念建立正确认识的基础上，教科书又给出了反证法、回溯法和代入法三种验证完备性的方法，并对直角坐标与极坐标下的曲线与方程概念进行了辨析。以上种种可为今日教学提供诸多启示。

其一，倾听古人。“课本中斟字酌句的叙述，未能表现出创造过程中的斗争、挫折，以及数学家在建立正确概念前所经历的艰苦漫长的道路。”[16]数学史家 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）的真知灼见告诉我们，古人的错误亦能转化为一种教学指南。数百年前教科书编写者在定义曲线与方程时犯下的共性错误，也定会成为今日学生迈向严谨认识的绊脚石[31]。直观的模糊定义是学生的认知起点，教师可借助实例将学生对曲线与方程关系的认知从感性提升至理性，在此过程中极易陷入单向定义的误区，教师不妨鼓励学生举出反例，使其理解纯粹性与完备性是相辅相成，缺一不可的两方面。此外，早期不严谨的函数定义说明教师应适时组织学生辨析“曲线与方程”和“函数与图象”的区别与联系，而抛物线既是学生初中学习过的二次曲线，又是高中所学的一类重要圆锥曲线，或可成为引发这一讨论的契机。

其二，善用留白。“思维与表达”是课标中体现数学核心素养的重要维度之一，不同早期教科书给出三种等价的描述性定义，以及集合、逻辑用语的出现带来的更加简洁的定义叙述，均说明了曲线与方程定义可以作为培养学生数学表达能力的有益载体。教师可为学生留下陈述之白，引导其用规范、简洁的语言叙述曲线与方程定义，体会数学的严谨性与优美性。同时在完成具体曲线方程的推导之后留下论证之白与方法之白，鼓励学生通过多种方法进行完备性的验证，并讨论不同方法之优劣。

其三，解答疑惑。早期教科书已为我们厘清了笛卡儿坐标系与极坐标系下曲线与方程关系

产生区别的本质缘由：极坐标系无法建立平面点与有序实数对之间的一一对应。由此不妨引发学生讨论两种坐标系下曲线与方程关系的异同，并尝试解决：能否通过添加限制条件，使得极坐标系下的一一对应关系成立？如何类比笛卡儿坐标系，确定两极坐标曲线交点坐标？从而抽丝剥茧地厘清知识脉络，解决认知障碍。

参考文献

[1] V・卡茨. 数学史通论(第二版)[M]. 李文林, 译. 北京: 高等教育出版社, 2004: 338-346.

[2] 阮晓明, 王琴. 高中数学十大难点概念的调查研究[J]. 数学教育学报, 2012, 21(5):29-33.

[3] 赵银仓. 从高考答卷的错误反思教学的缺失[J]. 数学通讯, 2013(14): 46-50.

[4] 牛婷婷. 高中数学“曲线与方程”概念难点及教学设计研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2016.

[5] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 43-44, 75.

[6] Lacroix, S. F. *An elementary treatise on plane and spherical trigonometry and on the application of algebra to geometry* [M]. Boston: Hilliard, Gray and co., 1837: 110.

[7] Briggs, G. R. *The Elements of Plane Analytic Geometry* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1881: 12.

[8] Biot, J. B. *An elementary treatise on analytical geometry* [M]. Philadelphia: C. Desilver, 1840: 27.

[9] Nichols, E. W. *Analytic Geometry* [M]. New York: D. C. Heath & Company, 1906: 9.

[10] Lardner, D. *A Treatise on Algebraic Geometry* [M]. London: Whittaker, Treacher & Arnot, 1831: 4.

[11] Hardy, J. J. *The Elements of Analytic Geometry* [M]. Massachusetts: Chemical Publishing Company, 1897: 14.

[12] Young, J. R. *The Elements of Analytical Geometry* [M]. London: John Souter, 1830: 36.

[13] Riggs, N. C. *Analytic Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1911: 41.

[14] Dowling, L. W., & Turneaure, F. E. *Analytic Geometry* [M]. New York: Henry Holt and Company, 1914: 53.

[15] 汪晓勤, 等. 美英早期代数教科书研究[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2022.

[16] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想(第 2 册)[M]. 朱学贤, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 1-26.

[17] Cournot, A. A. *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal (Tome1)* [M]. Paris: Chez L. Hachette, 1841: 1-21.

[18] Peck, W. G. *A Treatise on Analytical Geometry* [M]. New York: A. S. Barnes & Company, 1876: 42.

[19] Runkle, J. D. *Elements of Plane Analytic Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1888: 28.

[20] Ashton, C. H. *Plane and Solid Analytic Geometry* [M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1901: 20.

[21] Hamilton, H. P. *The Principles of Analytical Geometry* [M]. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1826: 52.

[22] Taylor, H. E. *Plane Analytic Geometry* [M]. New York: Wiley, 1962: 3.

[23] Taylor, A. E. *Calculus, with Analytic Geometry* [M]. New Jersey: Prentice- Hall, 1959: 20.

[24] Tanner, J. H., & Allen, J. *An Elementary Course in Analytic Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1898: 61-63.

[25] Young, J. W., Fort, T., & Morgan, F. M. *Analytic Geometry* [M]. Boston: Houghton Mifflin Company, 1936: 36.

[26] Cell, J. W. *Analytic Geometry* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1951: 33.

[27] Smith, E. S., Salkover, M., & Justice, H. K. *Analytic Geometry* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1954: 20-22.

[28] Roberts, M. M., & Colpitts, J. T. *Analytic Geometry* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1918: 48.

[29] Purcell, E. J. *Analytic Geometry* [M]. New York: Appleton-Century-Crofts, 1958. 51-54.

[30] Nelson, A. L., Folley, K. W., & Borgman, W. M. *Analytic Geometry* [M]. New York: The Ronald Press Company, 1949: 154.

[31] 陈雨晴, 韩粟, 汪晓勤. 略论数学教学中的"倾听历史"[J]. 教育研究与评论, 2022(12): 41-47.

条件概率：从历史到课堂

唐都宁

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

条件概率是高中课堂中重要的教学内容。它出现在古典概率之后，是学习乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式的基础，其重要地位不言而喻。然而，在教学实践中，对条件概率的理解还存在一些问题。

首先，学生在条件概率的理解上存在以下问题。其一，误解事件关系。在因果关系上，学生可能会认为条件概率 $P(B|A)$ 中两个事件之间的关系是因果关系，而非条件关系，且倾向于认为事件 A 是原因，事件 B 是结果[1]；在事件顺序上，学生可能会认为先前发生的事情可以影响之后的事情，而之后的事情不能对先前的事情产生影响，他们倾向于认为事件 A 是先发生的，事件 B 是后发生的[2]。其二，混淆两个事件同时发生（即积事件）的概率与条件概率。学生可能会认为两个事件同时发生的概率 $P(AB)$ 比单一事件发生的概率 $P(A)$ 或 $P(B)$ 高，或将两个事件同时发生的概率 $P(AB)$ 与条件概率 $P(B|A)$ 混为一谈[2]。其三，想当然设定事件类别。学生倾向于将事件当作等可能事件，而不考虑其他现实情况[2]。

其次，教师对条件概率本质的理解也可能并不透彻。李杰民根据一线教师发表的论文，总结了教师存在以下六点误区，把“$B|A$”看成事件、认为事件 A 必然发生是限定条件、具体问题中困惑于计算 $P(AB)$ 还是 $P(B|A)$、认为事件 A 的概率一定大于零、把定义当作公式、低估条件概率的作用与价值[3]。

需要指出的是，有的学者可能会有疑问，“$B|A$”为什么不能看成事件？条件概率 $P(B|A)$ 描述的不正是事件“$B|A$”的发生概率吗？从现实情境出发，把“$B|A$”作为事件看待的确有意义。李杰民从测度论的角度出发给出了不同的回答，他认为，条件概率 $P(B|A)$ 的样本空间发生了变化[3]，因此，条件概率并非是以 $P(\bullet)$ 来度量事件 $B|A$ 发生的可能性，而

是以 $P(\bullet|A)$ 来度量事件 B 发生的可能性，从而他提出“ $B|A$ ”不是事件。

历史是最好的教科书。本文对条件概率的历史进行梳理，希望通过历史来丰富师生的认知，解决教学实践的有关疑惑，并开拓教师的教学思路。

2 条件概率的历史

2.1 概率之发展

17 世纪，赌博在欧洲社会非常风靡，赌博的游戏越来越复杂、赌注也越来越大，因此，从数学上计算相应的概率是一件很有必要的事情。一位名叫德·梅勒（De Méré）的著名赌徒向数学家帕斯卡（B. Pascal, 1623-1662）请教了赌徒分金的问题，即谁先获胜 3 局，谁就把所有的赌金赢走，然而赌局被迫中断，此时两个赌徒的获胜局数分别为 1 局和 2 局，问如何分配剩余赌金。就这个问题，帕斯卡与他的朋友费马（P. de Fermat, 1601-1665）通信交流，这便是概率论的起源。帕斯卡和费马对古典概型，特别是排列组合问题进行了深入讨论。

在古典概型下，由于事件的等可能性和有限性，人们无需进行试验，便能够得到事件的概率 p。世人也都认为，随着试验次数 n 的增加，事件的观测到的频率 $\frac{m}{n}$ 会越来越接近概率 p。然而，在大家都把这个论断视为“理所当然”的结论时，瑞士数学家雅各布·伯努利（J. Bernoulli, 1654-1705）不禁发出了疑问。这个结论的确成立，可它为什么成立？能否找到理论依据，为其提供严谨的证明？伯努利在《猜度术》（1713）中做出了回答，他以数学语言严格证明：总可以取足够大的试验次数 n，使得频率 $\frac{m}{n}$ 在数值上任意接近概率 p。同时，在事件概率 p 已知的情况下，伯努利可以根据其事件的结果，即成功和失败的次数，计算相应的概率。

然而，现实中更多的情况是，人们无法事先确定事件发生的概率 p，却可以对事件做出一系列观测。那么能否根据观测现象推断事件的发生概率，换句话说，能否根据事件的结果来反推其原因呢？英国牧师贝叶斯（T. Bayes, 1701-1761）做出了回答，他提出了“由果溯因”的贝叶斯定理。同时，贝叶斯将人们的主观想法也纳入了概率的考虑范围，他认为，概率是对未知事件发生可能性大小的一种主观测度。此后，根据是否承认主观概率，统计学派更是分成了两个学派，分别为贝叶斯学派和频率学派。

随着概率的不断发展，概率的应用不再局限于赌博游戏中，更是应用到了人身保险、编制生命表等科学问题中。法国数学家拉普拉斯（P. S. Laplace, 1749-1827）在概率与赌博相分离上，做出了巨大贡献，体现了概率的广泛应用性[4]。1933 年，前苏联数学家柯尔莫哥洛夫（A. N. Kolmogorov, 1903-1987）完成了概率的公理化定义，使得概率论获得了严格的数学基础，概率正式加入了数学大家庭[5]。

2.2 条件概率之萌芽

18 世纪，雅各布·伯努利在其去世后出版的《猜度术》中提出，客观概率有两种计算方式，分别为先验地计算和后验地计算，相应地，概率有两种类型，分别为先验概率和后验概率[6]。伯努利利用箱子模型对这两种概率作了进一步解释。设一个箱子有黑球和白球若干，有放回地随机抽球，求白球占所有球的比例。若黑球、白球各自的数量已知，那么白球与所有球的数量之比就是白球的占比，此为先验概率。不难发现，根据伯努利的定义，先验概率即为古典概率。若箱子中白球和黑球的数量未知，那么可以根据大量的有放回抽球的结果，估计白球占比，此为后验概率。伯努利将后验概率定义为，根据大量类似事件的观测结果，得到的概率估计。不难发现，后验概率即频率估计概率。

在《猜度术》中，伯努利提出了大数定律[7]：$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|p-\frac{m}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$。其中，$\varepsilon$ 是任意小的正数，p 是真实的概率，n 是试验次数，$\frac{m}{n}$ 是观测到的频率。大数定律是数学上第一个把概率和事件的观测频率联系起来的尝试，为频率 $\frac{m}{n}$ 估计概率 p 奠定了理论基础。

同一时期，法国数学家棣莫弗（A. De Moivre, 1667-1754）在《机会学说》（1738）中第一次明确定义了条件概率[8]。棣莫弗当时思考了以下问题[9]：设有两叠各含 13 张相同花色的牌，从每叠牌中各抽出一张牌，那么抽出两张 K 的概率是多少？这个问题本质上涉及两个独立事件，分别考虑两个事件发生的概率并相乘，即可得到结果。然而，棣莫弗继续思考如下问题：一叠相同花色的 13 张扑克牌，一次取一张牌，那么第一次抽到 K、第二次抽到 2 的概率是多少？棣莫弗发现，第一次的抽牌结果会影响第二次的抽牌，因而两个事件并非彼此独立，而是相关的。于是，棣莫弗将条件概率定义为“一个事件已经发生的情况下另一个事件发生的概率”，

并给出了乘法公式 $P(AB)=P(B)P(A|B)$，即两个相关事件同时发生的概率，是一个事件发生的概率乘以这个事件已经发生的情况下另一个事件发生的概率。

2.3 条件概率之发展

伯努利认为，频率估计概率需要大量重复试验。若试验次数较少，是否也有合适的方法估计概率呢？1764 年，贝叶斯的遗作“关于机会理论中一个问题的求解”在《哲学汇刊》上发表，文中提出上述问题的解决方案。不同于伯努利的箱子模型，贝叶斯提出了自己的方形桌模型。需要注意的是，在贝叶斯撰写论文的时候，“条件概率”这一专有名词尚未出现，贝叶斯和棣莫弗一样对条件概率作了描述性定义，并给出了条件概率的计算方法，即 $P(AB)=P(B)P(A|B)$、$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$。其原文为，设有两个相继发生的事件，第一个事件发生的概率为 $\dfrac{a}{N}$，两个事件同时发生的概率为 $\dfrac{p}{N}$，那么第一个事件发生的情况下，第二个事件发生的概率为 $\dfrac{p}{a}$；设有两个相继发生的事件，第二个事件发生的概率为 $\dfrac{b}{N}$，两个事件同时发生的概率为 $\dfrac{p}{N}$，那么第二个事件发生的情况下，第一个事件发生的概率为 $\dfrac{p}{b}$ [10]。可以发现，贝叶斯与棣莫弗都给出了概率的乘法公式，然而贝叶斯进一步说明了两个事件的先后顺序问题。同时，贝叶斯提到了由后发生的事件对先前的事件的推断，这蕴含着从未来推断过去的思想，这也正是贝叶斯定理的核心思想“由果溯因”，其在统计推断方面有着深远的影响。

何为贝叶斯的方形桌模型？如图 1，设在平整的长方桌 *ABCD* 上任意地扔一个球，记 *AD*=*BC*=*a*，过球停下的位置，作一条与 *AB* 平行的线段 *EF*，将桌子分割为 *AEFB* 和 *EDCF* 两个部分，记 *EF* 与 *AB* 的距离为 x。接下来任意扔第二个球，不难发现，第二个球落到区域 *AEFB* 的概率是 $\dfrac{x}{a}$。设第二个球被重复扔了 $p+q$ 次，其中 p 次成功落在区域 *AEFB* 内，q 次失败，即落在区域外，*EF* 的位置未知。请问 *EF* 与 *AB* 的距离处于 b 与 c（$0<b<c<a$）之间的概率为多少？

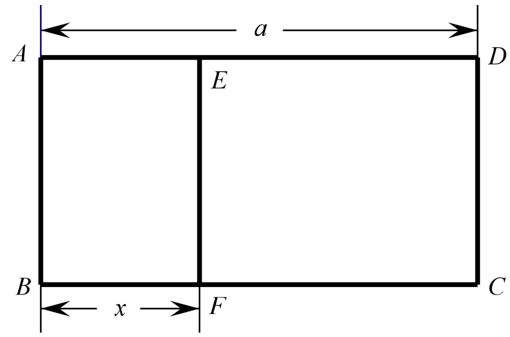


图 1 贝叶斯长方桌

不难发现，本质上这也是条件概率问题。这里，试验的结果是“第二个球 p 次成功落在 $AEFB$ 区域内，q 次失败”（记作事件 A），导致结果的原因是“第一个球确定了 EF 在距离 AB 为 x 的位置”（记作事件 C）。将“EF 与 AB 的距离处于 b 与 c 之间”（$0<b<c<a$）记作“事件 B”，则原问题就是在事件 A 发生的情况下，求事件 B 发生的概率，即 $P(B\,|\,A)$。

贝叶斯又是如何求解这个问题的呢？他运用了牛顿时代的几何方法进行阐述，然而几何方法在今日看来晦涩难懂，一个世纪之后，英国数学家托德亨特（I. Todhunter, 1820-1884）利用微积分再次对方形桌的问题进行了讨论[11]。

首先考虑第一个球。第一个球确定了 EF 的位置，那么 EF 与 AB 的距离为 x 的概率 $P(C)$ 是多少呢？由于 EF 必然位于 AB 与 CD 之间，且 $AB//CD//EF$，因此，不妨只看位于同一条直线上的三点 B、F 和 C。点 F 有可能落在 BC 线段上的任何一点，且落在任何一点的可能性都相等。那么 BF 的长度为 x 的概率是多少呢？我们不妨将 BC 线段进行等分，将其分成无穷多段，每一小段的长度记为 dx。那么 BF 的长度为 x 的概率便可以看作，某一小段占整条线段的比，即 $\frac{dx}{a}$，也就是 EF 与 AB 的距离为 x 的概率 $P(C)$。

其次再看第二个球。已知 EF 与 AB 的距离为 x，即事件 C 已知，那么第二个球落在 $AEFB$ 区域内成功 p 次失败 q 次（事件 A）的概率 $P(A\,|\,C)$ 又该如何计算呢？我们知道第二个球落在区域内的概率为 $\frac{x}{a}$，落在区域外的概率为 $1-\frac{x}{a}$，$p+q$ 次试验中有 p 次在区域内，因此事件 A 发生的概率为

$$P(A\,|\,C)=C_{p+q}^{p}\left(\frac{x}{a}\right)^{p}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{q}。$$

由乘法公式可得，EF 与 AB 的距离为 x，且事件 A 发生的概率为

$$P(AC)=P(C)P(A|C)=C_{p+q}^{p}\left(\frac{x}{a}\right)^{p}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{q}\frac{dx}{a},$$

即两个事件同时发生的概率。而问题中将 EF 与 AB 的距离限制在了 b 与 c 之间，因此积事件 AB 的概率等于 $P(AC)$ 在区间 $[b,c]$ 上的积分，即

$$P(AB)=C_{p+q}^{p}\int_{b}^{c}\left(\frac{x}{a}\right)^{p}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{q}\frac{dx}{a}。$$

那么在掷第一个球之前，第二个球落在 $AEFB$ 区域内成功 p 次失败 q 次（事件 A）的概率 $P(A)$ 又是什么呢？这个情况相当于 EF 与 AB 的距离未知，只知距离大于 0 且不超过 a，因此在掷第一个球之前，$P(A)$ 等于 $P(AC)$ 在区间 $[0,a]$ 上的积分，即

$$P(A)=C_{p+q}^{p}\int_{0}^{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{p}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{q}\frac{dx}{a}。$$

所以，在“第二个球落在 $AEFB$ 区域内成功 p 次失败 q 次（事件 A）”的条件下，“EF 与 AB 的距离处于 b 与 c 之间（事件 B）”的概率为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\int_{b}^{c}x^{p}(a-x)^{q}dx}{\int_{0}^{a}x^{p}(a-x)^{q}dx}。$$

不难发现，贝叶斯的方法突破了伯努利对于试验次数的要求，在试验次数较小的情况下，运用贝叶斯方法，通过条件概率，仍能根据试验的结果对其原因作出合理的推断估计。

2.4 条件概率之兴盛

贝叶斯去世后不久，法国数学家拉普拉斯在没有阅读贝叶斯论文的情况下，独立地发现了贝叶斯公式[12]。为何将拉普拉斯发现的公式命名为贝叶斯公式呢？这是因为，二者的思想本质上都是“由果溯因”，而这个思想的最早提出者是贝叶斯。然而，不可否认的是，拉普拉斯的贡献巨大，他首次清晰地阐明了如何根据观测到的事件来估计事件成因的概率[11]。

巧合的是，拉普拉斯思考了一系列问题，而他最开始提出的问题与贝叶斯有着惊人的相似性，即如果一个箱子中有着数量未知的白色和黑色的选票，有放回地取了 $p+q$ 张选票，其中

p 张是白色选票，q 张是黑色选票，那么下一次取出白色选票的概率是多少？不妨设 x 是白色选票占所有选票的真实概率，那么这个问题的答案是 $\dfrac{\int_0^1 x^{p+1}(a-x)^q\,dx}{\int_0^1 x^p(a-x)^q\,dx}$。

1774 年，拉普拉斯在“关于事件成因的概率”一文中提出，如果一个事件 A 可以由 n 个两两互不相容的不同原因 B_1，B_2，…，B_n 产生，那么当这个事件 A 发生时，这些原因存在的概率 $P(B_i|A)$ 与其存在时促使该事件发生的概率 $P(A|B_i)$ 成正比，且在该事件 A 发生的条件下，某原因 B_i 存在的概率 $P(B_i|A)$ 等于该原因 B_i 存在时促使该事件发生的概率 $P(A|B_i)$ 除以各个原因存在时促使该事件发生的概率之和[13-14]。此即为拉普拉斯的“不充分理由原则”，用今天的符号表达，就是

$$\frac{P(B_{\mathrm{i}}|A)}{P(B_{\mathrm{j}}|A)}=\frac{P(A|B_{\mathrm{i}})}{P(A|B_{\mathrm{j}})} \qquad i,j\in\{1,2,\cdots,n\},i\neq j \tag{1}$$

$$P(B_{\mathrm{i}}|A)=\frac{P(A|B_{\mathrm{i}})}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_{\mathrm{j}})} \qquad i\in\{1,2,\cdots,n\} \tag{2}$$

直观上理解，人们观察到某事件，并认为导致该事件发生的原因可能是 B_i，即 $P(B_i|A)$ 更大，那么相较于其他原因来说，该原因导致该事件发生的可能性 $P(A|B_i)$ 也更大。可以发现，拉普拉斯设事件发生的概率是等可能的，今日学生的认知与其相似。学生在考虑事件发生的概率时，往往忽略其他现实因素，倾向于假设各个事件发生的概率是等可能的。这是否代表了今日学生与拉普拉斯的认识有着惊人的历史相似性呢？实则不然，历史上，“等可能性”这一思想最先由伯努利将其从古典概型推广到主观概率。他认为，在没有任何理由可以认为众多可能性中的某一个或某一些比其他可能性更具优势时，应给予这些可能性以同等的主观概率[15-16]。这便是“同等无知原则”。贝叶斯、拉普拉斯也拥有此思想，他们分别以长方桌问题、箱子问题为出发点，对事件做出了等可能性的假设。

四十年后，拉普拉斯在“关于概率的哲学”一文（1814）中才正式提出了贝叶斯公式并给出了相应的证明。

贝叶斯公式通常记为$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$。对于任意给定的 i，$P(B_i)$是试验前就已知的概率，称为事件 B_i 的先验概率。在已知试验结果 A 的情况下，便可以由等号右边的$P(B_i)$计算得到等号左边的$P(B_i|A)$，从而对原因 B_i 的认识由原本的$P(B_i)$调整为$P(B_i|A)$。$P(B_i|A)$可以看作是对$P(B_i)$的修正，称为后验概率。通过比较已知结果的条件下，不同原因的条件概率，即后验概率$P(B_i|A)$，即可推断出最有可能的原因。

然而，需要注意的是，在箱子模型、长方桌问题的讨论中，人们可以明确地知道何为因、何为果，事件有明确的因果关系。这并不代表贝叶斯公式可以揭秘“因果关系”。在这个问题中，人们是根据事实，先行判断因果，是否运用贝叶斯公式对因果关系的判断毫无影响。那么贝叶斯公式揭秘了什么关系呢？在数理层面上，贝叶斯公式讨论的仅仅是“相关关系”，即在获取了新信息（已知事件 A）的条件下，人们可以调整、修正对事件 B_i 的认识，而两事件的关系是否可以上升为“因果关系”，则需根据现实情况判断分析。

另外，伯努利和贝叶斯的先验概率并不相同。伯努利的先验概率即为古典概率，概率的获得仅根据先验的事实，利用等可能性无需试验便可得到。贝叶斯的先验概率则是试验前对事件的认识，由个人的主观想法所决定。伯努利的后验概率也与贝叶斯的后验概率不同。伯努利的后验概率是频率估计的概率，为无条件概率，而贝叶斯的后验概率则是在试验结果已知的条件下，对事件发生概率的调整，为条件概率。

随着贝叶斯公式的发现，贝叶斯的思想为人们所熟知。对于概率的认识，也分化成了两个学派，分别为频率派和贝叶斯派。频率派认为应仅从客观现实出发，根据事件发生的频率来估计概率，贝叶斯派则认为概率也应考虑人们的主观认知。随着计算机技术的发展，贝叶斯派的应用越来越广泛、方便。直到现在，频率派与贝叶斯派之间仍存在着争论。

2.5 条件概率之应用

概念的命名并非易事，“条件概率”这个术语的确定也不是一蹴而就的。进入 20 世纪，前苏联数学家柯尔莫哥洛夫在《概率论基础》（1933）中对条件概率进行命名并给出其定义，即

事件 B 在条件 A 下的概率[17]。1937 年，瑞典数学家克拉梅尔（H. Cramér, 1893-1985） 将其译为“相关概率”，奈曼（J. Neyman, 1894-1981）等数学家也使用“相关概率”之名。而后，更多的人采用“条件概率”这一术语，“相关概率”逐渐退出历史舞台。1937 年，美国数学家杜布（J. L. Doob, 1910-2004）正式提出“条件概率”[18]。同年，乌斯彭斯基（J. V. Uspensky, 1883-1947）在《数学概率导论》中，将条件概率定义为在事件 B 实际发生的条件下，事件 A 发生的概率，记为 $P(A|B)$ [19]。

1921 年，宏观经济学之父凯恩斯（J. M. Keynes, 1883-1946）在《论概率》中提出，一切概率皆为条件概率[20]。数理角度而言， $P(A|\Omega)=\dfrac{P(A\Omega)}{P(\Omega)}=P(A\Omega)=P(A)$ 。我们不难发现一个令人惊讶的事实，无条件概率是特殊的条件概率。这个发现有什么意义呢？李杰民和廖运章认为其有两方面的意义[5]。一方面，无论是概率还是条件概率，它们都是对事件发生可能性的测度，都是衡量事件可能性大小的“尺子”。那么，如果说概率 $P(\bullet)$ 是一把尺子，条件概率 $P(\bullet|A)$ 便是一族尺子，以事件 A 为条件的概率是一把尺子，以事件 B 为条件的概率是另一把尺子，条件概率的不同条件对应了不同的尺子。概率与条件概率的关系正如几何中点与线的关系一般，没有点，何来线？没有概率，条件概率也就失去了其定义的基础。条件概率是对概率的升维式、质变式的推广。另一方面，条件概率作为可变化的尺子，应用范围也更广。在复杂的随机事件分析中，条件概率把不同的事件相互联系，起着至关重要、舍我其谁的作用。

而如今，条件概率在各行各业广为应用。在医学领域，医生利用条件概率来判断患者的患病情况，进而有针对性地用药。在生物学领域，遗传学家利用条件概率来研究家族遗传史、遗传基因的表达概率。机器学习与人工智能领域更是离不开条件概率，特别是由条件概率得到的贝叶斯公式。为什么短视频平台会那么了解我们，源源不断地推荐我们感兴趣的视频？为什么 ChatGPT 可以像人类一样，在与我们的对话过程中，不断学习新的知识并输出呢？这正是因为源于贝叶斯公式的算法可以在已知信息的基础上，通过不断完善对一个事件的认识，从而对事件做出更准确的判断。

阅读至此，相信不论是教师还是学生，一定会感受到条件概率的发现是一件多么意义非凡的事情。条件概率经过几百年的发展，已成为当今现实世界中助推科技发展的不可缺少的部分。

3 教学启示

3.1 事件关系

从条件概率的历史发展看，事件 A 和 B 之间似乎存在一定的关系。学生更是常常会有疑问，两个事件 A 和 B 具有什么样的关系呢？

首先，需要明确的是，虽然历史上条件概率常常与因果相联系，事实上，两事件之间不一定存在因果关系[2]，以事件 A 为条件并不代表事件 A 为因、B 为果，也不代表 A 为果、B 为因。事件 A 和 B 可能根本不存在因果关系。例如，棣莫弗两次抽牌，第一次抽到 K 和第二次抽到 2 之间没有因果关系，不存在因为第一次抽到 K 所以第二次抽到 2，也不可能是因为第二次抽到 2 所以第一次抽到 K。不过，这两个事件间存在相关关系，即第一次抽牌的结果可能会影响第二次抽牌。

其次，两事件之间不一定存在次序关系[2]。学生可以理解先前发生的事对之后的影响，然而顺序颠倒后，他们往往会产生疑问。贝叶斯的桌子模型便是一个很好的例子，其考虑的正是之后发生的事情对之前发生事情的影响。现实生活中，更是充满了对于事件概率从 $P(B)$ 到 $P(B|A)$ 的不断修正，而这与事件 A、B 的顺序毫无关系。事件 A 可以发生在事件 B 发生之前，即吸取前人教训；事件 A 也可以发生在事件 B 之后，即吃一堑长一智；事件 A、B 甚至还可以同时发生。

条件概率本质上是从概率的角度分析一个事件对另一事件的影响，所以不需要事件 A 和事件 B 存在特定的关系，而是应考虑它们之间的关系具体会带来什么影响，即相应的条件概率的结果。我国数学家华罗庚（1910-1985）曾言：“数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休。”教师可以带领学生，根据如图 2 所示的韦恩图[21]，分别思考两个事件之间的关系以及比较、计算相关的概率 $P(A)$、$P(B)$、$P(AB)$、$P(B|A)$ 和 $P(A|B)$。

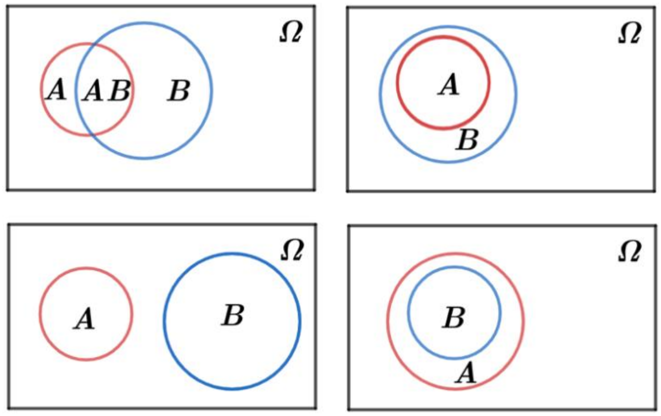


图 2 事件关系的韦恩图

3.2 问题设计

历史上，与条件概率相关的模型主要为箱子模型、抽牌模型和方桌模型。其中，贝叶斯方桌模型的条件概率求解涉及到积分、微分的思想，对于高中学生来说有一定的难度，故在问题设计方面暂不考虑该模型。然而，教师在日常教学中，可以将方桌问题作为拓展问题，激发学生的思考。

以抽牌模型、箱子模型为例，可以设计以下问题 1 和 2。设计意图是让学生体会条件概率的内涵，理解条件概率的事件之间不一定存在因果、次序关系，锻炼学生对条件概率的运用能力，促进他们在现实社会中应用条件概率、贝叶斯定理来调整自身的认知与行为。

【问题 1】 一副除去大小王的扑克牌，共计 52 张，无放回抽牌。求：

（a）第 1 次抽到梅花 K 的情况下，第 2 次抽到梅花 2 的概率；

（b）第 1 次抽到的牌未及时记录，仅记录了第 2 次抽牌结果。求第 2 次抽到梅花 2 的情况下，第 1 次抽到梅花 K 的概率。

【解析】对于问题 1，不妨设第 1 次抽到梅花 K、第 2 次抽到梅花 2 分别记为事件 A、B。

（a） 将样本空间缩小至事件 A，便可得到条件概率 $P\left(B \mid A\right)=\dfrac{1}{51}$；

（b） 从顺序上看，第 2 次抽牌无法影响第 1 次抽牌。然而，当第 1 次抽牌结果未知，第 2 次的结果已知时，我们可以根据第 2 次的结果完善对第 1 次抽牌的认知。利用条件概率定义可得

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(\overline{A}B)}=\frac{\frac{1}{52}\times\frac{1}{51}}{\frac{1}{52}\times\frac{1}{51}+\frac{50}{52}\times\frac{1}{51}}=\frac{1}{51}\text{。}$$

其中，如何理解 $P\left(\overline{A}B\right)$？这个事件即第 1 次没有抽到 K，且第 2 次抽到了 2，那么第 1 次也无法抽到 2，因此第 1 次抽牌时，可能抽中的牌为梅花 K 和梅花 2 之外的 50 张牌，故 $P\left(\overline{A}B\right)=\frac{50}{52}\times\frac{1}{51}$。

【问题 2】箱子中有 2 个大小相同的小球，观察到其中一个小球是白色的，另外一个小球的颜色无法确定是白色还是黑色。对箱子进行有放回摸球，求：

（a）第 1 次摸到白球的条件下，另外一个小球的颜色是白色的概率；

（b）两次都摸到白球的条件下，另外一个小球的颜色是白色的概率。

【解析】对于问题 2，不妨设第 1 次摸到白球为事件 A，设另外一个小球的颜色是白色、黑色分别记为事件 C_1、C_2。

（a）在不知道第 1 次摸球的结果时，由于没有其他任何信息，因此另外一个小球的颜色是黑或者白的可能性是相等的。而知道了第 1 次摸球的结果后，我们便可以将新信息与我们先前的认知相结合，更新我们对于事件 C，即另外一个小球的颜色的认知。利用贝叶斯公式可得

$$P(C_1|A)=\frac{P(AC_1)}{P(A)}=\frac{P(C_1)P(A|C_1)}{P(C_1)P(A|C_1)+P(C_2)P(A|C_2)}=\frac{0.5\times1}{0.5\times1+0.5\times0.5}=\frac{2}{3}\text{。}$$

（b）第 2 次摸球的结果相当于在第 1 次摸球的基础之上进一步更新我们对于事件 C 的认知。类似的，利用贝叶斯公式可得结果。

以拉普拉斯的论文中出现的公式作为出发点，可以设计问题 3，探讨其公式的合理性与不合理性，发展学生的质疑精神与说理能力。

【问题 3】法国数学家拉普拉斯最初对于贝叶斯公式的表述一共有两个式子，即（1）和（2）。拉普拉斯提出的内容，一定是正确的吗？

（a）请你观察，这两个式子与正式的贝叶斯公式相比有什么联系与区别；

（b）请你试着在（1）的基础上，证明（2）。

问题 3 非常值得师生深入思考和讨论。

（a） 这两个式子是在等可能事件的情况下的贝叶斯公式，即特殊条件下的贝叶斯公式。

这也启发教师和学生，等可能事件在我们的认知中根深蒂固，一方面要正确认识“同等无知原则”，另一方面要多举反例、练习等方式破除固有观念。

（b） 因为 $\dfrac{P(B_{\mathrm{i}}\mid A)}{P(B_{\mathrm{j}}\mid A)}=\dfrac{P(A\mid B_{\mathrm{i}})}{P(A\mid B_{\mathrm{j}})}$，所以 $P(B_{\mathrm{i}}\mid A)=P(A\mid B_{\mathrm{i}})\dfrac{P(B_{\mathrm{j}}\mid A)}{P(A\mid B_{\mathrm{j}})}$，又因为 $\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_{\mathrm{j}}\mid A)=1$，

所以 $P(B_{\mathrm{i}}\mid A)=\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_{\mathrm{i}}\mid A)=\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_{\mathrm{i}})\dfrac{P(B_{\mathrm{j}}\mid A)}{P(A\mid B_{\mathrm{j}})}=\dfrac{P(A\mid B_{\mathrm{i}})}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_{\mathrm{j}})}$，故 $P(B_{\mathrm{i}}\mid A)=\dfrac{P(A\mid B_{\mathrm{i}})}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_{\mathrm{j}})}$。

3.3 德育价值

条件概率的历史发展也为我们的课堂提供了良好的德育素材。

让我们将目光投向三百年前的英国数学家贝叶斯。贝叶斯生前是一位牧师，他作为一名业余数学家，出于对数学的兴趣，对概率、三角学、几何学、方程求解、数列和微分学均做出了相关讨论。另外，他并不局限于数学，对于电学、光学和天体力学等主题，他也有自己的思考[22]。而直至贝叶斯离世后，他的论文才经他的朋友发现，为世人所知，并产生了巨大的影响。

贝叶斯公式 $P(B_i\mid A)=\dfrac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{P(A)}$ 也蕴含着人生哲理。$P(B_i)$ 可以看作人们根据以往的经验所形成的对事件 B_i 的认知，事件 A 是新获得的知识。我们需要将以往的经验与新获得的知识相结合，进而对于事件 B_i 的认知从 $P(B_i)$ 更新到 $P(B_i\mid A)$。单纯只考虑以往经验，忽视眼前因素，抑或是只考虑眼前因素，忽视过往经验，都是不可取的行为。

了解条件概率之“前世今生”， 一位位数学家、一个个数学概念在教师和学生心中变得更加鲜活。科学技术的发展并非一朝一夕之功，是无数前辈的智慧结晶才有了如今我们的现代化成果。教师也应教育学生学习前人的品质，对世界保持好奇，不断学习、阅读、思考，不断创新，日积月累，为我国的科技事业发展增砖添瓦。

参考文献

[1] Falk, R. Conditional probabilities: insights and difficulties[C]. *The International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS 2), 1986: 292-297.

[2] 随倩倩. 评估学生条件概率学习的困难[D]. 上海: 华东师范大学, 2012.

[3] 李杰民. 数学学科大概念及其教学研究[D]. 广东: 广州大学, 2021.

[4] Debnath, L., & Basu, K. A short history of probability theory and its applications[J]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2015(46): 13-39.

[5] 李杰民, 廖运章. 条件概率的本质及其教学建议[J]. 数学教育学报, 2021, 30(1): 54-60.

[6] Hald, A. *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 193*0 [M]. New York: Wiley, 1998: 155-156, 161.

[7] Daston, L. *Classical Probability in the Enlightenment* [M]. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1988: 231.

[8] Gorroochurn, P. *Classic Problems of Probability* [M]. New York: Wiley, 2012: 83.

[9] De Moivre, A. *The Doctrine of Chances* [M]. Providence: American Mathematical Society, 2023: 6-7.

[10] Bayes, T., & Price, R. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances [J]. *Philosophical Transactions*, 1763, 53: 370-418.

[11] Todhunter, I. *A History of the Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace* [M]. Cambridge and London: Macmillan & Co., 1865: 297-298, 466.

[12] Stigler, S. M. *The History of Statistics: The Measurement of Uncertainty Before 1900* [M]. Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University Press, 1986: 103.

[13] Laplace, P. S. Memoir on the probability of the causes of events [J]. *Statistical Science*, 1986, 1: 364–378.

[14] 于忠义. 谁开创了贝叶斯学派?——对拉普拉斯 1774 年一篇文章的回顾[J]. 统计与信息论坛, 2008(1): 85-90.

[15] Bernoulli, J. *The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis, translated by Edith Dudley Sylla* [M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2006: 326-327.

[16] 陈希孺. 数理统计学简史[M]. 湖南: 湖南教育出版社, 2002: 18.

[17] Kolmogorov, A. N. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [M]. Heidelberg: Springer Berlin, 1933: 6.

[18] Doob, J. L. Stochastic processes depending on a continuous parameter[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1937, 42: 107-140.

[19] Uspensky, J. V. *Introduction to Mathematical Probability* [M]. YORK, PA: the Maple Press Company, 1937: 31.

[20] Salsburg, D. *The Lady Tasting Tea: How Statistics Revolutionized Science in the Twentieth Century* [M]. New York: W. H. Freeman and Company, 2001: 127.

[21] 罗小军. 巧借图形讲解《条件概率》[J]. 语数外学习(高中版上旬), 2018(12): 45.

[22] Dale, A. I. *Most Honourable Remembrance: The Life and Work of Thomas Bayes* [M]. New York: Springer, 2003: xxii-xxiii.

专题研究

《几何原本》在初中数学留白创造式教学中的应用

彭纯莉

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

今天，如何在教学中培养学生的创新意识和创新能力，是摆在教师面前的重要课题。近年来，人们提出“留白创造式”这一新的教学方式，强调在课堂教学中为学生留出足够的思维空间和探究机会，让他们在自主学习过程中创获新知、陶熔品性[1]。在留白创造式教学中，教师的留白通常包含陈述之白、发现之白、论证之白、方法之白、问题之白和超越之白六种形式，而数学史为留白设计提供了问题源泉和思想启迪[2-4]。

古希腊数学家欧几里得（Euclid, 约前 325-约前 265）的《几何原本》是一部传播几何学知识的伟大著作，是数学史上最早用公理化思想铸造完整演绎逻辑体系的典范，具有重要的地位和深远的影响，被誉为“数学圣经”。19 世纪以前，《几何原本》是学校数学教育的主要内容，欧几里得几乎成了几何学的代名词。20 世纪初，在培利（J. Perry, 1850-1920）运动的影响下，此书逐渐失去了往日的辉煌。直至今日，中学数学课程的目标和内容都已发生巨大的变化，此书的教育价值更加受到人们的忽视。

打开数学历史的画卷可以发现，欧几里得的留白为后世数学家的创新——新的方法、新的命题、甚至是新的学科提供基础。这启示我们，《几何原本》这部名著对于创新意识和创新能力的培养依然会有独特的参考价值。迄今为止，《几何原本》中的部分内容已被运用于有关的 HPM 教学案例之中。本文拟通过具体的例子来分析欧几里得的有关定义、公理、命题和思想方法在留白创造式教学中的作用，为教学提供参考。

2 留陈述之白，促定义创新

数学概念是导出数学定理和法则、分析和解决问题的基础，李邦河院士曾说：“数学玩的

是概念，而不是纯粹的技巧。”[5]根据新课程标准的要求，需要培养学生对数学概念的理解和运用能力。

对于一个数学概念，古今定义往往是不同的。教学中，教师可以参照欧几里得对某个几何概念的定义，让学生自己下定义，从而留下“陈述之白”。

《几何原本》卷一根据边和角对四边形进行分类，其中长方形的定义是：“在四边形中，四个角都是直角，但四边不全相等的，叫做长方形。”卷二又给出矩形的定义：“有两邻边夹直角的平行四边形称为矩形。”在第一个定义中，长方形不包含正方形，而在第二个定义中，矩形包含了正方形。可见，在欧几里得眼里，长方形和矩形并不完全相同。

在“矩形的判定”教学中，教师首先抛出问题：“什么样的四边形是矩形？”学生给出了以下回答（图 1）：

- 四个角都是直角的四边形是矩形；
- 由四个相等的角组成的四边形为矩形；
- 两组对边分别平行，且有一个角为直角的四边形是矩形；
- 两组对边分别相等，且有一个角为直角的四边形是矩形；
- 一组对边平行且相等，且有一个角为直角的四边形是矩形；
- 对角线相等且互相平分的四边形是矩形；

……

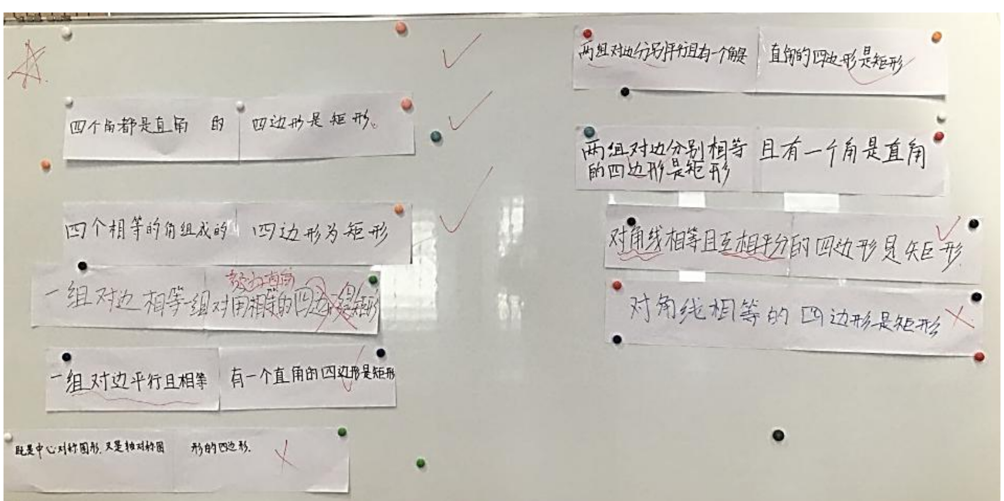


图 1 学生关于矩形的定义

教师让学生在黑板上展示上述定义，并将其与欧几里得的两个定义进行比较。经过讨论，学生得出结论：这些定义都与欧几里得的矩形定义等价，都可以叙述成“有一个角是直角的平行四边形叫做矩形”。

实际上，教师还可以进一步留白，启发学生提出新的定义：上述定义中，有的定义涉及四个角，有的定义涉及一个角，那么利用三个角或两个角可以定义矩形吗？学生可能会进一步提出：

- 有三个角是直角的四边形是矩形；
- 有一组对角是直角，且有一组对边平行的四边形是矩形；
- 有一组对角是直角，且有一组对边相等的四边形是矩形；
- 有一组对角是直角，且两条对角线相等的四边形是矩形；
- 有两个邻角是直角，且有一组对边相等的四边形是矩形；
- 有两个邻角是直角，且两条对角线相等的四边形是矩形；

……

教师还可以让学生进一步思考：为何欧几里得的第一个定义与今天不同呢？从而让他们认识到，如果没有平行线的知识，对四边形进行分类是很不方便的。

3 留方法之白，助表征转化

我们今天用符号来表达的代数公式或恒等式，在 16 世纪以前的数学文献中往往都是以几何图形来表征的，这是因为，在韦达（F. Viète, 1540-1603）创立符号代数之前，人们不会用字母来表示任意数或一类数。因此，数学史为培养学生表征转化能力提供了参照。在代数公式的教学中，教师可以借鉴欧几里得的几何命题，设计剪纸、拼图或构造无字证明的活动，让学生自主推导或验证有关公式，从而留下“方法之白”。

丹麦著名数学家和数学史家邹腾（H. G. Zeuthen, 1839-1920）曾经指出，《几何原本》第二卷采用了“几何代数法”，即用几何方法解决代数问题。如该卷命题 3 提出：“若任意两分一线段，则由整条线段与分线段之一所夹的矩形等于两分线段所夹的矩形与上述分线段上的正方形之和。”[6]用今天的代数符号表达，该命题说的就是 $a\left(a+b\right)=a^2+ab$，如图 2 所示。同卷命

题 4 提出："若一条线段被任意分成两段，则整条线段上的正方形等于两条分线段上的正方形之和再加上两条分线段所构成的矩形的两倍。"[6]用今天的代数符号来表达，命题说的就是 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，如图 3 所示。

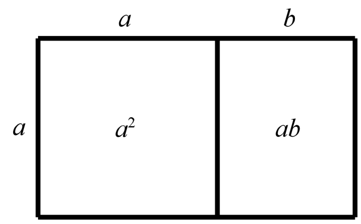


图 2 《几何原本》卷二命题 3

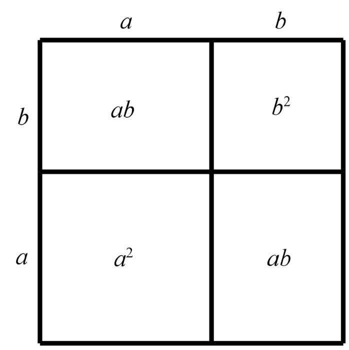


图 3 《几何原本》卷二命题 4

在课例"完全平方公式"中，教师通过"已知正方形的面积，求边长"问题引入 $(a+b)^2$ 的计算，在学生用代数方法推导出公式后，教师提出问题："能否用几何方法来验证该公式呢？"引导学生利用欧几里得的图形，在符号表征和图形表征之间进行转化[7]。

《几何原本》卷二命题 5 提出："如果把一条线段既分成相等的线段，再分成不等的线段，则由两不等线段所夹的矩形与两分点之间一段上的正方形之和等于原线段一半上的正方形。"[6]在课例"平方差公式"中，在学生应用平方差公式解决计算问题（如 39.8×40.2 、99.4×100.6 ）之后，教师提出问题："能否用字母写出一般的等式？"在学生给出恒等式

$$ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

之后，教师进一步提出问题："古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中给出过上述等式的几何证明，你能用几何方法验证这个等式吗？"有了之前用几何方法验证平方差公式的经验，学生成功地用图 4 验证了上述公式。实际上，该图简化了欧几里得的原图。

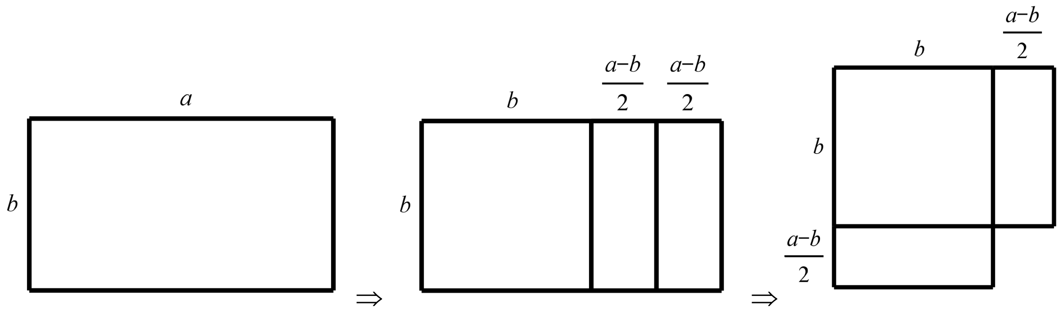


图 4 将长方形割补成拐尺形

4 留论证之白，引思维延伸

今日初中数学课程中的几何命题大多可以上溯至《几何原本》，但由于教科书采用的逻辑体系不同于《几何原本》，因此，对一些命题的证明也随之不同。此外，《几何原本》中的有关命题也往往会成为有关数学推理的依据。在命题或问题解决的教学中，教师可以参照欧几里得的证明方法，让学生通过小组合作对有关命题加以证明，从而留下“论证之白”。

《几何原本》卷一命题 5 提出：“等腰三角形的两底角相等，将腰延长，与底边形成的两个补角亦相等。”[6]这就是著名的“驴桥定理”。欧几里得的证明如下：如图 5，作等腰△*ABC*，使得 *AB*=*AC*，延长 *AB* 至点 *D*，延长 *AC* 至点 *E*，使得 *BD*=*CE*，依次证明△*ABE*≌△*ACD*，△*BCD*≌△*CBE*，即得命题的结论。后世数学家对欧几里得的证明作了改进，如 3 世纪末的帕普斯（Pappus, 约 290-约 350）给出“镜像法”：如图 6 所示，将△*ABC* 看成△*ABC* 和△*ACB* 的叠合，利用 SAS 定理，即得 $\angle B=\angle C$。5 世纪的普罗克拉斯（Proclus, 约 411-485）给出“拦腰法”：如图 7 所示，分别在 *AB* 和 *AC* 上取点 *D* 和 *E*，使得 $AD=AE$，依次证明△*ABE*≌△*ACD*，△*BCD*≌△*CBE*，即证得结论。

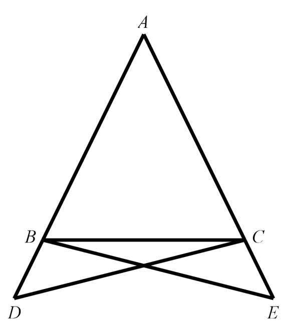


图 5 驴桥定理

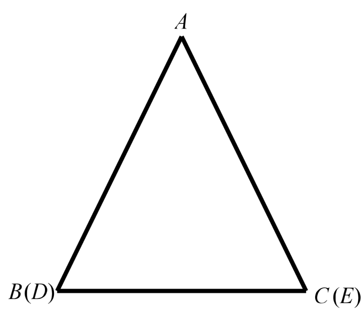


图 6 帕普斯的镜像法

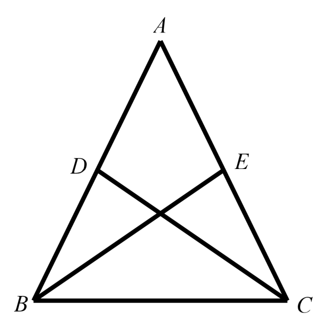


图 7 普罗克拉斯的拦腰法

在“全等三角形判定”的教学中，教师在引导学生证明“边角边”定理之后，提出任务：利用边角边定理，如何证明“等腰三角形底角相等”？学生给出了多种不同的证明，其中包括普罗克拉斯的“拦腰法”和帕普斯的“镜像法”，尽管没有出现欧几里得的“驴桥法”，但与欧几里得一样，先后两次运用了边角边定理。教师利用古今联系策略，对学生的证明作了评价。

《几何原本》卷六命题 2 提出：“如果一条直线平行于三角形的一条边，那么所截的边成比例；如果三角形的边被截成比例，那么通过两点的直线平行于三角形的第三边。”[6]欧几里得运用面积的方法来证明该命题，证明如下：

（1）设在△*ABC* 中，*DE*//*BC*，连接 *BE* 和 *CD*。因为△*BDE* 和△*CDE* 有共同底边 *DE*，且 *DE*//*BC*，所以 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDE}$，于是得 $S_{\triangle BDE}:S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDE}:S_{\triangle ADE}$，从而 $BD:AD=CE:AE$。

（2）设△*ABC* 的边 *AB* 和 *AC* 被分比例为 $BD:AD=CE:AE$，因 $BD:AD=S_{\triangle BDE}:S_{\triangle ADE}$，$CE:AE=S_{\triangle CDE}:S_{\triangle ADE}$，故 $S_{\triangle BDE}:S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDE}:S_{\triangle ADE}$，于是 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDE}$，*DE*//*BC*。

在课例“三角形的中位线”中，在学生解决三角形四等分问题并通过剪纸猜想出中位线的性质之后，教师提出“证明三角形中位线性质”的任务[8]。学生运用转化思想给出各种证明，包括形与形的转化以及线与面的转化。后一类证明类比了欧几里得的方法：如图 8，在△*ABC* 中，因为 *BD*=*AD*，所以 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle ADE}$，同理 $S_{\triangle CDE}=S_{\triangle ADE}$，所以 $S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDE}$，又因为有公共底 *DE*，所以 *DE*//*BC*。因为 $S_{\triangle EBC}=S_{\triangle ABE}=2S_{\triangle BDE}$，又因为△*EBC* 和△*BDE* 等高，所以 *BC*=2*DE*。

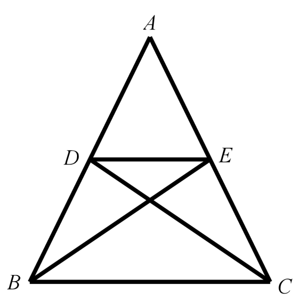


图 8 三角形中位线定理的面积证法

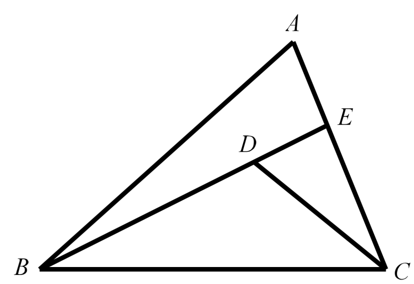


图 9《几何原本》卷一命题 21

《几何原本》卷一命题 21 提出：“以三角形一边的两个端点向三角形以内引两条相交线，那么交点到这两个端点的这两条线段的和小于三角形余下的两条边的和，所形成的角大于三角形同侧的内角。”[6]欧几里得的证明如下；如图 9，在△*ABE* 中，$AB+AE>BE=BD+DE$，在

$\triangle CDE$ 中，$CE+DE>CD$，故得 $AB+AC=AB+AE+EC>BD+DE+EC>BD+CD$。上述命题确定了三角形中两条线段之和的单调性，成了有关几何问题解法的依据。2019 年安徽中考的一道数学题就是其中一例。

如图 10，在正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 将对角线 AC 三等分，且 $AC=12$。点 P 在正方形的边上，求满足 $PE+PF=9$ 的点的个数。

解题思路是：取点 E 关于 AB 的对称点 E'，连结 $E'F$，交 AB 于点 G，则 $E'F=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}<9$，因此，在 AB 上点 G 的上方和下方各有一点 P，满足 $PE+PF=PE'+PF=9>E'F$。对于上述解法，教师可以向学生提出以下问题：为什么在点 G 的上下各只有一点满足条件呢？学生如果能够说明：从点 G 开始，点 P 向上或向下运动过程中，$PE'+PF$ 逐渐增大，问题就得到了解决。因此，对于这道中考题的探讨，可以让学生实现与欧几里得的对话。

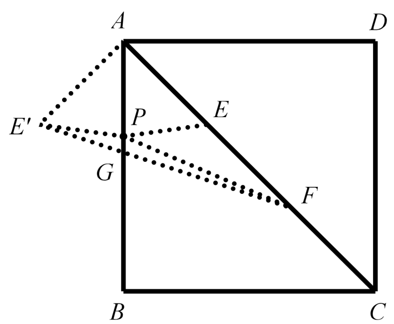


图 10 2019 年安徽中考题

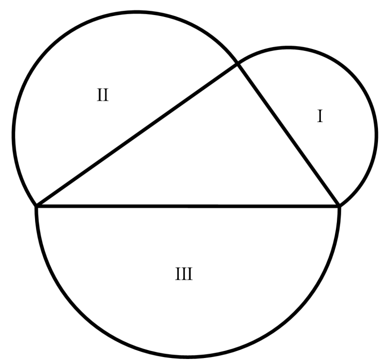


图 11 勾股定理的推广之一

5 留问题之白，激探究兴趣

《几何原本》中的许多命题都留下了进一步探究的空间。在教学中，教师可以介绍若干“基于数学史的问题提出”策略[9]，进而选择《几何原本》的某个命题作为出发点，让学生通过条件操作、目标操作、对称互换等策略，提出新的数学问题，从而留下“问题之白”。

对于卷一命题 16：“在任意三角形中，若延长一边，则外角大于任何一个内对角”，运用对称互换策略，学生可以提出如下问题：“如果一个多边形的每一个外角都大于其不相邻的内角，那么该多边形是否一定为三角形？”又如，卷一提出毕达哥拉斯定理：“在任意一个直角

三角形中，直角所对边上的正方形，等于两条直角边上正方形之和”，运用对称互换策略，学生可以提出如下问题：“在一个三角形中，如果一边上的正方形面积等于另两边上的正方形面积之和，那么该三角形一定是直角三角形吗？”运用条件操作策略，学生可以提出如下问题：

- 若在直角三角形的三边上分别作三个半圆，则其面积有何关系？（图 11）
- 若在直角三角形的三边上分别作以三边为对应边的相似三角形，则其面积有何关系？（图 12）
- 作一个正方形，使其面积等于已知长方形的面积。（图 13）

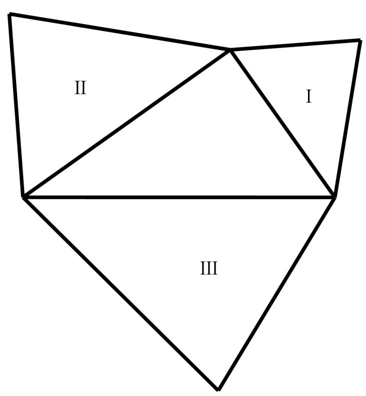


图 12 勾股定理的推广之二

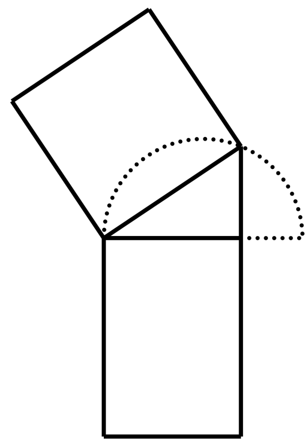


图 13 与已知长方形等面积的正方形

《几何原本》卷一命题 37 提出：“同底且在相同的两条平行线之间的三角形彼此相等。”教师可以引导学生将该命题与轨迹问题联系起来，进而提出如下新问题：

- 等腰三角形的底边固定，则其顶点的轨迹是什么？
- 三角形的底边固定，其顶点在运动过程中，三角形的面积保持不变，则顶点的轨迹是什么？
- 三角形的底边固定，其顶点在运动过程中，三角形的面积保持不变，则顶点在什么位置时，三角形的周长最小？
- 三角形的底边固定，其顶点在运动过程中，三角形的两腰之比始终等于 2:1，则顶点的轨迹是什么？

《几何原本》卷二命题 10 提出：“在一条被二等分的线段的一端按原直线方向加上一条线段，那么，总线段上的正方形的面积与加线段上的正方形的面积之和，等于原线段一半为边的正方形的面积与另一半加上加线段之和为边的正方形面积的和的两倍。”[6]采用自由式策略，

对给定的线段赋值，并改变目标，可以编制一道新的数学问题：

如图 14，$CE \perp AB$，$CA = CB = CE$，$EF \parallel AB$，$DF \parallel CE$，FD 与 EB 交于点 G。线段赋值：$BE = \sqrt{2}$，$DB = \dfrac{1}{2}$。

（1）求线段 FG 的长度。

（2）设 P 是线段 AB 上的一个动点（不与点 A、B 重合），点 P 到 AE 与 BE 的距离是否为一个定值，若是，求出此定值。

（3）延长 EC 使得 $EC = CH$，连接 BH，GH，求点 B 到 GH 的距离。

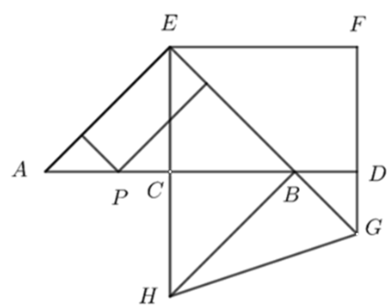


图 14 《几何原本》卷二命题 10 的改编

6 留超越之白，启思想升华

在留白创造式教学中，教师在学生完成补白之后进行古今联系，并让学生对命题证明或问题解决背后的数学思想加以总结，或选取《几何原本》中的典型命题及其证明，让学生对其背后的数学思想进行提炼，从而留下超越之白。

《几何原本》中的思想方法对于今日几何教学有重要意义。在卷一众多命题的证明中，可以感受到欧几里得对转化思想的普遍使用。如卷一命题 20 提出：“在任何三角形中，任意两边之和大于第三边。”欧几里得的证明如下：如图 15，延长 BA 至点 D，使得 $AD = AC$，则 $AB + AC = AD$，于是将△ABC 的两边之和转化为△DBC 的一条边，在△DBC 中，利用大角对大边（卷一命题 19），即证得结论。又如，对于上文提到的卷一命题 16，欧几里得通过作倍长中线 BF（图 16），将 $\angle A$ 转化为 $\angle ACD$ 的一部分 $\angle ACF$，从而证得结论。

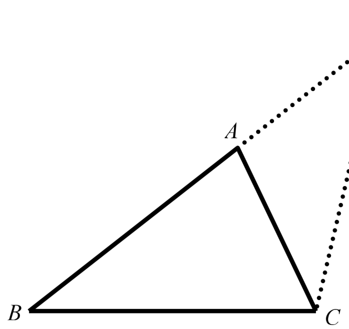


图 15 《几何原本》卷一命题 20

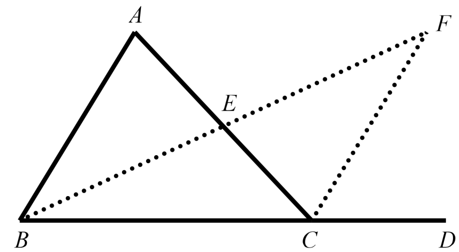


图 16 《几何原本》卷一命题 16

欧几里得关于卷一命题 47（勾股定理）的证明则是通过全等三角形实现正方形与长方形之间的转化。上文提到的卷六命题 2 的证明则实现了线与面的转化。除了转化，《几何原本》中还有其他许多思想方法，如特殊到一般、分类讨论等。

此外，关于勾股定理，中国古代数学家的证明方法（图 17）与欧几里得（图 18）迥然不同，教师可以引导学生思考：当欧几里得“遇见”刘徽时，他们会如何评价对方的证明呢？从而促进他们对数学证明功能的深刻理解。

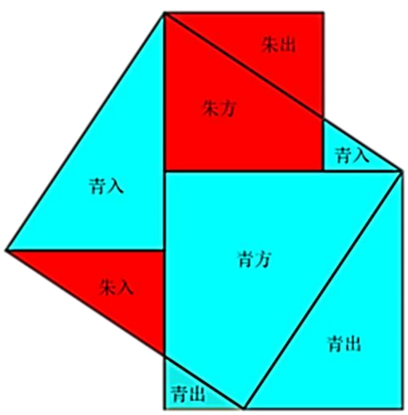


图 17 刘徽对勾股定理的证明

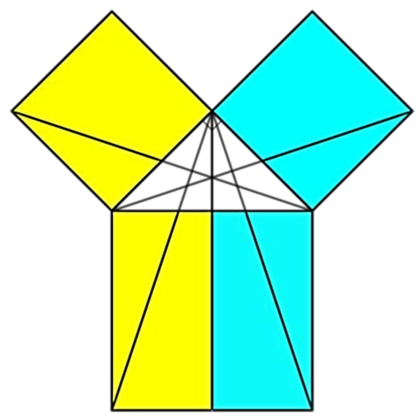


图 18 欧几里得关于勾股定理的证明

7 结 语

以上我们看到，数学圣经《几何原本》在今日初中数学课堂上大有可为：欧几里得的定义是古今对话的素材，图形是表征转换的参照，命题是问题提出的起点，方法是命题证明的依据。《几何原本》为今日初中数学留白创造式教学提供了诸多启示。

首先，增强留白意识。虽然《几何原本》是经典之作，内容丰富，逻辑严谨，但也处处留白，为后世留下广阔的探索空间，因此，此书为初中留白创造式教学提供了思想启迪。教师在课堂中应让学生成为补白的主体，给学生留下足够的探究空间。

其次，丰富留白形式。《几何原本》中的定义、命题、思想、方法蕴含了所有的六“白”，借鉴欧几里得的有关定义，可留陈述之白，改变欧几里得的命题，可留发现之白，参照欧几里得的证明，可留方法之白、论证之白，叩问欧几里得的命题，可留问题之白，提炼欧几里得的思想，可留超越之白。教师在教学过程中，可以通过设置不同的探究活动，从新知引入、问题设计、概念辨析、定理证明、公式推导以及德育实施这六个环节进行留白，上文的例子在不同的环节进行了留白。

再次，确定留白策略。在留白创造式教学中，陈述之白、发现之白对应于“是什么”，论证之白对应于“为什么”，方法之白、问题之白和超越之白对应于“还有什么”，因此，提出问题是留白的策略之一，典型的问题有“什么样的四边形是矩形”“如何证明三角形中位线定理”“可否用几何方法验证完全平方公式”和“欧几里得运用了什么思想方法”等，利用否定属性策略改编问题是留白的另一策略，可以让学生编制丰富多彩的数学问题，培养其创新能力。

最后，加强补白评价。利用《几何原本》中的素材实施留白创造式教学时，教师可以利用“古今对照”的策略，对学生的补白成效做出评价，使学生得以跨越时空，与古希腊数学家“对话”，从而提升数学学习的自信心。例如，当学生用拼图法验证完全平方公式、用面积法证明三角形中位线定理时，教师可以称赞他们想数学家之所想，是“小小的数学家”。

参考文献

[1] 王华, 汪晓勤. 中小学数学留白创造式教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2022: 25.

[2] 汪晓勤, 邹佳晨, 王华. 数学史与留白创造式教学[J]. 数学通报, 2023, 62(3): 1-6.

[3] 汪晓勤. 数学史上的留白与创新[J]. 中学数学月刊, 2023(4): 1-4.

[4] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于中华优秀传统数学文化的高中数学留白创造式教学初探[J]. 中小学课堂教学研究 ,2023(9): 1-6.

[5] 李邦河. 数的概念的发展[J]. 数学通报, 2009, 48(8): 1-3, 9.

[6] 欧几里得. 几何原本[M]. 兰纪正, 朱恩宽, 译. 南京: 译林出版社, 2014: 2-73.

[7] 栗小妮, 沈中宇. “完全平方公式”: 从历史中找动因、看形式[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2018(3): 46-51.

[8] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(1): 35-41.

[9] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020, 59(5): 9-15.

等周问题在高中数学复习课中的应用

钱骏霖

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》（以下简称“课标”）指出，依据数学学科特点，关注数学逻辑体系、内容主线、知识之间的关联，重视数学实践和数学文化是数学课程设计的重要依据之一[1]。数学探究活动和数学建模活动一同被列为高中数学课程的五大主题之一。新高考也注重对学生学科核心素养的考查，通过探究性问题，重点考查学生的思维过程、实践能力和创新意识。近几年的高考试题出现了许多新颖的材料，如 2022 年全国二卷单选题第 3 题，结合中国古代建筑中的举架结构考查了等差数列和斜率等知识，既体现了数学抽象的过程，也让学生感受到中华优秀传统文化的魅力。

在高中阶段，尤其是高三年级，复习课所占的比重很大。在现有对复习课的研究中，有学者将复习课分为基础复习课、例题复习课和试卷讲评课[2]，也有学者将其分为第一轮复习课、第二轮复习课和试卷讲评课[3]。在实际教学中，复习课常常以知识点复现、不同题型的讲解、考试训练等形式出现，忽视了知识之间的联系性，复习效率较低，也容易使学生感到枯燥。明确命题方向、把握复习规律、优化备考方法是数学高考复习的教学追求[4]，在新高考的背景下，数学史与数学文化在复习课中的价值日益显现，尤其是基于数学史的问题设计得到了关注。

歌德曾说：“一门科学的历史就是这门科学本身”。数学史对学生的教育价值有“知识之谐”“方法之美”“探究之乐”“能力之助”“文化之魅”和“德育之效”等六个方面[5]。从数学情境的角度来说，历史中的素材是绝佳的真实情境。等周问题有着漫长的历史，亦不是在一道问题中可以完整地说明的。因此，在对等周问题的素材进行改编时，我们可以设计一些留白活动。借由这些留白，教师可以引导学生进一步探索，同时培养学生学习数学的兴趣。同时我们注意到，课标附录中的案例 25 将证明“周长一定的四边形中正方形所围面积最大”作为数学任务，体现了课标对等周问题的关注[1]。

近年来，某市模拟题中出现了许多以历史上真实探索过的数学问题为材料的试题，例如，

以著名的“挂谷问题”为素材编制的探究题。这些材料不仅能让学生感受到数学文化的魅力，还能体现研究数学问题的一般思路，对于学生数学核心素养的提高颇有帮助。这启示我们在复习课中也可以利用历史素材，展现数学的联系和发展性。鉴于此，本文结合等周问题的发展历史，设计一些可用于高中复习课的探究性问题，既能综合考查学生对高中阶段知识的掌握，又能使学生对该数学问题发展的历史产生一定的了解和兴趣，鼓励学生对该问题自主进行进一步的探索。

2 等周问题的历史概述

等周问题有着悠久的历史，其源于现实问题。例如，用相同长度的篱笆或绳子怎样围出最大的面积是人们在生活中常常遇到的问题。

公元前 5 世纪，著名历史学家修昔底德（Thucydides, 约前 460-约前 400）通过绕岛航行一周所需时间来估计岛的大小，也就是说，修昔底德将测量图形的周长和面积混为一谈。还有许多古人也曾认为周长越大的图形面积也越大．这反映了他们对等周问题的误解。

古希腊亚历山大时期，生活在公元前 200 年到公元 100 年之间的芝诺多罗斯（Zenodorous, 约公元前 2 世纪）写过一本关于等周形（具有相等周长的一些图形）的书，其中证明了以下在希腊数学中较为新颖的定理：

（1）周长相等的 n 边形中，正 n 边形的面积最大；

（2）周长相等的正多边形中，边数愈多的正多边形面积愈大；

（3）圆的面积比同样周长的正多边形的面积大；

（4）表面积相等的所有立体中，以球的体积为最大。

亚历山大晚期的帕普斯（Pappus, 约 4 世纪）生活在古希腊数学的衰落时期，他对几何学的工作是“高潮后的一种低潮”，而他的《数学汇编》是对古希腊数学全面的总结[6]。《数学汇编》中的第五篇给出了芝诺多罗斯关于等周曲边形问题的证明、结果和推广。帕普斯在《数学汇编》第五篇的开始用十分生动的语言引入了等周问题：“智慧的蜜蜂知道，消耗相同的材料，底面是正六边形的蜂房比底面是正三角形或正方形的蜂房贮存更多的蜂蜜。但是自认为在智慧方面比蜜蜂更胜一筹的我们将研究稍微广泛一些的问题。”[7]也就是说，蜜蜂知道，相同周长的正六边形、正方形和正三角形中，正六边形的面积最大。“稍微广泛一些的问题”，就是在周

长一定的平面图形中何者面积最大的问题。后来，许多的数学家都对该问题做了讨论与探索。

随着人们对数学知识的不断积累，数学家对等周问题的证明一步步臻于完善。19 世纪几何学家斯坦纳（J. Steiner, 1796-1863）用朴素的几何方法对这一定理给出了一个并不完备的证明。1870 年，魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass, 1815-1897）做出了一个严格的证明。1902 年，赫尔维茨（H. A. Hurwitiz, 1859-1919）利用傅立叶级数给出了证明[8]。后续的数学家对等周问题又给出了更多的证明方法，还将等周问题作了更多的推广。利用等周的思想，数学家们还解决了圆周率的逼近等许多其他的问题[9]。

作为数学问题的等周问题已经有了答案，而于数学教育而言，等周问题却是一座可进一步挖掘的宝库。在现有的案例中，等周问题最常见的应用是基本不等式的引入环节。事实上，早期等周问题探索中产生的许多命题，都可以利用高中阶段的知识加以证明。利用“等周问题”这一主题将它们串联起来，可以形成一道知识点多样、体现数学问题探究过程和发展历史的问题。

3 问题设计

3.1 回望历史

“智慧的蜜蜂知道，消耗相同的材料，底面是正六边形的蜂房比底面是正三角形或正方形的蜂房贮存更多的蜂蜜。但是自认为在智慧方面比蜜蜂更胜一筹的我们将研究稍微广泛一些的问题。”

——帕普斯《数学汇编》

在这本全面总结古希腊数学的著作中，帕普斯给出了芝诺多罗斯关于等周形的问题的证明、结果和推广。“稍微广泛一些的问题”，是指“具有相同周长的平面图形中何者面积最大”的“等周问题”。早在希腊亚历山大时期，芝诺多罗斯就写了一本相关的书，其中证明了下列定理：

定理 1：周长相等的 n 边形中，正 n 边形的面积最大。

定理 2：周长相等的正多边形中，边数 n 越大，正多边形的面积越大。

3.2 问题初探

问题 1：在定理 1 的一种证明思路中，若 n 边形的某相邻两边长度不等，则可以构造出和原 n 边形周长相等而面积更大的 n 边形．事实上，该思路需要用到下面的命题：若 $\triangle ABC$ 的一条边 AB 长度固定，另两条边 AC 和 BC 的长度之和固定，则当 $AC=BC$ 时，该三角形的面积有最大值．试证明该命题。

问题 1 的解答思路：设 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$，$\angle B$ 和 $\angle C$ 所对边分别为 a，b 和 c，则在该问题中 c 为定值，$a+b$ 也为定值（不妨记为 M）。

思路 1（利用余弦定理、基本不等式进行求解）：由余弦定理，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}ab\sin C\\
&=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C}\\
&=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}{4a^2b^2}}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-\left(M^2-c^2-2ab\right)^2}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{-\left(M^2-c^2\right)^2+4\left(M^2-c^2\right)ab}\\
&\le\frac{1}{4}\sqrt{-\left(M^2-c^2\right)^2+4\left(M^2-c^2\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}\ \left(\text{当且仅当}a=b\text{时取等号}\right)\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{-\left(M^2-c^2\right)^2+\left(M^2-c^2\right)M^2}\\
&=\frac{c}{4}\sqrt{\left(a+b\right)^2-c^2}
\end{aligned}
$$

由基本不等式的取等条件知当且仅当 $AC=BC$ 时 $\triangle ABC$ 的面积有最大值。

思路 2（利用海伦公式、基本不等式进行求解）：$\triangle ABC$ 的半周长 $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{M+c}{2}$ 也是定值。由海伦公式，

$$
\begin{aligned}
S_{\triangle ABC}&=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}\\
&=\sqrt{p\left(p-c\right)\left(p^2-Mp+ab\right)}
\end{aligned}
$$

$$\le\sqrt{p\left(p-c\right)\left(p^2-Mp+\left(\frac{M}{2}\right)^2\right)}\text{（当且仅当 }a=b\text{ 时取等号）}$$

$$=\frac{c}{4}\sqrt{\left(a+b\right)^2-c^2},$$

由基本不等式的取等条件知当且仅当 $AC=BC$ 时△ABC 的面积有最大值。

思路 3（利用椭圆的定义和性质）： 以 AB 中点为原点，AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系。则由 $AC+BC$ 为定值（且大于 AB）知 C 点的轨迹为以 A，B 为焦点的椭圆（除去长轴端点）。由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|y_c|$ 知，点 C 在短轴端点时，$|y_c|$ 最大，$S_{\triangle ABC}$ 也最大。此时 $S_{\triangle ABC}$ 有最大值 $\frac{1}{2}\cdot c\cdot\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\frac{c}{4}\sqrt{\left(a+b\right)^2-c^2}$。

【设计意图】 本小问结论的证法比较多样，涉及到不同模块的知识。学生如果能从“两条线段长度之和为定值”联想到椭圆的定义，那么该问题将迎刃而解。若没有想到椭圆，也可根据解三角形部分的一般方法，利用余弦定理、面积公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 和基本不等式等知识加以解决，但该方法对学生的代数变形能力有较高的要求。事实上，由于题中只给出了三角形的边的信息，因此学生可能会想到使用海伦公式表示三角形的面积。利用海伦公式解决本题也是十分简洁的方法。在这三种思路中，思路 3 用到了椭圆这一看上去和本问题毫不相关的概念，芝诺多罗斯当年也绝无可能使用这种方法。但是对于生活在现代、完成了高中阶段所有新知学习的学生而言，融会贯通地使用已有的所有知识解决问题，做到“古题今解”，是数学素养的体现。

本小问的结论本身希望能让学生体会到“局部调整法”的思想。事实上，依据本小问的结论，对于一个凸多边形而言，假设它的某两条邻边长度不等，我们只需要将这两条边的长度调整为相同而保持其他各边不变，就能得到一个周长相同而面积更大的多边形。因此，完成这一问后学生将能体会到正多边形在等周问题的探索过程中发挥的重要作用。

问题 2： 在定理 2 中，若用 S_n 表示周长为 C（C 为常数）的正 n 边形的面积（$n\ge 3$）。

（a）求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式；

（b）证明：数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

思考：基于上面的探索，你认为芝诺多罗斯会对等周问题给出怎样的答案？

问题 2 的解答思路：

（a）连接正 n 边形的中心和各顶点，将正 n 边形分割成 n 个全等的等腰三角形。每个等腰三角形的底边长为 $\frac{C}{n}$，顶角为 $\frac{2\pi}{n}$。作等腰三角形底边上的高，则高的长为

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{C}{n}}{\tan\frac{\pi}{n}}=\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{n}},$$

故每个等腰三角形的面积为

$$\frac{1}{2}\quad\frac{C}{n}\quad\frac{C}{2}\quad\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{n}}\qquad\frac{C^2}{4}\quad\frac{1}{n^2\tan\frac{\pi}{n}},$$

则正 n 边形的面积为

$$S_n=n\quad\frac{C^2}{4}\quad\frac{1}{n^2\tan\frac{\pi}{n}}=\frac{C^2}{4}\quad\frac{1}{n\tan\frac{\pi}{n}}，\quad n\geq 3。$$

（b）设 $b_n=n\tan\frac{\pi}{n}(n\geq 3)$。考察函数 $f(x)=\frac{\tan x}{x}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'(x)=\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{(x\cos x)^2},x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)。$$

令 $g(x)=x-\frac{1}{2}\sin 2x,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $g'(x)=1-\cos 2x>0$，$g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增。又 $g(0)=0$，故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒大于 0，即 $f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒大于 0，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增。对任意的 $n\geq 3$，$b_{n+1}=(n+1)\tan\frac{\pi}{n+1}=\pi f\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$，$b_n=n\tan\frac{\pi}{n}=\pi f\left(\frac{\pi}{n}\right)$。由 $0<\frac{\pi}{n+1}<\frac{\pi}{n}<\frac{\pi}{2}$ 及 $f(x)$ 的单调性知 $b_{n+1}<b_n$。又由 $S_n=\frac{C^2}{4}\cdot\frac{1}{b_n}$ 且 $C>0$、$b_n>0$，故 $S_{n+1}>S_n$，即 $\{S_n\}$ 是单调递增数列。

【设计意图】对于许多学生而言，“周长相等的正多边形中，边数越多的正多边形面积越大”并不是一个陌生的结论，但他们很少对其进行过严格的论证。第一小问让学生探索周长相等的情况下正多边形的面积与其边数之间的关系式，将定理 2 转化为便于分析和证明的数学语

言。在解决这个问题时，学生要从边数较少的几种情形入手，画出对应的图形，寻找图中的数量关系，发现边数取不同值时计算图形面积的相同之处，进而将其一般化，得到一般的结论。学生过去可能经历过用圆内接正多边形周长代替圆周长估计圆周率近似值的过程，这个经验对于解决本问题帮助很大。第二问让学生证明数列的单调性，也就是定理 2 的结论。证明数列单调性的常见方法有作差、作商等，但是注意到数列的通项公式中含有正切函数，因此无论是作差还是作商都难以继续分析。因此学生可以采用函数的观点，利用导数研究对应的函数的单调性从而得到该数列的单调性。

完成本小问后，学生能够能加理性地认识到，对于周长相等的正 n 边形而言，其面积随着 n 的增大而增大。当然，我们在解决本小问时用到的三角函数、导数等工具，在芝诺多罗斯时代也是不存在的，因此本小问亦是一种“古题今解”。

在解决了问题 1 和问题 2 之后，学生应当可以感受到，等周问题的答案很可能是圆，因为当正 n 边形的边数无限增大时，正 n 边形越来越趋近于圆。虽然“圆”这个答案学生很可能早已知道，但是在经历严格的计算与证明后再提出这一猜想，也许会有更深刻的认识。学生完成了一次对等周问题的初步探索，也与古人作了一次对话。

3.3 现实情境

在现实情境中，人们往往会借助一面墙或者是一个墙角进行围地。在这些情境下，用相同长度的篱笆，怎样围面积最大呢？

问题 1：当借助一面墙进行围地时，

（a）考虑围三角形的情形。如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，A、B 在墙上。设篱笆长为 1，何时 $\triangle ABC$ 的面积最大？

（b）考虑围四边形的情况。如图 2，在四边形 $ABCD$ 中，A、D 在墙上。设篱笆长为 1，何时四边形 $ABCD$ 的面积最大？

（c）你能进一步探索围成什么形状时面积最大呢？

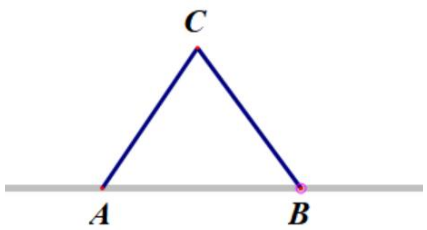


图 1 借助墙围三角形

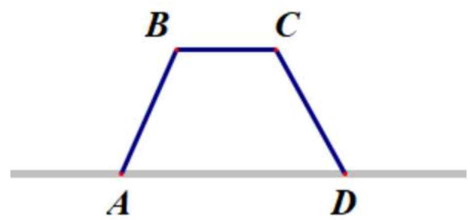


图 2 借助墙围四边形

问题 2： 当借助一个墙角进行围地时.设墙角所形成的角（即图 3、4 中的 $\angle A$ ）为 $\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$。

（a）你能对围三角形和四边形的情形进行探究吗？

（b）你能进一步探索围成什么形状时面积最大呢？

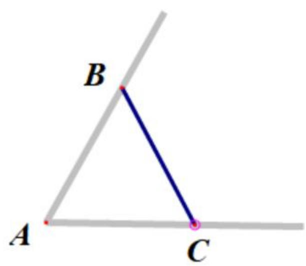


图 3 借助墙角围三角形

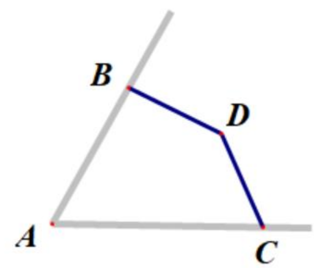


图 4 借助墙角围四边形

【设计意图】前一个环节中的两个问题，主要是数学内部的等周问题，而本题将等周问题放在现实情境中，可以看作是对最基本的等周问题的变式。遵循研究问题的一般思路，引导学生先从围三角形和四边形的情形出发，再思考 n 边形的情形，最后类似于 3.2 节，理性地认识“半圆”和“扇形”的结果。对于问题 1，学生可以利用面积公式 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ 及基本不等式进行求解。对于问题 2，学生可以利用余弦定理及基本不等式进行求解。两个问题中四边形的情形需要利用初中平面几何的知识，进一步提升了问题的综合性。限于篇幅，这两个问题具体的解答思路不再赘述。

3.4 探索之路

在后续两千多年的时间里，数学家纷纷尝试对等周问题给出一个完美的回答。19 世纪瑞士数学家斯坦纳（J. Steiner, 1796-1863）用朴素的几何方法给出了一个证明，但该证明存在缺

陷。1870 年，魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass, 1815-1897）用变分法做出了一个严格的证明。1902 年，赫尔维茨（H. A. Hurwitiz, 1859-1919）利用傅里叶级数给出了证明。正是数学家对等周问题的不断探索，促进了许多数学思想方法的发展。利用等周的思想，数学家们还解决了许多其他的问题。

3.5 拓展运用

17 世纪，法国数学家笛卡尔提出逼近圆周率的等周多边形法。

问题 1：设 R_n 和 r_n 分别为正 n 边形的外接圆和内切圆半径，R_{2n} 和 r_{2n} 分别为等周的正 $2n$ 边形的外接圆和内切圆半径，求证：$r_{2n}=\dfrac{R_n+r_n}{2}$，$R_{2n}=\sqrt{R_n\cdot r_{2n}}$。

问题 2：设有数列 $\{a_n\}$，满足 $a_1=0,a_2=1$，且 $a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+a_{n-1}}{2},n\text{为偶数}\\ \sqrt{a_n\cdot a_{n-1}},n\text{为奇数}\end{cases}$，当 n 越来越大时，a_n 会趋向于某一个常数吗？让我们利用问题 1 中的结论，从几何直观上来说明这一问题。

（a）边长为 1 的正方形的外接圆半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，内切圆半径为 $\dfrac{1}{2}$，恰好分别是数列 $\{a_n\}$ 的第 3 项和第 4 项。结合问题 1 的结论说明数列 $\{a_n\}$ 各项数值的几何意义。

（b）据此，你能猜测当 n 越来越大时 a_n 趋向于哪一个常数吗？

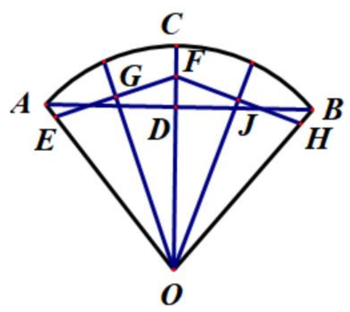


图 5 等周多边形法

【设计意图】逼近圆周率的等周正 n 边形方法基于正 n 边形的外接圆、内切圆半径与等周的正 $2n$ 边形的外接圆、内切圆半径的递推公式，是等周思想的一个应用。问题 1 需要用到的关键知识点为二倍角公式，学生需要先根据图形表达出相关角的三角函数值，再利用二倍角公

式进行代数变形。19 世纪法国数学家文森特（A.Vincent,1797-1868）据此结论构造出了问题 2 中收敛于 $\frac{\pi}{2}$ 的数列。学生需要观察该数列的递推公式与问题 1 结论之间的关系，问题中给出了边长为 1 的正方形外接圆和内接圆的半径作为脚手架，有利于学生的发现。结合几何意义，学生可以对 $\{a_n\}$ 的极限值做出合理猜测。在这个问题中，学生可以感受到“数”与“形”的紧密联系。限于篇幅，这两个问题具体的解答过程不再赘述。

4 对问题的分析和反思

4.1 作为微专题探究的等周问题

课标提出，命题时应包含探究性问题，以上的这些问题能够引导学生对等周问题作初步的探究。等周问题是历史上真实存在的数学问题，它源于现实生活中人们对周长和面积这两个常见量的观察与思考，经历了漫长的探究过程。对于学生而言，因为这类情境是真实的，因而也是有意义、有价值的，学生对此素材会感到很亲切。通过将等周问题的素材设计成复习课中的问题，能够让学生对等周问题有更多的了解。同时，将等周问题作为复习基本不等式、三角、椭圆、数列和导数等多个知识点的载体，能让学生综合运用高中阶段所学知识，在探究的过程中加深对数学知识的理解，培养学生直观想象和逻辑推理等核心素养。

数学学科素养包括理性思维、数学应用、数学探究和数学文化。[10]基于等周问题的微专题复习，不仅彰显了数学文化的魅力，还充分反映了数学探究的价值。在对等周问题进行探究的时候，学生的创新能力和实践能力将得到锻炼，为学生日后发现和提出新的问题助力。

4.2 加强数学知识联系性的探索

许多学生在学习数学时遇到了困难，不能将各模块的知识融会贯通、灵活运用。这反映了在教学过程中未能充分体现数学内部知识之间的联系。荷兰数学教育家弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905-1990）认为教师应当教给学生“充满联系的数学”，在教学时不要教“孤立的片段”，而尽可能教“连贯的材料”[11]。加强高中数学知识的联系，既可以在学生脑中形成比较完整的数学知识体系，又能提升其数学核心素养和思维能力[12]。以上复习问题通过等周问题

将基本不等式、三角函数、椭圆、数列和导数等知识串联起来，体现了高中数学各部分知识之间的联系。学生综合利用高中阶段所学知识解决一系列问题，能够感受到数学知识的整体性，也有助于学生对高中数学知识的灵活运用。

阅读理解、信息整理、语言表达和批判性思维是数学高考着重考查的关键能力[13]。在解决基于等周问题设计的复习课问题中，学生的关键能力将得到有效提升。在问题初探、现实情境和拓展运用中的问题背景，于学生而言很可能是全新的，因此，学生需要在理解材料的基础上对材料中的信息进行整理和筛选。在用规范的语言书写思考过程之后，学生还可以思考是否存在其他的解法、还能进一步探究哪些相关的问题等，帮助学生从多层次、多视角理解问题。无论是用代数方法解决几何问题还是用几何图形理解代数结论，学生都能深刻体会到数学知识之间的联系性。

4.3 HPM 视角下的等周问题

上述探究性问题取材于数学史中的材料。已有学者指出，基于数学史料提出问题有若干策略，如复制式、情境式、条件式、目标式、对称式和自由式等[14]。上述问题采用了多种策略，例如，在问题初探中的问题 1 的提出主要采用了自由式策略，这里并没有直接让学生证明“定理 1”，而是选取了与其密切相关的另一个命题。该命题和“定理 1”相比，证明目标更为明确，没有给学生设置太大的障碍。在问题初探中的问题 2 的提出则采用了复制式策略，只是对问题的表征进行了简单的转化，用更加数学化的语言对其进行描述，本质上并没有改变“定理 2”的内容。

将数学史融入数学教学中，无论是课堂的设计还是问题的设计，都要注意史料的适切性、价值的深刻性等等[5]。史料的适切性是指数学史材料的选取要遵循趣味性、科学性、可学性、有效性和新颖性五个原则。回望历史一节将帕普斯在《数学汇编》中关于“蜜蜂的智慧”的介绍呈现给学生，让学生感受到数学原理在自然界中的体现，具有趣味性。问题初探一节中所呈现的“定理 1”和“定理 2”均为芝诺多罗斯曾经证明的，是等周问题发展过程中产生的真实命题，拓展运用一节中的方法也是笛卡尔提出的，故具有科学性。所呈现的关于等周问题的材料均在学生可理解的范围内，表述简洁明了，且学生运用所学知识都可以解决，故具有可学性。上述问题中呈现历史材料是为了串联不同模块的知识，引导学生综合运用所学知识解决实际问

题，故具有有效性。等周问题在教学中的用途往往只有基本不等式的引入，而上述问题以等周问题为素材考查了丰富的知识，提高了复习课的效率，故具有新颖性。

价值的深刻性是指将数学史融入教学时要充分彰显数学史的教育价值。上述问题体现的数学史教育价值主要体现在知识之谐、探究之乐和能力之助三个方面。等周问题的解决拥有一段漫长的历史，上述问题在对等周问题发展作了概述的同时，聚焦芝诺多罗斯探索过程中的两个命题、现实情境中等周问题的变式和利用等周思想逼近圆周率，体现了知识之谐。上述问题基于等周问题的历史材料提出了探究性的数学问题，学生需要先阅读所给材料，理解材料的含义，再综合运用高中阶段所学知识解决问题，对学生的核心素养提出了较高的要求，但学生在探究的过程中也能收获新的知识，体现了探究之乐与能力之助。

4.4 素材改编时的留白

数学史上存在着大量的留白，上述问题的编制中也体现出一定的留白。例如，在问题初探的问题 1 中，仅提供了一种思路，让学生证明的命题与“定理 1”之间还有一定的差距，学生在完成问题 1 后，还可以进一步思考：若 n 边形的某相邻两边长度不等，如何构造出和原 n 边形周长相等而面积更大的 n 边形？所有边都相等的 n 边形就是正 n 边形吗？从而，为什么在周长相等的 n 边形中，正 n 边形的面积最大？在对这处论证之白进行补白的过程中，学生的思维将得到进一步的提升[15]。

等周问题虽然已经得到了完美的证明，但是对于高中生来说，许多证明方法超出了他们的认知范围，因此在这道题中并没有呈现等周问题的严格证明。学生在完成这一系列问题后，或许会对等周问题的严格证明产生好奇，激发学生学习更多数学知识的动机。这一处方法之白，也许要待学生日后拥有了更高等的数学知识后再来补白。

5 结 语

基于数学史上著名的等周问题，我们选择了其发展过程中涉及到的命题编制了若干可用于高中复习课教学的综合性探究问题，并从 HPM 的视角对这些问题进行了评析。据此，我们可以得到以下启示。

一是挖掘历史素材，精心设计问题。数学史是一座宝库，浩瀚的历史长河中还存在着许多

像等周问题一样的内涵丰富的资源。对恰当的历史材料进行选取、改编，让学生能在完成这些问题的同时对数学文化产生更多的了解，激发学习数学的动机与兴趣，是广大数学教育工作者的使命所在。

二是加强知识联系，助力灵活运用。数学是一个有机的整体，在复习课中，教师更要注重各知识之间的联系。数学史上的真实问题，能够展现数学发展的历程，通过古今对话，学生能对数学知识的源流有更多的了解。只有这样，学生才能整体把握高中数学知识，真正做到融会贯通。

三是聚焦学科素养，培养关键能力。高三复习课要注重复习的有效性，从新高考对学生提出的新要求出发组织教学。通过真实而有意义的问题情境，设计史料融入适切、教育价值深刻的问题，聚焦学生的学科素养和关键能力，让学生在高三复习课中也能进一步提升数学素养，为后续的学习打下更坚实的基础。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 9, 151-152.

[2] 毛仕理. 深入研究高三课型特点 提高数学课堂教学质量[J]. 中学数学教学, 2015(1): 50-54.

[3] 余日生. 依课型谈高三数学复习课教学[J]. 新课程(中旬), 2013(12): 144-145.

[4] 胡革新, 肖凌戆. 优效备考: 数学高考复习的教学追求[J]. 数学通讯, 2021(6): 9-12, 58.

[5] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(1): 35-41.

[6] 杨坤. 帕普斯的《数学汇编》及其问题在中国[D]. 内蒙古自治区: 内蒙古师范大学, 2009.

[7] Heath, T. L. *A History of Greek Mathematics* [M]. Oxford: Oxford University Press, 1921: 206-213.

[8] 张江华. 等周定理证明史[J]. 广西民族学院学报(自然科学版), 1995(1): 111-116.

[9] 汪晓勤. 17～19 世纪法国数学家的圆周率初等研究与刘徽的割圆术[J]. 浙江大学学报(理学版), 2003(1): 1-6.

[10] 祁平, 任子朝, 赵轩. 指明改革方向 绘就培养蓝图——高考评价体系育人视角的解读与应用[J]. 数学通报, 2020, 59(4): 1-6, 23.

[11] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学 [M]. 上海: 上海教育出版社, 1999: 72-76.

[12] 张莹莹. 加强高中数学知识联系的案例研究[J]. 数学教学通讯, 2018(36): 3-6, 15.

[13] 任子朝, 赵轩, 郭学恒. 基于高考评价体系的关键能力考查[J]. 数学通报, 2020, 59(8): 15-20, 24.

[14] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020, 59(5): 9-15.

[15] 汪晓勤, 邹佳晨, 王华. 数学史与留白创造式教学[J]. 数学通报, 2023, 62(3): 1-6.

基于传统文化的向量问题设计

于 博

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》中提出，要落实立德树人根本任务，发展素质教育，继承和弘扬中华优秀传统文化[1]。数学不是一门孤立的学科，它与我们的文化和历史息息相关。伴随着历史长河的缓缓流淌，向量与中华优秀传统文化产生了密不可分的联系，通过对向量“前世”的挖掘，我们惊觉向量源于物理学的发现，流于数学的创想，更涤荡着文化的芬芳。特别地，在近年中华优秀传统文化进课程的引领下，我们有理由探寻来自西方的向量与中华优秀传统文化之间的交集。数学史是一座丰厚的宝库，通过对中国传统数学的历史挖掘，我们能够从中寻觅到向量的踪影；同时，运用数学的眼光，我们能够从代表中华优秀传统文化的艺术、民俗等中抽象出向量。再者，从新高考的改革趋势来看，中华优秀传统文化走进课堂、融入试题势在必行。向量作为沟通高中数学中几何与代数的桥梁，与中华优秀传统文化中的若干思想和理念相关联。若能将向量与中华优秀传统文化较好融合，在问题中渗透中华优秀传统文化，或将提升问题的文化性、素养性和深刻性，同时让学生在问题探索中感悟前人智慧，对学生文化自信的培养具有潜移默化的影响。

本文从有关中算史料以及其他传统文化素材出发，设计若干高中数学向量问题，为教学提供参考。

2 研究问题与框架

本文所探讨的向量问题设计，包括了考试题、练习题以及课堂问题。关于向量部分的高考题，已有许多文献做过分析[2-6]，关于向量教学中的问题，也有许多文献进行过探讨[7-10]，但是有关数学文化尤其是传统文化背景的向量问题设计却少之又少。因此，本文的主要研究问题是：如何借助传统文化素材设计向量问题？

基于上述文献的整理和分析，梳理出本文的研究框架，如图 1 所示。

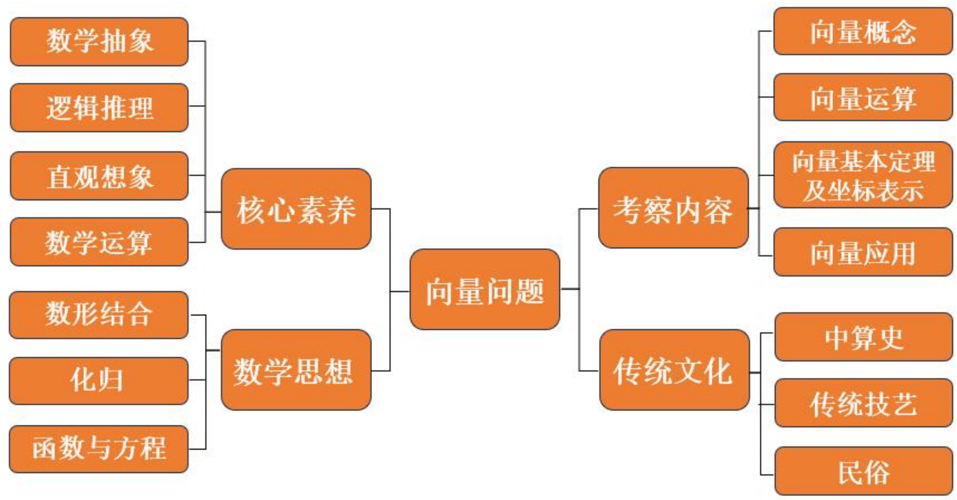


图 1 研究框架

3 基于中华优秀传统文化的向量问题设计

3.1 依托中算史图形

自 2021 年教育部颁布《中华优秀传统文化进中小学课程教材指南》以来，如何将中华优秀传统文化融入学科教学，成了学术界和一线教师十分关注的课题。就数学学科而言，中国传统数学的历史（以下简称“中算史”）是中华优秀传统文化的重要组成部分，要让中华优秀传统文化进入数学课程和教学，教师首先需要充分利用中算史的资源。中国传统数学有着悠久的历史、辉煌的成就和丰富的内容，中算史既是数学教学的目标，也是数学教学的工具，其潜在的教育价值有待于人们去挖掘。[11]

从《九章算术》和《周髀算经》等中国古代数学典籍中[12-13]我们可以找到诸如弦图、勾股容圆、勾股容方等有价值的图形，依托此类图形，可以设计颇具数学文化色彩的问题。

（一）赵爽弦图

三国时代数学家赵爽在为《周髀算经》作注时，撰写了一篇“勾股圆方图注”，其中运用了一幅用于证明勾股定理的图形，后世称之为“赵爽弦图”。现今，中国数学会（CMS）的会徽就是在弦图的基础上进行设计的，这无疑体现其深厚的文化价值。

如图 2 所示，“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形和一个小正方形拼成的一个大正方形图案。从边长关系看，只要确定一个直角三角形任意两边长，即可确定整个弦图中所有线段的长度；从角的种类看，弦图中只有两类锐角，知其一可得二。

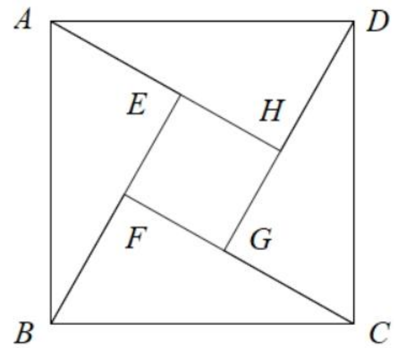


图 2 赵爽弦图

【问题 1】东汉数学家赵爽在为《周髀算经》作注时，创作了一幅用于证明勾股定理的图形，后世称之为“赵爽弦图”。如图 2 所示，大正方形 $ABCD$ 是由四个全等的直角三角形和小正方形 $EFGH$ 组成的，已知 $\angle DAH=\dfrac{\pi}{6}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}=3$，求 EH 的值。

基于已有问题提出新问题，可运用三种策略[14]：

（1）条件式策略，即改变给定情境（图形）的条件而保持其目标不变；

（2）目标式策略，即改变给定情境（图形）的目标而保持其条件不变；

（3）自由式策略，即同时改变给定情境（图形）的条件和目标。

以问题 1 为例，运用上述三种策略，可提出新问题，具体示例如下：

【变式 1】已知 $\angle DAH=\dfrac{\pi}{6}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DH}=-1$，求 EH 的值。（条件式）

【变式 2】已知 $AE:EH=1:\left(\sqrt{3}-1\right)$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}=3$，求 EH 的值。（条件式）

【变式 3】已知 $\angle DAH=\dfrac{\pi}{6}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}=3$，求 DH 的值。（目标式）

【变式 4】已知 $\angle DAH=\dfrac{\pi}{6}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH}=3$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ 的值。（目标式）

【变式 5】已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\angle DAH=\dfrac{\pi}{6}$，$\overrightarrow{AH}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，求 λ、μ 的值。（自由式）

【变式 6】已知 E 是 AH 中点，请找出图中所有的相等向量。（自由式）

在本章节“依托中算史图形”中，后续设计的一系列问题均可采取以上三种策略，对原问题进行改编，后文将不再赘述。

除弦图外，将中算史中其他证明勾股定理的图形用作设计向量问题的载体，也不失为一种好的选择，下文展示一例。

【问题 2】“出入相补”原理是中国古代数学史中的一项重要成就，即将一个几何图形进行分割、平移后，面积总和保持不变。图 3 为利用“出入相补”原理证明勾股定理的方法之一，已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{52}$，求图中阴影部分（正方形）的面积。

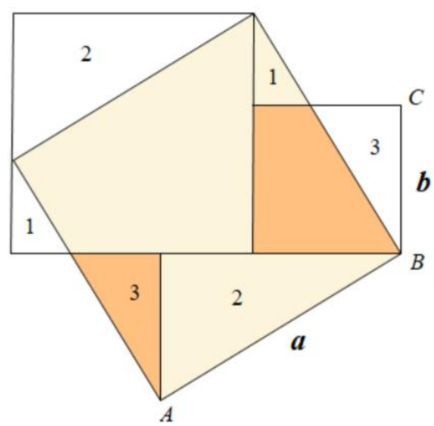


图 3 利用出入相补原理证明勾股定理

（二）勾股容圆

“勾股容圆”是中国古典几何的一个重要命题，阐述了直角三角形的内切圆问题，出自《九章算术》第九卷《勾股》章第十六题：“今有勾八步，股十五步。问勾中容圆，径几何？”术文给出容圆公式：

$$\text{圆径}=\frac{2\times\text{勾}\times\text{股}}{\text{勾}+\text{股}+\text{弦}} \tag{1}$$

如图 4 所示，勾股容圆可以看成三对全等的直角三角形拼成的大的直角三角形，其中一对为等腰直角三角形，并且这三对直角三角形有一条直角边相等，大小等于内切圆半径，只要给定大三角形的任意两边长，就能确定图形中所有线段的长度。因此，在向量问题的设计中，给定两个不共线的向量作为一组基底，以及大三角形任意两边长的比，即可将勾股容圆图中任一向量以给定基底线性组合的形式表示。

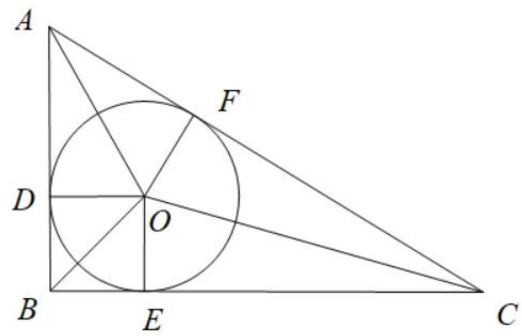


图 4 勾股容圆

【问题 3】《九章算术》中有这样一道问题："今有勾八步，股十五步。问勾中容圆，径几何？"即著名的"勾股容圆"问题。书中给出了求内切圆直径的公式：$d=\dfrac{2ab}{a+b+c}$，其中 a、b、c 为三角形三边长。如图 4 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^{\circ}$，点 O 是内切圆圆心，$\odot O$ 与三边分别切于 D、E、F，已知 $AB=3$，$BC=3\sqrt{3}$，求 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OF}$。

除"勾股容圆"外，还有诸如"勾股容方""勾中容横，股中容直"等一系列图形可作为载体。以下是根据《九章算术》问题"已知勾弦差和股弦差，求勾、股、弦"的解法，设计的向量问题。

【问题 4】如图 5 所示，四边形 $ABCD$、$AGME$、$NHCF$ 是正方形，以点 A 为原点建立如图所示的直角坐标系，$\overrightarrow{EF}=(1,2)$，$\overrightarrow{GH}=(2,1)$，$\left|\overrightarrow{AE}\right|^2+\left|\overrightarrow{CF}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$，求 $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{CF}$ 和 $\overrightarrow{AB}$。

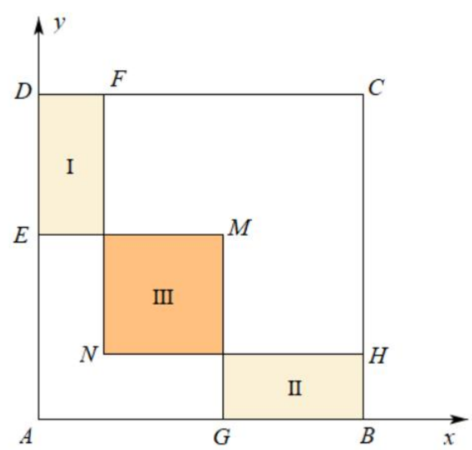


图 5 《九章算术》中的问题

（三）《海岛算经》中的图形

《海岛算经》是魏晋时期刘徽所著的一部测量数学著作，他以应用问题集的形式，运用测望法研究有关高与距离的测量问题，共九问，其中不乏许多诸如日高图、望邑图、松高图和清渊图等有趣的图形，下面以“松高图”为例，改编向量问题。

【问题 5】《海岛算经》中第二问“松生山上”是一道有趣的测量山上松树高度的问题，主要体现了刘徽的“重差”思想。如图 6 所示，BK 表示山高，AK 表示树高，同一时刻在相距为 8 的两地 F、F' 立两根相同的标杆，杆长为 5，当视线、标杆顶端与树顶恰好共线时，测得 $CF=3$，$C'F'=7$，$ED=1.5$。已知 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AK}+\mu\overrightarrow{BC}$，求 λ、μ 的值。

（重差公式：$AB=\dfrac{EF\times FF'}{C'F'-CF}+EF$）

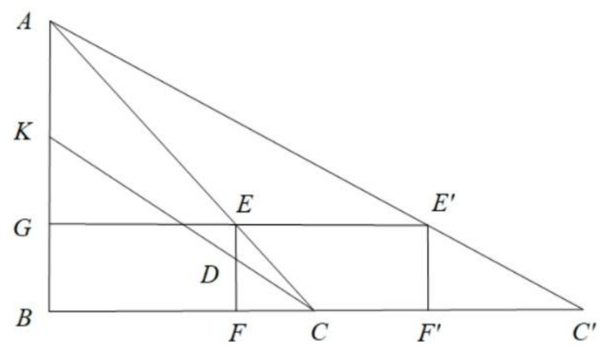


图 6 松高图

3.2 基于中国象棋跳马

中国象棋是中国棋类文化的经典代表，也是中华民族的文化瑰宝，因其趣味性浓厚，基本规则简明易懂而源远流长。在象棋游戏中，象棋棋盘可以看作一个坐标系统，每个棋子的位置可以用坐标表示，不同棋子的移动受到特定规则限制，因而有其特定的移动方式和范围，这些移动规则可以与向量的方向和长度对应起来。同时，玩家需要充分考虑棋局的整体和局部的关系，这涉及到评估棋子的价值、分析棋盘的局势和预测对手的行动等方面，具备良好的向量思维可以帮助玩家思考棋局中的方向、趋势和变化，从而制定更有效的战术。下面以象棋跳馬为例，浅谈关于向量问题设计的思考。

象棋棋盘是由九条竖线和十条横线组成，棋子在这些交点上行走，“馬”由于其行动路径的特殊性（馬走日），常常令人捉摸不透。接下来，我们通过对馬行动路线的研究，尝试设计向量问题。对于棋盘上的馬，行动一步，共有八种路线，如图 7 所示。

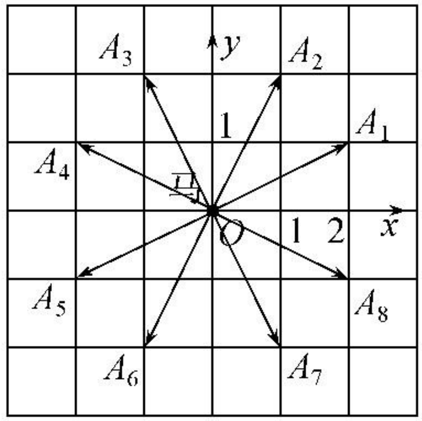


图 7 馬的行动路线

若将馬的每一步行动看作一个向量，则可得到向量$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{OA_3}$，$\overrightarrow{OA_4}$，$\overrightarrow{OA_5}$，$\overrightarrow{OA_6}$，$\overrightarrow{OA_7}$，$\overrightarrow{OA_8}$，其中，$\overrightarrow{OA_5}$，$\overrightarrow{OA_6}$，$\overrightarrow{OA_7}$，$\overrightarrow{OA_8}$可以看作$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{OA_3}$，$\overrightarrow{OA_4}$的相反向量，故可以用$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{OA_3}$，$\overrightarrow{OA_4}$这四个向量来表示馬的移动。构建平面直角坐标系，用坐标表示向量可得，$\overrightarrow{OA_1}=(2,1)$，$\overrightarrow{OA_2}=(1,2)$，$\overrightarrow{OA_3}=(-1,2)$，$\overrightarrow{OA_4}=(-2,1)$。

我们经过简单的向量加法运算可以得到如下关系：

$$\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=(2,1)-(-1,2)+(-2,1)=(1,0) \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=(1,2)-(-1,2)+(-2,1)=(0,1) \qquad (3)$$

由向量加法的交换律可得，馬的移动次序可以更换，并且合成方式不唯一，即馬有多种方式可以向右移动一步，或者向上移动一步，所以馬从棋盘中任一位置出发，可以遍历棋盘。

下面讨论馬从某一位置出发，需要经历多少步才能回到原来位置这一问题。

由上文知，可以用$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{OA_3}$，$\overrightarrow{OA_4}$来表示馬的移动，故假设馬沿$\overrightarrow{OA_i}$移动的步数为k_i（$k_i \in \mathbf{N}$，$i=1,2,3,4$），则有

$$k_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + k_3 \cdot \overrightarrow{OA_3} + k_4 \cdot \overrightarrow{OA_4} = \vec{0} \tag{4}$$

$$k_1 \cdot (2,1) + k_2 \cdot (1,2) + k_3 \cdot (-1,2) + k_4 \cdot (-2,1) = (0,0) \tag{5}$$

$$(2k_1 + k_2 - k_3 - 2k_4, k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = (0,0) \tag{6}$$

由（6）可得

$$k_2 - k_3 = 2(k_1 + k_4) \tag{7}$$

$$k_1 + k_4 = -2(k_2 + k_3) \tag{8}$$

考虑步数之和

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = k_1 + k_4 + k_2 - k_3 + 2k_3 \tag{9}$$

等式右边为三组偶数之和，还是一个偶数，故等式左边也是一个偶数。即馬从某一位置出发，一定经历偶数次跳跃才能回到原位置。

基于上述思考，进行如下问题设计。

【问题 6】在象棋中，不同棋子有其独特的移动方式，我们知道“車”和“炮”可以移动到棋盘的任意位置，“卒”“象”“士”和“将”因移动范围受限，不能遍历棋盘，而“馬”的移动方式十分特别，是走“日”字，那么“馬”究竟能否走遍棋盘呢？尝试给出你的理由。

【问题 7】在中国象棋中,“馬”可谓八面威风、八面玲珑，在某个恰当的位置，“馬”可以有八种走法。假设“馬”在 O 点准备跳出，再跳回 O 点，则“馬”跳的步数可能是（ ）[15]

A. 5, 6　　　*B*. 4, 7　　　*C*. 6, 8　　　*D*. 7, 8

3.3 融合传统文化背景

在近年全国各地的高考模拟题中，已有传统文化背景下的向量问题出现[16-17]。尽管多以附加式的形式出现，去掉文化背景并不会对解题产生影响，即都是在与传统文化相关的模型基础上抽象出数学图形，文化与数学是可分离的，但一定程度上增添了问题的文化韵味。对于此类问题设计的建议，若能巧妙添加一些现实情境，或将提高问题的趣味性、可解性。

【问题 8】窗花作为中国古老的传统民间艺术，已有上千年的历史，无论南方还是北方，家家户户过年都有贴窗花的习俗。小明在贴窗花时，无意间发现窗花的边缘上有只蚂蚁正在沿

着边缘缓慢爬动，小明联想到最近所学的平面向量知识，灵机一动，设计了如下问题：如图 10 所示，窗花可以看作一个正八边形 $ABCDEFGH$，边长为 $6cm$，用动点 P 表示蚂蚁，动点 P 从 A 点出发，沿正八边形边 AB-BC-...-GH-HA 做速度大小为 $1\,cm/s$ 运动，第一次回到 A 点时停止。$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 何时取得最大值？最大值为？你能帮助小明解决他提出的问题吗？

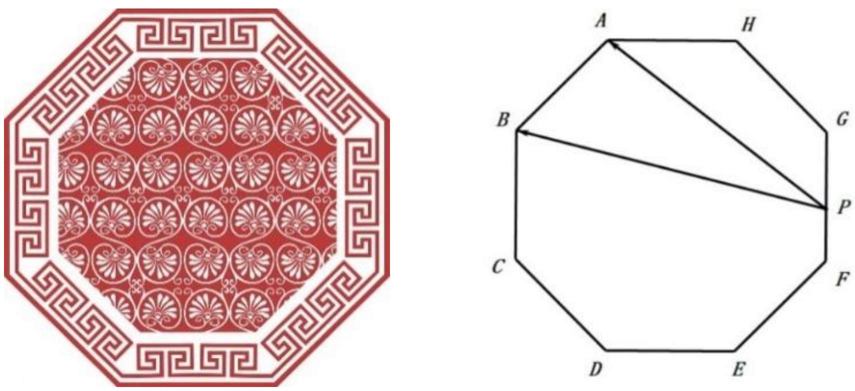


图 10 问题 8 图

4 结 语

本文从“依托中算史图形”“基于象棋跳马”和“融合传统文化背景”三个方面阐述了在向量问题设计中融入传统文化的若干思路与方法，提出三条在向量问题中融入传统文化的策略。

（1）古图今用式策略，以中算史图形为载体，添加向量条件与目标，形成向量问题。同时，可灵活运用条件式策略、目标式策略以及自由式策略对已有向量问题进行改编，提出新问题。

（2）寓教于乐式策略，如结合中华传统棋类规则，设计向量问题。此种策略下的问题设计可以增强开放性，关注学生的思维训练，让学生在解决问题的过程中感悟传统文化的思想内涵，体会“探究之乐”。

（3）附加情境式策略，选取传统文化素材作为载体，将向量这一抽象的数学概念与现实生活联系，解决生活中的向量问题。

中华优秀传统文化博大精深，历久弥新，本文所讨论的向量问题设计仅仅是“冰山一角”，由点及面，若在数学问题的设计中，巧妙地将数学与传统文化交融，定会使数学问题的层次提

到一个新的高度。如果数学问题的设计还是“老一套”，毫无新意，一是对学生的数学思维、数学兴趣培养不利，二是不符合培养拔尖创新型人才，发展学生创新意识的时代需求。数学教师的职责不仅要“教书”更要“育人”，新课改后“育人”的重要性被反复提及和强调。因此，如何体现数学学科的育人价值，是当下数学教育工作者需要共同思考的问题，而传统文化的融入无疑提供了一条可行、有效的途径。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 2.

[2] 吴莉娜, 陈玉娟. 例谈“平面向量”中“结构模式”的建构和应用——一道 2019 年高考题引发的思考[J]. 数学通报, 2020, 59(6): 32-36.

[3] 马洪博. 注重“四基”凸显“四能”, 彰显数学核心素养——以几道 2022 年平面向量高考题为例[J]. 中学数学研究, 2023(3): 7-9.

[4] 石同民, 徐慧霞. 高考中平面向量问题的命题分析与变式研究[J]. 教学考试, 2022(29): 60-62.

[5] 杜晓霞, 王勇. 品味高考试题中平面向量的“交汇性”[J]. 中学数学研究, 2023(6): 56-59.

[6] 贾洪涛. 平面向量问题的考向分析及解题要点[J]. 高中数理化, 2023(Z1): 9-10.

[7] 孙愉. 高三数学问题解决教学中辅助问题设计的实践研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2022.

[8] 邓城. 平面向量的复习策略及其案例设计[J]. 中国数学教育, 2018(06): 21-26, 29.

[9] 吴忠. 向量知识与核心素养的相关性分析[D]. 湖北: 湖北师范大学, 2019.

[10] 毛月妮. 基于平面向量的核心素养考查方式[J]. 数理天地(高中版), 2022(18): 65-67.

[11] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于中华优秀传统数学文化的高中数学留白创造式教学初探[J]. 中小学课堂教学研究, 2023(9): 1-6.

[12] 李继闵. 东方数学典籍《九章算术》及其刘徽注研究[M]. 陕西: 人民教育出版社, 1990: 422-431.

[13] 吕变庭. 增补《详解九章算法》释注[M]. 北京: 科学出版社, 2014: 138-174.

[14] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020, 59(5): 9-15.

[15] 王永军. 从象棋跳马到平面向量[J]. 中学生数学, 2021(1): 3-4.

[16] 范娜, 王勇. 依托数学文化 玩转平面向量[J]. 中学数学研究, 2022(10): 5-8.

[17] 张宇, 王勇. 蕴含数学文化的平面向量多选题赏析[J]. 高中数学教与学, 2023(9): 17-20.

时空隧道

指数函数的前世今生

姚雪凌

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

苏教版高中数学必修一 6.2 节“指数函数”的例 5 是一个探究本利和与存期关系的储蓄问题，其中利息按复利计算（复利是把前一期的利息和本金加在一起作本金，再计算下一期利息的一种计算利息的方法）。相信同学们已经发现了本利和 y 随存期 x 变化的函数关系式与指数函数有着密切联系，体会到了指数函数在生活中的应用。

事实上，人们并不是现在才开始关注这样的问题。早在约公元前 2000 年，在法国卢浮宫所藏的两河流域泥版 AO 6770（图 1）上就记载了这样一个问题：若复利为 20%，那么投资一定数目的钱经过多长时间后能翻一番？

由此可见，历史是一座宝库，从历史中我们不仅可以寻找问题的来源，还能得到问题的答案，从而探索更多奥秘。不知你是否思考过如下问题：指数函数的概念从何而来？幂指数的取值范围何时从整数集拓展到实数集？历史上最早什么时候发现指数曲线？幂和指数函数的符号又是如何演变的？今天，我们以复利问题为引，由线带面，访古问今，探寻指数函数概念的前世今生，来尝试回答以上问题。

图 1 泥版 AO 6770

图 2 泥版 MS 1884

1 幂指数的拓展

指数函数源于等比数列[1]，用函数的眼光看，等比数列就是定义域为自然数集的指数型函数。早在约公年前 2700 年，苏美尔泥版 MS 3047 上就已经出现了等比数列。约公元前 2050 年的泥版 MS 1884（图 2）上记载着如下问题：七兄弟分财产，最小的兄弟得 2，后一个兄弟所得财产是前一个兄弟的 $\frac{7}{6}$，问所分财产共有多少？

【思考】你能利用函数来表示七兄弟所分得的财产吗？

用现代数学的符号表示，七兄弟分得的财产实际就是定义域为 $\{x \mid 0 \le x \le 6, x \in \mathbf{N}\}$，解析式为 $f(x)=2\left(\frac{7}{6}\right)^x$ 的指数型函数值域中的元素。

无独有偶，中国古代数学文献中也有类似的问题，如《孙子算经》（约公元前 4 世纪）记载了问题：今有出门望见九堤，堤有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雏，雏有九毛，毛有九色，问：各几何？

【思考】你能利用函数来表示堤、木、枝、巢、禽、雏、毛、色的数量吗？

这里，堤、木、枝、巢、禽、雏、毛、色的数量构成了定义域为 $\{x \mid 1 \le x \le 8, x \in \mathbf{N}^*\}$，解析式为 $f(x)=9^x$ 的指数型函数的值域。

历史上，这类问题还有很多。可见，取值离散的函数 $y=a^n$ （$a>0, n \in \mathbf{N}$）很早就被人们发现和利用，但指数仅取值为正整数或非负整数还远远不够。回到引言中提到的泥版 AO 6770 上的问题：若复利为 20%，那么投资一定数目的钱经过多长时间后能翻一番？

【思考】你能求解这个问题吗？

若设本金是 1，则该问题就是求方程 $1.2^x=2$ 的解，古人通过近似计算，得到方程的解应在 3 和 4 之间，估算得其解为 3 年又 $9\frac{4}{9}$ 个月。此问题中幂指数的取值并不是整数，由此可见，在现实问题中，幂指数的取值需要从整数向实数进行拓展。

无独有偶，《九章算术》盈不足章中记录着这样一道问题：今有蒲生一日，长三尺。莞生

[1] 从第二项起，每一项与它的前一项的比值都等于一个常数的数列。

一日，长一尺。蒲生日自半。莞生日自倍。问几何日而长等。

【思考】你能用现代语言重新表述这个问题并求解吗？

用现代语言重新表述此问题：假设有一株蒲，第一天长 3 尺；有一株莞，第一天长 1 尺。蒲每一天生长量为前一天的 $\frac{1}{2}$，莞每一天生长量为前一天的 2 倍。问经过多少天蒲和莞的长度相等？可求得蒲、莞每一天的生长量 $f(x)$ 和 $g(x)$ 随天数 x 变化的函数关系式分别为 $f(x)=3\left(\frac{1}{2}\right)^{x}, x\in \mathbf{N}$ 和 $g(x)=2^{x}, x\in \mathbf{N}$。古人将蒲和莞分别在每一天中的生长速度视为相等，近似求得在 $2\frac{6}{13}$ 天后它们等长，精确解为 $1+\frac{\lg 3}{\lg 2}$。这里幂指数 x 的取值不再是整数，而是一个无理数。

若从数学理性思维的角度来说，指数幂从有理数推广到无理数也是自然的。我们可以借鉴初中将有理数扩充到实数的经验，通过有理数的不足近似值和过剩近似值的左右逼近得到无理数。同样的，可用有理数指数幂逐步逼近无理数指数幂。例如，用底为 2 的有理数指数幂逼近无理数指数幂 $2^{\sqrt{2}}$：当 $\sqrt{2}$ 的不足近似值 x（有理数）和过剩近似值 y（有理数）逐渐逼近 $\sqrt{2}$ 时，2^x 和 2^y 值都趋近于同一个数。也就是说 $2^{\sqrt{2}}$ 是一列逐渐增大的有理数指数幂和一列逐渐减小的有理数指数幂逐步逼近的结果，它是一个确定的实数。对于一般的无理数指数幂也是如此，且它们具有有理指数幂的所有性质并满足其运算法则。这样，幂指数的取值范围就从整数逐步拓展到了实数。

【思考】你能在数轴上表示出这个逼近过程，从而大概确定 $2^{\sqrt{2}}$ 的位置吗？

除了解决这类现实生活中的问题所需，许多数学家也为幂指数的拓展做出了巨大贡献。14 世纪法国数学家奥雷姆（N. Oresme, 1323-1382）在《比例算法》（约 1360）中表示了方根与分数指数幂，并在它们之间建立联系。历史上最早使用负整数指数幂的数学家为德国数学家施蒂费尔（M. Stifel, 1487-1567），他在《整数算术》（1544）中将幂指数从非负整数推广到负整数，建立了 2 的指数和幂如下的对应关系（表 1）。

表 1 整数指数幂与指数之间的对应关系

指数	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
幂	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…

用今天的记号来表示，即为$2^{-n}=\dfrac{1}{2^n}$，但他并没有将指数范围推广到分数。16 世纪荷兰数学家斯蒂文（S. Stevin, 1548-1620）、17 世纪荷兰数学家吉拉德（A. Girard, 1595-1632）分别给出了分数指数幂的表示方法。1655 年，英国数学家沃利斯（J. Wallis, 1616-1703）在《无穷算术》中给出负指数幂与分数指数幂的运算，从而将整数指数幂的运算法则推广到有理数指数幂。在 16 和 17 世纪之交，“上天下海”的天文学和航海学成为热潮，为了解决天文学中大量的计算问题，苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）苦苦思考了二十年，终于在 1614 年出版了著作《奇妙的对数说明书》，书中他构建出对数模型，编制了历史上第一张对数表。英国数学家布里格斯（H. Briggs, 1561-1630）阅读了纳皮尔的著作后，与纳皮尔商量改进现有的对数，常用对数由此诞生，而常用对数表的编制运用了大量分数指数幂的知识，促进了人们对分数指数幂的认识。

2 指数曲线的发现

指数函数概念的发展不仅仅与幂指数的拓展有关，还离不开对其几何图象的研究。你能否想象，指数图象竟先于指数函数的概念产生的，这和我们的学习与认知规律相反。那么是哪些数学家最早研究指数曲线的呢？

法国数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）一封 1639 年的信件表明他知道指数曲线的一些性质，但他没有命名曲线。指数曲线的几何性质最早可能是在 1644 年由意大利数学家托里拆利（E. Torricelli, 1608-1647）研究的，托里拆利在进行对数计算时发现了一条指数曲线，其解析式用现代符号表示为$y=a\mathrm{e}^{-cx}\left(x\geq 0\right)$，但直到很久以后，这条曲线才和“指数”联系在一起。遗憾的是，托里拆利的这一发现在当时并未发表，直到 1900 年才出版。

1661 至 1694 年，荷兰数学家惠更斯（C. Huygens, 1629-1695）对托里拆利的发现作了进一步拓展。在 1661 年的手稿中，他绘制了一条指数曲线（图 3），其中横坐标上的 *AB, BC, CD*

等为等分线段，并在此基础上建立长度按相同的倍数增加的 *AK, BF, CG* 等线段，惠更斯研究了这条曲线的几何性质。

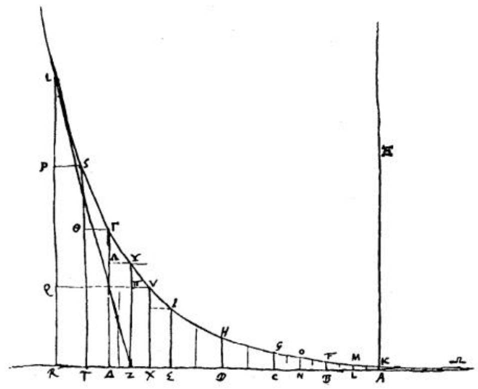


图 3 惠更斯写于 1661 年的手稿

不仅如此，惠更斯在 1668 年还发现物体在特殊介质中下落时其加速度随时间变化的规律与指数曲线之间的关系，他将物体加速度随时间变化的规律绘制成图象（图 4），其中 *BZ* 方向为时间轴正方向，*BA* 方向为加速度正方向。他发现，该图象是一条指数曲线。

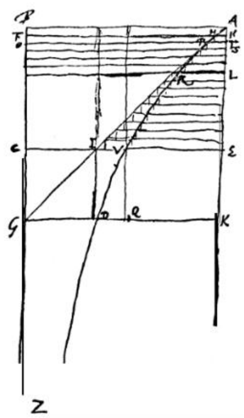


图 4 惠更斯绘制的物体下落的加速度曲线

3 指数符号的演变

17 世纪以前的数学家们并没有使用今天的数学符号来表示指数幂。在没有幂的表示方法的时代，要表示一个大数是非常不容易的。数学家阿基米德（Archimedes, 前 287-前 212）用阶数来表示一个大数：从 1 数到 1 万万，为一阶数；从 1 万万数到 1 万万个 1 万万，为二阶数；从 1 万万个 1 万万数到 1 万万个 1 万万个 1 万万，为三阶数……。

【思考】怎么用现代数学符号来表示七阶数？

公元 3 世纪，丢番图（Diophantus, 约 200-约 284）首次采用字母来表示未知数及未知数的平方和立方。他用希腊词尾字母“ς”来表示未知数，用“Δ^{Υ}”及“K^{Υ}”分别表示未知数的二次幂和三次幂，而更高次幂则根据同底数幂的运算法则，由二次幂和三次幂的乘积来表示。在这种表示方法中，一个未知数的幂的符号表示与这个数本身没有关系，因此这样的表示存在许多不便之处。

除此之外，幂的命名也与如今有所不同。例如，10 到 11 世纪，阿拉伯数学家阿尔•卡克西（al-Karkhi, 953-1029）将未知数的四次幂称为“平方-平方”，五次幂称为“平方-立方”，六次幂称为“立方-立方”。可以见得，这样的命名方法是不够清晰简洁的。

【思考】如果没有今天的幂的命名方法，怎么命名未知数的八次幂、十次幂？

16 世纪，符号代数的诞生为幂的表示方法做出了重大贡献。法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）在《分析引论》（1591）中分别采用大写的元音和辅音字母表示未知数和已知数。在韦达用字母表示任意数后，任意一个数的任意次幂的表达变得可能。不过，韦达的表示方法与如今的表示方法还有所不同，他将现代符号中的 A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 表示为 *Aq, Acu, Aqq, Aqcu, Acucu*。但这种表示方法统一了幂的底数，为笛卡儿的新记号打下了基础。1637 年，笛卡儿在《几何学》中发明了幂的记号，他用 a^3 表示 aaa，用 a^4 表示 $aaaa$，只用于表示正整数指数幂。之后，英国数学家沃利斯（J. Wallis, 1616-1703）、牛顿（I. Newton, 1643-1727）等相继给出了负数、分数指数幂的表示方法，并将其整合到笛卡儿的记数法中。

18 世纪，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《代数基础》中给出了幂的定义、指数的概念、分数指数幂与根式的关系。至于指数函数的定义，则是欧拉在其另一本著作《无穷分析引论》（1748）中给出的：指数函数，可以是指数为变数，底为常数，如 a^z；也可以底数和指数都是变数，如 y^z；指数本身也可以是指数函数，如 $a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}$。

相信你已经发现，欧拉所给出的指数函数的定义与如今我们学习的指数函数有所不同：函数 $y=a^x\left(a>0, a\neq 1\right)$ 叫做指数函数，它的定义域是 $\mathbf{R}$。这是欧拉所定义的第一种“指数为变数，底为常数”的指数函数，而其余 5 种类型中，y^z 今天被称为“幂指函数”，a^{a^z} 为指数函数与

指数函数的复合函数，a^{y^z} 为指数函数与幂指函数的复合函数，y^{a^z} 为幂函数与指数函数的复合函数，x^{y^z} 为幂函数与幂指函数的复合函数。

【思考】为什么指数函数的定义中要求底数 a 的范围大于 0 且不等于 1?

欧拉在他的书中对上述规定给出了直观的解释：$a=1$，对任何的 z 值都有 $a^z=1$；$a=0$，则 a^z 的值是跳跃式的；a 取负值，a^z 的值跳跃更频繁。当 z 为正数时，恒有 $a^z=0$，当 z 为 0 时，a^z 为 1，当 z 为负数时，a^z 为无穷大，则 a^z 的值从 0 跳到 1，再从 1 跳到无穷大；a 取负值，a^z 的值跳跃更频繁。当 z 依次取整数时，a^z 的值正负交替，当 z 取分数或无理数时，a^z 的值不再限制在实数范围内，而是时实时虚。

在给出定义之后，欧拉随后呈现了指数函数的性质并应用了指数函数，此后指数函数的概念正式登上了近代数学的舞台，而科学领域的新发现又促进了指数函数的发展。比如，光吸收的基本定律即朗伯-比尔定律以及广泛应用于考古学、地质学等学科的放射性碳定年法等，都与指数函数有着密切的联系。

至此，我们通过回顾历史，了解了幂指数的拓展、指数曲线的发现以及指数符号的演变过程，深刻地感受到指数函数概念形成的不易。英国数学家、数学科普作家斯图尔特（I. Stewart）曾说："数学是关于模式的科学，而且自然界利用了其中每一种模式。"有研究者在此基础上提出，种种模式中指数与对数也许是最频繁和最重要的。今天我们重走了与指数模式相关的指数函数概念的发展之旅，希望大家能够在数学史中汲取更多的知识、思想和精神。

小试牛刀

（一）钢琴制造所运用的音律体系"十二平均律"的理论最早由我国明代的律学家朱载堉（1536-1610）研究，其著作《律学新说》（1584）中给出了十二平均律的各律数，《律吕精义》（1596）中对其计算方法作了详细解释，他将八度分为 12 个律，这 12 个律中第一个律的频率为 1，每相邻两个律中后一项与前一项频率的比值为 $\sqrt[12]{2}$，朱载堉计算并将每一个律的频率精确到了小数点后 24 位。试回答以下问题：

（1）利用函数来表示十二平均律中各律的频率；

（2）钢琴的任何两个相邻的键的振动频率之比为常数 Q，若设最低的一个音的频率为 a，问 a 与 Q 满足怎样的关系式；

（3）在第（2）问的基础上，设钢琴从左到右相邻两弦的长度之比是常数 $q=\frac{1}{Q}$，设左边第一根弦的长度为 l，取第一根弦所在直线为 y 轴，各弦靠近键盘的端点所在直线为 x 轴建立坐标系，相邻两弦间的距离为长度单位，将弦的另一端点连成光滑曲线，这条曲线是什么？为什么？（改编自苏教版高中数学必修一第 6 章“问题与探究”栏目）

（二）我国古代数学名著《九章算术》盈不足章中记录着这样一道问题：今有垣厚五尺，两鼠对穿。大鼠日一尺，小鼠亦一尺。大鼠日自倍，小鼠日自半。问几何日相逢、各穿几何。试回答以下问题：

（1）用函数刻画大鼠和小鼠每日穿墙的长度随时间变化的规律；

（2）若假定大鼠和小鼠在每一天中的穿墙的速度相等，求解该问题。

活动讯息

传统文化展风采，数形结合促直观

——中华优秀传统数学文化进高中课堂课例观摩与研讨活动

朱轶萱，姚雪凌，唐都宁，赵哲栋

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2023 年 10 月 18 日下午，上海市中国中学与华东师范大学“中华优秀传统文化进高中数学课堂的设计与实施”项目组和上海市徐汇区高中数学团队、数学史与数学教育（HPM）工作室、上海市“中小学数学留白创造式教学”课题组、华东师范大学基础教育学科联盟高中数学联盟联合举行课例观摩与研讨活动。上海市晋元高级中学特级教师、正高级教师、华东师范大学教师教育学院数学教育研究所首席专家王华老师，闵行区教育学院高中数学教研员、特级教师、正高级教师杨家政老师，徐汇区教育学院高中数学教研员李幸老师，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师，以及 HPM 工作室高中教师、“中小学数学留白创造式教学”课题组教师、上海市徐汇区高中数学教师和华东师大 HPM 方向的研究生参加了观摩研讨活动。

本次观摩课的主题为“以形驭数——基本不等式及其应用”和“数图同归——三角问题探究”，两节课是上海市中国中学与华东师范大学教师教育学院数学教育研究所联合开展的“中华优秀传统文化进高中数学课堂的设计与实施”项目阶段性成果，项目组前期就两节课的设计展开了五次研讨，包括：确定选题、初步设计、试讲磨课与完善设计等。

1 课例观摩环节

上海市中国中学的劳吉老师以秦九韶《数书九章》入手，改编题目引出求解三角形的最值问题。接着，介绍了算术平均值与几何平均值的概念，探讨其大小关系，并组织学生以小组讨论形式发掘平均值不等式的多种证法。三位学生分别上台板演分享了作差法、分析法和几何法，顺着第三位同学的思路，劳老师再次组织学生借助大方图的思想证明常用不等式。进一步，劳老师引发学生思考，该不等关系在任意实数范围内是否成立，并给出了代数作差的严谨证明。随后的例题环节，劳老师先用两道习题带领学生巩固了平均值不等式和常用不等式的应用，再

回到课堂伊始留下的面积最值问题，利用本节课所学完成补白。最后，劳老师带领学生梳理所学、总结收获，并指出赵爽弦图和大方图未来将会帮助我们解决更多问题。

图 1 劳吉老师课堂展示

上海市中国中学的郑沐老师首先引导学生回顾已经学习的三角知识及它们能够解决的各类问题，并从学生对三角公式的记忆困难入手引入本节课。接着，郑老师带领学生回顾了利用赵爽弦图和出入相补原理证明勾股定理的过程，并鼓励学生类比上述思想方法将手中两对斜边相等的直角三角形拼成矩形或菱形，多位同学分享了不同的拼法。随后，郑老师组织学生根据自己构造的图形推导三角公式，学生用出入相补原理成功地推出了两角和的正弦公式与两角差的余弦公式。然后，郑老师进一步拓展，用四个全等钝角三角形构造正方形，模仿赵爽弦图推得余弦定理。在练习环节，郑老师给出两道基于赵爽弦图的改编习题，有效地巩固了本节课所研究的公式与原理。课堂最后，郑老师再次指出，赵爽弦图和出入相补原理是古人为我们留下的宝贵精神财富，值得我们不断学习和探索，并且鼓励学生注重几何、代数以及不同数学分支之间的关联，构建知识之谐。

图 2 郑沐老师课堂展示

2 评课交流与主题研讨环节

课后交流和研讨环节由华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师主持。

上海市中国中学黄勇副校长在致辞中对所有参与活动的老师表示由衷的欢迎和感谢，接着介绍了中国中学的悠久历史，强调中华优秀传统文化是中国中学的办学特色，并介绍了中国中学数学教研组近年来为落实该办学特色实施的“三件套”：第一，详细梳理了每一本教材与中华优秀传统文化的交汇点，编写学科教学指南；第二，以指南为蓝本，根据课堂教学实际逐步落实单元设计；第三，以教学案例的形式为教学提供参考。最后，黄校长充分肯定了两位老师的努力以及两节课的科学价值与人文价值。

图 3 黄勇副校长致辞

接着，两位执教老师深入浅出地介绍了自己的设计思路及教学体会。劳吉老师以秦九韶—海伦公式为切入点，改编得到求三角形面积最值的问题，在课堂中进行留白，引导学生探索。通过本节课的学习，希望让学生们理解以形驭数，借助几何直观地理解不等关系，同时扩展学生的知识视野，让学生了解更多与中国传统文化相关的几何图形。郑沐老师分享了自身尝试将中华优秀传统文化融入数学课堂的教学经历，并表示，“出入相补”原理使得三角公式的形式十分简洁直观，易于学生理解。最后，郑老师表示，今后会进一步改编、整理更多与传统文化相关的中国古代数学知识，并尝试将其融入高中数学课堂，希望能够以此焕发课堂活力。

图 4 劳吉老师分享设计思路及教学体会

图 5 郑沐老师分享设计思路及教学体会

随后，邹佳晨老师对两位老师的分享补充了以下三点内容：第一，挖掘中华优秀传统数学文化的价值。对中华优秀传统文化进行深度探索和挖掘是极具历史价值和时代价值的，中国中学已经在这方面进行了探索。第二，注重几何直观的呈现。学生对于基本不等式的代数推导或许并不陌生，但几何证法的引入对于学生直观想象和逻辑推理能力的发展有着不可替代的作用。第三，错误是最好的教学资源。对于老师在课堂中及时纠正的一处笔误，可以引导学生纠正，以达成更好的教学效果，因为学生的错误能在一定程度上反映其潜在的认知偏差，教师要善于恰当地处理错误，将其转化为宝贵的课堂资源。

图 6 邹佳晨老师点评

在主题研讨环节，HPM 工作室成员、上海市行知中学的高振严老师首先肯定了劳老师从归纳到逻辑推理的教学安排以及郑老师从赵爽弦图出发延伸出系列图形的创造性设计，接着指出“图形是直观的公式，公式是抽象的图形”，将几何元素融入代数证明是很有必要的。最后，高老师也提出了一些建议，如应更加注重不等式之间的衔接、明确不等式的内涵和用途等。

图 7 高振严老师点评

上海市中国中学的汤荣华老师从自己学生时代对基本不等式枯燥、生硬的刻板印象谈起，指出两位老师的设计使得“干巴巴”的代数公式变得清晰直观。接着，汤老师分析了几何与代数的互补作用，称几何与代数要“多沟通”，并表示教师可多多发掘代数公式背后的几何素材。

图 8 汤荣华老师点评

“中小学数学留白创造式教学”课题组成员、普陀区宜川中学的张秀芹老师提出，从这两节课可以感受到，老师若能从文化教育方面深挖并整合教材，便可使课堂精彩纷呈，学生在课堂上也会有主动探索的过程。然后，张老师结合自身的授课经验，从易于学生理解的角度出发，针对代数教学和数形结合教学提出了一点自己的思考。

图 9 张秀芹老师点评

HPM 工作室成员、上海市回民中学的徐洁岚老师首先指出，中国的数学史对于现今数学教材而言是非常优秀的补充素材。徐老师提到，听课中印象最深之处在于两位老师将这些素材以问题链的形式让学生体验感悟，理解数学家的思想价值，体会中国优秀传统文化。从思维的角度来看，传统文化不仅仅是融入高中课堂的一个简单载体，更能提升学生思维。两位老师古法今用，通过类比让学生进行再创造，同时感受中华优秀传统文化留下的宝贵财富。

图 10 徐洁岚老师点评

在专家点评环节，杨家政老师指出了这两堂课的三个亮点：第一，这两堂课是中国传统文化数学史融入课堂教学的很好尝试，不论是引入、问题展示还是问题解决都自然地运用了数学史；第二，这两堂课教师为学生留下了问题之白和论证之白；第三，两节课均为学生提供探究机会，给学生留下充足的思考时间。同时，杨老师还提出了三点思考：第一，传统文化的融入是否贴近学生，能否找到接近学生最近发展区的史料；第二，对于不等式教学，可以先从“数”

的角度让学生扎实掌握，再进行“形”的解释；第三，教师需要对于基本不等式中“当且仅当”的含义进行强调。

图 11 杨家政老师点评

李幸老师分别从“文化”“融入”和“课堂”三个角度对两堂课进行了点评。从文化角度，教师需要培养学生的文化自信；从融入角度，教师需要注重互动、反思，如例题的引入是否引起学生兴趣、学生的问题是否引起教师重视、教师能否正确评价学生的回答、学生能否对教师的推导证明过程进行质疑等；从课堂角度，教师需要把课堂中的变化讲明白，李老师指出了郑老师课堂中的变化——图形的变化，并对最后一道例题进行了拓展展望。

图 12 李幸老师点评

王华老师从以下方面点评了这两节课，首先，传统文化进课堂对于落实“双新”是非常有意义、有价值的探索；第二，赵爽弦图及出入相补原理在这两节课都有很好的应用；第三，这两堂课呈现出“师生互动促进学生掌握”的特点；第四，不论是第一节新授课，还是第二节复习课都运用弦图“以形驭数”和“数图同归”，是一次积极的探索实践。此外，王老师还对教师提出了些许建议。教师要认真学习新课标，理解新教材。新课标的内容强化了代数的要求、推理论证及意识，教师可以思考并探讨究竟是“以数为先”还是“以形驭数”。从教材角度分析，这一章的单元设想是“立足等式，研究不等式”，教师需要明确教材的核心内容，理解

“恒等式”中的“恒”。其次，教师还需要关注学生的认知需求，即从“等”到“不等”的转化过渡。最后，王老师介绍了留白与补白的含义，重点强调了留白的目的是创新，这两堂课的创新主要体现在以下四点：第一，通过这两节课可以让学生亲身体会到代数模型的几何表示，建议可以让学生对此进行项目化研究；第二，让学生体会到中国传统数学对逻辑推理的贡献；第三，要让学生自主发现而非带领学生用弦图，这也是两节课有待精进的地方；第四，有需求的探究才有创新。

图 13 王华老师点评

在与会教师的热烈讨论中，本次课例观摩与研讨活动圆满结束。各位教师对中华优秀传统文化融入高中数学课堂有了进一步的认识，期待未来能够开发出更多精彩的课例。

图 14 活动合影