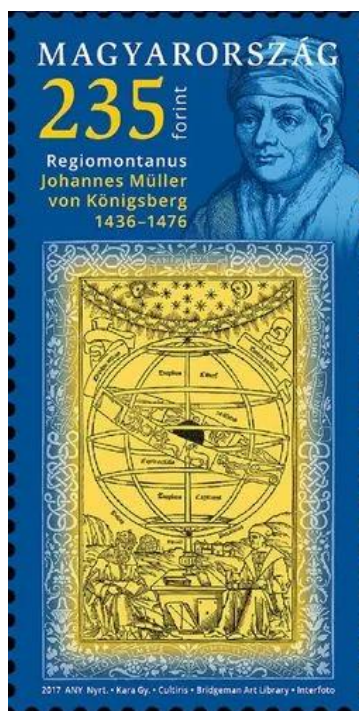




上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2022 年第 11 卷第 07 期



纪念邮票上的雷格蒙塔努斯

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：刘梦哲

编委（按姓氏字母序）：

韩粟 纪妍琳 姜浩哲 孔雯晴 雷沛瑶 栗小妮 李卓忱 刘思璐 秦语真 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 余庆纯

岳增成 张佳淳 邹佳晨

刊首新语

推陈出新：数学史在高中数学复习课中的价值初探

——以均值不等式为例

刘梦哲，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

高中数学复习课历来受到数学教师的关注与重视。作为数学教学的重要组成部分，复习课可以帮助学生提炼核心知识、建立知识联系、提高知识的广度和深度，让知识条理化、综合化、系统化，以此更好地建构知识体系。当然，复习不仅包括知识的整理与串联，还需要合适的练习。因此，复习课包含了两层含义，一是“复”，即对知识进行归纳整理，通过总结以达成温故而知新，二是“习”，即对知识进行迁移训练，通过练习以提升数学素养，两者相辅相成、相得益彰。

在实际教学中，为应对高考，复习课多采取简单的知识重复、题型讲解、集中训练等教学模式，导致教师“高付出”、学生“低收入”。有研究者指出，复习课依然存在忽视认知基础、忽视数学本质、忽视知识关联、忽视思想方法、忽视核心素养等问题。于是，部分教师尝试从大单元教学观、课堂留白等视角改进复习课的教学。教师无论以何种方式设计复习课的教学策略，最终都应帮助学生达成课程标准所要求的数学学科核心素养的目标。

复习课具有多方面的育人价值。陈伟斌和胡革新等指出，复习课具有构建知识网络、完善认知结构、综合运用知识、夯实必备知识、优化学科素养、提升关键能力等功能。丁益民指出，数学文化复习课要有文化浸润，要有复习指导，更要有育人功能。上述文献表明，高中复习课的育人价值不外乎知识内容、素养能力和情感态度三个维度。

HPM（数学史与数学教学之关系）视角下的数学教学，由于其新颖的理念、独特的风格和显著的成效而日益受中学数学教师的关注。实践表明，数学史有助于揭示知识之谐，彰显方法之美，营造探究之乐，实现能力之助，展示文化之魅，达成德育之效。但迄今为止，人们大

多聚焦新授课来考察数学史的教育价值，而因限于实践条件，针对数学史在复习课中的价值的探讨较少。鉴于此，本文以均值不等式为例，对数学史在高中复习课中的价值进行初步的探讨，以期 HPM 视角下的高中复习课的教学研究提供参考。

2 基于数学史的均值不等式教学材料

2.1 新模型

学生已经知道均值不等式的若干几何模型，如赵爽弦图或欧几里得半圆模型，复习课上无需重复这些模型，教师可以运用新的数学史料，构造新的几何模型。

赵爽（公元 3 世纪）在《周髀算经》注中，除了利用弦图来证明勾股定理，还利用如图 1 所示的“大方”图来解一元二次方程。这个“大方”图后来被北宋数学家刘益（10 世纪）、南宋数学家杨辉（13 世纪）等用于求解已知 $a+b$ 和 ab ，或已知 $a-b$ 和 ab ，求 a 、 b 的问题。利用该图易得不等式 $(a+b)^2 \geq 4ab$ ，进而得到均值不等式

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (1)$$

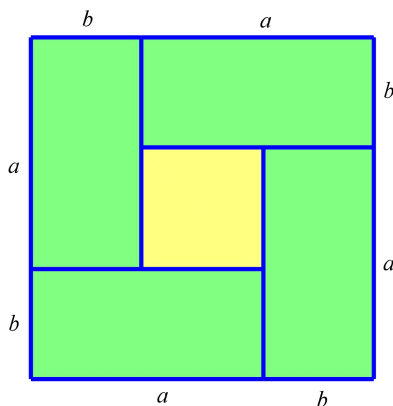


图 1 赵爽的“大方”图

教师可以引导学生思考：大方图的四分之一是否对应于不等式 $\frac{1}{4}(a+b)^2 \geq ab$ 呢？事实上，用两条对角线将大方等分成四个等腰直角三角形，从每一个等腰直角三角形中，很容易得到均值不等式的一个全新的几何模型，即将矩形转换成等面积的等腰梯形，再将等腰梯形与等腰直角三角形进行比较，如图 2 所示，从中可得

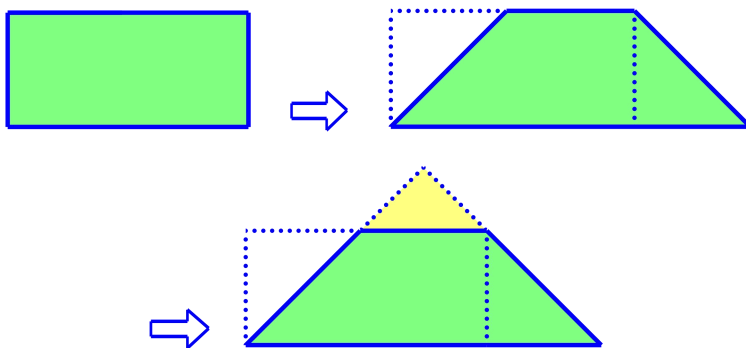


图 2 均值不等式的等腰直角三角形模型

$$ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2 \quad (2)$$

类似地，利用刘徽（公元 3 世纪）的“勾股容方”图，也可以得到关于均值不等式的全新的几何模型。如图 3，设 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的勾和股分别为 a 和 b ，则与直角三角形具有公共直角的内接正方形边长为 $d = \frac{ab}{a+b}$ ，以内接正方形顶点 D 为中心，将直角三角形 ABC 沿顺时针方向旋转 180° ，到达 $\text{Rt}\triangle GHI$ 的位置，则旋转前后两个直角三角形共含四个正方形，由此可得不等式

$$4\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \leq ab \quad (3)$$

(3) 与 (2) 是等价的。

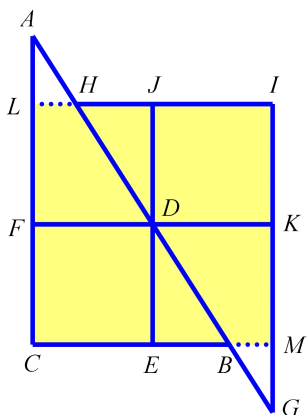


图 3 由“勾股容方”图推导均值不等式

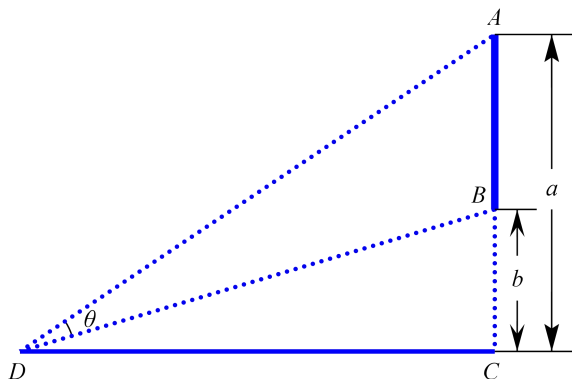


图 4 最大视角问题

历史是一座宝藏，其中含有取之不尽、用之不竭的思想养料。1471 年，德国数学家雷格蒙塔努斯（Regiomontanus, 1436-1476）提出以下问题：一根垂直悬挂的杆子，从地面上哪点看上去它最长（也就是视角最大）？该问题被称为数学史上第一个最值问题。

如图 4, $AC \perp DC$, $AC = a$, $BC = b$ ($a > b$), 设 $DC = x$, 于是有

$$\tan \theta = \frac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}} = \frac{a-b}{x + \frac{ab}{x}},$$

由均值不等式可知, 当 $x = \frac{ab}{x}$, 即 $x = \sqrt{ab}$ 时, $\tan \theta$ 最大, 即视角 θ 最大, 故知观察点 D 应该位于经过点 A 和点 B 、且与 DC 相切的圆的切点处。

根据最大视角问题的解, 我们又可以得到均值不等式的新几何模型。如图 5 所示, $AC \perp DC$, $AC = a$, $BC = b$ ($a > b$), 圆 O 的经过点 A 和 B 且与 DC 相切于点 D 。由切割线定理知 $DC = \sqrt{ab}$ 。过圆心 O 作 AC 的垂线, 垂足为 E , 由垂径定理知 $AE = EB$, 故得 $OD = EC = \frac{a+b}{2}$ 。由 $DC = OE \leq OD$, 即得均值不等式, 当且仅当圆 O 与 AC 相切时等式成立。

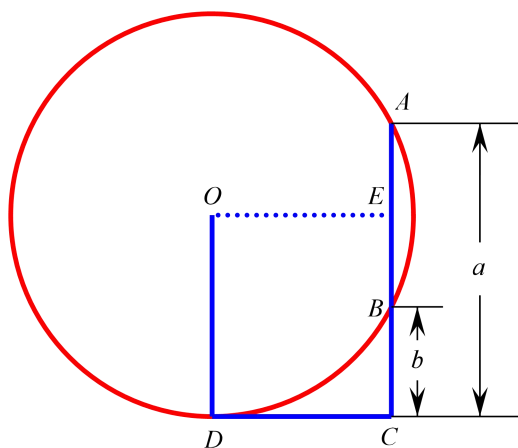


图 5 均值不等式的切割线模型

2.2 新表征

从历史上看, 17 世纪英国数学家纳皮尔 (J. Napier, 1550-1617) 通过构造两种运动来定义对数, 如图 6, 质点 P 从点 A 出发沿射线 AB 做匀速运动, 同时, 质点 Q 从点 C 出发沿线段 CD ($=10^7$) 作变速运动, 其速度大小等于 QD 的长度, 质点 P 和 Q 的初速度相同。纳皮尔将 $y = AP$ 称为 $QD = x$ 的对数。纳皮尔的对数定义反映了数学与物理学之间的密切联系。

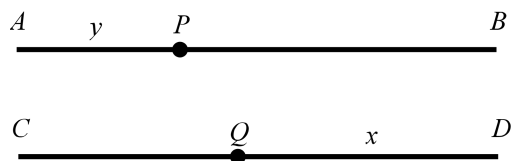


图 6 纳皮尔的对数定义

受纳皮尔运动模型的启发，教师也可以构造两种运动来获得均值不等式：如图 7，设有甲、乙两个质点分别做匀速运动和变速运动，两者的位移与时间之间的关系分别为 $y = x$ 和 $y = ce^x$ (y 表示位移， x 表示时间)，且满足在时刻 a 和 b ($a < b$) 两者的位移分别相等，即 $ce^a = a$ ， $ce^b = b$ ，易见，在中点时刻 $\frac{a+b}{2}$ ，质点甲的位移大小大于质点乙的位移大小，即当 $a < b$ 时成立不等式 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 。

可见，均值不等式刻画了指数型函数的凹凸性。

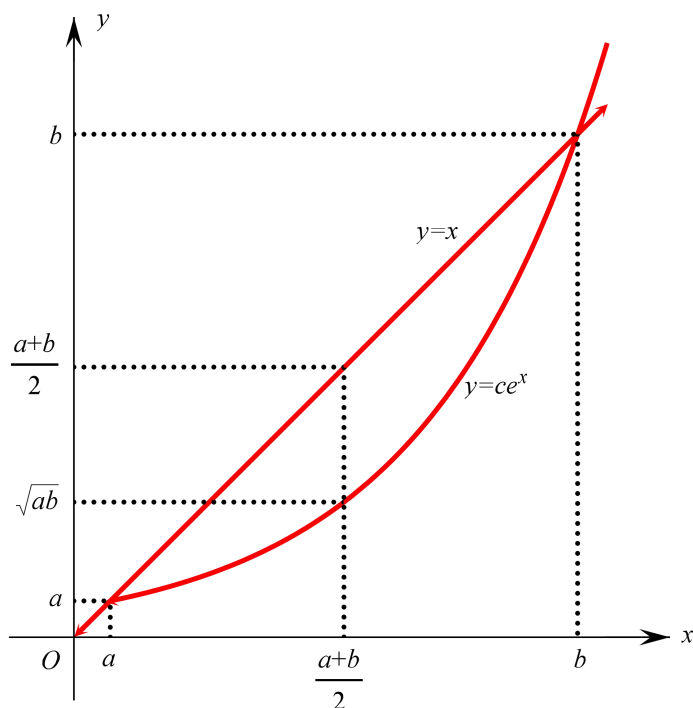


图 7 从运动的角度看均值不等式

2.3 新推广

利用不等式 (3) 可以直接得到不等式

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \quad (4)$$

v

由 (1) 和 (4) 可得关于调和平均、几何平均和算术平均之间的不等式链。类似于帕普斯模型，从切割线模型中也可以导出均值不等式链。如图 8，过点 E 作 OB 的垂线，垂足为 F ；延长 OE ，交圆于点 G ，分别过点 A 和点 G 作 AC 的垂线和平行线，两线交于点 H ，连结 OH 。由 $OF \leq OE \leq OG \leq OH$ ，即得均值不等式链

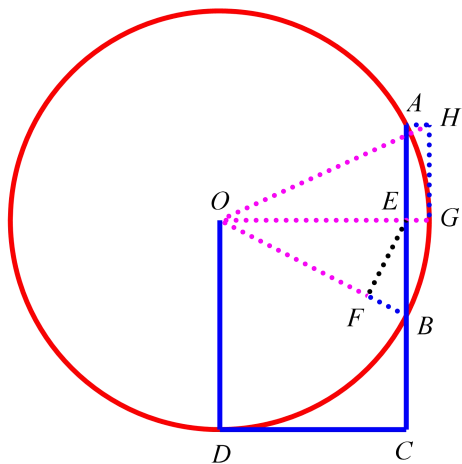


图 8 基于切割线模型的均值不等式链

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

2.4 新问题

根据数学史材料，可以设计出许多均值不等式应用问题。如，根据“勾股容方”问题，可以设计如下问题：

问题 1：如图 9，已知正方形 $ABCD$ ，过顶点 D 的直线与 BA 、 BC 的延长线分别交于点 E 和 F ，求 $\frac{S_{\triangle EBF}}{S_{\square ABCD}}$ 的最小值。

设 $AB = BC = x, CF = t$ ，由 $\triangle EAD \sim \triangle DCF$ ，可得 $AE = \frac{x^2}{t}$ ，则

$$\frac{S_{\triangle EBF}}{S_{\square ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}(x+t)\left(x + \frac{x^2}{t}\right)}{x^2} = \frac{x^2 + 2xt + t^2}{2xt} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{t} + \frac{t}{x} + 2\right) \geq 2,$$

当且仅当 $x = t$ 时取等号。

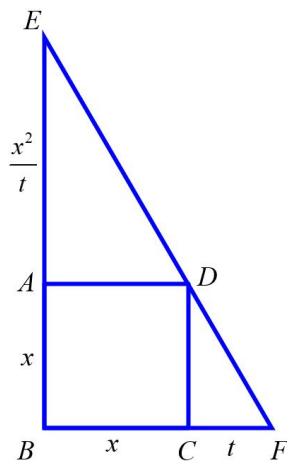


图 9 “勾股容方”新问题之一

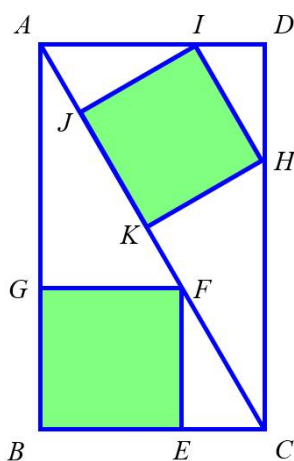


图 10 “勾股容方”新问题之二

问题 2: 如图 10, 已知矩形 $ABCD$ 的两边长 $BC=a$, $AB=b$, 正方形 $GBEF$ 和 $HIJK$ 分别内接于 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle CDA$, 求 $\frac{S_{\square HIJK}}{S_{\square GBEF}}$ 的取值范围。

易知, $BE = \frac{ab}{a+b}$, $JK = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ 。设 $AC=c$, $\angle BAC = \alpha$, 则 $a = c \sin \alpha$,

$b = c \cos \alpha$, 代入得

$$BE = \frac{c \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}, \quad JK = \frac{c \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha},$$

故得

$$\frac{S_{\square HIJK}}{S_{\square GBEF}} = \left(\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} \right)^2,$$

令 $t = \sin \alpha + \cos \alpha$ ($1 < t \leq \sqrt{2}$), 则

$$\frac{S_{\square HIJK}}{S_{\square GBEF}} = \left(\frac{2t}{t^2+1} \right)^2 = \left(\frac{2}{t+\frac{1}{t}} \right)^2,$$

因为 $t + \frac{1}{t} \in \left[2, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right]$, 所以 $\frac{S_{\square HIJK}}{S_{\square GBEF}} \in \left[\frac{8}{9}, 1 \right]$ 。

3 数学史在复习课中的价值

3.1 加强知识联系

复习课的关键在于把平时在教科书中所学到的零碎知识融会贯通、有机整合，让学生从整体上把握所学的内容。

美国心理学家布鲁纳（J. S. Bruner, 1915-2016）强调学科结构的重要性，认为教学过程就是让学生掌握一般原理的过程，就是让学生学习该学科的基本观念和基本知识结构的过程。美国心理学家奥苏伯尔（D. P. Ausubel, 1918-2008）主张有意义接受说，认为有意义的学习是通过同化而实现的，并提出了三种同化学习的模式，即下位学习、上位学习和组合学习。基于上述理论，我们可以将知识间的联系分为横向联系和纵向联系。具体而言，横向联系是指不同的学科（或同一学科的不同分支）之间相关知识的联系，纵向联系是指在一个学科内部（或一个学科内部的某一部分）不同知识之间的联系。

图 11 给出了均值不等式的知识关联图。从弦图模型到等腰直角三角形模型、从“勾股容方”问题到“勾股容方”模型等，基于旧知搭建新知，给出均值不等式的若干新模型、新表征、新推广，将推动学生对均值不等式的认识向纵深发展。此外，借鉴纳皮尔对数定义的均值不等式函数表征，揭示了数学与物理、均值不等式与函数性质之间的密切联系；根据“勾股容方”问题所提出的新问题，揭示了均值不等式与三角学之间的密切联系。

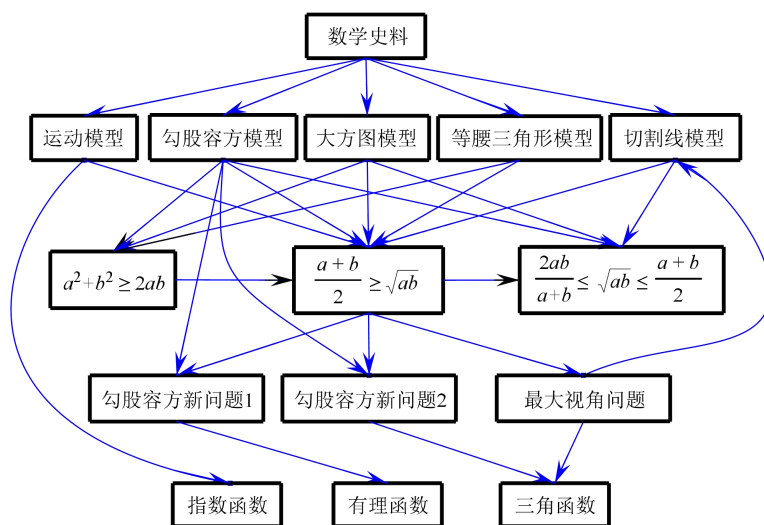


图 11 均值不等式的知识关联图

3.2 深化知识理解

在数学学习中，理解无疑是学生数学学习过程的中心环节。关于理解，英国数学教育家斯根普（R. Skemp）于 1976 年提出工具性理解和关系性理解两种模式。1994 年，英国学者皮瑞（Pirie）和加拿大学者基伦（Kieren）构建了由八个理解水平构成的“超回归”数学理解模型，这一模型有助于对数学活动和理解过程进行细致的分析和研究。在国内，任伟芳等在斯根普的两种理解模式以及皮瑞-基伦的理解模型基础上，提出数学理解的三个层次，即工具性理解、关系性理解和创新性理解。

在数学教学中运用数学史，有助于学生对相关主题的理解^[14]。复习课不应该是知识的简单重复，而需要在学生已有认知的基础上，对数学知识有更深层次的理解，HPM 视角下的复习课可以为学生搭建这一上升的平台。以均值不等式为例，如果学生仅仅停留在不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 的记忆阶段，则属于工具性理解。将数学史融入教学，有助于建立如图 11 所示的知识网络，从而达到关系性理解，而新模型、新表征、新推广和新问题则为学生的创新性理解创造了条件。

3.3 渗透思想方法

数学复习课绝不仅仅是为知识而知识，为解题而解题，而应该有思想方法的总结、提炼和升华，应该由“求技”走向“问道”。从宏观到微观，张奠宙和宋乃庆将数学思想方法分成四个层次，即基本的和重大的数学思想方法、与一般科学方法相应的数学方法、数学中特有的方法和中学数学中的解题方法。

就均值不等式而言，其背后蕴含着不同层次的数学思想方法。基于数学史料的均值不等式几何模型，蕴含了数形结合的数学思想；“勾股容方”新问题中的三角代换，蕴含了化归的数学思想；从纳皮尔的运动模型到均值不等式的函数表征，蕴含了类比和函数的数学思想。

在实际教学中，教师可以依托数学史上的命题、公式、方法等，将复习课的内容串联起来，通过提炼这些知识背后蕴含的数学思想方法，使学生逐步体验、逐步理解、逐步学会应用数学思想方法，进而培养学生的数学高层次思维，提升数学素养。

3.4 丰富问题资源

数学复习课往往以问题解决为主，而数学史为数学问题的编制提供了丰富多彩的原始素材，近年来高考卷上的数学文化类试题已说明了这一点。

在复习课中，教师可以根据已有的数学史素材，采用复制式、情境式、条件式、目标式、对称式、链接式或自由式策略编制数学问题。以“勾股容方”问题为背景，运用自由式策略，可以提出丰富多彩的新问题。

3.5 落实学科德育

数学课程需要实施学科德育，《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》在课程性质中指出，数学教育承载着落实立德树人根本任务、发展素质教育的功能。HPM 视角下的数学教学由于在数学与人文之间架起了一座桥梁，因而可以发挥独特的德育优势。已有的 HPM 教学实践表明，数学史可以在培养学生的理性、信念、情感和品质上发挥重要作用。

以均值不等式为例。首先，在历史长河中，均值不等式的知识并不是一成不变的，基于数学史上的几何模型，我们可以不断探索并寻找均值不等式的许多新模型，这种对科学与真理坚持不懈地探索精神，可以鼓励学生追求创新，体会数学的理性精神。其次，通过建立均值不等式的新表征、新模型，可以让学生感受到数学的价值以及数学与物理、代数与几何之间的密切联系，同时，在学生已掌握的几何模型上推广出新模型，还可以让学生认识到数学的演进性，有助于改善学生的数学信念。再次，根据“勾股容方”问题可以提出许多新的问题，因此，教师可以让学生在课前尝试对此问题进行改编。课中，教师不仅可以选择学生提出的问题作为例题，还可以将学生的解法和历史上数学家的方法进行对照，使学生跨时空与数学家进行思想交流，由此增加学生的学习动机，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心。最后，学生在解决同伴提出的问题的过程中，既表达了自己的想法，又培养了倾听、交流的意识与能力。此外，通过对中国古代数学家的思想方法予以介绍，可以增强学生的文化自信，感受数学家对知识不懈追求的优秀品质。

4 结语

综上所述，HPM 视角下的高中复习课可以发挥加强知识联系、深化知识理解、渗透思想方法、丰富问题资源、落实学科德育五类价值。据此，我们得到以下启示。

其一，加强理论研究，服务教学实践。教师若要开发出一个理想的 HPM 课例，好的历史材料是“源”，好的教学设计则是“流”，两者缺一不可。作为高校研究者，需要从纷繁复杂的原始文献和二手研究文献中挖掘具有“教育取向”的数学史料，并根据史料所蕴含的发展脉络，深入思考、提炼观点、整理成文，供一线教师学习、参考。

其二，扎根一线教学，更新教育理念。通过分析近年来发表的 HPM 课例可以发现，相较于数学史融入新授课、序言课等课型的教学，融入数学史的复习课的教学设计相对较少。在巨大的升学压力下，教师往往更关注学生的学业成绩，而未能理解数学史的教育价值，殊不知，HPM 视角下的高中复习课同样可以培养学生的核心素养、达成高考的要求。正所谓实践出真知，教师要尝试将数学史融入复习课，唯有将 HPM 扎根于教学一线，才可能让师生真正感受到 HPM 的价值与魅力。

其三，精心设计问题，发挥教育价值。HPM 视角下的高中复习课并不是将数学史中的问题、思想、方法等知识简单的堆砌，这并不能充分发挥数学史在复习课中的多元价值，而数学问题串的运用则可以改变这种状况。教师在设计基于数学史的问题串时，可以考虑以一个情境一以贯之、以一个问题展开变式、以一个主题推陈出新等。总之，问题串的设计要紧扣核心内容的认知、要立足于学生的认知起点、要处理好预设与生成的关系、要把握好梯度性原则，从而让数学课堂更有生机、更具效益。

目 录

刊首新语

推陈出新：数学史在高中数学复习课中的价值初探.....刘梦哲，汪晓勤 I

历史研究

美英早期三角学教科书中的任意角概念.....严珮锦 1

美英早期三角学教科书中的三角恒等式.....姚 瑶 17

三角学在航海、物理和天文学中的应用.....石 城 35

教学实践

以史为线，温故知新.....杨育池，王智洋，刘梦哲 57

他山之石

职前教师问题解决的理念与表现之间关系的探索.....钱 秦 68

活动讯息

聆听中感悟，观摩中成长.....王智洋，刘梦哲，雷沛瑶 73

集采众长，感悟数学智慧.....苏福梅，雷沛瑶 78

CONTENT

FOREWORD

A Preliminary Probe into the Value of Mathematics History in High School
Mathematics Review Lessons..... Liu Mengzhe, Wang Xiaoqin I

HISTORICAL STUDY

The Concept of the Arbitrary Angle in Early American & British Textbooks on
Trigonometry.....Yan Peijin 1

The Trigonometric Identities in Early American & British Textbooks on
Trigonometry..... Yao Yao 17

The Applications of Trigonometry in Navigation, Physics and Astronomy.....
..... Shi Cheng 35

TEACHING PRACTICE

Teaching of Review Lessons on Rate of Change and Derivative from the Perspective
of HPM..... Yang Yuchi, Wang Zhiyang, Liu Mengzhe 57

LITERATURE REVIEW

Exploring the Relationship Between Preservice Teachers' Conceptions of Problem
Solving and Their Problem-Solving Performances..... Qian Qin 68

ACADEMIC INFORMATION

The Video Display on Teaching of the Concept of Derivative in the Second HPM
Online Training Class for High School Mathematics Teachers.....
.....Wang Zhiyang, Liu Mengzhe, Lei Peiyao 73

The Video Display on Teaching of the Solution of Triangles in the Second HPM
Online Training Class for High School Mathematics Teachers.....
..... Su Fumei, Lei Peiyao 78

历史研究

美英早期三角学教科书中的任意角概念

严珮锦

(苏州大学数学科学学院, 江苏 苏州 215006)

1 引言

《普通高中数学课程标准(2017 版 2020 修订)》将“了解任意角的概念”作为三角函数模块学习的首则要求^[1], 凸显任意角学习的奠基地位。现行教科书遵循该原则, 将任意角作为章节的起始课。任意角的内容在知识层面上占比虽不重, 却不失统领三角模块的基础性。具体而言, 教科书基本借用了跳水及体操转体等运动、咬合旋转的双齿轮、松紧螺丝的扳手、调快或调慢的钟表指针、游乐园摩天轮等情境中的某几例引入任意角, 从实际生活的发现引发学生对原有的角的概念的认知转变, 进而给出任意角的概念。7 版教科书(人教 A 及 B 版、沪教版、北师大版、苏教版、鄂教版、湘教版)对于任意角的旋转方向及正负规定不作更多探讨, 统一规定为: 按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角, 按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角, 且未对该规定加以注解。

任意角具有半抽象半具体的特征^[2], 如果其大小与方向被简单地一笔带过, 将无法凸显概念生成的必要性、概念推广的合理性及概念规定的自然性。此三点在已有的教科书中并没有得到完全的关注, 更不论学生是如何体悟的了。实际上, 多数教师在教学中同样会忽略让学生深入探索任意角出现的必要性, 也未能解决学生在“正负角”规定上的认知冲突^[3], 这将导致学生无法将推广后的角进行应用以嵌入原有的认知结构中^[4]。既如此, 探查历史上数学家的思路, 或可以古为鉴、寻得启示。

回顾三角学的发展史, 在 16 世纪前, 数学家所研究的角度仅限于欧几里得所定义的平面角; 而任意角的研究, 与圆周运动有直接关联, 任意角三角函数的系统化直到 18 世纪才得以完成^[5]。任意角的概念、性质与用途迥异于几何角, 学生能否深刻领会概念推广的必要性及如何推广的符号规定^[6-7], 对三角函数章的学习至关重要。通过考察历史上不同教科书引入任意

角概念的方式、对任意角方向的解释乃至任意角的运算法则，探求这些内容的演变规律，可为今日任意角的教学提供思想启迪。

2 早期教科书的选取

从相关数据库中选取 1830-1955 年出版的 89 种美英早期三角学教科书为研究对象，以 10 年为一个时间段，进行样本统计。选择过程中，视出自同一作者且内容无明显差异的教科书为同一种，并以出版最早的版本为准。其出版时间分布情况如图 1 所示。

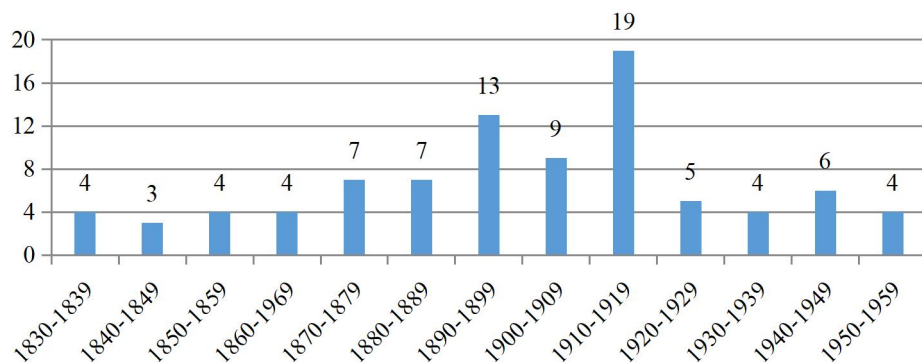


图 1 89 种美英早期三角学教科书的出版时间分布

本文的研究方法是：按年份依次检索上述 89 种早期三角学教科书，从中摘录出关于任意角相关概念界定及运算法则的所有原始文本，经内容分析，并结合现行教科书的内容处理，确定任意角引入方式、方向规定、运算法则的分类标准及相关习题，并将原始文本按标准归于不同类别，选择典型的代表进行呈示。最后，结合现行教科书及已有的任意角教学研究文献，望能为当下任意角教学带来几点启示。

3 任意角的引入

所考察的教科书从数学内部与生活实例两方面着手引出任意角的概念。

3.1 从数学内部引入

第一种做法是在数学情境——旋转中逐步扩角，当角的一边回到起始位置继续旋转后，所形成的角度超过了 360° ，这种开放旋转量来扩充角度范围的方式与现在教科书对任意角的引入

基本相似，在早期教科书中亦高频存在。

第二种做法是明确指出进一步研究三角学的需要。大多数教科书在给出任意角的定义之前会作出说明，即重新定义角的概念，是新的数学分支——三角学区别于平面几何的研究需要。Nixon（1892）指出，现代发展的三角学是一门描述周期性现象的数学分支。周期性量级交替增大到最大值而后减小到最小值；并以这样的方式继续这一过程，即以相同的顺序，以相同的时间或空间间隔，不断地再现相同的量值。这种变化是借助角度来实现的。而欧几里得（Euclid，约前 330-约前 275）对角的定义对于三角学的目的来说实为有限，那么必须对角度进行重新说明。^[8]这与今天的教学意图一致。

Young（1833）更详细地指出，在研究三角形理论时，常常只考虑范围是 $0^\circ-180^\circ$ 的角或弧；但在关于角的一般理论中，角的大小可以由任意的度数来表示，超过 $n \times 360^\circ$ 的角由角的旋转边从固定边出发作 n 次旋转后得到。^[9]Todhunter（1883）指出，虽然在三角学的实际应用中，人们考虑最多的仍是 $0^\circ-180^\circ$ 内的角，但当三角学作为理论数学的一个分支时，扩展角的概念是必要的。^[10]

第三种做法说明弧度是任意的，以弧度的无穷代表角度的无穷。例如，Abbott（1841）在说明弧度与角度的对应及一致性变化后提出：当圆弧在圆周上不断重复时，不受任何圈数的限制。自然地，由弧度与角度的对应，角度被扩充为任意值。^[11]

第四种做法对任意角的引入不作过多注解，而是一语带过。Hymers（1841）在介绍三角函数的任意值之前直接说明角度具有任意大小^[12]；Hann（1854）仅在介绍三角函数诱导公式时顺带说明角度可以超过 360° 的限制，且有一类具有“-”号^[13]。这些编者只关注任意角的大小，不关注任意角的方向。

一言以蔽之，从数学内部引入任意角的主要目的是为任意角三角函数的研究做铺垫。

3.2 由生活实例启发

在早期教科书中，除了从数学内部引入作为三角学元素的任意角，还有一类方式，即从丰富的现实情境中发现任意角。

一类情境以天文问题导入，与三角学创立之初的“量天”目的遥相呼应。Newcomb（1883）指出，天体不断旋转会反复回到人们最初所观察到的相对于运动中心的同一位置。即在天文学

中，天体通过绕轴连续旋转和绕轨道旋转，会产生大小不限的角度。要计量天体旋转的角度，需要角的一般度量方法。^[14]同时，作者采用画圆弧的方式，体现“任意弧”的概念，以“angle-arc”表示任意弧所对的任意角。

第二类情境属于体育背景，与学生的生活体验密切相关。Lock（1885）以环形跑道比赛问题举例，在这种情况下，已知任何一位参赛者相对球场中心的角度，就可知其所在位置。如果要跑的距离是三圈，那么将每个选手连接到中心的线必须经过 12 个直角的角度。当我们注意到一名选手经过 6 个直角的角度时，既记录了其当前位置，也可知悉他走的总距离。^[15]同样地，Conant（1909）也列举了跑步者在环形赛道的例子，用“假设一名跑步者在四分之一英里长的环形跑道上进行两英里的比赛”^[16]，言简意赅地使人感受角度大小与原有定义的冲突。类似地，假设画一条线，将跑步者的位置与赛道圆的中心连接，那么跑步者在任何时刻的位置皆可被这条线自比赛开始以来旋转的角度大小描述。当他完成比赛时，连接其与赛道中心的线，旋转了 $8 \times 360^\circ$ 或 2880° 角。

还有一类情境将普遍存在的机械运动进行具化。Durfee（1901）考虑了时钟分针的运动：在一小时内，指针描述了一个 360° 的角；一个半小时后，角为 540° ；经过半天，角为 4320° ，以此类推^[17]。类似地，Wilczynski（1914）通过列出时钟的分针在 15 分钟内产生 90° 角，在 1 小时内形成 360° 角，在 5 小时 1 刻钟内形成 1890° 角，指出尽管分针在任何一次完整的旋转后都指向时钟表面的同一位置，但忽略这些完整旋转是错误的，因为这意味着忽略 1 点钟、2 点钟、3 点钟的区别，也等同于承认 360° 角等于 0° 角，或者 450° 等于 90° 角。^[18]Bocher（1914）简单以使用螺丝刀时产生旋转 360° 、 720° 、 1080° 等角度及发动机的驱动轮一小时转动数千度^[19]的现象来说明大于 360° 的角普遍存在。

上述作者以具体的实例在现实问题情境中提出或补充研究任意角度的直观意义，具有一定的参考价值。

3.3 任意角引入方式的演化

根据任意角引入的方式，可分为“旋转扩角”“学科需要”“以弧代角”“直接引入”“天文情境”“体育背景”“机械运动”7 种。若同一种教科书涉及 2 种及以上的引入方式，将在不同类别下分别统计。89 种美英早期教科书中，各类引入方式的数目如图 2 所示。

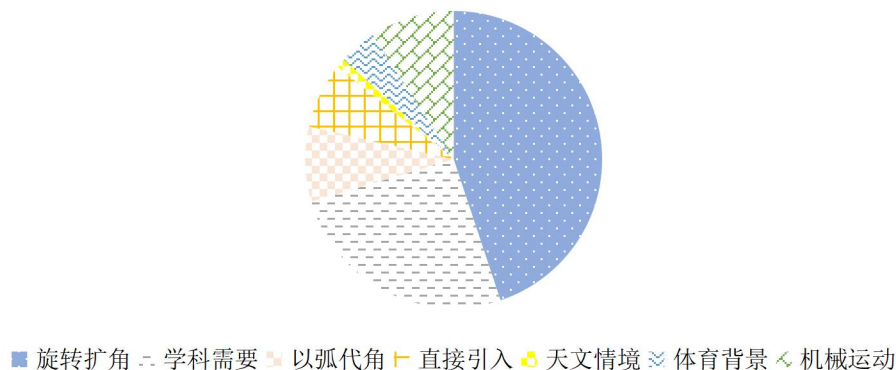


图 2 任意角各类引入方式的数目

图 3 给出了任意角各类引入方式的演变。

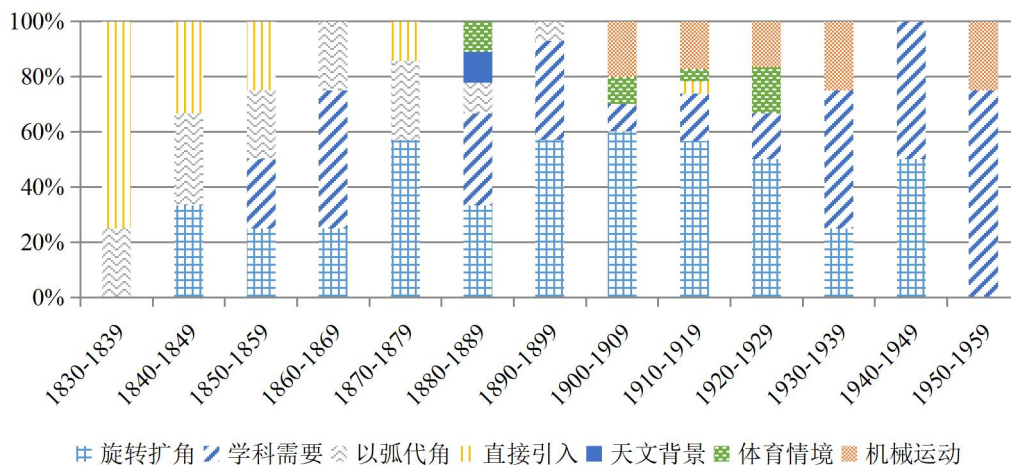


图 3 任意角引入方式的演变

由图 2 和图 3 可知，从现实情境中引入任意角的方式直到 19 世纪 80 年代才出现。其中，天文背景的引入只是短暂地出现在 19 世纪的 2 种教科书中，后逐渐被体育情境与机械运动所取代。相比于其他引入方式，后两种情境与学生的日常生活联系更为密切，如环形跑道上的多圈竞跑、时钟指针的不停转动等，是学生亲身所历、亲眼所见的，能够给予他们更直观的认知冲突。特别地，时钟的指针旋转具有明显的周期往复特征，时钟的记时功能体现规定方向和区别圈数的必要性，还可为后面任意角的方向规定做铺垫。直到如今，时钟依旧被主流教科书作为导入任意角的现实素材。

从数学内部引入任意角的方式中，直接引入的做法曾在 19 世纪上半叶十分普遍，却于 19 世纪 70 年代基本告别历史舞台。这意味着，教科书中对任意角的重视程度有所提高，开始有

意识地向学生说明引入任意角的缘由与方式。类似地，在历史演变中逐渐退场的引入方式，还有以弧代角。这一做法频繁活跃在 19 世纪，直到 20 世纪才销声匿迹。考虑到现行教科书中，任意角先于弧度制出现，这一做法不具有参照价值。纵观整个时间轴，与之演变规律相反的是旋转扩角和学科需要的引入方式。自从 19 世纪 40 年代、50 年代分别崭露头角后，这两种做法几乎稳居其后的每一个时间段，成为任意角引入方式的新浪潮。旋转扩角的方式与现行教科书的设置一致，通过终边的继续旋转扩大角的范围，自发地进行概念的扩充。而学科需要的引入方式则常会指出，在三角学的研究中，角的扩充是必要的。在实际教学中，直接将这个意图呈现给学生可能会过于突然，但应该使学生在任意角的学习中感受角度变化的周期性。

4 任意角的方向

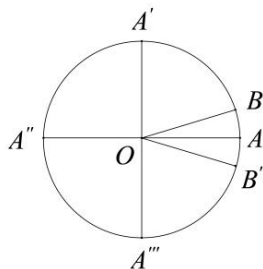
早期教科书中普遍规定以逆时针旋转方向为任意角的正方向，并进行解释；还存在零星以顺时针旋转方向为正的示例。

4.1 以逆时针旋转方向为正

而在早期教科书的探幽中，尽管大部分作者都与现行教科书所言一致，默认以逆时针旋转为正，但其对如此规定的注解依旧可具参照。

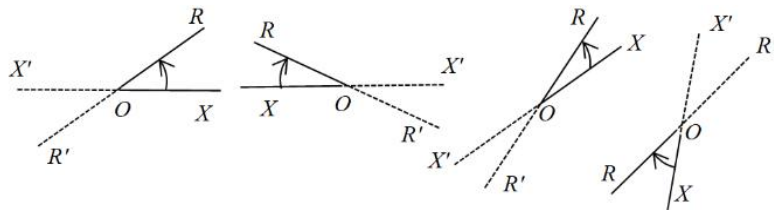
第一类观点遵循几何问题代数化的原则，将用代数符号表示线段方向的规定，推广地对待同为几何符号的角度。Colenso（1859）借鉴确定线段方向正负的准则，即当它们用代数表示时，假设一个方向为正，则必须认为相反方向为负，尝试如此规定角的方向，将一个角度明确记为 $+A$ 或 $-A$ ，以规避“所画的锐角被误作钝角”的可能^[20]。综上，由代数符号表达图形中线段和角度的方向，其有效性在于排除纯粹几何学中同一问题的不同情况。

第二类观点指明以某一确定方向为正，是为了区分两类不同角度。Wells（1883）将角度解释为移动半径旋转量的度量，认为哪个方向是正旋转方向并不重要；只是采取某个正方向后，随后的行动必须与之一致。形成一个角度的两条线中的任何一条可以作为起始线（initial line），另一条则是终点线（terminal line）；因此，如图 4，存在由 OA 和 OB' 形成的正角度 AOB' 大于三个直角，负角度 AOB' 小于一个直角，通过分别将这些角度称为正角度 AOB' 和负角度 AOB' 来区分。^[21]

图 4 角度 AOB'

类似地，Bowser（1892）补充说明角度若用与手表指针方向相同的线来描述，如此也可区分从同一条固定线（fixed line）测量角度的两个方向^[22]。上述编者为了区别两类终边与始边相同而大小不同的角而引入正负符号，这种做法体现了数学的严谨性。

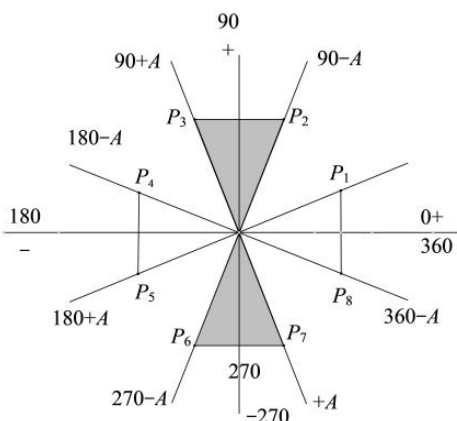
在原则不变的情况下，Lyman（1900）提醒学生注意，起始线可能位于任何位置，并沿任一方向旋转。虽然通常认为逆时针旋转形成正角，但图 5 所示也可以是顺时针旋转产生的正角。通过将初始线 OX 旋转到 OR 的位置，每个图形中的角度 XOR 可以是一个正角。

图 5 角度 XOR

如果规则清楚，当读取角度 XOR 时， OX 被视为旋转到位置 OR 的正直线（positive line），则不会导致混淆。对应地， OX' 和 OR' 是任何方向上的负直线（negative line）。这些概念仅仅是一致性的问题，在特定情况下，一致性可以由问题的条件以及数学工作者是否普遍认可来确定。^[23]

还有教科书类比其他数学量对正负意义加以阐释。Hall（1910）类比线段正负性的规定。通常选择直线上的一个方向作为正方向；另一个则称为负方向。如果一个方向为正，则相反方向为负。而区分角的两种旋转，正如区分直线上两个方向相反的运动一样，可通过对每个角度的符号约束来实现。^[24]这类做法在早期教科书中较为常见。

Blakslee（1888）类比线段的几何意义，指出点向右移动会产生一个 $a+$ 距离，但向左移动会破坏这个距离，而回到原点会产生一个 $a-$ 距离。如图 6，按象限 I、II、III、IV 的顺序旋转的直线会产生一个角度，但反方向旋转会改变这个角度，回到初始直线会产生一个负角度。^[25]

图 6 旋转任意直角后的角度 $+A$ 与 $-A$

Conant (1909) 称角度为生成线即矢径 (radius vector) 的旋转量。由矢径的移动方向决定角度的正负, 顺时针为正, 逆时针为负, 表示方向的箭头从始边指向终边。^[16]

以上几种教科书展示类比的思路, 建立了数学内部知识的横向连结。

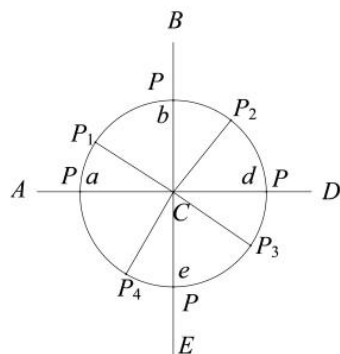
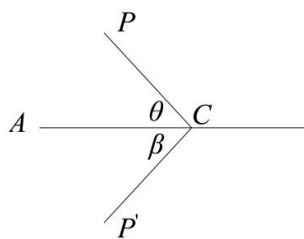
与上述出于数学严密性和符号同一性的考量不同, 还有一类观点借鉴自然现象, 验证角度的方向规定。Seaver (1889) 补充正角度是逆着太阳旋转的角度, 这与时钟指针的运动相反^[26]; Monroe (1914) 指出想象当钟摆向右摆动时称为正角度摆动, 向左摆动时称为负角度摆动; 同样地, 为便捷地处理问题, 以仰角为正, 俯角为负^[27]; Wood (1885) 肯定角度的正负规定与地理学科如何区分南北的联系, 如北纬 42 度的城市被称为纬度 $+42^\circ$, 赤道以南 42 度的城市被称为纬度 -42° 。^[28]三位作者丰富了角度规定的现实来源与意义。

4.2 以顺时针旋转方向为正

尽管以逆时针方向为正方向的规定为主流, 但在概念发展初期的 18 世纪上半叶, 也出现了反其道而行之的观点。

一种观点迥异于今天的象限顺序规定, 重新界定角的方向。Scholfield (1845) 通过以角的始边依次绕过四个象限的情形展示于旋转中扩角的经过。区别在于, 如图 7 所示, 编者依次称 ab 、 bd 、 de 和 ea 为第一、第二、第三和第四象限; 绕固定点 C 旋转的直线 CP 依次通过这四个象限, 形成相应的角度。

在简化的图 8 中, 编者还指出, 形如从左向右旋转形成的角度 θ 被认为是正的, 符号记作 $+$; 而角度 $\beta = \theta$ 由半径 CP' 沿相反方向旋转而产生, 被视为负值, 符号记作 $-$ 。^[29]

图 7 CP 绕 C 点旋转形成的角度图 8 正角 θ 与负角 β

另一种观点则立足于航海中量角的实际应用，肯定了顺时针方向的便捷性。Stimson (1913) 指出在确定船上罗盘的误差时，顺时针产生的角度被视为正角度^[30]。尽管作者同样指出除非另有说明，否则应始终将正角度视为逆时针方向产生的角度。

4.3 任意角方向的呈现方式的演化

上述编者的观点说明，规定以逆时针方向旋转形成的角度为正，这一做法有据可循，有理可依。以逆时针为正方向的呈现方式可以分为“代数化原则”“区分角度”“类比思想”“借鉴自然”“不加说明”5种。“不加说明”蕴含直接指出“以逆时针旋转为正方向”与默认但不给出直接规定的情况。若同一本教科书涉及2种及以上的呈现方式，将在不同类别下分别统计。具有相关内容的83种美英早期教科书中，各类呈现方式的数目如图9所示。

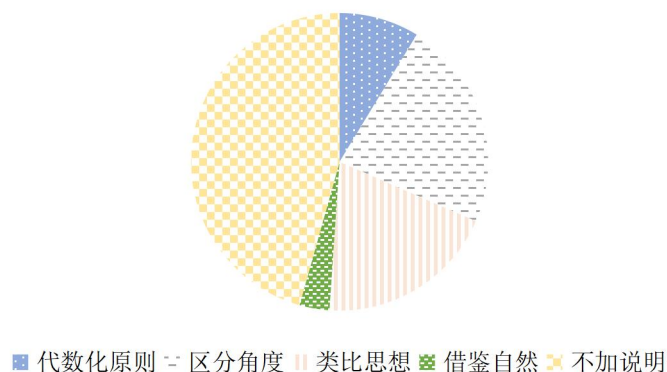


图 9 “以逆时针为正方向”的呈现方式分布

由图9可直观看出，尽管不加解释地规定“以逆时针旋转为正方向”的做法十分常见，但是对此规定进行各种说明的呈现方式仍占有过半比例。其中，区分角度和类比其他数学量的方

式平分秋色，借鉴自然的做法则比较新颖。

进一步地，将“以顺时针旋转为正方向”的 2 种教科书一同纳入观察的范畴，内容分为“改变象限”与“实际应用”。85 种教科书中，两类方向规定及其呈现方式的演变如图 10 所示。

由图 9 结合图 10 可知，以顺时针为正方向的规定只是短暂地在 19 世纪 40 年代和 20 世纪 10 年代分别出现过，可作为体现数学探究开放性的素材。

而以逆时针为正方向的规定始终是各个历史阶段的主流。不加说明的做法几乎出现在各个阶段。有所区分的是，19 世纪上半叶处于初步探究任意角方向规定的阶段，此时“不加说明”的做法更多指不特意进行方向规定；20 世纪上半叶的教科书则往往会专门给出“以逆时针旋转为正方向”的规定，但由于遵循惯例的观念，对此规定不加解释。

此外，在 19 世纪 30 年代至 70 年代，陆续出现了其他 4 种说明方式。其中，区分角度的说法最早登场，并在 19 世纪 70 年代及后各个阶段陆续出现，体现了历史的相似性。这也说明以解决问题为目的引入新数学量的方式，可能是最容易使学生接受的。借鉴自然的说明方式首次出现于 19 世纪 40 年代，此后露面次数并不多，却为当下的教学提供了更多元的情境素材。而将几何问题代数化的方式在 19 世纪后半叶出现得最为频繁，类比其他数学量的做法集中出现在 19 世纪 70 年代至 20 世纪 30 年代。两种方式可为学生理解任意角方向规定的必要性提供从数学内部出发的多个新角度。

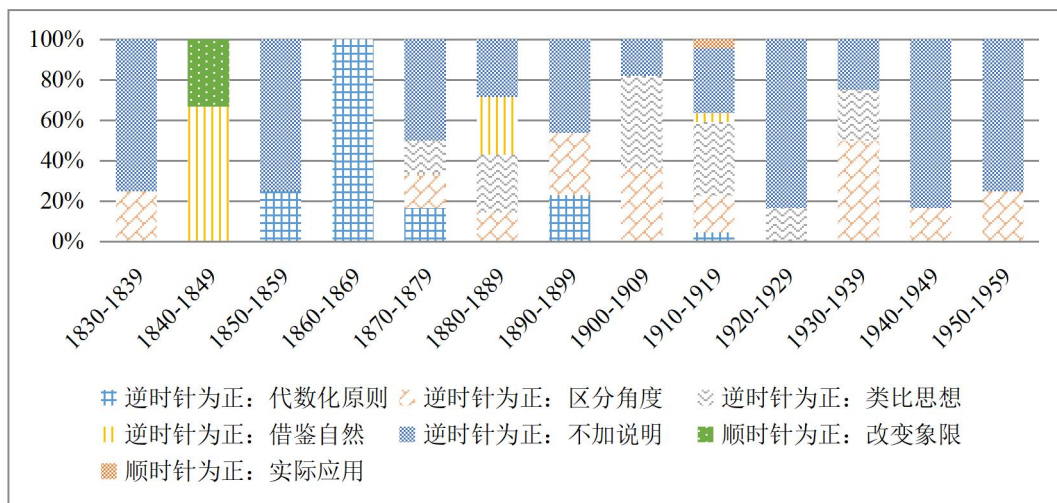


图 10 不同方向规定及其呈现方式的演变

5 任意角的运算

在任意角的运算中，早期教科书不仅采取了与现行教科书相同的做法——借助相反角，类比实数减法定义角的减法，再归结到角的加法，还做了其他的尝试。

类比向量的运算是一种选择。Hun（1911）解释符号 XOP 可表示线 OX 和 OP 形成的角度大小与从始边 OX 到终边 OP 的旋转方向，那么符号 $XOP+POQ$ 表示 OX 旋转到 OP 位置，再旋转到 OQ 位置。自然地参照向量的运算，有 $XOP+POQ=XOQ$ ， $XOP+POX=XOX=0$ 或 $XOP=-POX$ 。^[31]Murray（1906）也指出， XOQ 表示将 OX 向 OQ 旋转所形成的角度， QOX 表示将 OQ 向 OX 旋转所形成的角度^[32]。

用代数符号描述几何规律亦不失为另一尝试。Bohannon（1904）认为，要将角 A 加上角 B ，可使 A 的终边作为新的始边。在其上放置一个与 B 大小相等，并具有相同符号的角度。 A 的始边和 B 的终边构成 $A+B$ 的始边和终边。一般化地，这适用于 $\pm A+(+B)$ 和 $\pm A+(-B)$ 。要从角度 A 中减去角度 B ，可从 A 的末端放置一个与 B 大小相等但符号相反的角度。 A 的始边和 B 的新终边构成 $A-B$ 的始边和终边。这适用于 $\pm A-(+B)$ 和 $\pm A-(-B)$ ^[33]。

结合向量运算与代数表示更为一种新举。Durfee（1901）认可 Bohannon（1904）从几何角度对角的加减规则的理解，在类比向量运算的基础上，更进一步地，给出任意角度加减的代数表示式： $LVM+MVN=LVN$ ， $LVN+NVM=LVM$ ， $LVN-MVN=LVM$ ， $LVN-LVM=MVN$ ， $LVM-LVN=NVM$ ，对应几何图形见图 11。^[17]

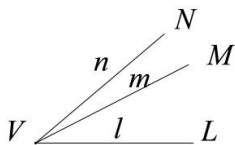


图 11 参与运算的角度示意图

6 关于任意角的相关习题

关于任意角，早期教科书还设置了一些别开生面的习题。其中一类突出任意角的概念理解，另一类以考察任意角的运算为主。

6.1 有关任意角概念的问题

一些教科书以机械运动为背景编制问题，旨在考查学生对任意角方向的理解，Wilczynski (1914) 编制了以下习题：

假设时钟的刻度盘是透明的，可以从两侧读取。两个人分别站在刻度盘的两侧，观察分针的运动 15 分钟。通过比较记录，他们发现在这段时间内，各自对分针所描述的角度并不一致。那么，两者的区别何在？^[18]

此题意在引导学生思考以不同的视角去看待角度，其旋转方向会不一致，因此统一角度方向的规定能够规避数学表示或现实交流中的误解。正如，在北极上方俯视地球自转方向为逆时针，在南极上判断则为顺时针，两种表示可以统一为地球自转的方向是自西向东。

Wilczynski (1914) 设计了彼此关联的一组习题。

(1) 如图 12 所示，两个车轮 A 和 B 由皮带连接， A 的直径是 B 的两倍， A 沿逆时针方向移动。当 A 以 300° 的角度旋转时， B 的轮辐将描述什么角度？

(2) 如果两个车轮由交叉皮带连接， A 旋转 300° 时， B 的轮辐将描述什么角度？

(3) 如果 n 个车轮通过齿轮连接，那么第一个和最后一个车轮是在相同方向还是相反方向上旋转？^[18]

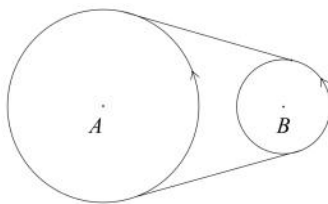


图 12 用皮带或齿轮连接的车轮 A 和 B

前两问区别了不同物理条件下从动轮旋转方向的变化，当主动轮与从动轮方向相反时，两种旋转方向被置于某时刻的同一情景下，学生不得不面对两种方向的区分，能够深切体会任意角方向及正负规定的必要性；最后一问，更新了物理条件且将问题一般化，体现更高的逻辑推理要求。学生若想解决问题，必须将物理情境联合数学知识，符合当下学科融合的课程理念。

6.2 有关任意角运算的问题

早期教科书亦出现了一批有别于当下纯数学情境、意在考查任意角运算的情境应用题。以

下摘录其中涉及肢体运动、量天、测地的三类典例。

Wells (1883) 给出问题:

两臂从同一位置 OA 一起绕 O 转动, 一只手朝正方向转动, 60 秒转一圈, 另一个朝着相反的方向, 36 秒转一圈。它们将在什么角度、什么时间会面。^[21]

此题以手臂相挥为问题背景, 多数学生往往会边想象边挥手比划, 此时学生无须借助如钟表盘, 咬合齿轮这类额外的学具, 便可自发地直观感受; 题中的数值条件鼓励学生进行“精确比划”, 对现实问题数学化, 进而使其感受数学的抽象与严密; 题中没必要指出哪只手的转动为正方向, 需学生自己意识到分类讨论的必要性, 再次强调数学的严谨性。

Wilczynski (1914) 编拟了两个应用题^[18]:

- 把车轮想象成在车轴上转动, 而车厢却静止不动。当马车行驶 500 英尺时, 直径为 3 英尺的车轮轮辐所转过的角度是多少?

- 地球每 365 天经过以太阳为中心的近似圆形轨道。在 415 天内, 日地连线 (地球半径向量) 将转过多大的角度?

地面上行进马车的车轮位移与天体运动, 多角度印证了任意角的应用价值, 呼应研究三角学研究的勘测初旨。

7 结论与启示

美英早期三角学教科书由数学内部和实际生活体验两个角度进行任意角的引入, 其中生活情境囊括天文、体育及机械背景, 着实丰富。而在任意角方向的规定上, 既从四个角度 (几何问题代数化、区分两类角度、类比其他数学量规定、借鉴自然事实) 阐释以逆时针为正方向的充分理由, 也不否认以顺时针为正方向的可能性与部分实用价值。在任意角的运算上, 亦补充了类比向量运算的法则。上述种种, 予今日的教学以诸多启示。

其一, 创设基于学生体验, 尽可能指向真实世界的情境。从数学学习的本质看, 学生建构新知的过程, 始终与知识赖以产生意义的背景及环境相关联^[34], 因此, 任意角的恰当引入是关键。相对于直接从数学内部的研究需求来说明角度推广的必要, “现实问题数学化” 的形式更易被学生接受。当然, 此处的现实情境不应是人为编造或偏离学生生活体验的, 而应来自学生熟知的生活现象, 指向真实性、基础性和引导性。教师在进行主题导入时, 可参照早期教科书

中详实的现实生活情境,使学生直观感受以往定义的不足,进而体悟任意角引入是研究新事物的需要。在进行任意角的知识考察时,也不妨尝试让学生解决具有现实背景的问题,使其在有意义的行动中完善对任意角的认知。

其二,发展整体教学的视野,展示数学逻辑的统一。新课改以发展学生数学核心素养为导向,要求教师将目光由关注单一的知识点转向关注数学单元整体,这体现数学内部的纵向连结。任意角作为三角函数章节的起始课,应为一般三角函数的学习铺垫。教师在教学过程中,可以通过终边相同的角体现角度变化的周期性。类似地,数学内部不同知识模块间的横向连结亦不容忽略。由早期教科书的启发,类比线段去研究角度,契合学生的已有经验,也可帮助他们深入对“正负角”规定的理解。

其三,秉持包容的态度,培养学生的探究意识。如果只是将任意角方向的规定不加解释地灌输给学生,将无法解决其对于如此行之的认知冲突。就一线教学的反馈而言,学生常会在综合性问题中忽略对任意角方向的关注,推测来看,学生可能并未完全认可“以逆时针旋转为正方向”的合理性。由此,教师在教学过程中,应包容地看待学生可能会有的疑惑,引导其在问题解决中意识任意角方向规定的必要性。而后,再让学生开放式地探究如何区分任意角的方向,使其在参与的过程中体会“以逆时针旋转为正方向”的简洁性、实用性与统一性。学生头脑中的困惑具有历史相似性,借鉴数学家们的研究,或可提高学生对任意角方向规定的认可。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 21.
- [2] 孙四周. 现象教学视角下的任意角教学实录与反思[J]. 中学数学月刊, 2021(2): 7-10.
- [3] 饶彬. “任意角”:从历史看必要性与规定[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2017(4): 45-51.
- [4] 张志勇. 于寻常之中发现不寻常——“任意角”的教学设计与反思[J]. 中学数学月刊, 2020(8): 1-5.
- [5] 章建跃. 为什么用单位圆上点的坐标定义任意角的三角函数[J]. 数学通报, 2007, 46(1): 4.
- [6] 朱海桐. 基于“演绎推理与合情推理并重”的教学设计与反思——任意角[J]. 数学教学通讯,

2015(27): 7-9.

- [7] 曹瑞彬. “任意角”的教学设计与反思[J]. 中学数学月刊, 2018(4): 1-3.
- [8] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892: 1-2.
- [9] Young, J. R. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: John Souter, 1833: 72-75.
- [10] Todhunter, I. *Trigonometry for Beginners*[M]. London: Macmillan Co., 1866: 116-128, 133-135.
- [11] Abbott, R. *The Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: Thomas Ostell & Co., 1841: 27-30.
- [12] Hymers, J. *A Treatise on Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1841: 44-47.
- [13] Hann, J. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. London: John Weale, 1854: 24-26.
- [14] Newcomb, S. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1883: 1-8.
- [15] Lock, J. B. *A Treatise on Elementary Trigonometry*[M]. London: Macmillan & Co., 1885: 23-24.
- [16] Conant, L. L. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1909: 7-11.
- [17] Durfee, W. P. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1901: 33-36.
- [18] Wilczynski, E. J. *Plane Trigonometry & Applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914: 133-138.
- [19] Bocher, M. & Gaylord, H. D. *Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1914: 48-53.
- [20] Colenso, J. W. *Plane Trigonometry* (V.1)[M]. London: Longmans, Green, & Co., 1859: 3-8.
- [21] Wells, W. *A Practical Textbook on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn. 1883: 15-17.
- [22] Bowser, E. A. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1892: 1-5.
- [23] Lyman, E. A. & Goddard, E. C. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1900: 1-3.
- [24] Hall, A. G. & Frink, F. G. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1910: 1-3.
- [25] Blakslée, T. M. *Academic Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. Boston: Ginn & Co., 1888: 13-

15.

- [26] Seaver, E. P. *Elementary Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York: Taintor Brothers & Co., 1889: 66-73, 92-96.
- [27] Kenyon, A. M. *Trigonometry*[M]. New York: Macmillan Co., 1914: 48-53.
- [28] Wood, D. V. *Trigonometry, Analytical, Plane & Spherical*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1885: 1-3, 10-13.
- [29] Scholfield, N. *Higher Geometry & Trigonometry*[M]. New York: Collins, Brother & Co., 1845:28-29, 38.
- [30] Brown, S. J. *Trigonometry and Stereographic Projections*[M]. Baltimore: The Lord Baltimore press, 1913: 35-38.
- [31] Hun, J. G. & MacInnes, C. R. *The Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1911: 2-6.
- [32] Murray, D. A. *Plane Trigonometry for Colleges & Secondary Schools*[M]. New York: Longmans, Green & Co., 1906: 36-38.
- [33] Bohannan, R. D. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1904: 2-7.
- [34] 黄翔, 李开慧. 关于数学课程的情境化设计[J]. 课程·教材·教法, 2006(09): 39-43.

美英早期三角学教科书中的三角恒等式

姚 瑶

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

平面三角学中,除了同角三角函数关系、三角形中的三角恒等式以外,还有其他很多的恒等式。这些恒等式的形式较为复杂,在教科书中较为少见,但能通过简单常用的三角恒等式推导得出,是三角恒等式知识网络的拓展与补充。

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》中要求学生能运用常见三角恒等式进行简单的恒等变换,推导出其他三角恒等式;要求教师在三角恒等变换的教学中,可以采用不同的方式得到三角恒等式^[1]。“其他三角恒等式”中的部分推导与应用也属于高中课程标准中对学生的要求,且研究“其他三角恒等式”对教师的教学框架搭建也起到了丰富完善的作用。

在不同版本的现行教科书中,苏教版教科书在“问题与探究”板块介绍了将正弦函数与余弦函数的叠加 $a\cos x + b\sin x$ 化成 $A\cos(x+\theta)$ 或 $A\sin(x+\theta)$ 的形式,进而介绍其在物理学中的广泛应用;人教A版教科书将正弦函数与余弦函数的叠加中的化归思想融入到具体例题中,并应用该思想求解三角函数的最值问题;沪教版教科书则在例题中直接要求将正弦函数与余弦函数的叠加进行转化。由此可见,其他三角恒等式虽然范围广泛且应用相对较少,但其他三角恒等式中仍有对三角恒等式的转化至关重要的内容。

在教学实践中,类似于正弦函数与余弦函数的叠加转换一类的三角恒等式应用较多,常用于求解三角函数的最值问题,而其他较为复杂的三角恒等式则更加考查学生探索归纳的逻辑思维能力,可能会出现在应用数学归纳法的证明题或数学竞赛中。本文对美英早期三角学教科书进行考察,试图对其中的三角恒等式及其证明进行梳理和分析,以期为今日课堂教学提供素材。

2 早期教科书的选取

从相关数据库中选取19世纪至20世纪中叶期间出版的108种美英早期三角学教科书为研

究对象，其中仅有 21 种教科书涉及到除同角三角函数、三角形中的三角恒等式等以外的其他三角恒等式。若以 40 年为一个时间段，则涉及其他三角恒等式的教科书的时间分布情况如图 1 所示。

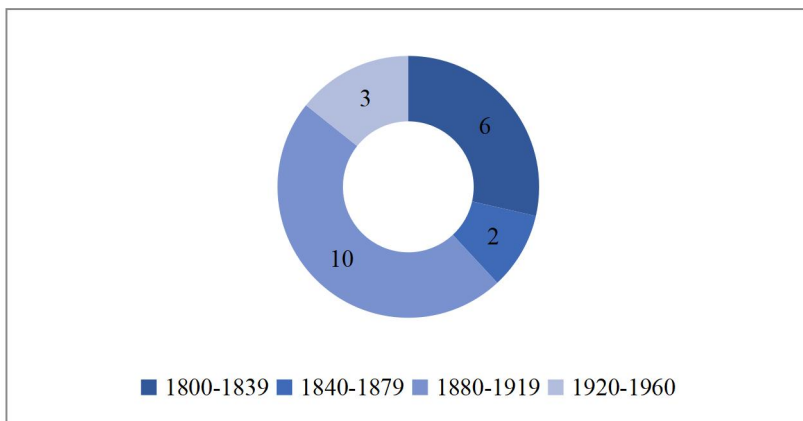


图 1 涉及其他三角恒等式的美英早期教科书时间分布情况

3 正弦函数与余弦函数的叠加

有 4 种教科书中出现了将正弦函数与余弦函数的叠加 $a \cos x + b \sin x$ 进行转化的方法。当 $a^2 + b^2 \neq 0$ 时有

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right),$$

如图 2 所示，存在 $\theta \in [0, \pi)$ ，使得 $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \theta$ ， $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \theta$ ，从而有

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta)。$$

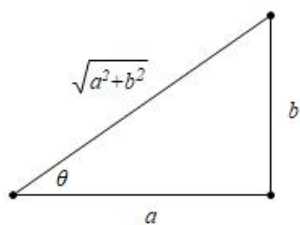


图 2 正余弦函数叠加转化示意图之一

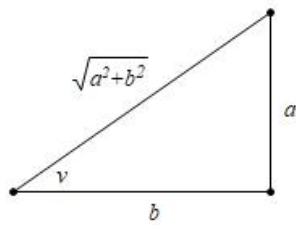


图 3 正余弦函数叠加转化示意图之二

或者如图 3 所示，存在 $v \in [0, \pi)$ ，使得 $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin v$ ， $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos v$ ，从而有

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + v)。$$

有 14 种教科书运用了上述等式，有的教科书涉及方程 $a \cos x + b \sin x = 0$ 的求解，也有教科书通过具体例子体现了三角函数中的转化思想。

4 正弦和

4.1 系数均为 1 的情形

$$\text{公式 1: } \sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \cdots + \sin(\alpha + n\beta) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n}{2}\beta\right) \sin \frac{n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

有 13 种教科书涉及系数均为 1 的正弦和相关三角恒等式，其中 12 种教科书通过乘 $2\sin \frac{\beta}{2}$ 并利用积化和差公式分解相消的方式给出如下所示的具体证明。

证明：利用积化和差公式可知

$$2\sin \frac{\beta}{2} \sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right),$$

$$2\sin \frac{\beta}{2} \sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right),$$

$$2\sin \frac{\beta}{2} \sin(\alpha + 2\beta) = \cos\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{5\beta}{2}\right),$$

.....

$$2\sin \frac{\beta}{2} \sin(\alpha + n\beta) = \cos\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2n+1}{2}\beta\right).$$

将上式两边分别相加得

$$\begin{aligned} & 2\sin \frac{\beta}{2} [\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \cdots + \sin(\alpha + n\beta)] \\ &= \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2n+1}{2}\beta\right) \\ &= \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \sin \frac{n+1}{2}\beta \end{aligned},$$

从而当 $2\sin \frac{\beta}{2}$ 不为 0 时，两边同时除以 $2\sin \frac{\beta}{2}$ 即可得证。

由公式 1 可以推出下列推论。

有 12 种教科书中提到推论 1 所示恒等式, 其中有 7 种教科书给出了共三种不同的证明方

有 6 种教科书采用该方法进行证明。在恒等式 1 中, 将 $n+1$ 项求和改写成 n 项求和, 并令 $\beta = \alpha$, 即可得推论 1。

Woodhouse (1819) 编写的教科书中由于没有给出公式 1 所示等式, 故采用与其类似的方法进行推导, 即每项与 $2\sin\frac{\alpha}{2}$ 相乘后利用积化和差公式, 消项相加即可推出[2]。

Snowball (1891) 利用三角函数指数形式的欧拉公式进行转换^[3], 即令 $2\sqrt{-1}\sin\alpha = x - \frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{-1}\sin 2\alpha &= x^2 - \frac{1}{x^2}, \\ 2\sqrt{-1}\sin 3\alpha &= x^3 - \frac{1}{x^3}, \\ &\dots\dots\dots \\ 2\sqrt{-1}\sin n\alpha &= x^n - \frac{1}{x^n}. \end{aligned}$$
$$2\sqrt{-1}(\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots \sin n\alpha)$$

$$= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \cdots - \frac{1}{x^n}$$

$$\begin{aligned}
&= x \frac{x^n - 1}{x - 1} - \frac{1}{x} \frac{\frac{1}{x^n} - 1}{\frac{1}{x} - 1} \\
&= \frac{x^{n+1} + \frac{1}{x^n} - x - 1}{x - 1} \\
&= \frac{\left(x^{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{n+1}{2}}} \right) - \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \right)}{x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}} \\
&= \frac{2 \cos \frac{2n+1}{2} \alpha - 2 \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sqrt{-1} \sin \frac{\alpha}{2}},
\end{aligned}$$

整理即可推导出推论 1 所示恒等式。

公式 1 推论 2: $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots \sin(2n-1)\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin \alpha}$

6 种教科书中提到了推论 2 所示恒等式，其中 5 种教科书通过在公式 1 中令 $\beta = 2\alpha$ ，推得推论 2 所示恒等式。而 Thomson（1825）采用与公式 1 类似的方法，每项乘 $2\sin \alpha$ 并利用积化和差公式分解相加^[4]。

公式 1 推论 3: $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \cdots \sin 2n\alpha = \frac{\sin(n+1)\alpha \sin n\alpha}{\sin \alpha}$ 。

Rothrock（1910）在教科书习题中呈现了推论 3 所示恒等式，该恒等式可通过推论 1 直接得到^[5]。

公式 1 推论 4:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + 2\beta) + \cdots + \sin^2[\alpha + (n-1)\beta] = \frac{n}{2} - \frac{\cos[2\alpha + (n-1)\beta] \sin n\beta}{2 \sin \beta}。$$

3 种教科书中涉及推论 4 所示恒等式，均处于习题部分。Rothrock（1910）指出了该等式的证明思路，即利用倍角公式先降幂，再利用余弦和公式（即下文公式 4）相加即可^[5]。由此可知，该等式可以推广到高次幂的情形，通过降幂至一次可证。

公式 1 推论 5:

$$\sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{2k\pi}{n} \right) + \sin \left(\alpha + 2 \frac{2k\pi}{n} \right) + \cdots + \sin \left[\alpha + (n-1) \frac{2k\pi}{n} \right] = 0 \quad (k \in N^*, \text{ 且 } k \text{ 不被 } n$$

整除)。

3 种教科书涉及到公式 1 的一个具体结论, 即当 $\beta = \frac{2k\pi}{n}$ 时, 有 $\sin \frac{1}{2}n\beta = \sin k\pi = 0$, 即可得推论 5。若当 $\alpha = 0$ 时, 可得到一个更具体的恒等式, 即:

$$\sin \frac{2k\pi}{n} + \sin 2 \frac{2k\pi}{n} + \sin 3 \frac{2k\pi}{n} + \cdots + \sin (n-1) \frac{2k\pi}{n} = 0 \quad (k \in N^*, \text{ 且 } k \text{ 不被 } n \text{ 整除})。$$

Davison (1919) 给出了推论 5 所示恒等式在几何上的一个具体应用^[6]: 如图 4 所示, A_1 、 A_2 、...、 A_n 是一个正 n 边形在圆中的顶点, 求这些点到直径 PQ 的垂直距离之和, 其中设 $\angle POA_1 = \alpha$, 半径长为 a 且 $A_r N_r \perp PQ$ ($r=1, 2, \dots, n$)。

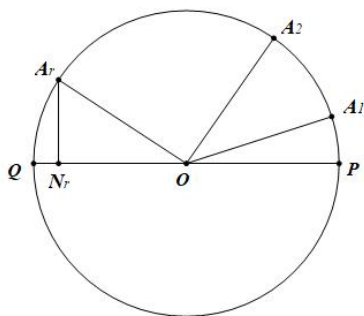


图 4 推论 5 的具体几何应用实例

由题意可知 $A_1 A_2$ 、 $A_2 A_3$ 、... 对应的角度均为 $\frac{2\pi}{n}$, 故 $\angle POA_r = \alpha + (r-1) \frac{2\pi}{n}$, 从而

$N_r A_r = a \sin \left[\alpha + (r-1) \frac{2\pi}{n} \right]$, 因此这些点到直径的垂直距离之和为

$$\sum_{r=1}^n N_r A_r = a \left[\sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + \sin \left(\alpha + 2 \frac{2\pi}{n} \right) + \cdots + \sin \left(\alpha + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

$$= \frac{a \sin \left[\alpha + (n-1) \frac{\pi}{n} \right] \sin \pi}{\sin \frac{\pi}{n}} = 0。$$

此外, Thomson (1825) 对公式 1 进行推广, 得到了下列一般情形下的三角恒等式^[4]。

公式 1 的推广:

$$\begin{aligned} & \sin m\alpha + \sin(m+r)\alpha + \sin(m+2r)\alpha + \cdots + \sin[m+(n-1)r]\alpha \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}nr\alpha \sin\left[m + \frac{1}{2}(n-1)r\right]\alpha}{\sin \frac{1}{2}r\alpha}。 \end{aligned}$$

公式 2: (符号变化)

$$\begin{aligned} & \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \cdots \pm \sin[\alpha + (n-1)\beta] \\ &= \frac{\sin\left[\alpha + \frac{n-1}{2}(\beta + \pi)\right] \sin \frac{n}{2}(\beta + \pi)}{\cos \frac{\beta}{2}}。 \end{aligned}$$

4 种教科书中提到了公式 2 所示三角恒等式, 其中 Wilson (1831) 通过每项乘 $2\cos \frac{\beta}{2}$ 并利用积化和差公式分解相加来推导^[7], 而另外 3 种教科书直接利用公式 1 对其进行了证明。将等式左边改写为

$$\sin \alpha + \sin[\alpha + (\beta + \pi)] + \sin[\alpha + 2(\beta + \pi)] + \cdots + \sin[\alpha + (n-1)(\beta + \pi)],$$

就可以直接利用公式 1 的结论, 即用 $\beta + \pi$ 代替 β , 可得

$$\begin{aligned} & \sin \alpha - \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \cdots \pm \sin[\alpha + (n-1)\beta] \\ &= \sin \alpha + \sin[\alpha + (\beta + \pi)] + \sin[\alpha + 2(\beta + \pi)] + \cdots + \sin[\alpha + (n-1)(\beta + \pi)] \\ &= \frac{\sin\left[\alpha + \frac{n-1}{2}(\beta + \pi)\right] \sin \frac{n}{2}(\beta + \pi)}{\sin \frac{\beta + \pi}{2}} \\ &= \frac{\sin\left[\alpha + \frac{n-1}{2}(\beta + \pi)\right] \sin \frac{n}{2}(\beta + \pi)}{\cos \frac{\beta}{2}} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -\frac{\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}, n \text{ 为偶数} \\ \frac{\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)\cos\frac{n\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}, n \text{ 为奇数} \end{cases},$$

此外, 该恒等式也可从带系数的正弦和三角恒等式推出, 即在下文公式 3 中令 $x = -1$ 。

公式 2 推论 1:

$$\sin \alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \cdots \pm \sin n\alpha = \begin{cases} -\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, n \text{ 为偶数} \\ \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}, n \text{ 为奇数} \end{cases}。$$

Lardner (1828) 和 Wilson (1831) 通过在公式 2 中令 $\beta = \alpha$ 可得到推论所示恒等式^[7-8]。

4.2 有特定系数的情形

公式 3: $x \sin(\alpha + \beta) + x^2 \sin(\alpha + 2\beta) + \cdots + x^n \sin(\alpha + n\beta)$

$$= \frac{x \sin(\alpha + \beta) - x^2 \sin \alpha - x^{n+1} \sin[\alpha + (n+1)\beta] + x^{n+2} \sin(\alpha + n\beta)}{1 - 2x \cos \beta + x^2}。$$

有 2 种教科书呈现了公式 3, 其中 Wilson (1831) 给出了证明方法^[7]。将等式左边 n 项和记为 S_n , 由和差化积公式可知 $\sin(\alpha + n\beta + \beta) + \sin(\alpha + n\beta - \beta) = 2\sin(\alpha + n\beta)\cos \beta$, 从而有

$$2x^{n+1} \sin(\alpha + n\beta)\cos \beta = x^{n+1} \sin(\alpha + n\beta + \beta) + x^{n+1} \sin(\alpha + n\beta - \beta)。$$

分别用 1, 2, 3, ..., n 代入上式中的 n 并将这 n 个等式相加可得

$$2xS_n \cos \beta = S_n - x \sin(\alpha + \beta) + x^{n+1} \sin[\alpha + (n+1)\beta] + x^2 S_n + x^2 \sin \alpha - x^{n+2} \sin(\alpha + n\beta),$$

将含 S_n 的项合并整理即可得证。同样, 令 $\alpha = 0$ 可得下列推论:

公式 3 推论 1: $x \sin \beta + x^2 \sin 2\beta + \cdots + x^n \sin n\beta = \frac{x \sin \beta - x^{n+1} \sin(n+1)\beta + x^{n+2} \sin n\beta}{1 - 2x \cos \beta + x^2}$ 。

公式 3 推论 1' (无穷形式): $x \sin \beta + x^2 \sin 2\beta + x^3 \sin 3\beta + \cdots = \frac{x \sin \beta}{1 - 2x \cos \beta + x^2}$ ($x < 1$)。

3 种教科书中提到了推论 1 的无穷形式, 其中 Morgan (1837) 给出了该恒等式的两种证法 [9]。

证法一: 利用和差化积公式

将等式左边和记为 S , 根据和差化积公式 $\sin(n+1)\beta + \sin(n-1)\beta = 2 \sin n\beta \cos \beta$, 有

$$n=1 \text{ 时, } x \sin 2\beta + 0 = 2x \sin \beta \cos \beta,$$

$$n=2 \text{ 时, } x^2 \sin 3\beta + x^2 \sin \beta = 2x^2 \sin 2\beta \cos \beta,$$

$$n=3 \text{ 时, } x^3 \sin 4\beta + x^3 \sin 2\beta = 2x^3 \sin 3\beta \cos \beta,$$

... ..

全部相加可得 $\frac{S - x \sin \beta}{x} + xS = 2S \cos \beta$, 故

$$S = \frac{x \sin \beta}{1 - 2x \cos \beta + x^2} \quad (x < 1)。$$

证法二: 指数形式转换

令 $2\sqrt{-1} \sin \beta = z - \frac{1}{z}$, 从而 $2\sqrt{-1} \sin 2\beta = z^2 - \frac{1}{z^2}$, ..., 故有

$$\begin{aligned} & x \sin \beta + x^2 \sin 2\beta + x^3 \sin 3\beta + \cdots \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left[x \left(z - \frac{1}{z} \right) + x^2 \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right) + x^3 \left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right) + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(xz + x^2 z^2 + \cdots \right) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \cdots \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \frac{xz}{1 - xz} - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \frac{xz^{-1}}{1 - xz^{-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{-1}} \frac{xz - xz^{-1}}{1 - (z + z^{-1})x + x^2} \\ &= \frac{x}{1 - (z + z^{-1})x + x^2} \frac{z - z^{-1}}{2\sqrt{-1}} \\ &= \frac{x \sin \beta}{1 - 2x \cos \beta + x^2}, \end{aligned}$$

此外，Davison（1919）还利用复数的三角表示来推导推论 1' 所示恒等式^[6]，具体推导过程见下文公式 6 推论 1' 的证明过程。

5 余弦和

5.1 系数均为 1 的情形

$$\text{公式 4: } \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \cdots + \cos(\alpha + n\beta) = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{1}{2}n\beta\right) \sin \frac{n+1}{2}\beta}{\sin \frac{\beta}{2}}。$$

有 14 种教科书中提到与公式 1 正弦情况相对应的余弦和恒等式。其中 10 种教科书通过乘 $2\sin \frac{\beta}{2}$ 并利用积化和差公式分解相消的方式给出与公式 1 类似的证明过程；4 种教科书通过在公式 1 中用 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 代替 α 推导得到；此外，Wilson（1831）指出该恒等式也可从带系数的余弦和三角恒等式推出^[7]，即在下文公式 6 中令 $x=1$ 即可。

由公式 4 可以推出下列推论。

$$\text{公式 4 推论 1: } \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \cos \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}。$$

有 12 种教科书中提到推论 1 所示恒等式。其中有 5 种教科书利用公式 4 进行转换，将 $n+1$ 项求和改写成 n 项求和，并令 $\beta = \alpha$ ，即可得推导得出结论；此外，Hann（1854）和 Snowball（1891）还利用欧拉公式进行推导^{[3][10]}，具体过程如下：

令 $\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha = x$ ，那么 $\cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha = \frac{1}{x}$ ，两式相加可知 $2 \cos \alpha = x + \frac{1}{x}$ ，因此 $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha$ 等价于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^{n+1} - x}{x - 1} + \frac{x^n - 1}{x^n(x - 1)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^n - 1)(x^{n+1} + 1)}{x^n(x - 1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(x^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{n}{2}}} \right) \left(x^{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{n+1}{2}}} \right)}{x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}},$$

此时,

$$\frac{x^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{n}{2}}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{\left(x^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{n}{2}}} \right)^2}{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2}} = \sqrt{\frac{\left(x^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{n}{2}}} \right)^2 - 4}{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 - 4}} = \sqrt{\frac{\left(2 \cos \frac{n\alpha}{2} \right)^2 - 4}{\left(2 \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2 - 4}} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \frac{n\alpha}{2}}{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

从而代入上式即可得证。

公式 4 推论 2: $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cdots + \cos(2n-1)\alpha = \frac{\sin n\alpha \cos n\alpha}{\sin \alpha}.$

4 种教科书中提到了推论 2 所示恒等式, 其中 Thomson (1825) 采用与公式 4 类似的证明方法, 每项乘 $2\sin \alpha$ 并利用积化和差公式分解相加^[4]。

公式 4 推论 3: $\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \cdots + \cos 2n\alpha = \frac{\cos(n+1)\alpha \sin n\alpha}{\sin \alpha}.$

公式 4 推论 4: $\cos^2 \alpha + \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + 2\beta) + \cdots + \cos^2[\alpha + (n-1)\beta]$

$$= \frac{n}{2} + \frac{\cos[2\alpha + (n-1)\beta] \sin n\beta}{2 \sin \beta}.$$

与正弦和中公式 1 推论 3、4 类似, Rothrock (1910) 在习题中给出了上述推论 3、4 所示恒等式^[5]。

公式 4 推论 5: $\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + 2\frac{2k\pi}{n}\right) + \cdots + \cos\left[\alpha + (n-1)\frac{2k\pi}{n}\right] = 0$

($k \in N^*$, 且 k 不被 n 整除)。

5 种教科书涉及到公式 1 的一个具体结论, 其中 4 种教科书均在习题部分呈现, 仅 Wilczynski (1914) 给出推导过程^[11]。即当 $\beta = \frac{2k\pi}{n}$ 时, 有 $\sin \frac{1}{2}n\beta = \sin k\pi = 0$, 即可得推论 5。

若当 $\alpha = 0$ 时, Loney (1893)、Wilczynski (1914) 给出了一个更具体的恒等式^{[12][11]}, 即:

$$1 + \cos \frac{2k\pi}{n} + \cos 2\frac{2k\pi}{n} + \cos 3\frac{2k\pi}{n} + \cdots + \cos(n-1)\frac{2k\pi}{n} = 0 \quad (k \in N^*, \text{ 且 } k \text{ 不被 } n \text{ 整除}),$$

上式中若 k 是 n 的倍数，则等式右边等于 n 。

此外，Thomson (1825) 对公式 4 进行推广，得到了下列一般情形下的三角恒等式^[4]。

公式 4 推广： $\cos m\alpha + \cos(m+r)\alpha + \cos(m+2r)\alpha + \cdots + \cos[m+(n-1)r]\alpha$

$$= \frac{\sin \frac{nr\alpha}{2} \cos \left[m + \frac{1}{2}(n-1)r \right] \alpha}{\sin \frac{r\alpha}{2}}。$$

公式 5：（符号变化） $\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \cdots \pm \cos[\alpha + (n-1)\beta]$

$$= \begin{cases} \frac{\sin \left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta \right) \sin \frac{n\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}, n \text{ 为偶数} \\ \frac{\cos \left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta \right) \cos \frac{n\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}, n \text{ 为奇数} \end{cases}。$$

2 种教科书中提到了公式 5 所示三角恒等式，其中 Wilson (1831) 通过每项乘 $2\cos \frac{\beta}{2}$ 并利用积化和差公式分解相加来推导^[7]，而 Lardner (1828) 直接利用公式 2 对其进行了证明^[8]，即在公式 2 中用 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 代替 α 即可得证。此外，该恒等式也可从带系数的余弦和三角恒等式推出，即在下文公式 6 中令 $x = -1$ 。

在公式 5 中令 $\beta = \alpha$ 可得到推论所示恒等式。

公式 5 推论：

$$\cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots \pm \cos n\alpha = \begin{cases} \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, n \text{ 为偶数} \\ \frac{\cos \frac{(n+1)\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, n \text{ 为奇数} \end{cases}。$$

5.2 有特定系数的情形

公式 6: $x \cos(\alpha + \beta) + x^2 \cos(\alpha + 2\beta) + \cdots + x^n \cos(\alpha + n\beta)$

$$= \frac{x^2 \cos \alpha - x \cos(\alpha + \beta) + x^{n+1} \cos[\alpha + (n+1)\beta] - x^{n+2} \cos(\alpha + n\beta)}{1 - 2x \cos \beta + x^2}.$$

有 2 种教科书中呈现了公式 6，其中 Wilson (1831) 给出了两种证明方法^[7]。证法一与公式 3 证法类似，由和差化积公式 $\cos(\alpha + n\beta + \beta) + \cos(\alpha + n\beta - \beta) = 2\cos(\alpha + n\beta)\cos \beta$ 推出；证法二只需在得到公式 3 的基础上，用 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 代替 α 即可。

同样，令 $\alpha = 0$ 可得下列推论：

公式 6 推论 1: $x \cos \beta + x^2 \cos 2\beta + \cdots + x^n \cos n\beta$

$$= \frac{x^2 - x \cos \beta + x^{n+1} \cos(n+1)\beta - x^{n+2} \cos n\beta}{1 - 2x \cos \beta + x^2}.$$

公式 6 推论 1' (无穷形式): $x \cos \beta + x^2 \cos 2\beta + x^3 \cos 3\beta + \cdots = \frac{x \cos \beta - x^2}{1 - 2x \cos \beta + x^2} \quad (x < 1).$

Davison (1919) 利用复数的三角表示来推导推论 1' 所示恒等式^[6]，此方法可以同时推导出公式 3 推论 1' 的结论，具体过程如下：

令 $1 + x \cos \alpha + x^2 \cos 2\alpha + x^3 \cos 3\alpha + \cdots = C$ ， $x \sin \alpha + x^2 \sin 2\alpha + x^3 \sin 3\alpha + \cdots = S$ ，则

$C + iS = 1 + x(1, \alpha) + x^2(1, 2\alpha) + \cdots + x^n(1, n\alpha) + \cdots = 1 + x(1, \alpha) + x^2(1, \alpha)^2 + \cdots + x^n(1, \alpha)^n + \cdots$ 是

收敛的，由级数知识可知

$$\begin{aligned} C + iS &= \frac{1}{1 - x(1, \alpha)} \\ &= \frac{1}{1 - x \cos \alpha - ix \sin \alpha} \\ &= \frac{1 - x \cos \alpha + ix \sin \alpha}{(1 - x \cos \alpha)^2 - (ix \sin \alpha)^2} \\ &= \frac{1 - x \cos \alpha + ix \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}, \end{aligned}$$

从而

$$C = \frac{1 - x \cos \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2},$$

$$S = \frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$$

6 其他三角恒等式

6.1 正余弦混合情形

Wilczynski (1914) 给出了正余弦混合情形的几种三角恒等式^[11]。记

$$S_k = \sin \frac{2k\pi}{n} + \sin 2 \frac{2k\pi}{n} + \sin 3 \frac{2k\pi}{n} + \cdots + \sin(n-1) \frac{2k\pi}{n},$$

$$C_k = 1 + \cos \frac{2k\pi}{n} + \cos 2 \frac{2k\pi}{n} + \cos 3 \frac{2k\pi}{n} + \cdots + \cos(n-1) \frac{2k\pi}{n},$$

现考虑 $\frac{2k\pi}{n}$ 和 $\frac{2l\pi}{n}$ 两个角的形式, 有公式 7-9:

公式 7:

$$C_{kl} = 1 + \cos \frac{2k\pi}{n} \cos \frac{2l\pi}{n} + \cos 2 \frac{2k\pi}{n} \cos 2 \frac{2l\pi}{n} + \cdots + \cos(n-1) \frac{2k\pi}{n} \cos(n-1) \frac{2l\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2}(C_{k-l} + C_{k+l}),$$

公式 8:

$$S_{kl} = \sin \frac{2k\pi}{n} \sin \frac{2l\pi}{n} + \sin 2 \frac{2k\pi}{n} \sin 2 \frac{2l\pi}{n} + \cdots + \sin(n-1) \frac{2k\pi}{n} \sin(n-1) \frac{2l\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2}(C_{k-l} - C_{k+l}).$$

公式 9:

$$(S_k, C_l) = \sin \frac{2k\pi}{n} \cos \frac{2l\pi}{n} + \sin 2 \frac{2k\pi}{n} \cos 2 \frac{2l\pi}{n} + \cdots + \sin(n-1) \frac{2k\pi}{n} \cos(n-1) \frac{2l\pi}{n}$$

$$= \frac{1}{2}(S_{k-l} + S_{k+l}).$$

上述 3 个恒等式可根据 $k-l$ 、 $k+l$ 是否被 n 整除分类讨论求得具体值, 其具体证明过程均为利用积化和差公式以及 S_k 、 C_k 的结论来推导, 现只对公式 7 进行具体证明:

由 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ 可得:

$$C_{kl} = \frac{1}{2}(1+1) + \frac{1}{2} \left[\cos \frac{2(k-l)\pi}{n} + \cos \frac{2(k+l)\pi}{n} \right] + \frac{1}{2} \left[\cos 2 \frac{2(k-l)\pi}{n} + \cos 2 \frac{2(k+l)\pi}{n} \right] + \cdots$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[\cos(n-1) \frac{2(k-l)\pi}{n} + \cos(n-1) \frac{2(k+l)\pi}{n} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2(k-l)\pi}{n} + \cos 2 \frac{2(k-l)\pi}{n} + \cdots + \cos(n-1) \frac{2(k-l)\pi}{n} \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2(k+l)\pi}{n} + \cos 2 \frac{2(k+l)\pi}{n} + \cdots + \cos(n-1) \frac{2(k+l)\pi}{n} \right] \\
& = \frac{1}{2} (C_{k-l} + C_{k+l})。
\end{aligned}$$

6.2 正余弦高次和情形

Loney (1893) 在习题部分出现了形如 $\cos^3 \alpha + \cos^3 2\alpha + \cos^3 3\alpha + \cdots + \cos^3 n\alpha$ 的计算^[12], 我们通常利用降幂的方法进行求解, 即利用 $4\cos^3 \alpha = 3\cos \alpha + \cos 3\alpha$ 将其转化为一次形式的和, 再用公式 4 的结论即可。同样, 该方法可用于计算其他类似的高次和情形。

Nixon (1892) 对该结论进行了总结讨论^[13], 得到了新的命题:

当 $m < n$ 时, 序列 $\cos^m \alpha + \cos^m \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + \cdots + \cos^m \left[\alpha + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right]$ 不依赖于 α , 同理, $\sin^m \alpha + \sin^m \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) + \cdots + \sin^m \left[\alpha + (n-1) \frac{2\pi}{n} \right]$ 也与 α 无关。

6.3 其他三角函数和

公式 10: $\frac{1}{2} \tan \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{\alpha}{4} + \frac{1}{8} \tan \frac{\alpha}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{\alpha}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\alpha}{2^n} - \cot \alpha$ 。

有 5 种教科书提到公式 10 所示恒等式, 其中 3 种教科书对其进行了证明。

根据正切的二倍角公式 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ 可得

$$\cot 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} = \frac{1}{2 \tan \alpha} - \frac{\tan \alpha}{2} = \frac{1}{2} \cot \alpha - \frac{1}{2} \tan \alpha。$$

则将 α 和 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$ 和 $\frac{\alpha}{4}$, ... 替代上式中的 2α 和 α , 可得

$$\frac{1}{2} \cot \frac{\alpha}{2} - \cot \alpha = \frac{1}{2} \tan \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{1}{4} \cot \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2} \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \tan \frac{\alpha}{4},$$

... ..

$$\frac{1}{2^n} \cot \frac{\alpha}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \cot \frac{\alpha}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \tan \frac{\alpha}{2^n},$$

将上述等式全部相加即可。

公式 10 推论: $\tan \alpha + 2 \tan 2\alpha + 2^2 \tan 2^2 \alpha + \cdots + 2^{n-1} \tan 2^{n-1} \alpha = \cot \alpha - 2^n \cot 2^n \alpha$ 。

Davison (1919) 利用与公式 10 证法相似的方法得到了上述推论^[6]。

公式 11: $\csc \alpha + \csc 2\alpha + \csc 4\alpha + \cdots + \csc 2^{n-1} \alpha = \cot \frac{\alpha}{2} - \cot 2^{n-1} \alpha$ 。

有 5 种教科书提到公式 11 所示恒等式, 其中 Hann (1854) 和 Nixon (1892) 利用 $\csc \alpha = \cot \frac{\alpha}{2} - \cot \alpha$ 来进行求和相消证明^{[10][13]}。

公式 11 推论: $\csc \alpha + \csc 2\alpha + \csc 4\alpha + \cdots + \csc 2(n-1)\alpha = \cot \frac{\alpha}{2} - \cot 2(n-1)\alpha$ 。

Lardner (1828) 利用与公式 11 证法相似的方法得到了上述推论^[8]。

6.4 乘积形式的三角恒等式

Lardner (1828) 还指出了一种乘积形式的三角恒等式^[8]:

公式 12: $2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2^n}}$ 。

其推导过程如下:

由二倍角公式可知 $\sin mx = 2 \sin \frac{mx}{2} \cos \frac{mx}{2}$, 故有等式

$$\frac{\sin mx}{\sin \frac{mx}{2}} = 2 \cos \frac{mx}{2}。$$

在上述等式中分别用 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}$ 代替 m , 并将这 n 个等式相乘即可得证。

公式 12 推论 (无穷形式): $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cos \frac{x}{2^3} \cdots = \frac{\sin x}{x}$ 。

在公式 12 中, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $2^n \sin \frac{x}{2^n} \rightarrow 2^n \frac{x}{2^n} = x$, 从而可得公式 12 推论, 该推论也可

化为下列形式:

$$x = \sin x \sec \frac{x}{2} \sec \frac{x}{2^2} \sec \frac{x}{2^3} \cdots。$$

7 结论与启示

综上所述, 美英早期三角学教科书中的其他三角恒等式主要分为正余弦的叠加转化和三角函数 n 项求和恒等式, 本文将教科书中除同角三角函数关系、三角形中的三角恒等式等以外的重要三角恒等式进行整理, 为今日三角恒等式的教学提供了诸多启示。

第一, 抓住解题本质, 提炼一般形式。当前高中数学三角函数习题中, 解答三角方程问题和三角函数的最值问题属于学生基本知识技能的运用, 而这两个问题的本质都是正弦函数和余弦函数的叠加转化问题。抓住这两类题型的本质, 解决一般化形式的问题, 就可以在遇到具体问题时迎刃而解, 从而培养学生的数学抽象、逻辑推理等数学学科核心素养。

第二, 总结归纳方法, 贯彻转化思想。其他三角恒等式中, 三角函数 n 项求和恒等式的推导方法大致可以总结为两种, 一种是先乘一项式子, 利用积化和差公式展开消去相同项, 另一种是利用三角函数的指数形式进行转化; 正余弦的叠加恒等式的推导方法则是利用几何图形转化到一个新的角度。通过对三角恒等式推导方法的总结归纳, 培养学生举一反三、知识迁移的能力, 将类似的方法应用于其他三角函数求和问题。

第三, 发散数学思维, 增加数学探索。虽然正余弦的叠加转化和三角函数 n 项求和恒等式在其他三角恒等式这一课题出现的频率较高, 但仍有很多三角恒等式未经整理归纳, 并且三角函数求和恒等式还有许多更深层次的结论可以探索。这要求教师在确保学生掌握并熟练运用基本三角恒等式的情况下, 发散学生的数学思维, 带领学生阅读数学史素材, 探索教科书以外的其他三角恒等式, 共同提升数学热情与数学素养。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 22-24.
- [2] Woodhouse, R. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1819: 51-52.
- [3] Snowball, J. C. *The Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: Macmillan & Co., 1891: 82-83.

- [4] Thomson, J. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Belfast: Joseph Smyth, 1825: 54-55.
- [5] Rothrock, D. A. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Co., 1910: 108-110.
- [6] Davison, C. *Plane Trigonometry for Secondary Schools*[M]. Cambridge: The University Press, 1919: 275-287.
- [7] Wilson, R. *A System of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Cambridge: J. & J. J. Deighton, T. Stevenson & R. Newby, 1831: 111-134.
- [8] Lardner, D. *An Analytic Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: John Taylor, 1828: 290-302.
- [9] De Morgan, A. *Elements of Trigonometry & Trigonometry Analysis*[M]. London: Taylor & Walton, 1837: 120-126.
- [10] Hann, J. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. London: John Weale, 1854: 114-116.
- [11] Wilczynski, E. J. *Plane Trigonometry & Applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914: 250-256.
- [12] Loney, S. L. *Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1893: 281-288.
- [13] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892: 326-333.

三角学在航海、物理和天文学中的应用

石 城

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

三角学一词的原意为三角形测量。由于人们需要三角知识来建立定量的天文学, 早期三角学从属于天文学, 通过预测天体的运动路线和位置来报时和历法推算^[1]。文艺复兴之后, 三角学逐渐从天文学中分离出来, 变为一门独立学科。后来由于航海事业的繁荣, 三角学广泛运用于航海和实地测量。18 世纪以后, 欧拉 (L. Euler, 1707-1783) 将三角学从静态的研究三角形解法的狭隘天地中解放出来, 三角函数成为三角学的主要研究对象。伴随着三角学的分析化, 三角学开始在物理领域崭露头角, 例如, 傅里叶 (J. Fourier, 1768-1830) 运用三角级数解决了物理学中的弦振动和热传导问题^[2]。

现行教科书 (如人教 A 版、苏教版和沪教版) 讨论三角学的应用主要是利用三角函数研究物理学中的周期现象如匀速圆周运动、简谐运动、交变电流等; 利用正余弦定理解决力学、运动学、电学、测量学、天文学问题, 如三力平衡、曲柄连杆装置的位移、流星是否为地球蒸发物等。人教 A 版教材还在阅读与思考栏目介绍了三角学与天文学的密切联系。

三角学是在实践中产生、发展、完善的学科。要想充分发挥数学的应用价值, 需要有三角学应用更为细致的分类和全面的介绍, 才能帮助学生体会三角学中看似繁多的公式和性质的魅力所在。

本文拟聚焦美英早期三角学教科书中三角学在航海、物理、天文中的应用, 以试图回答以下问题: 早期教科书呈现了三角学在航海、物理、天文方面的哪些应用? 有关应用问题有何特点? 对今日的三角学教学有何启示?

2 早期教科书的选取

本文选取 1800-1955 年间出版的 103 种美英早期数学教科书作为研究对像, 以 40 年为一

个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

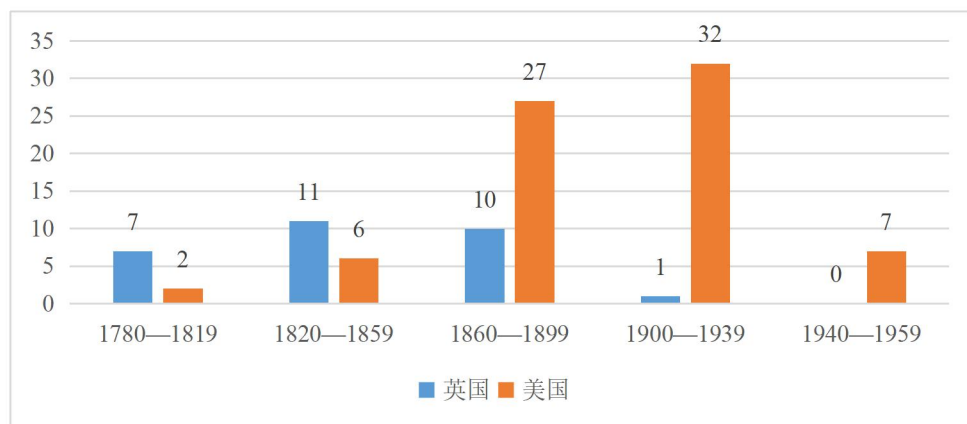


图 1 103 种教科书的出版年份和国家分布

早期教科书中三角学的应用十分丰富，涉及的领域广泛，主要体现在物理、天文、航海领域，本文将详细介绍与其相关的应用。

3 三角学在航海中的运用

在航海学中，确定一艘船的航行轨迹需要考虑两个量——角度和距离，三角学主要是通过理想化的建模，将航行过程简化为直线或者弧线，把航向、距离等所需的量都转化为直角三角形的边和角，运用解三角形的知识来求解相关问题。航迹计算的目的是有两个，一是根据航行起始点的经纬度和船舶的航向、航程推算出到达点的经、纬度；二是根据起航点和到达点的经纬度确定航向和航程。

3.1 基本概念

如果将地球看为半径为 R 的球体，球心为 O ，点 P 为北极点，如图 2。当一艘船从 A 地驶向 B 地。 AC 为两地的纬度差（The difference of latitude）即航行的南北距离。 CB 为两地之间的横向距离，简称横向距（departure）即航行的东西距离。 $\angle CAB$ 为航向（course）， AB 为航距（distance）。

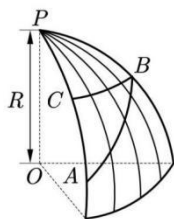


图 2 航行示意图

3.2 航海常用术语和符号

为了方便讨论，本文参考国家制定的“航海常用术语和符号”^[3]，将航海所用符号整理成表格，具体见表 1。

表 1 航海常用术语和符号

中文	英文	符号
纬度	latitude	φ
经度	longitude	λ
纬度差	the difference of latitude	$\Delta\varphi$
经度差	the difference of longitude	$\Delta\lambda$
横向距	departure	d
航向	course	C
航距	distance	D
起点的纬度	the latitude of starting point	φ_s
终点的纬度	the latitude of destinationt	φ_d
中纬度	the latitude of midline	φ_m
纬度渐长率	meridional difference of latitude	φ_M

3.3 平面航行

平面航行是将地球凹凸不平的表面当作平面，运用平面三角形的知识来求解相关问题^[4]。

如图 3，Wentworth（1902）介绍了“平面航行三角形”^[5]，因此有

$$d = D \times \sin C ,$$

$$\Delta\varphi = D \times \cos C ,$$

$$\tan C = \frac{d}{\Delta\varphi}。$$

平面航行三角形中由于已知 $\angle ACB$ 是直角，故在经线距、纬度差、航向、航距四个量中只需其中两个，就可以求得剩下的量。

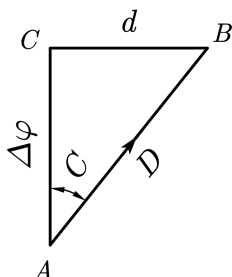


图 3 平面航行三角形

当航程较长时，平面航行产生的误差会很大，这时可以采用将航线 AB 不断分解成较小的距离，这时就可以忽略地球表面的弯曲程度^[6]。

如图 4，Loomis（1848）将 AB 分为 AC, CD, DF, FG, GB ，再过分点分别作出经线和与之垂直的纬线^[7]。由于航向不变，所以 $\angle HAC = \angle ICD = \angle JDF = \angle KFG = \angle LGB$ 。在每个小直角三角形中仍可以按照解平面航行三角形的方法求解，如图 5 所示，最后整个航行过程中的纬度差可以表示为 $AH + CI + DJ + FK + GL$ ，经线距为 $HC + ID + JF + KG + LB$ 。

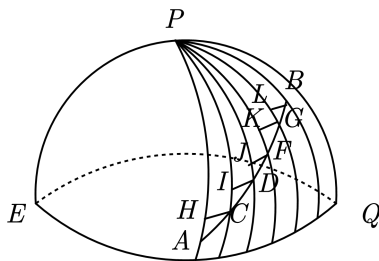


图 4 平面航行分解示意图

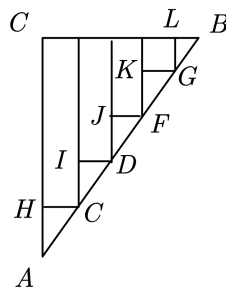


图 5 平面航行三角形分解

3.4 曲线航行

在实际航行中，船只往往需要不断改变航向，通过几条连续的航线最终到达终点，导致航线显得复杂繁琐。曲线航行的目的是将一艘船的几条连续航线减少到一条，找到起点到终点的最短航道^[8]。这类问题的求解方式有两种——列表法和几何法。

列表法能够清晰直观地呈现每一段航行的航向、航距，方便计算最终的横向距和纬度差，

从而得出最终的航向和航距。一般航行会将东南西北四个方向的航距和航向都测算出来，但根据精度的需要，有些会制作扩展的表格，将每隔 45° 方向的变化都表示出来^[8]。Peirce (1835) 假设一艘船从 A 点出发，途径 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G ，到达 H 点，那么每一段都可以视为平面航行，通过列表计算的方式找到 A 直达 H 的方位和距离^[6]。

表 2 曲线航行表

序号	航向	航距	北	南	东	西
1	北偏东 45°	23	16.26		16.26	
2	南偏东 $67^\circ 30'$	45		17.22	41.57	
3	北偏东 $78^\circ 45'$	34	6.63		33.35	
4	北	29	29.00			
5	北偏西 $11^\circ 15'$	31	30.40			6.05
6	北偏东 $22^\circ 30'$	17	15.71		6.51	
	各列求和	179	98.00	17.22	97.69	6.05
			17.22		6.05	
		纬度差	= 80.78N.		横向距	= 91.64E.

从而得到本次航行的纬度差和横向距，在平面航行三角形中可以通过 $\tan C = \frac{d}{\Delta\varphi}$ ，求出航向，再利求出用 $d = D \times \sin C$ 求出直线航距。

但在实际航海中，由于航线的曲折和航海数据的复杂，导致计算过程需要取对数、查函数表、取近似值、估算误差等，航海家往往会采用几何法。先选取合适的单位长度，画出单位圆，再利用指南针测量航向，把所有的航向标在单位圆上，然后按比例画出每一段的航距，最终连接起点和终点。测量该直线的长度可以得到航距，通过直线与单位圆的交点可以测量方向^[8]。如图 6，以起点 A 为圆心画出单位圆后，标出南北方向。按照顺序，依次标出每一段航行的航向，如 AB 段对应单位圆上的 1， BC 对应 2， CD 对应 3，.....最后的 EF 对应 5。确定好方向之后只需根据比例尺，将每一段航距画在图中，最终连结 AF 就可以得到所求的最短直线航距。

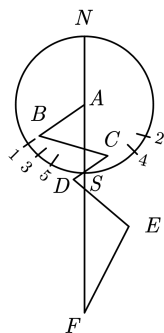


图 6 几何法

3.5 同纬度航行

同纬度航行不同之前的平面航行和曲线航行，这时地球表面不再是平面，而是曲面。航线也不再是直线，而是弧线。因此同纬度航行对于确定船只位置较为困难，但仍可以通过三角函数的关系表示。在同纬度航行中，船只只能向正东或者正西方向航行，因此纬度不变， $\Delta\varphi = 0$ 。为了确定目的地的经度，就要找两地的经度差（the difference of longitude）。如图 7，在一般的区域寻找经度差使用如下方法^[4]：

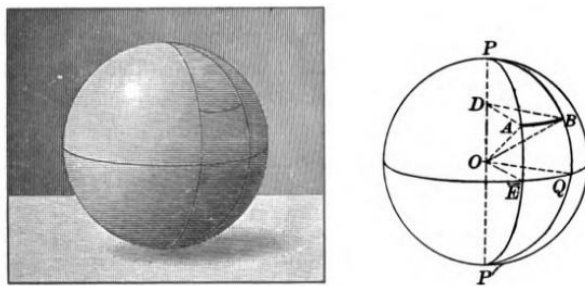


图 7 同纬度航行模型

在 $\text{Rt}\triangle ODA$ 中， $\frac{DA}{OA} = \sin \angle AOD$ ， $\angle AOD = 90^\circ - \angle AOE = 90^\circ - \varphi$ 因此，

$$\frac{DA}{OA} = \sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi \quad (1)$$

又因为 $\triangle DAB \sim \triangle OEQ$ ，从而得到

$$\frac{DA}{OE} = \frac{DA}{OA} = \frac{AB}{EQ} \quad (2)$$

由 (1) (2) 知

$$\cos \varphi = \frac{AB}{EQ},$$

因此

$$EQ = \frac{AB}{\cos \varphi} = AB \times \sec \varphi ,$$

即

$$\Delta \lambda = d \times \sec \varphi \quad (3)$$

Durell (1910) 给出了更为简单的推导^[9]

$$\begin{aligned} \Delta \lambda : d &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \widehat{arc EQ} : \widehat{arc AB} \stackrel{\textcircled{2}}{=} OE : DA \stackrel{\textcircled{3}}{=} OA : DA = \frac{OA}{DA} : 1 = \sec \varphi : 1, \\ \therefore \Delta \lambda : d &= \sec \varphi : 1, \end{aligned}$$

其中①利用经度差 $\Delta \lambda$ 和横向距 d 的定义, ②是根据三角形相似, ③是根据地球的半径相等, 即 $OE=OA$ 。

事实上, 同纬度航行中的三个关键量 $\Delta \lambda$, d , φ 也可以像平面航行一样用三角形的边和角来表示。Loomis (1848) 根据 (3) 考虑如下三角形, 如图 8, 如果一个直角三角形的一条直角边代表同纬度航行中的航距, 与之相邻的锐角的度数与纬度相等, 那么斜边就代表两地的经度差, 已知其中两个就可以求得第三个量^[7]。

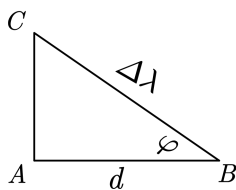


图 8 同纬度航行三角形

3.6 中纬度航行

由于同纬度航行属于较为特殊的纬度不变的情况, 一般的航行中往往经纬度都要改变。因此, 在同纬度航行的基础上, 中纬度航行给出另外一个估算经度差的方法。在中纬度航行中, 起点和终点的纬度不一致, 这时采用两条纬线的中间的纬线度数来衡量, 如图 9 中的 EF 。这种方法适用于纬度差较小的情况, 除了在极高的纬度地区和长途航行, 误差是很小的^[4]。

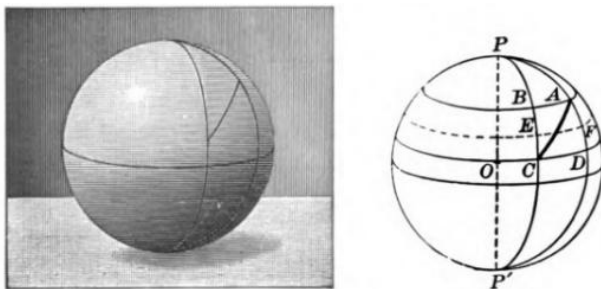


图 9 中纬度航行模型

用 φ_s 表示起点的纬度, φ_d 表示终点的纬度, φ_m 表示中间线的纬度, 则有

$$\varphi_m = \frac{\varphi_s + \varphi_d}{2},$$

假定纬度一直保持为中间线的纬度, 则中纬度模型使用同纬度航行中计算经度差的办法, 同样可以得到

$$\Delta\lambda = d \times \sec \varphi_m.$$

在中纬度航行中, 经度差是从经线距延伸出来的概念, 同样也可以用三角形中的元素来表示。如果把同纬度航行的三角形和平面航行三角形相结合, 就可以得到中纬度航行三角形。

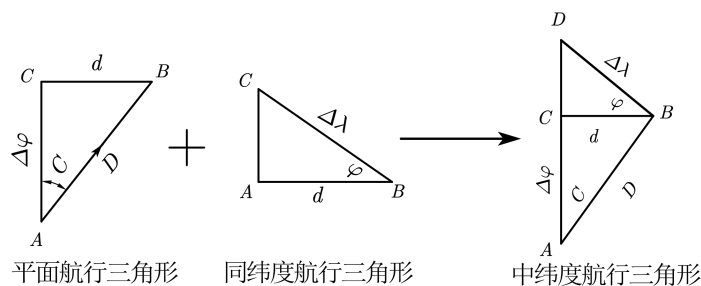


图 10 中纬度航行三角形

在实际应用中, 中纬度航行常常运用于船位推算。航海家先通过指南针测出航向 C , 测程线或螺旋桨的转速测出航速, 从而得到航距 D , 然后将船只起始位置标在地图上, 再用中纬度航行三角形计算经度差 $\Delta\lambda$ 和纬度差 $\Delta\varphi$, 用初始位置的经纬度, 加上经度差和纬度差, 得到目前船位^[10]。

3.7 墨卡托航行

平面航行和曲线航行将地球表面直接看成平面, 虽然简化了计算, 但丢失了很多球面的原有特性, 带来了较大误差。同纬度航行和中纬度航行虽然航线为弧线, 但只适用于纬度差较小,

航程较短的情况。而墨卡托给出了将三维球面转化为二维平面的投影方法，建立了一套完整的航海图^[11]。时至今日，绝大多数航海图仍采用墨卡托航海图。

墨卡托通过投影把地球投影到平面上，制成世界地图，如图 11。在航海中，常常使用的航海图有高斯投影航海图、墨卡托航海图、大圆航海图和平面航海图。一般的平面航海图中，只有在地图中间区域，经线距才是准确的，其他区域的经线距不是偏大就是偏小，特别是在长距离航行或高纬度航行中，会产生很大的误差。因此当时的航海家非常不愿意在南北纬 35°以外的地区使用平面航海图导航，在茫茫大海中迷失方向无异于自杀^[8]。为了弥补这点，墨卡托航海图中经线不再汇聚于两极，而是相互平行，这意味着除了赤道，经线间的距离都被拉大，为了弥补这点，纬线的度数都适当地扩大。因此，只要航向不变，每一条航程线在墨卡托航海图上都可以用线段来表示，使得航海的路线规划大大简便。

墨卡托航行根据墨卡托航海图的原则给出了全新的计算经度差的方法，不需要任何提前的假设，这种方法相较于之前的方法都更加准确。缺点是经纬度换算公式较为复杂，依赖“纬度渐长率”（meridional difference of latitude）^[12]。

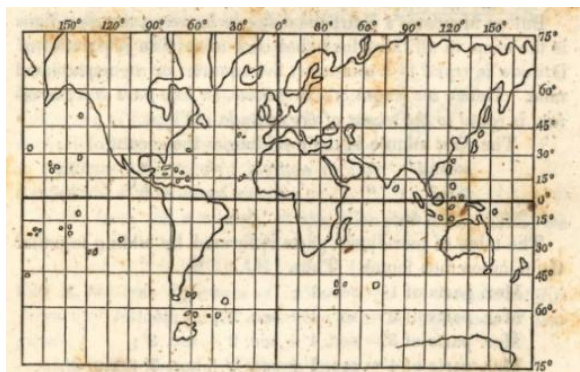


图 11 墨卡托航海图

虽然航向不变的航线在墨卡托地图中是直线，可以使用平面航行三角形模型，但在不断穿越经线过程中，纬度差与之前不再相同，需要考虑“纬度渐长率”。

在墨卡托航海图中，某一纬线沿着同一经线与赤道的距离与 1 赤道里长度的比值称为纬度渐长率，可以理解为某纬线与赤道距离有多少赤道里^[13]。赤道里指赤道上经度 1°所对应的弧长，大约 1852 米。将平面航行三角形 ABC 加以修改后，考虑“纬度渐长率”后可以得到墨卡托航行三角形（如图 12）：将 AC 延长 E ，使 $AE = \varphi_M$ ，则 $DE = \Delta\lambda$ 由此可以得到 $\Delta\lambda = \tan C \times \varphi_M$ 。通过查表可知纬度渐长率的值，从而得到经度差，进行航位推算。

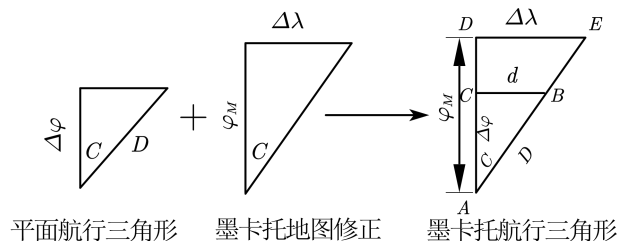


图 12 墨卡托航行三角形

事实上，船舶大洋航行还有大圆航行、恒向线航行、等纬圈航行和混合航行等，本文不再详细介绍。

3.8 小结

本节所介绍的五个航海模型先进行合理化的假设，再进行的理想化建模，最后利用平面三角学的知识进行求解，每个模型有各自使用的条件和优缺点。平面航行虽然简便，但误差较大；曲线航行在平面航行的基础上，将曲折路线转化为连接起点和终点的一条航线，化繁为简，但计算复杂且仍然造成较大误差；在同纬度航中行，虽然不再假定航线是直线，但船只只能向东或西行驶，属于特例，使用范围狭窄；中纬度航行不再局限于东西行驶，常常用于船位推算，但对于极高纬度地区和长途航行并不适用；最后的墨卡托航行是相较于前面四种模型，最为科学完善的模型。它基于墨卡托投影理论和沿用至今的墨卡托航海图，对平面航行进行修正，得到了最为精确的结果，但缺点是根据纬度渐长率，经纬度换算很繁琐。

航海学是一门研究船只如何安全又经济到达港口的实用性学科。所有的航海学理论都为航海学的最终目标——选择航线和确定船位服务。而航线的选择和船位推算还要考虑诸多因素^[14]。

(1) 地球形状。首先，地球是一个表面凹凸不平的椭球体，选择航行路线时要考虑海域内水面和水底情况，避免撞上暗礁、冰山等障碍物。

(2) 船只类型。Pendlebury (1895) 中提到大型船只和小型船只在航向和路线选择上不同。由于大型船只一般由大量钢铁组成，笨重而不灵活，在转向时候操作复杂，全速行驶时需要一个半英里的大圆才能转弯。并且发出的噪声大，浓烟多，容易造成污染。故而在航向上只能做微小的改变，这就需要精确的指南针和较为固定的航线选择^[15]。

(3) 环境因素。气象、洋流、风向、流速都会对实际航线产生影响，因此环境因素要提前纳入规划。如图 13，根据向量合成，实际航行的轨迹并非与之前设定的航向完全重合，而

需要我们通过解三角形得到实际速度和实际方向。

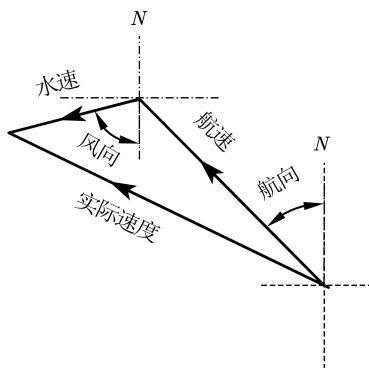


图 13 实际航行图

(4) 海陆差异。由于海洋和陆地的不同，在没有 GPS 定位的时代，如何确定航船自身位置对后续航行也有很大影响。Loomis (1848) 说：“有两种方法确定茫茫大海中一艘船的位置，一种是通过天文观测确定目前的经纬度。另外一种是根据测量航线和航行时间来推测。由于实际航行中航向和航程不易测出，在长途旅程中运用之前的五个模型往往并不准确。这时一些独立于船只本身的数据就显得更客观可靠，因为通过天文学观测更为准确，这涉及到航海天文学的相关知识^[7]。

4 三角学在物理中的运用

三角学以其几何作图的形象性和算术计算的精准性推动着物理学各分支的进步，在运动学、力学、声学、光学等领域都做出了杰出贡献。

4.1 三角学在运动学中的运用

物理学中存在大量周而复始的运动，如单摆、潮汐、电磁波、音叉振动、交流电等等，而三角函数是刻画周期现象最典型的数学模型，一般周期现象都可以用正余弦函数来表示。

简谐运动是最简单的周期运动，Bohannon (1904) 利用正弦型函数刻画了简谐运动，分析物体在不同时刻的位置和振动的频率^[16]。Wilczynski (1914) 运用实例介绍了简谐曲线 $y = A\sin(\omega t + \phi)$ 。如图 14，一根细绳一端系在振动的音叉上，另一端同钢笔固定在烟色玻璃上。如果玻璃不动，那么钢笔 P 画出的运动轨迹是一条直线。而如果玻璃匀速向右运动，则 P 会呈现波浪式的轨迹，这就是简谐运动的轨迹，可以看作是简谐曲线的图象^[17]。

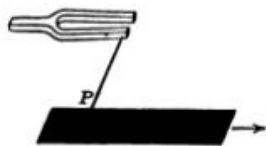


图 14 简谐曲线实例

三角函数不仅仅可以刻画简谐运动，还可以描述一般的谐波运动，如小提琴，钢琴和人产生的声波。它们都可以用频率成倍增加的正弦型曲线的叠加来表示：

$$y = a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + a_1\right) + a_2 \sin\left(\frac{4\pi}{T}t + a_2\right) + a_3 \sin\left(\frac{6\pi}{T}t + a_3\right) + \dots \quad (4)$$

根据和差角公式

$$a_i \sin\left(\frac{2i\pi}{T}t + a_i\right) = a_i \sin\frac{2i\pi}{T}t \cos a_i + a_i \cos\frac{2i\pi}{T}t \sin a_i, i = 1, 2, 3, \dots,$$

用 A_i 和 $B_i, i = 1, 2, 3, \dots$ 来表示常数，即 $A_i = a_i \sin a_i, B_i = a_i \cos a_i$ ，则 (4) 式变为

$$\begin{aligned} y = & A_1 \cos\frac{2\pi}{T}t + A_2 \cos\frac{4\pi}{T}t + A_3 \cos\frac{6\pi}{T}t + \dots \\ & + B_1 \sin\frac{2\pi}{T}t + B_2 \sin\frac{4\pi}{T}t + B_3 \sin\frac{6\pi}{T}t + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

如果把 $y = \frac{1}{2}A_0$ 当作平衡位置，做代换 $x = \frac{2\pi}{T}t$ ，那么就得到了一般谐波曲线：

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots \\ & + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

该曲线同样可以用实例来表示：将细绳一端固定在金属细线上，一端固定在钢笔上。当烟色玻璃匀速向右运动时，钢笔画出一条波浪式的曲线，这就是一般谐波曲线^[17]。

由上面的分析可知许多不同的简谐曲线可以组成一般谐波曲线。但是反过来，一条给定曲线，如气温计、气压表上的数据画出的曲线，如果有周期性，是否可以认为是若干条简谐曲线合成的呢？该问题的解决过程就是调和分析的主要内容，在基础数学和应用数学领域有着相当重要的地位。

首先在数学中，可以将使用三角插值，利用计算数学中的逼近思想来求解，过程如下：

第一步，将所给的周期性曲线以划分为以 2π 最小正周期的若干个分支。如果该曲线的最小正周期大于或者小于 2π ，都可以通过拉伸或者收缩成一个以 2π 最小正周期的曲线。这样可以简化接下来的讨论。

第二步，取一个周期的曲线，将其分为奇数 $2m+1$ 段。如图 15，曲线被分为了 7 段，对应的分点为 $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_7$ ，设对应的纵坐标为 $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_7$ 。

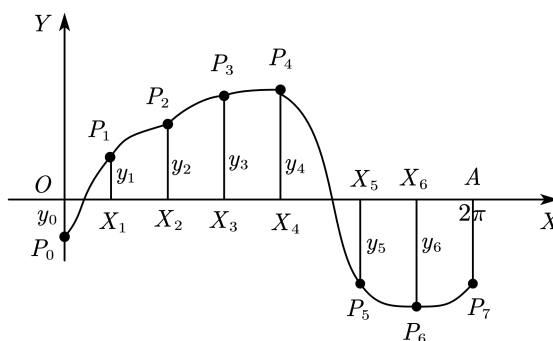


图 15 周期性曲线分解

第三步，在一般谐波曲线

$$y = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_m \cos mx \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_m \sin mx$$

中共有 $2m+1$ 个参数 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m, B_1, B_2, \dots, B_m$ 需要确定，那么如果让该曲线通过 $2m+1$ 个分点，就得到线性方程组 (7)，利用线性代数的知识可以消元，从而求解所有参数，确定该曲线。

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi}{2m+1} + A_2 \cos \frac{2 \times 2\pi}{2m+1} + \dots + A_m \cos \frac{m \times 2\pi}{2m+1} \\ \quad + B_1 \sin \frac{2\pi}{2m+1} + B_2 \sin \frac{2 \times 2\pi}{2m+1} + \dots + B_m \sin \frac{m \times 2\pi}{2m+1} \\ \dots \\ y_{2m} = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos \frac{2m\pi}{2m+1} + A_2 \cos \frac{2 \times 2m\pi}{2m+1} + \dots + A_m \cos \frac{m \times 2m\pi}{2m+1} \\ \quad + B_1 \sin \frac{2m\pi}{2m+1} + B_2 \sin \frac{2 \times 2m\pi}{2m+1} + \dots + B_m \sin \frac{m \times 2m\pi}{2m+1} \end{array} \right. \quad (7)$$

如果所给曲线足够光滑，划分足够细致，则上述方法求得的一般谐波曲线则会非常接近原先所给的周期性曲线。正是这种将任何周期函数用正弦函数和余弦函数构成的无穷级数来表示，将复杂过程看成简单模式叠加的想法成为了傅里叶级数理论建立的基础，后者在物理的热学、光学、电磁学、声学等领域都有广泛的应用，同时对数学物理这门学科做出了划时代的贡献^[18]。

4.2 三角学在力学中的运用

Dickson (1922) 说：“当冰雹垂直下落时对整个城市造成的损失很小，但如果斜落可能会

打破窗玻璃^[12]。”因此考虑力的作用效果，不仅需要计算力的大小而且要考虑方向，因而用有向线段表示力。

对于两个力的合成，Hall & Frink（1910）利用平行四边形法则，将力 AB 和 AC 合成为力 AD 。同时 AC 和 AB 可以看成是力 AD 分解在两个不同方向上的分量^[19]。因为力是矢量，为了求出合力的大小和方向，需要使用解三角形的相关知识。

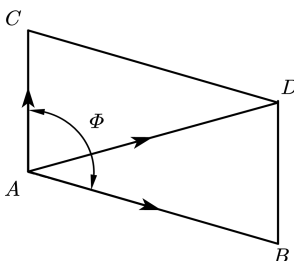


图 16 力合成的平行四边形法则

如图 16 所示，由于 $\cos \angle ABD = -\cos \phi$ ， $BD = AC$ ，则在 $\triangle ABD$ 中，根据余弦定理可知

$$AD = \sqrt{AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos \phi},$$

可以求得合力的大小，如果需要表示合力的方向，还需要使用正弦定理

$$\sin \angle DAB = DB \times \frac{\sin \angle ABD}{AD}.$$

Hardy（1938）给出了另外一种方法：如图 17 所示，两个力 a ， b 作用在同一个点，两个力互成角度 C ，将两个力平移到一个三角形内作为三角形的两边，则有

$$\gamma = 180^\circ - C,$$

根据力的矢量三角形，第三边即为合力，记合力为 c ，与另外两个力的夹角分别为 A ， B ，有

$\alpha = 180^\circ - A, \beta = 180^\circ - B$ 。因而 $\sin \alpha = \sin A, \sin \beta = \sin B, \sin \gamma = \sin C$ ，根据正弦定理，得到

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin(\pi - C - A)}$ 求出 $\angle A$ ，得到合力的方向。再由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 得到合力的大小^[20]。

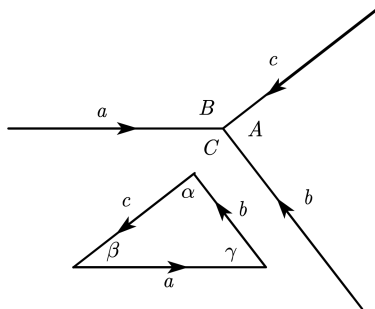


图 17 力的合成三角形法则

更为一般的，如果有两个以上力作用于同一点 P ，那么合力可以按照复数的加法来运算：如图 18，假设四个力 $f_i, i=1,2,3,4$ 作用在 P 点， r_i 和 $\theta_i, i=1,2,3,4$ 分别表示每个力的大小和方向，则每个力可以用复数和三角函数来表示

$$f_i = r_i(\cos \theta_i + i \sin \theta_i), i = 1, 2, 3, 4,$$

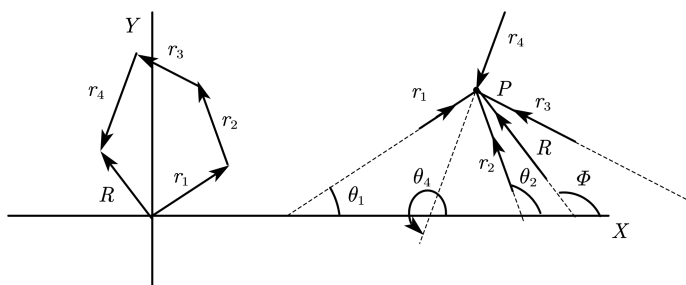


图 18 复数加法求合力

按照复数的运算法则，将 $f_i (i=1,2,3,4)$ 的实部和虚部对应相加：

$$\begin{aligned} F &= r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 + r_4 \cos \theta_4 + i(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 + r_4 \sin \theta_4), \\ &= R(\cos \phi + i \sin \phi) \end{aligned}$$

其中 R 表示合力的长度， ϕ 表示合力与 x 轴所成的夹角。引入复数将原来的矢量运算转化为代数运算，不光适用于力学，也适用与运动学中的合运动与分运动，因而在理论物理中发挥着重要作用^[21]。

4.3 三角学在光学中的运用

Wilczynski (1914) 介绍了光的反射和折射，由于光在同种介质中沿直线传播，从而有反射定律：入射角等于反射角。但在光的折射中，情况就大不相同。如图 19 所示，假设一束光线 AO 从空气中射入玻璃，入射角为 i 。由于大部分光进行了反射，因此只有小部分光进行了折射，在玻璃中的光路为 OB ，与法线 NN' 夹角为 r ，称为折射角^[17]。

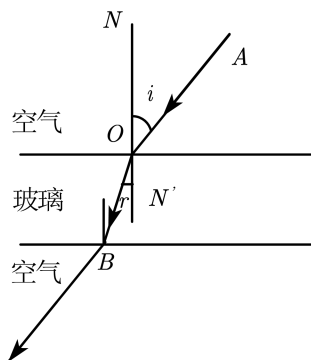


图 19 光的折射

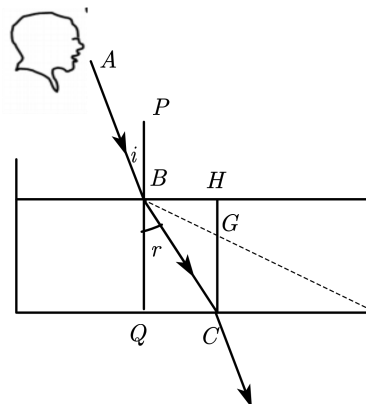


图 20 鹅卵石问题

荷兰数学家斯涅尔 (W. Snell, 1580-1626) 通过大量实验发现 $\frac{\sin i}{\sin r}$ 为常数, 它的大小与介质有关, 称 $\frac{\sin i}{\sin r} = n$ 为折射率。这就是折射定律, 又称斯涅尔定律。Dickson (1922) 指出利用该定律可以解决如下实际问题: 若一人的视角与垂直方向所成角度为 5° , 看水池底部 4 英尺深处的鹅卵石距离水面有多远^[12]?

如图 20 所示, 人眼以为光在不同介质中仍沿直线传播, 看到的鹅卵石在 G 点, 问题所求即 GH 的长度。由于光路的可逆性, 光路 CBA 可以看成人眼看到水底鹅卵石的光路。根据入射角为 5° , 折射率为 $\frac{3}{4}$, 则 $\frac{\sin r}{\sin 5^\circ} = \frac{3}{4}$, 得到折射角 $r = 3^\circ 45'$ 。在 $\triangle QBC$ 中, $QB=5$, 则

$$BH = QC = BQ \tan r = 5 \tan 3^\circ 45' = 2.62,$$

又在 $\triangle GBH$ 中, $\angle GBH = 90^\circ - i = 85^\circ$, 最后得到 $GH = BH \tan 85^\circ = 30$ 为所求。

5 三角学在天文中的运用

Emrson (1749) 曾断言: “没有三角学, Urania (掌管天文的缪斯女神) 的儿子们将丢弃它们的工具、书和表, 人们将对这个美丽的世界一无所知^[22]。”可见三角学对于天文学的重要性。平面三角学在天文中的运用体现在计算天体的大小和天体之间远近关系。

5.1 计算天体的大小

如图 21, Hearley (1942) 介绍了古希腊数学家埃拉托色尼 (Eratosthenes, 约前 275-约前 194) 测算地球的半径的方法: 在古希腊的阿斯旺小镇 A , 埃拉托色尼观察到处于正午太阳正

好在他的头顶上，同一时间另外一名观察者在亚历山大城 B 发现太阳光与垂直线夹角为 7° ，由于太阳光是平行的，故 $\angle AOB = 7^\circ$ 。从而亚历山大城到阿斯旺的距离大约是地球周长的 $\frac{7}{360}$ ，因此通过测量 AB 两地的距离就可以近似得到地球半径长。测出的结果为 4800 英里，与今日测量的 4000 英里左右相差不大^[1]。

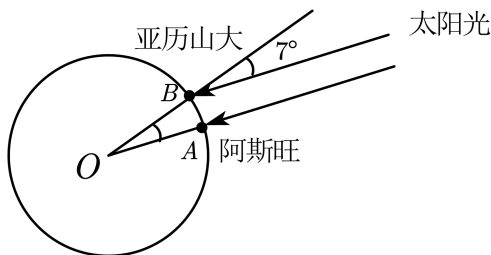


图 21 埃拉托色尼测算地球半径

这种方法是基于假设 A 、 B 两地在同一条经线上，并且两地同在北回归线上，才能有夏至日的太阳直射，这与实际情况相差很大。但是在没有精密测量仪器的两千多年前，人们对于地球外面的世界一无所知，这样的发现已经是一个奇迹，充分反映了数学家的智慧。

如图 22，Gregory (1816) 假设观察者站在一个 3 英里高的山峰 AB ，测得视线与垂直线的夹角 $\angle A = 87^\circ 46' 33''$ ， C 为地球中心， BE 和 AT 都相切于地球表面。在 $Rt\triangle ABE$ 中， $BE = AB \tan A$ ， $AE = AB \sec A$ 。

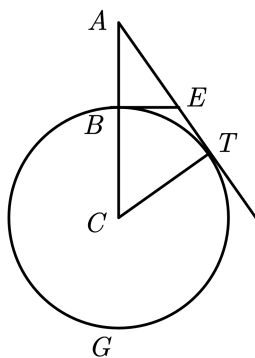


图 22 山顶测算地球半径

同理在 $Rt\triangle ACT$ 中，有 $CT = AT \tan A$ ，而根据切线长定理得 $BE = ET$ ，故地球半径 R 可以通过山峰高度 AB 和 $\angle A$ 表示

$$\begin{aligned}
R &= CT = AT \tan A \\
&= (AE + ET) \tan A \\
&= (AE + EB) \tan A, \\
&= (AB \sec A + AB \tan A) \tan A \\
&= AB \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{2}\right) \tan A
\end{aligned}$$

再运用对数的运算法则

$$\begin{aligned}
\lg R &= \lg AB + \lg \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{A}{2}\right) + \lg \tan A \\
&= \lg 3 + \lg 88^\circ 53' 16.5'' + \lg 87^\circ 46' 33'' - 20, \\
&= 3.5997903
\end{aligned}$$

查常用对数表可知 R 对应为 3979.15 英里^[23]。这种方法相较于之前的方法准确了不少，但在实际问题中因为角度测量不准确，并不常用。

5.2 天体之间的远近

如图 23, Durell (1910) 介绍了测量太阳到地球的距离 (简称日地距离) 的方法: 先画一条与地球轨道直径大致相等的线段 AB 作为基准线, 确定一个方便观测的行星 P 的位置, 从 A , B 两点观测 P , 连接 AP 、 BP , 观察 $\angle APB$ 的度数。利用天文定律可知这颗行星到太阳的距离, 再根据三角形相似可知日地距离和这颗行星到太阳的距离成固定比例。最终可以得到太阳到地球的距离大约为 93800000 英里^[9]。此方法后来发展为今天天文学中的“金星凌日”, 本质上是解三角形中已经等腰一边和对角的特殊应用。

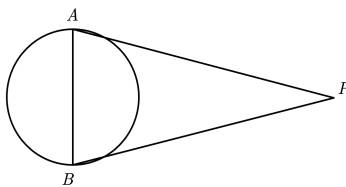


图 23 测量日地距离

如图 24, Hearley (1942) 介绍了测量月球到地球距离 (简称月地距离) 的方法, 在某一特定时间, 从月球观察地球, 有一些区域无法被观测到。如图 CP 和 CP' 与地球相切, 阴影部分无法被观测, 此时月球的中心与地球赤道平行, $\angle COP$ 即为点 P 的纬度。在 $Rt\triangle COP$ 中,

$$OC = \frac{OP}{\cos \angle COP} = \frac{3959}{0.01659} = 239000 \text{ mile},$$

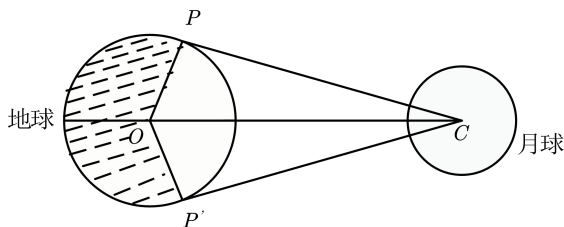


图 24 测量月地距离

这与今日所测的 238000 英里已经非常接近^[1]。

如图 25, Olney (1870) 建立了测量任意一颗行星到地球距离的模型: 假设两个天文观察台 N 和 N' 在同一条经线上, 点 P 为行星, 测量 $\angle ZNP$ 和 $\angle Z'N'P$, 当地球半径 CN 和 CN' 已知, 通过 $\widehat{NN'}$ 的长度可以计算出 $\angle NCN'$, 在 $\triangle CNN'$ 中, 已知 $\angle NCN'$, CN 和 CN' , 可以利用正余弦定理求出 NN' , $\angle CNN'$ 和 $\angle CN'N$. 在 $\triangle PNN'$ 中, 已知 $\angle PNN'$, $\angle PN'N$ 和 NN' , 可以求得 PN 和 PN' . 最后在 $\triangle PNC$ 中可以解得 PC 的长度, 即该行星到地球中心的距离^[24]。

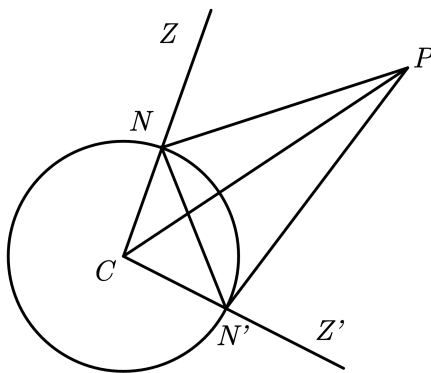


图 25 测量行星到地球距离

6 结语

早期教科书中三角学的应用内容十分丰富。从知识上看, 三角学的应用将三角学与复数、对数、圆、方程等知识紧密结合; 从数学思想方法上看, 三角学的应用中渗透了数形结合、归纳推理、分类讨论等数学思想方法; 从核心素养上看, 三角学的应用对发展学生数学抽象、逻辑推理、数学建模等数学核心素养有较大帮助。三角学的应用不仅涉及数学的诸多分支如计算数学、应用数学、代数学和几何学, 还涵盖航海、物理、天文等方面的专业知识。这给我们今日的数学教学提供了丰富的素材和宝贵经验。

(1) 增强数学应用意识。三角学是在天文学应用中产生的学科, 最终又可以广泛运用于航海、天文、物理等学科的实践中, 符合辩证唯物主义“从实践中来, 到实践中去”的观点。在日常教学中要使学生摆脱数学是被束之高阁的抽象理论的错误观念, 认识数学的应用价值、文化价值、科学价值。在课堂教学中可以使用现代化的教育技术如 VR, 播放教育科普短片, 让学生身临其境体会到三角学在社会生产中发挥的作用。同时教师可以创设贴近实际的问题情景, 让学生分角色扮演航海家、天文学家和物理学家, 运用所学知识解决曾困扰古人数百年的问题, 如地球到底有多大, 如何确定船只位置等。

(2) 培养数学建模能力。在中学课堂教学和学业考试中, 往往问题和数据都是给定的, 学生只需解决问题, 而不关注问题的产生。而《标准》中提出, 数学建模的过程包括在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题, 分析问题、建立模型, 确定参数、计算求解, 检验结果、改进模型, 最终解决实际问题^[25]。学生缺乏对全过程的体会, 就缺失了数学实践的经验。而三角学的运用提供了大量素材可供课堂中学生思考和实践, 如测量月地距离、日地距离, 预测日食、月食。在与前人建立的天文模型比较中体会到“探究之乐”, 完善自己的模型, 培养理性精神和批评性思维。

(3) 开展 STEM 教育。随着技术革命, 简单技能和体力劳动的工作由机器取代。为了使还未步入社会的学生提前适应社会的新变化和新需求, 开展 STEM 教育显得尤其重要。而三角学巧妙地联系起了科学、技术、工程和数学, 并且只运用学生在中学阶段课本中的基础知识, 而不涉及更深的专业理论。无论是在天文地理, 还是物理航海领域, 都可以被 STEM 教育整合, 从而发挥“整体大于部分之和”的作用。关键在于创新能力的培养离不开问题解决的情景性和真实性, 与只所给一个三角形的图形不同, 三角学的应用有了实际背景和需求, 更能建立起学科与学科之间自然的联系。

参考文献

- [1] 孙宏安. 三角学的历史[J]. 中学数学教学参考, 2002(07): 63.
- [2] 杜雨珊. 三角学历史研究[D]. 辽宁: 辽宁师范大学, 2009: 6-7.
- [3] 中华人民共和国交通部. “航海常用术语及其代(符)号”[S]. 2005: 1-3.
- [4] Granville, W. A. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Co., 1909: 173-177.

- [5] Wentworth, G. A. *Plane Trigonometry & Tables*[M]. Boston: Ginn & Co., 1902: 95-108.
- [6] Peirce, B. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*[M]. Cambridge & Boston: James Munroe & Co., 1835: 57-69.
- [7] Loomis, E. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Happer & Brothers, 1848: 111-126.
- [8] Young, J. R. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: John Souter, 1833: 108-130.
- [9] Durell, F. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: Merrill, 1910: 136-142.
- [10] Curtiss, D. R. & Moulton, E. J. *Essentials of Trigonometry with Applications*[M]. Boston: D.C Heath & Co., 1942: 146-152.
- [11] Hearley, M. J. G. *Modern Trigonometry*[M]. New York: The Ronald Press Company, 1942: 129-138.
- [12] Dickson, L. E. *Plane Trigonometry with Practical Applications*[M]. Chicago: BenjH.Sanborn & Co., 1922: 59-79.
- [13] 钱立胜. 谈纬度渐长率[J]. 航海技术, 2000(03):18-19.
- [14] 王志明. 论中纬度航区远洋航线的选择[J]. 航海技术, 2004(06): 10-11.
- [15] Pendlebury, C. *Elementary Trigonometry*[M]. London: George Bell & Sons, 1895: 251-265.
- [16] Bohannan, R. D. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1904: 186-220.
- [17] Wilczynski, E. J. *Plane Trigonometry & Applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914: 126-262.
- [18] 贾随军. 傅立叶级数理论的起源[D]. 陕西: 西北大学, 2010.
- [19] Hall, A. G. & Frink, F. G. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1910: 17, 63.
- [20] Hardy, J. G. *A Short Course in Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan co., 1938: 126-130.
- [21] Moritz, R. E. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915: 98, 161-172, 260-289.
- [22] Emerson, E. *The Elements of Trigonometry*[M]. London: W. Innys, 1749: iii-vi.

- [23] Gregory, O. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: Baldwin, Cradock & Joy, 1816: 73-75.
- [24] E, Olney. *Elements of Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York & Chicago: Sheldon & Co., 1870: 49-50.
- [25] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 22.

教学实践

以史为线，温故知新

——HPM 视角下变化率与导数复习课的教学

杨育池^{1,2}，王智洋³，刘梦哲³

(1. 象山中学, 浙江 315700; 2. 库车市第二中学, 新疆 842099; 3. 华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

导数的概念是中学数学的核心概念之一，也是微积分的重要内容之一，其中蕴含了“极限”“以直代曲”等思想。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》指出，通过实例分析，让学生经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道导数是关于瞬时变化率的数学表达，体会导数的内涵与思想；体会极限思想；通过函数图象直观理解导数的几何意义^[1]。导数作为进一步研究函数的单调性、极值等性质的重要工具，其在高中数学教学中的重要性不言而喻。

已有教学中，有的教师立足课本，从中选取例题进行改编，学生可以利用导数公式研究函数的性质^[2]。有的教师以一道例题逐步展开变式，通过层层递进的问题串，让学生利用导数公式解决相关问题^[3]。还有教师先对导数的概念进行复习回顾，并让学生再次体会逼近的数学思想，然后通过一组习题来巩固概念^[4]。可见，在导数概念的复习课中，教师往往忽略对导数概念内容的讲解，而将更多时间安排学生完成导数的练习题，以此提高学生的解题能力。事实上，导数的概念具有较强的抽象性和严密的逻辑性，若仅靠做题，学生很难真正掌握其思想和本质。

HPM 视角下的复习课具有深化概念理解、加强知识联系、促进问题解决、渗透思想方法和落实立德树人等多方面的价值。鉴于此，教师尝试从 HPM 的视角设计教学，本节课以牛顿在避疫期间的历史为主线，用与“苹果”有关的情境将本节课的教学内容串联起来，以此深化学生对导数概念的本质理解，并感受导数概念背后的多元文化，发挥数学史的文化教育功能。本节课拟订的教学目标如下。

(1) 通过问题研究, 深化概念理解, 让学生再次经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程, 理解导数与瞬时变化率的关系, 提升学生数学抽象素养。

(2) 将导数概念的形成融入历史背景, 让学生体会数学的研究方法, 建立更牢固的知识联系, 培养学生抽象概括能力与逻辑思维能力。

(3) 通过导数概念背后的文化背景的学习, 落实立德树人, 让学生体会科学家勤于思考、敢于开拓的精神, 体会数学的理性精神。

2 历史材料及其运用

九层之台, 起于累土。数学和科学的巨大进展中, 几乎总是建立在几百年诸多研究者们一点一滴的贡献和积累之上, 还需要有一个人来走那最高和最后的一步。在微积分的发展长河中, 这个人就是牛顿 (I. Newton, 1642-1727)。

牛顿出生于英格兰林肯郡乌尔索普村的一个农村家庭。在牛顿诞生前不久, 父亲便离开了人间。他从小在低标准的地方学校接受教育, 是一个除了对机械设计有兴趣外, 没有特殊才华的青年人。1661 年牛顿考取剑桥大学进一步潜心学习, 大学期间几乎要改变方向, 从自然哲学转到法律学。1665 年牛顿刚结束大学课程, 鼠疫从伦敦城的外围迅速蔓延到市中心, 迫使他离开了学校, 独自一人回到了安静的乌尔索普的家乡。牛顿开始专心研究从青少年时代就感兴趣的问题, 度过了 1665 年和 1666 年。

在家避疫的两年时间内, 牛顿在数学、光学和力学领域都取得了傲人的成果^[5]。在微积分方面, 他构想出了“流数术”。牛顿分析数学的基本概念是力学概念的反映, 他将简单的几何图形——线、角、体都看作是力学位移的结果, 即线是点运动的结果, 角是它的边旋转的结果, 体是面运动的结果。牛顿认为变量是运动的点, 因此将任何变量称为“流动量”(或“流量”)。因为任何运动离不开时间, 所以他把时间作为自变量, 称运动的速度为“流数”, 也就是我们今天的导数。构想出流数术后, 牛顿将其应用于大量的几何问题和力学问题, 他作曲线的切线, 求函数的极大值和极小值, 求曲线的曲率。此外, 牛顿也领悟了两种运算的互逆性: 由已知的流动量求流数, 由已知的流数求流动量^[6]。

如此, 他准确地建立了微分与积分之间的联系, 由于返校后未能及时发表他的“流数术”, 导致日后他与同时代德国数学家莱布尼茨 (G. Leibniz, 1646-1716) 之间引起无休止的微积分发

明权之争。实际上，牛顿和莱布尼茨研究微积分虽然达到了同一目的，但各自的方法不同。如果说牛顿主要是从力学的概念出发，那么莱布尼茨作为几何学家和哲学家对方法感兴趣，他成功建立起更加方便的符号体系和计算方法，为微积分严格化奠定了基础。因此，这项伟大发明的荣誉由这两位伟大的思想家共同分享似乎是最好的结果。

第二项划时代的发现涉及到光的现象，牛顿通过光学实验成功发现了像太阳光一样的白光能分解成有色光，并设计出了反射望远镜。第三项发现因一个美丽的“苹果故事”而家喻户晓：乌尔索普的一棵苹果树下，一个苹果从树上掉了下来，激发了牛顿的灵感——使月球留在它的轨道上与使苹果落到地上的是同一个力，产生了万有引力的想法。虽然有人质疑过故事的真实性，但更多的人仍相信故事是真实的。

1666 年，伦敦瘟疫伴随着一场大火而画上句号。1667 年牛顿回到剑桥大学获得硕士学位，经过四年的积累和两年的沉淀，此时的牛顿已成为世界一流的数学家和物理学家。同年 10 月，他被选为研究员。牛顿后来谈到，避疫的两年是他发现力最旺盛的时期，对于数学和自然哲学的关心比其他任何时候都多。^[7]

在三百多年后的今天，新冠肺炎疫情蔓延全球，严重影响了人们正常的工作、学习和生活。大多数居家避疫者或感无聊、压抑，终日情绪消极而无所事事。此情此景不禁让我们回想起 1665 年的伦敦瘟疫，那远比我们现在的处境严峻得多，而牛顿作为伦敦学子为我们做出了极好的表率，他可能并没有为抗疫做出直接贡献，但却通过潜心钻研和诸多科学成果给予人类前所未有的理性。

科学理论闪耀真理的光芒，伟大人物激发奋进的力量。笼罩全球的阴霾终将消散，而作为学生、老师、研究者……利用疫情期间，在自己的专业领域和岗位上耕耘坚守、创新突破，不仅是让自己有助于他人，有益于社会，有功于国家的最好方式，也是提升自我的绝佳机会。

3 教学设计与实施

（一）创设情境，提出问题

师：大家觉得近几年对我们生活学习影响最大的事件是什么？

生：新冠肺炎。

师：是的。自 2020 年以来，新冠肺炎在全球蔓延肆虐，给人们的生产、生活带来了巨大

的影响。回顾历史，我们可以发现，人类一直在与病毒作斗争，今天让我们一起走进 17 世纪，走近那个疫情爆发时代的牛顿。

老师播放 HPM 微视频，介绍牛顿在“居家隔离”的 18 个月中最具传奇色彩的三大科学发现，其中实为艺术加工的传说——牛顿因被自家院子里的一颗苹果砸中脑袋，而发现万有引力定律。



图 1 微视频剪影

（二）问题研究，复习概念

师：下面，我们从数学的角度研究这只充满魔力的“苹果”，它给了牛顿什么启示？

【问题 1】如何计算大树上掉下的苹果，从下落开始的每一段相等的时间内的速度之比？

师：“每一段相等的时间内的速度”指运动时的什么量？

生：苹果的平均速度。

师：平均速度怎么定义？

生：根据速度公式，物体的平均速度是 $\bar{v} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{S(t_1 + \Delta t) - S(t_1)}{\Delta t}$ 。

师：你会求相等时间内的速度之比吗？

生：由自由落体的位移公式 $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$ ，记每一段相等的时间为 T ，则在第 n 个时间段 $[(n-1)T, nT), n \in N^*$ 上的平均速率 $\bar{v}_n = \frac{g(nT)^2 - g[(n-1)T]^2}{2T} = \frac{(2n-1)gT}{2}$ ，因此， $\bar{v}_n : \bar{v}_{n+1} = (2n-1) : (2n+1)$ 。

师：伟大的意大利科学家伽利略坚信，“自然界是用数学设计的”，他在研究自由落体运动时认识到物体的位移与时间的平方成正比，从而得出结论：做自由落体运动的物体，从下落开始的每一段相等的时间内的位移之比为自然数的连续奇数之比。

【设计意图】通过问题与历史融合，复习函数 $y = f(x)$ 的“平均变化率”的概念与计算，

增强学生学习的兴趣。

师：速度=路程/时间，即便是现在的小学生都知道，但 17 世纪中叶前，人们也只认识到“平均速度”的概念。早期的物理学家普遍认为，下落的苹果在“任何短时间内”都有一个“平均速度”，但它在每一点的“瞬时速度”为零，这让人们陷入了“落果不动”的思维怪圈。你如何破解前人心中的疑惑？

【问题 2】苹果下落过程中，在某一时刻 $t = t_0$ 的速度是多少？

师：苹果下落过程中，在这一点(对应时刻 t_0)瞬间的速度 $v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{0}{0}$ 吗？

受具体情境的影响，很大一部分同学表示同意。

师： t_0 瞬间对应的时间段是一个确定为 0 的值吗？

生：不是，应该是一个无限趋近于 0 的时间段。

师：这里位移与时间的增量 $\Delta S, \Delta t$ 是无限趋近于 0 的变量，那瞬时速度如何计算？

生：苹果在下落过程中的任何一个时刻 t_0 的瞬间 ($\Delta t \neq 0$)，瞬时速度 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = gt_0$ ，苹果在时刻 $t = t_0$ 的速度确定且不为 0，因此并非静止的。

师：约 360 年前，牛顿在研究运动学时，使用了这种特殊运算——“极限”来定义“瞬时速度”，牛顿称“变量”为“流”，称变量的变化率为“流数”，称他的方法为“流数术”。

【设计意图】改编“飞矢不动”悖论，引发思维冲突，深化学生对导数概念与公式的理解，认识瞬时速度不能用静止的观念来看，应是一个无限动态逼近变化中的确定过程。

【问题 3】如图 2 是 17 世纪英国的一个苹果形茶壶。现在将水注入茶壶，你能画出壶内水的体积 y 与水面高度 x 的函数关系的大致图像吗？



图 2 17 世纪的苹果形茶壶

师：水的体积 y 关于高度 x 的函数式 $f(x)$ 能明确表示出来吗？

生：不能。

师： $y = f(x)$ 关于 x 的变化可以通过什么量间接反映？

师生共同分析确定函数图象可以通过函数值的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 的相对变化量 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ，即过曲线上的两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的割线的斜率的大小变化来反映；进而，在 $x_2 \rightarrow x_1$ 时，用曲线上每一点处的切线的斜率反映函数 $y = f(x)$ 的升降变化。

教师选择学生所绘制的有代表性的函数草图，展示分析。

师：在牛顿研究“流数”的同时，德国数学家莱布尼茨也在攻读前人的著作，从几何的角度提出自己的观点。

【设计意图】引导学生从函数的角度看问题，从割线的斜率与切线的斜率的角度解决此问题，培养直观想象能力，复习相关概念。

师：你认为牛顿与莱布尼茨的工作有何异同？

师生总结瞬时速度、切线的斜率与函数的瞬时变化率的关系，逐步展示图 3。虽然两人的出发点不同，牛顿从运动学的角度研究，莱布尼茨从几何学的角度研究，但殊途同归。

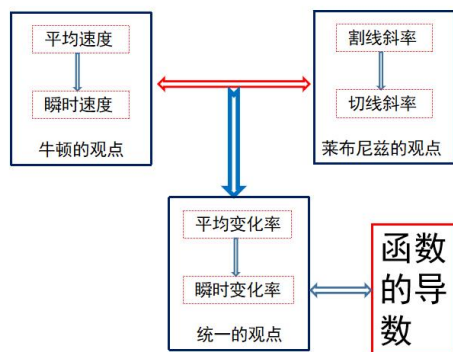


图 3 运动与几何两个角度揭示导数的意义

从统一的观点看，他们研究的对象都是函数；研究的问题都是函数的变化率，研究的思路都是从平均变化率到瞬时变化率，研究的方式都是用极限的形式表示，并研究差商的变化是否趋于一个定值，因此他们研究的都是函数的同一种量——导数。

师：导数是曲线切线的斜率，牛顿的“流数”是运动物体的速度、加速度，也是函数的导数。其实导数就是函数的瞬时变化率，来源于两个学科的研究在函数之下得到了统一，这体现

了数学的抽象美、简洁美、统一美、和谐美。从数学上，求导数是一个动态的、用有限向无限逼近的过程，大大扩展了数学的应用疆域；在生活中，它则诠释了“一万年太久，只争朝夕”这种砥砺前行，精益求精的精神。

【设计意图】教师借助历史上的数学家对变化率的研究，复习导数的概念，让学生建立较为牢固的知识联系网络。

师：对于运动学问题以及求切线、求极值甚至求面积、体积等基本问题，在古代，东西方的阿基米德、刘徽、祖冲之父子，近代的伽利略、卡瓦列里、笛卡儿和惠更斯、费马等先驱者作出了重要贡献，但他们没有认识到所进行的运算的一般性，而只是回答一个个具体问题。牛顿与莱布尼茨各自将这种求无限小量的方法上升到一般概念，指出这是一种不依赖于任何几何或物理背景的运算，并给予这种算法一个特别的名称——导数，这是微积分创立的关键一步，建立在符号运算基础上的微积分，更具有一般性，和广泛的应用性。后来理论严密的微积分成为一切科学研究最基本的工具，也成为一个人是否接受过科学训练的重要标志之一。

【问题 4】如果把苹果抽象地看成一个完美的球体，那么球的体积 V 与表面积 S 之间有何关系？为什么？

师：从运算上考察，球的体积 V 与表面积 S 公式有什么关系？

学生尝试从导数运算的角度认识 V 的导数是表面积 S 。

师：这是巧合吗？如何解释这一关系？

学生用求导公式由 $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，得到 $V'(r) = 4\pi r^2 = S$ 。师生共同分析，以上结果只是形式上的验证；从导数的定义看，设球半径 r 的增量为 Δr ，则

$$V'(r) = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{V(r + \Delta r) - V(r)}{\Delta r} = \frac{4\pi}{3} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{3r^2 \cdot \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3}{\Delta r} = 4\pi r^2。$$

即当“空心球”厚度 Δr 趋于 0 时，“空心球”体积抛开那“微不足道”的厚度，就成为一张“球皮”。

【设计意图】通过具体问题研究，既引发学生的好奇心，也促使学生不只从形式运算上熟练解决问题，而且能从数形结合的角度，更深刻理解导数的概念。

（三）课时小结，升华主题

师：今天，我们以牛顿在瘟疫时期的数学工作为主线，复习了导数的概念，了解了导数产生的历史及其意义。现在你对研究问题的思考方式有哪些体会？对导数的概念有什么进一步的

认识吗？

生：思考一个问题不能只局限于以往的数形结合、转化、化归等思维方式，而要有微中见著、异中求同的创造性思维方式；导数的概念是从常量到变量、从有限向无限过渡的一扇数学大门，它是描述一切运动与变化的数学工具之一。

师：今年我国新冠疫情多点爆发，如果我们隔离在家，你是手持“苹果”手机放飞自我，而失重漂浮？还是在“社交隔离”中博观而约取、更有创造力的去学习？

师：对此牛顿已经给出了回答。人们总愿相信天才的灵光一闪的神奇，常忽略其背后大量的积淀和艰难的探索。希望你们能像牛顿一样，多学习思考，站在巨人的肩膀才看得更远；有好奇心，才能更容易发现科学海岸边五彩斑斓的卵石和贝壳。

4 结语

根据已有的 HPM 课例评析框架，笔者从史料的适切性、方式的多元性、融入的自然性以及价值的深刻性四个方面对本节课进行评析^[8]。

（一）史料的适切性

本节课选取的史料主要有牛顿在伦敦瘟疫期间的科学研究成果、牛顿和莱布尼兹在导数方面的工作及贡献。两则史料皆有明确依据，符合科学性。第一则史料主要用于营造统一的课堂情境，让学生们身临其境地感受牛顿科学探究之旅，为疫情当下的学习和生活带来更深刻的启示，以“牛顿发现万有引力”故事中的“苹果”为线索编制例题，增添趣味性。第二则材料串联了本章的知识点，分别从运动学和几何学两个角度揭示了变化率与导数的关系，带领学生们重历导数发生之路，符合可学性。此外，两则材料从知识和情感两个角度促进教学目标的实现，具备有效性。

（二）方式的多元性

本节课中数学史的应用方式主要有附加式、顺应式和重构式。课堂伊始以微视频的形式介绍了“牛顿发现万有引力”的社会背景，并以此情境引入教学，使用了附加式。此外，从运动学和几何学两个角度设计例题，重构导数概念的发生、发展历史，一方面串联本节的知识点，呈现导数与变化率之间的紧密联系；另一方面，希望激发学生学习动机，体会极限思想，感受数学的统一性和抽象性。但课堂上教师没有给予学生充分的思考和表现时间，因此重构式还有

待完善。本节课还以“牛顿发现万有引力”故事中的“苹果”为线索编制问题串，使用了顺应式。

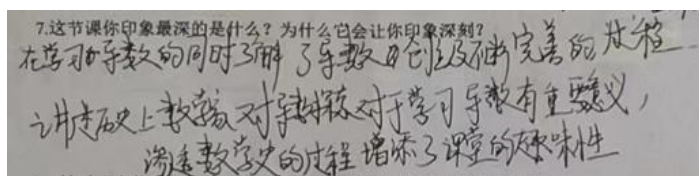
（三）融入的自然性

17 世纪致使微积分诞生的四类科学问题中，物体的瞬时速度和曲线的切线是促进导数概念发生发展的两类问题。学生之前经历了从具体问题中抽象出变化率的过程，了解了变化率和导数的概念。在本节课中，教师从运动学和几何学两个角度带领学生重温导数概念，并通过介绍牛顿和莱布尼茨的工作，以人物为线索串联各部分知识，融入“飞矢不动”问题，进一步渗透极限思想，体现了历史顺序与学生心理顺序的统一。问题 4 的设计安排则体现了知识之间的关联性，虽然球体积和表面积在古希腊时期就被数学家求出，但从极限思想切入，更深刻地揭示球体积和表面积之间的内在联系，逻辑顺序与学生认知基础的统一。此外，以牛顿在导数和微积分方面所做的贡献为灵感，结合当下疫情环境，设计者以瘟疫下的牛顿为背景，以“流数”展开课堂，以“苹果”串联课堂，最后以探索精神升华课堂，与当下现实环境紧密结合，实现立德树人的教学目标。

（四）价值的深刻性

在本节课中，数学史的融入主要实现了“知识之谐”“文化之魅”和“德育之效”三大价值。两个角度揭示导数与变化率的关系，帮助学生进一步感受极限思想，构建导数概念的知识框架，体现了“知识之谐”。同时，通过牛顿和莱布尼兹在物理和几何方面对导数概念所做的贡献，以及对“飞矢不动”问题的改编和思考体现了“文化之魅”。此外，本节课以牛顿在避疫期间的科学成就为背景开展课堂教学，不仅带领学生穿越时空走近牛顿，了解其科学成果以及对导数所做的重要贡献，更重要的是以史为镜，激励学生在疫情当下戒骄戒躁、潜心学习，达成“德育之效”。

教学者通过后测问卷收集了全班 45 名学生对于本节课印象最深刻的内容，部分学生的回答如图 4 所示。



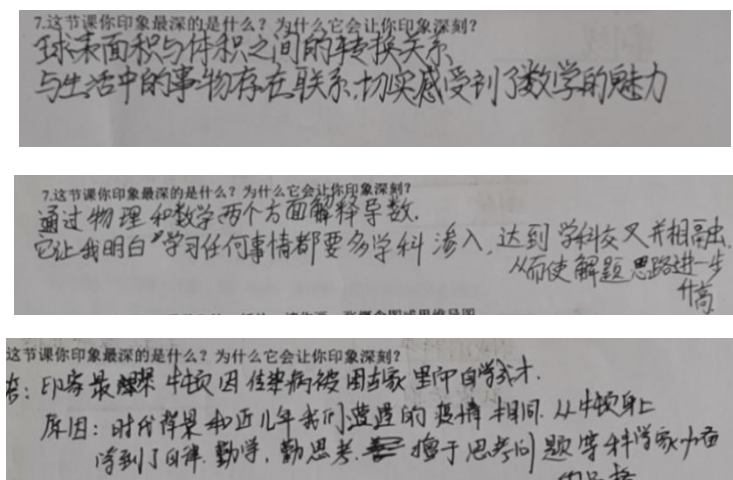


图 4 部分学生对本节课印象最深刻的内容

将反馈内容按语义分类，统计出现的次数，出现次数不少于 5 次的主要有六种，主要涉及知识本身、例题以及数学史料三个方面，统计情况如图 5 所示。

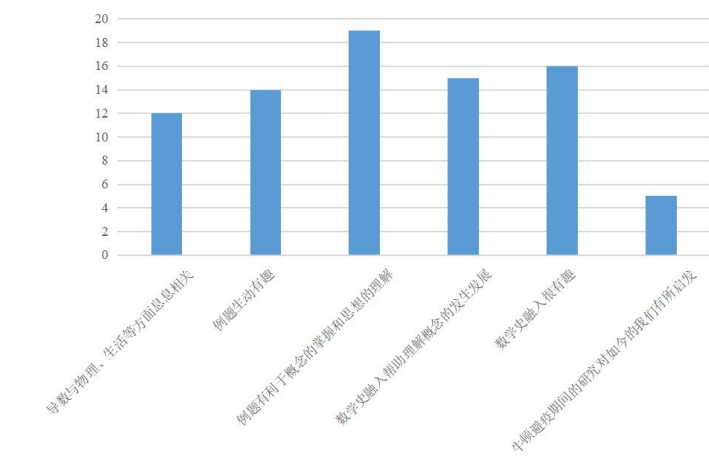


图 5 学生对本节课印象最深刻的内容统计

可见，例题的编制和数学史的融入给学生留下了深刻印象，并在知识层面帮助学生理解导数概念和背后的数学思想，在情感层面启发对生活的思考，激发学习兴趣。但是，出于复习课的课堂容量、学生对于 HPM 课堂的适应程度等各种因素，学生在课堂上没有充分的机会表达与展示，因而在未来的课堂中还可以继续探索数学史所具有的“探究之乐”的教育价值。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育

出版社, 2020: 39.

- [2] 王志刚, 姚艳, 董书一. 导数概念的教学探究[J]. 阜阳师范学院学报(自然科学版), 2015, (4): 105-107.
- [3] 何斌. 体会符号意义 看清问题本质——“导数的复习”的教学设计及教学反思[J]. 高中数学教与学, 2018, (18): 21-23.
- [4] 朱玉华. 以导数为例, 谈概念的有效复习方式[J]. 中学生数理化(教与学), 2014, (6): 89.
- [5] 卡茨(李文林, 等, 译). 数学史通论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 155-158.
- [6] 博尔加列夫斯基(潘德松, 沈金钊, 译). 数学简史[M]. 上海: 知识出版社, 1984: 172-178.
- [7] M. 克莱因(张理京, 等, 译). 古今数学思想(第二册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 66-69.
- [8] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J]. 教育与评论(中学教育教学), 2017, (1): 35-41.

他山之石

职前教师问题解决的观念与表现之间关系的探索

钱 秦

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

帮助学生成为有能力的问题解决者是数学教学的主要目标之一。大量研究表明，教师的问题解决的观念与问题解决教学之间存在联系。尽管人们认同教师的解决问题的观念和表现很重要，但已有文献对这一领域的关注有限，我们对职前数学教师（Preservice Teachers，以下简称 PTs）如何理解数学问题解决，以及他们问题解决观念和表现之间的关系知之甚少。

基于此，《职前教师问题解决的观念与表现之间关系的探索》一文的研究目的在于探讨职前教师的数学问题解决观念与他们的问题解决表现之间的关系。又因为观念的主观特殊性，研究人员易因不同的理解而产生研究困难。所以作者不仅调查了 PTs 如何定义问题解决，而且分析了他们为解决问题所创造的隐喻（metaphor）。围绕研究目的，作者提出了三个研究问题：

（1）职前小学教师如何理解问题解决？（2）他们创造了什么隐喻来描述其解决问题的观念？他们的隐喻如何解释其解决问题的观念？（3）他们解决问题的观念和表现之间有什么关系？

该研究选取了就读于美国东北部一所大学且正在实习的 96 名 PTs，这些职前教师都修读了由两位作者设计的、第一作者教授的小学数学方法课程。这个课程为 PTs 提供了“用他们自己的策略来理解数学概念”的机会，即这 96 名的 PTs 关于解决问题的观念也应该有所不同。数据收集采用问卷和访谈相结合的形式，要求参与的 PTs 完成一份包含两部分的书面问卷，并对他们进行了访谈。问卷包含两个部分，第一部分包括三个开放式项目，要求 PTs 定义问题解决、为解决问题创造比喻、解释他们的比喻。第二部分是一个非常规的数学问题（图 1），用于评估 PTs 的推理水平。该数学问题涉及在一个增长序列中确定第 10 个六边形火车的周长（问题 1），以及描述任意正多边形列的多边形个数和周长之间的关系（问题 2）。

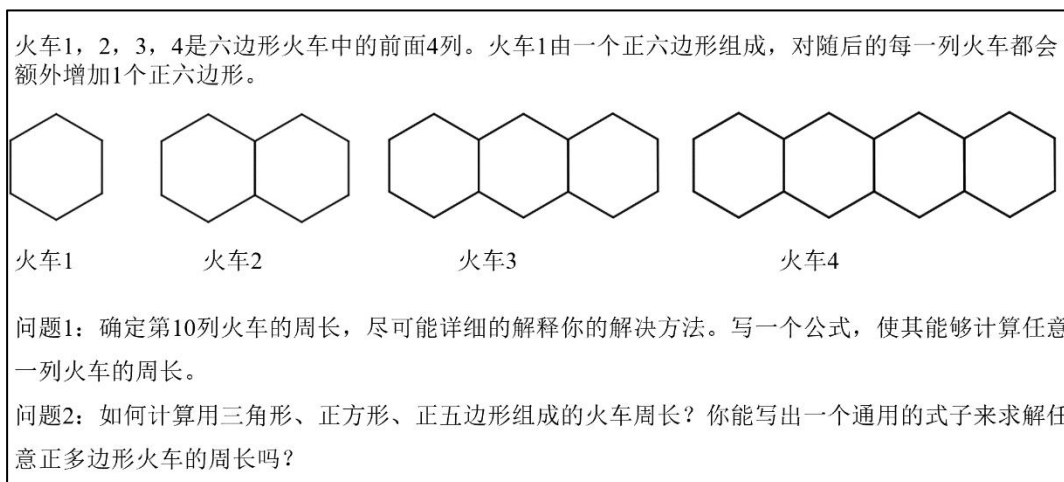


图 1 非常规的数学问题

数据主要使用内容分析法进行处理, 作者在前人研究的基础上, 增加或修改了部分类别, 采用三个量表分别编码 PTs 的问题解决观念、隐喻和问题解决能力。PTs 的问题解决观念、隐喻的编码结果如表 1 和表 2 所示。

表 1 PTs 的问题解决 (PS) 观念编码结果

类别	问题解决观念	数量
PS 1	PS 是达到其他目的的手段	6(6%)
PS 2	PS 是一种寻找解决方案的方法	43(45%)
PS 3	PS 是需要步骤/程序的技能	24(25%)
PS 4	PS 即采用多种方法/策略	16(17%)
PS 5	PS 是艺术	7(7%)

从表 1 可以看出, 只有 6 名 PTs (6%) 将数学问题解决定义为实现其他目标的手段 (PS1), 如“锻炼大脑”。大多数人 (45%) 侧重于达成解决方案 (PS2), 如“问题解决就是找到答案或解决方案”, 对于这些 PTs, PS 不是一个复杂的过程, 而是一个目标驱动的活动。24 名 PTs (25%) 认为 PS 是一种程序性技能, 需要正确地遵循步骤。16 名 PTs (17%) 认为 PS 是采用多种方法的能力 (PS4), 它与 PS3 都强调步骤和流程, 但不同的是 PS4 要求灵活考虑替代方案。7% 的 PTs 将 PS 视为艺术, 强调元认知思维和元技能, 有意识地监控和调节一个人关于行动和变化的决定 (PS5)。

表 2 PTs 关于问题解决的隐喻的编码结果

隐喻类别	数量	部分和
仅最终产品	17	22(23%)
最终产品+情感	5	
仅过程	19	24(25%)
过程+情感	5	
最终产品+过程	26	32(33%)
最终产品+过程+情感	6	
仅情感	6	6(6%)
回答不清晰或没有回答	12	12(13%)

通过表 2 我们发现，17 名 PTs 的隐喻集中在达到预定的目标，并含有得到答案、寻找解决方案等关键词，如“解谜”，“用地图寻找宝藏”。5 名 PTs 在注重预定目标的同时，用含有情绪的词汇创造隐喻。19 名 PTs 提供了专注于过程的隐喻，这些隐喻强调对真实世界事件或活动的积极参与，如“解决问题就像爬梯子，因为你需要遵循适当的步骤和技巧才能前进。”强调过程的 5 名 PTs 还表现出满足、挣扎等情绪。26 名 PTs 提供了隐喻分类为最终产品+过程，因为他们同时提到了结果和过程，如“解决问题就像开车一样，因为你必须遵守所有的驾驶规则，然后你才能到达目的地。”6 名 PTs 的隐喻不仅体现了过程和结果，还使用了情感的描述词汇。6 名 PTs 的隐喻被编码为仅情感，因为只体现了消极的情绪。12 名 PTs 没有提供隐喻或不清晰隐喻，这对理解他们的问题解决观念没有任何帮助。

为了说明 PTs 问题解决观念与隐喻的一致性，作者使用这两个数据集创建了矩阵表和百分比堆积柱形图。作者发现将 PS 视作一种艺术的 PTs，倾向于创造包含过程和最终产品的隐喻。将 PS 定义为解决方案的手段的 PTs，倾向于创建与最终产品、最终产品+情感相关的隐喻。此外，PTs 的观念在隐喻方面体现得更加详细，包括情感或之前的经验，反映出隐喻的本质是抽象概念的具体表达。

PTs 的问题解决表现通过六边形任务进行测量，测量结果如表 3 所示。

表 3 PTs 使用的策略及相应的推理水平

水平	描述或例子	问题 1 的频率	问题 2 的频率
错误	错误的识别增长模式	47(49%)	47(49%)
水平 1	画出 10 个正六边形并数出答案	10(10.3%)	10(10.3%)
水平 2		7(7.3%)	7(7.3%)
	2.1		
	2.2 由 10 个六边形的总周长减去公共边的数目	3(3.1%)	3(3.1%)
水平 3	做一个数字序列，找到一个递归的模式，然后列出列表，直到第 10 个	7(7.3%)	7(7.3%)
水平 4	4.1 关注公共边，找出火车中间增加的边数，加上首和尾的边数，得到第 10 项	5(5.2%)	5(5.2%)
	4.2 关注空间意义，进行代数表达	6(6.3%)	6(6.3%)
	4.3 用函数来表达六边形火车的周长	11(11.4%)	11(11.4%)
水平 5	求任意正多边形序列周长的一般化方法	0	7(7.3%)
合计		96(100%)	96(100%)

结果显示，49 名 PTs（51%）给出了正确的答案，其余的人给出了不正确或不完整的答案。六边形任务包括两个小问，PTs 对这两个问题的解答各不相同，使用的策略包括具体的（绘图和直接计数）到抽象的（代数/函数）。可以发现，正确解决这个数学任务的 PTs 倾向于使用相同的策略来解决问题 1 和问题 2。10 名 PTs 依靠图形推理（1 级），画出一定数量的多边形，通过数数解决问题。另外 10 名 PTs 识别了以几何形状为基础的增长模式中的量化规律，但没有使用递归，处于推理水平的第二级（计算推理），并根据是否注意到公共边将其细分为 2.1 和 2.2 两个等级。第三级的 7 名 PTs 采用递归的方法，在序列中依次添加非公共边的边数。第四级的 22 名 PTs 通过推广序列中各方面之间的线性或函数关系来解决问题，再根据泛化程度划分为 4.1，4.2 和 4.3 三个等级。问题 2 要寻求任意正多边形列的个数和周长的关系，具有更高的泛化水平。问题 1 中等级为 4.3 的 7 名 PTs 将问题 1 的函数推广到了任意正多边形，达到了最高的推理等级。

作者使用数学问题 2 的解答作为问题解决表现的数据，探讨问题解决的观念和表现之间的关系。根据这两个数据制作矩阵交叉表和百分比堆积柱形图。分析发现，将解决问题视为达到目的的一种手段（PS1）的 PTs 倾向于依赖于较低水平的推理。在 43 名专注于获得答案（PS2）

的 PTs, 有 29 名提供了不完整或错误的解答, 剩下的 14 名要么采用基于简单计数的图形推理, 要么采用无递归的计算推理。认为解决问题是一种技能 (PS3) 的 PTs 使用了从零级 (不完全) 到五级 (拓展泛化) 的不同级别的策略。将 PS 视为艺术的 PTs 表现出更高层次的推理能力, 他们用完整的符号方程来解决问题。这些量化的数据表明, PTs 的问题解决观念和表现之间存在正相关性。

为进一步阐述 PTs 解决问题的观念、隐喻和表现之间可能存在的关系, 作者进行了案例分析。第一个案例表明, 将问题解决视为艺术 (PS5) 的 PTs 通常具有较高水平的问题解决表现。案例 1 将解决问题定义为一种艺术, 将谜题作为解决问题的隐喻, 通过一个完整的代数方程解决问题, 展示了高层次的推理能力。第二个案例则选取了研究中最常见的水平, 用于说明认为解决问题是获得答案的一种手段 (PS2) 的 PTs 倾向于展示计算推理 (第二级)。

教育工作者可以做些什么来帮助学生发展问题解决能力呢? 首先, 这项研究强调了将“解决问题作为一种艺术”的观念和深入理解数学的重要性, 因为 PTs 的问题解决观念和他们的问题解决表现之间存在一定的正相关性。其次, 作者认为教师教育者应提供机会让 PTs 重新审视、发展他们的问题解决观念, 以达到当前改革文件中的要求。研究还建议教师在讨论问题解决观念的同时让 PTs 给出定义和隐喻。

参考文献

- [1] Son, JW. & Lee, M.Y. Exploring the Relationship Between Preservice Teachers' Conceptions of Problem Solving and Their Problem-Solving Performances[J]. *Int J of Sci and Math Educ*, 2021, 19(1): 129-150.

活动讯息

聆听中感悟，观摩中成长

第二期 HPM 高中网络研修班——“导数的概念”课例展示活动顺利举行

王智洋¹，刘梦哲¹，雷沛瑶²

(1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2.华东师范大学数学科学学院，上海 200241)

2022 年 6 月 11 日晚上 7 点半，第二期数学史与数学教育（HPM）高中教师网络研修班“导数的概念”课例展示活动在线上举行，本次活动由数学史与数学教育（HPM）工作室主办，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师参与指导。HPM 研究团队的硕士、博士研究生与第二期 HPM 研修班、HPM 工作室教师参加了本次活动，针对本学期 HPM 网络研修班以及 HPM 工作室中三位老师开展的“导数的概念”课例进行观摩学习和交流研讨。

本次课例展示活动主要分为观摩教学视频、实践经验分享以及集体评课交流三个环节。

1 观摩教学视频

本学期开展“导数的概念”课例的三位老师分别是上海市七宝中学的黄婷老师、上海市华实高中的陈睿滢老师以及浙江省象山中学，现于新疆维吾尔自治区阿克苏地区库车二中支教的杨育池老师。陈睿滢老师和杨育池老师的教学视频在之前的活动中已经播放过，故本次活动组织集中观摩了黄婷老师“导数的概念及意义”展示课的教学视频（图 1）。

黄婷老师在课堂伊始播放了谷爱凌在冬奥会滑雪项目中的比赛视频，以此为情境引出三个问题，即某一时刻的瞬时速度、起跳瞬间的速度方向以及运动过程中的最高点。然后，黄老师对谷爱凌滑雪轨迹进行建模，设计了求某一时刻瞬时速度的例题，并以问题串的形式引导学生通过将时间段不断缩小，使用平均速度趋近瞬时速度求出结果。随后，启发学生用数学语言描述趋近的过程，引出导数的定义。接着，黄老师带领学生从导数的定义式出发，思考导数的几何意义，并通过展示 GeoGebra 动画验证猜想。在给出导数的几何意义后，黄老师再次以谷爱凌比赛视频为情境，引导学生求出起跳瞬间的速度方向。然后，以微视频的形式介绍了导数的发展历史，将课堂之初提到的三个问题与 17 世纪的四类科学问题相联系，并组织学生在滑雪

情境下仿照之前例题，提出新的研究问题。最后，黄老师进行课堂小结与作业布置。



图 1 黄婷老师执教展示课

2 实践经验分享

在实践经验分享环节中，三位老师从课例形成过程、教学设计思路等方面介绍教学设想，并分享了实施感受。

黄婷老师表示（图 2-3），本节课基于 HPM 视角，采用重构式融入数学史，围绕“一个概念、两种思想和两类素养”展开教学，渗透数学文化，其中“一个概念”指导数的概念，“两种思想”是指极限思想和数形结合思想，“两类素养”是直观想象和数学建模素养。黄老师强调，本节课的特色是围绕滑雪情境进行数学建模、设计问题，并详细介绍了经过一次次的研修形成问题情境的设计思路，以及围绕滑雪情境进行数学建模的数据来源。



图 2 黄婷老师



图 3 黄婷老师分享执教体会

陈睿滢老师结合教学设计和教学课件，分享了“导数的几何意义”展示课的设计过程（图 4-5）。陈老师表示，本节课的特点可主要概括为一个视角、两条线索、三种思想。一个视角是指 HPM 视角，本节课采取 HPM 重构式教学法，以课前学习单为依托，教师进行分类梳理，以导演的角色带领学生重历切线发展历程，古今对照，并在此过程中逐步讨论各个时期定义的优缺点，达到深入理解、突破难点的效果。两条线索即“明线”与“暗线”，本节课以切线的概念与导数的几何意义两部分之间的数形结合为明线，以切线发展的时间历程作为暗线，两相结合，培养“数形结合”“从特殊到一般”和“曲直代换”三种思想。陈老师特别指出，在课堂小结时，学生不仅从知识和思想方法层面进行总结，还谈到了数学对于生活的启发的意义，这是本节课令人惊喜的地方。



图 4 陈睿滢老师



图 5 陈睿滢老师分享执教会

杨育池老师分享了“变化率与导数”复习课的设计思路与教学感想（图 6）。杨老师指出，通过研修班的多次研讨，从 HPM 视角设计教学，考虑利用“一个人物、一段故事、一个主题”将有内在逻辑关联的数学问题串融入数学概念复习课。杨老师详细介绍了每次研讨后的收获与教学设计的变化，最后的教学设计以“疫情下的牛顿”为主题，希望从行为和思想上启发感染学生，落实立德树人。在问题情景的设计上，采用重构历史的方式，以“神奇的苹果”为线索编制问题串。通过“苹果下落”的问题复习瞬时速度与导数的概念，借用“苹果形水壶”问题回顾导数的几何意义，培养数形结合思想。最后，杨老师表示本次课例是第一次尝试从 HPM 视角进行复习课的教学，实施过程中遇到了诸多困难，希望在今后能够多学习、多实践。



图 6 杨育池老师分享执教会

3 集体交流评课

在评课交流环节，来自不同小组的代表老师分享了观摩的体会与收获（图 7）。江苏省前黄高级中学的隋玉霞老师表示，黄老师设置的冬奥会情境具有较强的时代背景，能够给予学生较好的代入感，同时，微视频能让学生高屋建瓴地认识到学习导数的必要性。山东省临沂外国语学校的阚王琛老师表示，黄老师可以明确问题提出的指向性，或给学生搭建问题提出的“脚手架”。云南省昆明市官渡区第六中学的代红军老师表示，陈老师对历史素材的选取适恰、问

题串的设计环环相扣，可以深化学生对导数几何意义的本质理解，黄老师让学生动手计算平均速度，可以体会平均速度逼近瞬时速度的过程，由特殊到一般，学生可以归纳出导数的概念。

上海市平和学校的倪骏远老师基于在线教学，提出如何让更多学生参与到网课中来，引起各位老师的思考。上海市七宝中学的李霞老师表示，黄老师设置的前测问卷为探究活动和师生互动提供了切入点，同时，黄老师的教态、术语等也能让学生体会到如沐春风的感觉，杨老师的课堂则可以概括为有声、有形、又有人物，给人以眼前一亮。



图 7 小组老师分享交流学习体会

最后的专家点评环节，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师从一个主题、两个视角和三个阶段进行分享。一个主题——三节课聚焦导数单元这一主题，且具有承接关系；两个视角——HPM 的视角和德育的视角，杨老师将牛顿所处的时代背景与当下疫情的背景相结合，陈老师基于历史相似性和学生一起探究曲线切线的演进过程，黄老师将促使微积分产生的四类问题作为暗线设计教学，三位老师都将数学史和数学文化融入课堂，同时，三节课还充分体现数学史的德育价值，即理性、信念、情感和品质；三个阶段——三位老师代表教师专业发展的三个阶段，将数学史融入教学不仅能够丰富教师的 MKT，还能丰富学生的数学知识。当然，教师还应把握史料和习题之间平衡，对于史料的运用要张弛有度，具体内容的选择要为了学生的发展。

初夏齐欢聚，研修促成长，本次“导数的概念”课例观摩课活动圆满结束。通过此次研讨契机，相信在 HPM 网络研修班成员们的共同努力下，各位老师的教学质量必将稳步提升，教学成果取得更大飞跃。

集采众长，感悟数学智慧

第二期 HPM 高中网络研修班——“解三角形”课例展示活动顺利举行

苏福梅¹，雷沛瑶²

(1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2.华东师范大学数学科学学院，上海 200241)

继“等比数列”课例观摩活动结束后，2022 年 6 月 25 日晚上 7 点半，第二期数学史与数学教育（HPM）高中教师网络研修班举行了“解三角形”课例展示活动。本次活动由数学史与数学教育（HPM）工作室主办，在华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授及其团队的带领下，天南地北的老师们相聚云端、同观优秀课例。本次研修活动还请到了上海市长宁区教育学院教研员栗小妮博士作为专家指导参与交流。

本次研修活动主要分为三个部分，分别是优秀课例展示、小组交流汇报与专家点评。在第一节展示课中，云南师范大学附属中学的张青松老师给大家带来了课例——“HPM 视角下解三角形应用”（图 1）。张老师从正余弦定理的旧知复习引入，并播放了关于“古代数学家泰勒斯利用相似三角形测量金字塔高度”的微视频，视频结束后向学生抛出问题：泰勒斯测量金字塔高度的方法是非常巧妙的，但在实际操作中可能存在一些问题，请你说说看？从同学们给出的回答中引出了解三角形问题的第一种类型：底部不可达问题的测量。随后，张老师带领学生分别探究了测量点与底部共线和测量点、底部不共线这两种情况并总结了两者的共同点。紧接着，张老师讲解了第二种类型：不可到达点的测量。课堂最后，张老师指出上述测量问题在实际生活中有非常重要的实用价值，著名的天文学家拉卡伊和拉朗德利用一点不可到达测距离的方法测出了地月之间的距离，我国测量珠峰问题中也涉及到了解三角形，这一环节让学生体会到数学可以推动人类进步，激发了学生学习数学的内驱力。课堂结束后，张老师分享了自己的设计思路，他表示在研修期间不断打磨教学设计，最终为保持课堂的连贯性，将初版设计中“地月距离”的例子换为“测金字塔高度”的例子。张老师也希望能够通过课程帮助学生总结“解三角形”问题的类型。

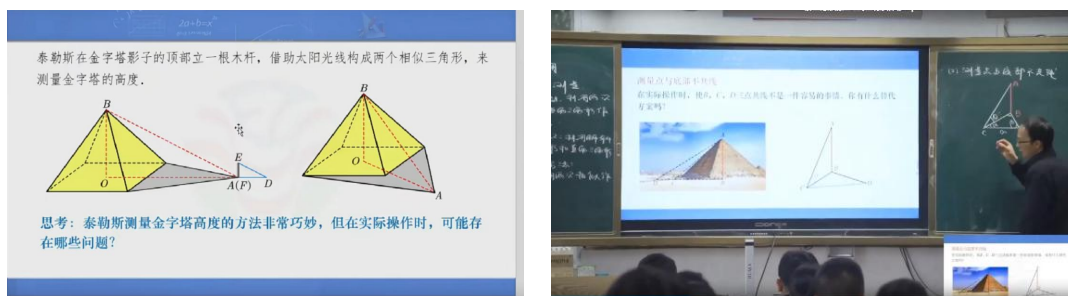


图 1 张青松老师教学片段

上海市北虹高级中学的丁倩文老师分享了“解三角形的应用之测量高度”课例的设计思路（图 2）。丁老师表示，本节课主要以活动探究的形式展开，她在上课前先让学生观看了“测量金茂大厦”的视频片段，并完成了“测量东方明珠高度”的课前学习单。在课中，她让学生展示自己方案，学生通过视频、PPT 等多种方式进行了分享，共收集到 29 种方案（图 3）。老师将学生的方案进行了整理并与历史上数学家的方法进行了对比，拉近了学生与古代数学家的距离，增强学生学习数学的信心。丁老师还注重引导学生思考初中锐角三角比方法与高中正余弦定理方法的区别和联系，体悟正余弦定理的优势。丁老师还在课堂结束一个月后发放了课后调查问卷，学生反馈颇好（图 4）。最后丁老师鼓励研修班的老师，在上完课后需要及时撰写课例论文，在论文输出的时候可以对整节课进行反思总结。

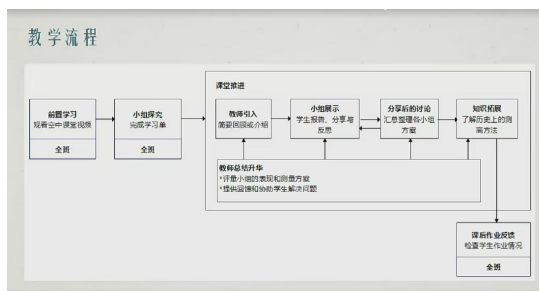


图 2 丁倩文老师的教学流程

课中

学生们在展示的过程中，有的小组通过视频，有的利用PPT等多种形式分享。共收集到29种方案，测量方案总结如下：

小组个数	已知条件	解法方法
3	两个观测点距离（水平距离），以及观测仰角和俯角	锐角三角比
1	一个观测点，知道仰角和俯角，以及观测点到建筑物顶点的距离	锐角三角比
8	两个观测点距离（水平距离），以及观测仰角和俯角	正弦定理
1	一个观测点，知道身高，同一时刻人的影子长度以及建筑物影子长度	相似三角形
1	相似三角形高度的建筑物，同一时刻建筑物影子长度以及建筑物影子长度	相似三角形
1	相似三角形高度的建筑物，同一时刻建筑物影子长度以及建筑物影子长度	相似三角形
3	两个观测点距离（水平距离），以及观测仰角和俯角	锐角三角比
1	两个观测点的距离，和观测点到建筑物顶点的距离	正弦定理
1	一个观测点所在高度，以及仰角和俯角	余弦定理
1	一个观测点，知道仰角和俯角以及观测点到建筑物顶点的距离	正弦定理
4	一个观测点，观测到建筑物顶点的仰角以及仰角	锐角三角比
1	一个观测点，知道仰角以及高度和距离建筑物顶点的水平距离	正弦定理
1	两个观测点（与东方明珠三点不共线）	余弦定理

图 3 学生方案

课后调查

针对问卷调查	在线教学至今你印象最深的数学网课是哪一节？原因是什么？
学生代表反馈	组队交流东方明珠的测量方法，讲了很多数学史上不同的方法，让我的思维开阔
	让我们自己算东方明珠高度，做ppt，比较新奇，所以印象比较深
	交流分享如何测东方明珠的高度，因为每个小组的方法不同，可以打开我的解题思路
	各小组轮流用自己的PPT展示这节课
	腾讯会议的那节小组探究课，因为有线下的大家讨论的感觉了，很怀念
	自主探究学习，以小组为单位进行思考，最后大家一起分享，这种方式更自主，不是老师单方面输出

课后调查

初中学习了解三角形，为什么高中还要学习解三角形呢？
初中的三角形大多都在直角三角形而构造直角三角形的情况下才能做，而高中学习了不是直角三角形的情况下也能解三角形。
高中的知识体系高于初中，并且初中解三角形限制使用特殊三角比，并且需要反复作辅助线解决，高中的定理会方便很多
两者区别甚大，初中的知识太少太有局限性，高中的很多问题都能迎刃而解
高中解三角形是为了更灵活的运用正余弦定理和向量的内容，区别在于高中运用的定理更多了，可以让我们的思维更开阔。
通过更多的方法学习如何解三角形，不局限于初中给出的条件。
高中是拓展与延伸，学习高中的解三角形更有意义与价值

图 4 丁倩文老师的课后调查

而后进入交流点评环节，各小组进行了精彩的交流与讨论。第一小组代表王剑老师讲到，

张老师在课堂中从一而终运用“泰勒斯测量金字塔的高度”这一情境，通过改变测量工具提出问题串，课堂层层深入，衔接非常流畅；丁老师的课堂与实际生活紧密联系，探究的味道十分浓厚。第二小组代表张志伟老师谈到，张老师板书整洁，微视频画面精致，学生讲解完后的总结用语精炼准确，非常值得学习；丁老师克服线上上课不能生生互动的局限，将学习任务前置，收集到学生的多种探究方法，要是能在线下再开展一次，效果会更好。第三小组的代表王鑫老师认为，张老师通过设计课前学习单来引导学生复习旧知的方式非常值得其它老师借鉴；课程最后丁老师充分放手让学生探究，将学生的方法与历史上数学家的方法作古今对照，令学生印象深刻。陆鼎元老师表示自己参与了研讨的全过程，张老师第一版教学设计内容容量颇大，在最终版教学设计中做了一个很好的减法，内容精炼，衔接紧密，对于史料如何適切地服务课堂，为我们作了一个很好的示例；丁老师将建模与数学史结合起来，利用空中课堂的教学片段，通过课堂与信息技术融合，让我们感受到数学史可以有新的活力，课后及时撰写课例论文更是值得自己学习的地方。

最后的专家点评环节中，栗小妮老师首先指出，两个老师对于学生的方法都给予了及时的反馈，这是值得大家学习的地方。除此之外，栗老师也给出了自己的建议和展望。张老师在情境设计上非常用心，课堂呈现效果也很不错，建议张老师可以收集课后问卷，观察学生的反馈；“重差术”相对较难，对学生而言有一定的挑战性，因此课中可以给学生多些时间思考，课后也可以做进一步研究；同时还可进一步点出三角与测量的关系，使得课堂更加有人文特性。丁老师放手让学生探究，探究过程中学生在认真思考，这对老师的教学观有一定的启示——我们对学生的思考要有耐心，学生认真思考的过程会给我们带来惊喜。

华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授从教学目标、学生表现、学习机会、评价运用四个方面对张青松老师的课进行了点评。课堂中融入数学史的独特价值应该在教学目标中有所体现，史料的选取、运用都要紧扣教学目标；在学习机会方面，老师可以多鼓励学生表达；在评价方面，可增加古今对照这种独特的评价方式，让学生穿越历史，和数学家进行对话，拉近学生与数学家的距离，例如，课后布置“假如泰勒斯遇上刘徽会发生什么呢？”这样的趣味数学写作。

此次课例观摩活动至此结束，老师们对于“解三角形”这一内容以及如何在其中融入数学史收获颇深。希望各位老师能将所学应用实践，打造更多优秀课例。