上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2023 年第 12 卷第 05 期

八大山人《鹤鹿凫雁图》（四条屏）

刊首新语

中华优秀传统数学文化与小学数学留白创造式教学

汪晓勤[1]，林雁平[2]

（1.华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2. 上海市北京东路小学, 上海 200002）

1 引 言

中华优秀传统文化融入小学数学教学是时代的呼唤，是落实“立德树人”根本任务的需要。虽然数学课程中可融入的传统文化内容很多，但其中最重要的内容是中算史（中国传统数学的历史）。众所周知，中算有着悠久的历史、辉煌的成就和丰富的内容。我们可以对中算史在小学数学教学中的作用作出双重定位，也就是说，既可将其作为数学教学的目标，也可将其作为数学教学的工具。数学教学中运用数学史的具体方式有四种——附加式、复制式、顺应式和重构式，对中算史的不同定位决定着史料的不同运用方式。如果将中算史视为数学教学的目标，那么教师可能会采用附加式或复制式，如介绍中国古代数学家、数学著作、数学成就和数学问题；如果将中算史视为数学教学的工具，那么教师就会采用复制式、顺应式或重构式，如直接利用中算的概念、公式、命题、法则、问题、方法，或对其进行改编，或借鉴中算的概念、公式、命题、法则的历史发展过程，确定其中的关键步骤，然后设计问题串，让学生在探究过程中经历新知创获的过程。

数学的历史就是前人留白、后人创新的历史，留白是创新的必要条件。为了培养学生的创新意识和创新能力，教师在课堂教学中也需要留白，为此，人们开始倡导“留白创造式教学”，即以学生为中心，立足育人目标，为学生学习留下充分的思维空间和探究机会，让学生在已有知识基础上主动学习、创获新知、陶熔品行的教学方式，其要义是“留白促创新”。留白创造式教学涉及六“白”——陈述之白、发现之白、论证之白、方法之白、问题之白、超越之白，其中，陈述之白和发现之白指向“是什么”，论证之白指向“为什么”，方法之白、问题之白和超越之白指向“还有什么”。要将中算史料运用于留白创造式教学，教师首先需要知道“留何种白”和“如何留白”。

本文以汉代数学典籍《九章算术》中的若干主题为例，从“教学工具”的角度来讨论中算史料在小学数学留白创造式教学中的潜在应用和教育价值。

2 基于中算史料的留白策略

2.1 古名今辩

“古名今辩”指的是用今天的数学语言来定义或描述中算术语。中算史上的一些术语为后世所抛弃，如《九章算术》将长方形称为“方田”，将三角形称为“圭田”，将直角梯形称为“邪田”，将等腰梯形称为“箕田”，这些名称今天不再使用。另一些术语，如“分数”“分子”“分母”“约分”“通分”“正数”和“负数”等均为后世所沿用，且涵义没有发生变化。还有一些术语虽沿用至今，但涵义发生了变化，如“小数”之名源于刘徽在注解《九章算术》开方术时所说的“微数”：“微数无名者以为分子，其一退以十为母，再退以百为母，退之弥下，其分弥细。”在分数概念的教学中，教师可以让学生思考：古人为什么会创用“分数”这个名称（西方人称之为“破碎的数”）。在小数概念的教学中，教师可以提出问题：“小数是很小的数吗？”由此让学生理解古代的“微数”和今天的“小数”在内涵上的差异：刘徽所说的“微数”，确实是小于整数 1 的数，即我们今天所说的“纯小数”，而今天所说的“小数”却并不一定很小，因为带小数也属于小数。

设置“古名今辩”任务，即为学生留下“陈述之白”，目的是让学生了解数学名词的来源，加深概念理解。

2.2 古题今解

“古题今解”指的是用现代方法或古人的其他方法来解中算史上的某个问题。例如，让学生用自己喜欢的方法来解《九章算术》中的“凫雁相逢”问题：“今有凫起南海，七日至北海；雁起北海，九日至南海。今凫、雁俱起，问：何日相逢？”学生可能的解法是：设南海和北海之间的距离为 1，经过 x 日凫雁相逢，则有 $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)x=1$，于是得 $x=\frac{63}{16}=3\frac{15}{16}$。

刘徽给出了两种解法。第一种解法利用了“齐同术”：经过 63 日，凫飞了 9 趟，雁飞了 7

趟，两者共飞了 16 趟，因此，两者共飞 1 趟（即第一次相逢）需 $\frac{63}{16}$ 日。第二种解法与今天的一次方程解法类似：凫 1 日飞整段路程的 $\frac{1}{7}$，雁 1 日飞整段路程的 $\frac{1}{9}$，故设整段路程为 63 分，则凫 1 日飞 9 分，雁 1 日飞 7 分，两者 1 日共飞 16 分，故第一次相逢需 $\frac{63}{16}$ 日。

设置“古题今解”的任务，即为学生留下“方法之白”，目的是让学生对古今方法进行对比，体会一题多解，并感悟今日代数方法的优越性。

2.3 古术今推

“古术今推”指的是用现代方法来推导或论证中算史上的某个公式、法则、命题等。例如，《九章算术》给出“邪田术”（即直角梯形面积公式）：“并两邪而半之，以乘正从若广。又可半正从若广，以乘并。”如图 1 所示，直角梯形的上底为 a，下底为 b，高为 h，刘徽用两种“以盈补虚”法证明了“邪田术”。

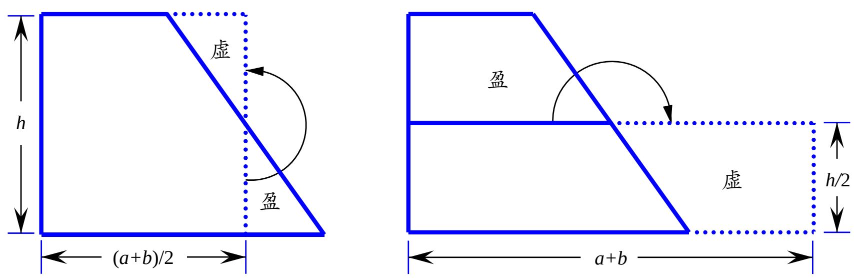

图 1 刘徽关于“邪田术”的推导

教师让学生对直角梯形的面积进行探究，学生可能会用多种不同的方法，如图 2 所示。

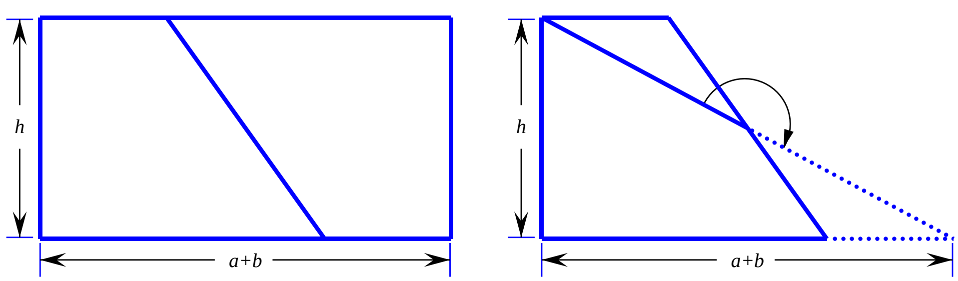

图 2 学生可能采用的推导方法

设置“古术今推”的任务，即为学生留下“论证之白”，其目的是培养学生的逻辑推理能力，并通过古今对比，引发“跨越时空的思想碰撞”。

2.4 古法今用

“古法今用”指的是将中算史上的数学方法用于新情境、新问题。例如，“出入相补”或“以盈补虚”是中国古代数学家求平面图形面积时惯用的方法，教师可以设置有关求面积的任务，引导学生利用这种方法加以解决，得到新的结果。例如，可以设置“双正方形组合”任务。

任务 1：先将两个相同的正方形拼成一个正方形（图 3），再将两个不同的正方形拼成一个正方形。（图 4）

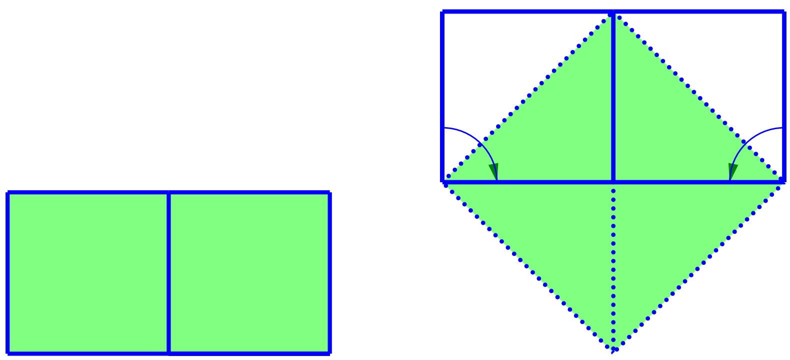

图 3 将两个相同的正方形拼成一个正方形

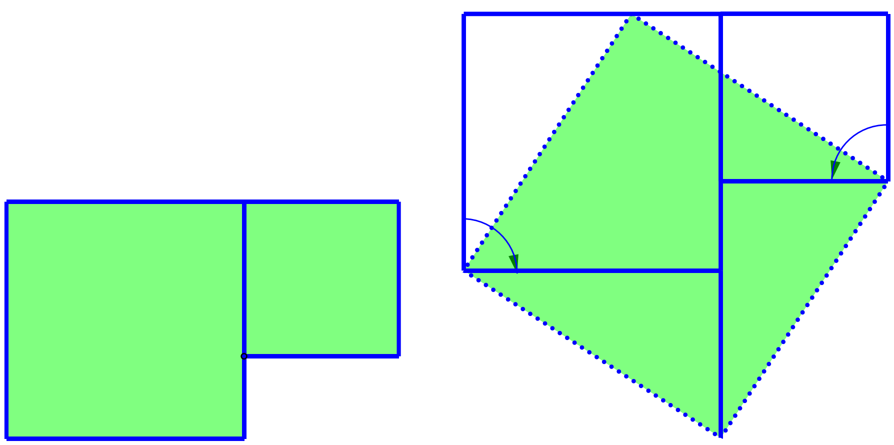

图 4 将两个不同的正方形拼成一个正方形

任务 2：如图 5 所示，在正方形 $ABCD$ 中，F 和 G 分别是 AB 和 CD 的中点，以点 A 为圆心、AF 为半径的四分之一圆周、以点 D 为圆心、DG 为半径的四分之一圆周，以 FG 为直径的半圆周围成了一个形如银杏叶的区域，若 $AB=1$，求该区域的面积。

利用“以盈补虚”法可知，“银杏叶”的面积恰为正方形面积之半。

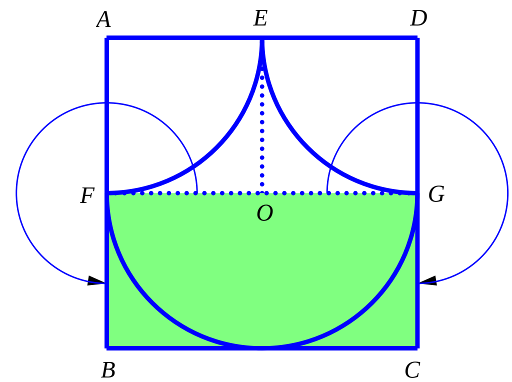

图 5 “银杏叶”的面积

以问题解决和新知创获为目的，设置“古法今用”的任务，即为学生留下“发现之白”，其目的是给予学生推陈出新的机会，培养他们的创新意识。

2.5 古问今编

“古问今编”指的是从中算史上的数学问题出发编制新的数学问题，一方面，中算史料为教师留下“问题之白”：从中算史料出发，运用不同的问题编制策略，教师可以设计丰富多彩的数学问题，如根据《九章算术》盈不足章中的问题，教师可以设计如下问题。

问题 1：植树节那天，育才小学举行植树活动。五（1）班领到一批树苗。已知每人分 4 棵，多出 20 棵；每人分 5 棵，又少了 25 棵。问：五（1）班共有几人？他们领到了多少棵树苗？（条件式）

问题 2：为了庆祝六一儿童节，育才小学举行了一场义卖活动。小明所在小组的义卖物品中有若干支蜡笔，若每支定价 3 元，总价比批发价少了 15 元；若每支定价 3.4 元，总价比批发价多了 8.5 元。问：小明的义卖小组共有几支蜡笔？所有蜡笔的批发价是多少？每支蜡笔的批发价是多少？（自由式）

根据上文介绍的“凫雁相逢”问题，教师可以设计如下问题。

问题 1：已知南海和北海之间相距 6000 里，凫从南海出发飞往北海，每天飞 300 里；雁从北海出发飞往南海，每天飞 500 里，两者同时出发，经过几天后第一次相逢？（条件式）

问题 2：在《九章算术》“凫雁相逢”问题中，如果凫、雁到达各自的终点后立即往回飞，两者经过几天后第二次相逢？（目标式）

另一方面，教师设置“古问今编”的任务，也为学生留下“问题之白”，如让学生根据中国古代的盈不足问题、行程问题、分数运算问题等编制相关的新问题来“考考古人”。

“古问今编”的目的是让培养学生的创新意识和提出问题的能力，并给予学生“倾听古人”的机会。

2.6 古算今思

“古算今思”指的是从中算史上有关数学问题的解法中获取思想的启迪，包括古人的思想方法、古算的特点、古算对今天数学学习的启示等等。上文中，利用“以盈补虚”方法推导直角梯形面积公式、将两个正方形拼成一个正方形、求“银杏叶”面积等，其背后的数学思想是“转化”。解决“凫雁相逢”问题、盈不足问题等所用的“齐同术”仍然是为了实现“转化”；同时，刘徽给出的不同解法也体现了中算史上的“多题一解”和“一题多解”的变式思想。

设置“古算今思”的任务，即为学生留下“超越之白”，其目的是让学生超越具体的知识点，总结和提炼相关主题背后的数学思想方法和德育价值，并形成积极的数学观。

3 分数乘法的留白创造式教学设计

《九章算术》方田章提出“乘分术”(分数乘法法则)：“母相乘为法，子相乘为实，实如法而一。”用今天的符号表示，就是$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$，其中 a、b、c、d 为正整数。那么，乘分术的算理是什么呢？刘徽举了一个众人卖马的例子：“马五匹，直金三斤；今卖四匹，七人分之，人得几何？”根据题意，每匹马值金$\frac{3}{5}$斤，而每人拥有$\frac{4}{7}$匹马，故每人得金$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}$斤。但另一方面，考虑等价的问题：“马二十匹，直金十二斤；今卖马二十匹，三十五人分之，人得几何？”由题意，35 人分金 12 斤，每人得金$\frac{12}{35}$斤；另一方面，因每匹马值金$\frac{12}{20}$斤，每人拥有$\frac{20}{35}$匹马，故每人得金$\frac{12}{20}\times\frac{20}{35}$斤，于是有$\frac{12}{20}\times\frac{20}{35}=\frac{12}{35}$，由此可知$\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$。

根据刘徽的上述注解可知，分数乘法的算理是

$$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ad}\times\frac{ad}{ac}=\frac{bd}{ac},$$

用现实生活中的例子来说明就是：a 件物品，共价 b 元；卖出 d 件，c 人分利，于是，ad 件物

品共价 bd 元，卖出 ad 件，ac 人分利，每人得钱 $\dfrac{bd}{ac}$ 元。

据此，可以设计以下任务，引导学生发现分数乘法法则。

任务 1：我国三国时代著名数学家刘徽在注解《九章算术》时提出了以下问题："马二十匹，直金十二斤；今卖马二十匹，三十五人分之，人得几何？"请针对刘徽的上述问题，提出你的问题。

预设学生会提出以下问题：

问题 1：每匹马值多少金？$\left(\dfrac{12}{20}\right)$

问题 2：每人卖几匹马？$\left(\dfrac{20}{35}\right)$

问题 3：每人得多少金？$\left(\dfrac{12}{35}\right)$

在此基础上，教师提出

问题 4：根据上面三个问题，你能得到什么等式？$\left(\dfrac{12}{20}\times\dfrac{20}{35}=\dfrac{12}{35}\right)$

任务 2：刘徽同时又提出一个问题："马五匹，直金三斤；今卖马四匹，七人分之，人得几何？"请针对刘徽的上述问题，提出你的问题。

预设学生会提出以下问题：

问题 5：每匹马值多少金？$\left(\dfrac{3}{5}\right)$

问题 6：每人卖几匹马？$\left(\dfrac{4}{7}\right)$

问题 7：每人得多少金？$\left(\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{7}\right)$

在此基础上，教师提出

任务 3：思考任务 1 和任务 2 中的卖马问题之间的关系。据此，你能得出什么等式？

教师可以将任务分解成以下问题。

问题 8：任务 1 中马的单价和任务 2 中马的单价有何关系？$\left(\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}\right)$

问题 9：任务 1 中的人均卖马匹数与任务 2 中的人均卖马匹数有何关系？$\left(\dfrac{20}{35}=\dfrac{4}{7}\right)$

问题 10：任务 1 中每人得金数与任务 2 中每人得金数有何关系？$\left(\dfrac{12}{20}\times\dfrac{20}{35}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{7}\right)$

问题 11：根据问题 10，你得到了什么结论？$\left(\frac{3}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{35}=\frac{3\times4}{5\times7}\right)$

问题 12：你能得到分数乘法的一般法则并说明其算理吗？

任务 4：请你仿照刘徽的卖马问题，编制一道用分数乘法来解决的应用题。

任务 5：本节课中，你和古代数学家刘徽一样，发现了分数乘法的法则。请说说你的感悟。

在任务 1 和 2 中，教师采用“古问今编”策略，让学生提出问题，根据学生的问题，利用“单价×数量=总价”，引出分数$\frac{3}{5}$和$\frac{4}{7}$的乘法问题。在任务 3 中，教师采用“古法今用”策略，引导学生发现分数乘法法则；利用“古术今推”策略，让学生发现分数乘法的算理。在任务 4 中，教师采用“古问今编”策略，让学生通过问题提出，进一步理解分数乘法的算理；在任务 5 中，教师采用“古算今思”策略，让学生思考中国古代数学家在解决分数乘法时所运用的转化思想，同时，也让他们穿越时空与古代数学进行对话，从而亲近数学，提升数学学习的自信心。

4 结 语

中华优秀传统数学文化源远流长，博大精深，其中与小学数学课程相关的内容十分丰富。作为“目标”的中算史可以展示中华优秀传统文化之魅、达成数学学科德育之效，而作为“工具”的中算史则有助于培养学生的核心素养，实现能力之助。有了古名今辩、古题今解、古术今推、古法今用、古问今编和古算今思这六种策略，中算史的双重功能完全可以实现于课堂。另一方面，六种策略都以“留白”为目的，解决了留白创造式教学中“留何种白”和“如何留白”的问题。

通过留白创造式教学，中华优秀传统数学文化必将在课堂上大放异彩。我们期待，在不久的将来，有越来越多的一线教师开始尝试融入中算史的课堂教学研究，并形成一系列精彩的课例。

目 录

CONTENT

教材研究

中法初中数学教科书插图的比较研究

刘倩雯，陈雨晴，吴 越

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

插图即插附在图书报刊中的图片，对正文作补充说明或供艺术欣赏[1]。教科书的插图在学生的学习中发挥着多种作用并促进学生的学习[2]。作为数学教科书的重要组成部分，插图不仅是信息的载体，还是思维的工具，有助于学生创造概念形象、解决数学问题以及运用表征交流[3]。同时，插图作为“画面学习”内容，能够将数学之美可视化，学生可以通过插图感悟数学对美的诠释，并在这个过程中发展想象力和提高审美素养[4]。

通过对比国内外数学教科书插图，能够更好地了解我国教科书插图的现状与特点，帮助完善我国数学教科书的编写与修订，进而增强教科书的思想性、科学性、民族性、时代性和系统性[5]。在中外数学教科书插图的比较方面，已有研究涉及中国和新加坡、美国等国家的比较，比较的维度有数量、质量、功能、位置、类型等。张维忠和胡智慧按照“准确性”“联系性”“简洁性”和“情境性”四个维度构建了数学教科书中插图的质量分析框架，比较了中国人教版、浙教版和美国 GM 版初中数学教科书，指出中国两版教科书的插图数量偏少、平均密度偏低以及在几何领域中插图的应用性欠缺等问题[3]。李舒从数量、内容、功能、位置等方面比较了中国人教版和新加坡 MC 版小学数学教科书中的“生活类插图”，其中功能分为“装饰型、表征型、解释型”三种类别，并发现两版教科书中“解释型”生活类插图占比最高[6]。

蔡元培先生认为，在世界各国中，法国文化与我国极为贴合，应考虑“以法国教育为师资”[7]。同时，法国曾为世界数学的中心，其数学教育的优秀传统也延续至今[8]，法国教科书中的历史丰富[9-13]，艺术文化极具特色[14-15]。然而，当前关于中法两国数学教科书中插图的比较研究较少。李卓忱虽已关注中法数学教科书的插图，但仅分析章前页中的插图，未对教科书整体的插图进行比较[14]。因此，本研究聚焦中法两国初中数学教科书中的插图展开整体性的研究。已有学者提出插图的类型、功能、质量是影响数学教科书插图的关键因素，是教科书插图理论研究层面的重心和方向[16]，对此，本研究聚焦于插图的类型和功能对中法初中数学教科书的插

图进行比较研究，并尝试解决以下问题：中法不同版本教科书中插图的类型与功能呈现出何种共性及差异？其中，本研究将插图定义为非示意图的图像表征，不包括由符号、标记、图形、文字中的单个或多个组合而成的简单图像，如三角形、直棱柱、表格、条形图等。

1 研究设计

1.1 研究对象

由于国内初中教科书实行“一纲多本”，本研究选取中国两版、法国一版具备代表性的教科书作为研究对象，具体见表 1。

表 1 中法两国三版教科书

国别	名称	出版社	出版时间	后文简称
中国	义务教育教科书·数学 七上–九下[17]	人民教育出版社	2012	人教版
中国	义务教育教科书·数学 七上–九下[18]	北京师范大学出版社	2013	北师大版
法国	数学 3e-6e[19-22]	柏林出版社	2008/2007/ 2009/2009	Belin 版

注：Belin 版中，Math3e 对应初四；Math4e 对应初三；Math5e 对应初二；Math6e 对应初一。

在确定分析单元时，本研究通过预实验发现，Belin 版与国内两版教科书在不同课程内容主题下插图的类型与功能存在一定的差异。因此，考虑到中法三版教科书插图的可比性，本研究根据我国《义务教育数学课程标准（2011 版）》（简称《课程标准》）与 Belin 版，将中法课程内容进行对应。表 2、表 3 展示的是中法重叠的课程内容。需要说明的是，由于《课程标准》中并未细化概率与统计领域的知识点，因此，针对此领域，本研究对应比较了三版教科书中的章节内容。

表 2 中法“数与代数”和“图形与几何”课程内容对应

义务课程标准			Belin 3e	Belin 4e	Belin 5e	Belin 6e
数与代数	数与式	有理数	整数和无理数	正负数运算	正负数；正负数加减	/
		实数	平方根	/	/	/
		代数式	/	字母运算	/	/
		整式与分式	指数与幂运算； 乘法公式与零积方程	整数指数幂； 分数运算；	/	/

	方程与不等式	方程与方程组	方程与不等式、二元一次方程组	方程和问题解决	/	/
		不等式与不等式组	方程与不等式、二元一次方程组	不等式、序与运算	/	/
	函数	函数	函数的概念	/	/	/
		一次函数	正比例函数与一次函数	/	/	/
图形与几何	图形的性质	点、线、面、角	立体图的平面截面	距离	角	/
		相交线与平行线	/	/	角	/
		三角形	/	毕达哥拉斯定理	三角形	线段的中垂线
		四边形	/	/	平行四边形	/
		圆	圆周角与正多边形	直角三角形和圆	/	/
		尺规作图				
	图形的变化	图形的轴对称	/	/	/	轴对称
		图形的旋转	/	/	中心对称	/
		图形的相似	泰勒斯定理及其逆定理、扩大与缩小；直角三角形与三角关系	直角三角形与锐角余弦；中位线与平行线；	/	/
		图形的投影	/	/	直棱柱，圆柱体（侧面展开图）	/

表 3 中法“统计与概率”课程内容对应

	人教版	**北师大版**	**Belin 3e**	**Belin 4e**	**Belin 5e**	**Belin 6e**
统计与概率	直方图（7 下第 10 章）	直方图（7 上第 6 章）	/	/	直方图	/
	平均数（8 下第 20 章）	平均数（8 上第 6 章）	/	平均数与加权平均	/	/
	众数和中位数（8 下第 20 章）	众数和中位数（8 上第 6 章）	中位数	/	/	/
	方差（8 下第 20 章）	极差、方差、标准差（8 上第 6 章）	/	/	极差	/
	概率（9 上第 25 章）	频率与概率（7 下第 6 章）	频率与概率	/	概率与频率	/
	列举法求概率（9 上第 25 章）	树状图、列表法求概率（9 上第 3 章）	树状图	/	/	/
	频率估计概率（9 上第 25 章）	频率估计概率（9 上第 3 章）	频率与概率	/	/	/

根据上文插图的定义，在三版教科书中，将表 2 与表 3 中课程内容下的插图作为分析单元。

最终确定的分析单元数量如表 4 所示。

表 4 插图分析单元统计表

	人教版	北师大版	Belin 版
数与代数	95（24.0%）	147（30.2%）	109（42.1%）
图形与几何	272（68.7%）	289（59.3%）	120（46.3%）
概率与统计	29（7.3%）	51（10.5%）	30（11.6%）
合计	396（100%）	487（100%）	259（100%）

1.2 分析框架

教科书中的插图类型较为复杂，依据不同的标准会有不同的类型划分，相关研究者主要按照插图的组织形式、位置和内容等多个维度进行分类。综述相关文献发现，宋振韶将插图按组织形式分为独立图、发散图、序列图和多层图[23]；菲利普斯（F. Phillips）等人按照插图位置将插图分为文前页插图和文后页插图[24]。可见，以插图的组织形式与位置进行分类主要关注了插图的外在形式，并未深入至插图内容本身，因此，本文根据插图所表现的主体内容对插图的类型进行划分。张文宇和任乙佳对中美教科书插图的进行比较研究，将插图分为模型图、数据图表图、卡通图、史料图和生活图[25]；波霍涅茨（I. Pohonets）发现乌克兰初中教科书中的插图类型主要以艺术绘画、文学文本、摄影作品、历史人物的肖像和卡通人物为主，其中，数学教科书中还包括大量反映或补充任务内容的主题图以及图表[26]。参考上述文献并结合中法教科书插图实际情况，制定分析框架如表 5 所示。

表 5 插图的类型

类型	描述
历史材料	直接地反映历史中产生的发明（包括数学中的定理、公式等）、作品、资料、照片、人物画像，如罗伯尔的双盘天平
	间接地对历史发明或作品进行辅助性说明，如通过圆内外多边形的插图展现阿基米德确定圆周长的方法
艺术作品	影视和绘画作品
统计图表	展现图像化的数据
技术绘图	借助软件或工具规范准确制作的图，包括气压气象图、地图、国旗、路标等
卡通漫画	手绘的简笔漫画
摄影作品	拍摄的真实人物、风景、静物、生态等

关于教科书中插图的功能，国外学者较早对其开展了研究，已有研究成果为我国学者研究教科书插图的功能提供了有力的工具。杜查斯特尔（Duchastel）和莱文（Levin）在 1979 年和

1981 年提出教科书插图的认知和非认知功能，并通过实证研究将非认知功能分为注意、导向和影响功能[27-28]；1987 年，杭特（Hunter）将插图的功能分为四类，包括装饰、强化、拓展、概括和比较功能[29]；梅耶（Mayer）将插图按照功能分为装饰性插图、表征类插图、组织性插图和解释类插图[30]；卡内（Carney）和莱文（Levin）对 20 世纪末有关插图的研究进行综述，归纳出插图的表征功能、组织功能、解释功能和转换功能[31]。以上功能分类较为宽泛，并未考虑数学的学科特点，因此，本文在梅耶、杭特与杜查斯特尔、莱文的分类基础上，修改并确定数学教科书中插图的功能分类。

表 6 插图的功能分类

类别	描述	Mayer	Hunter	Duchastel & Levin
装饰点缀	增加教科书的吸引力，引起学生注意、好奇，提高学生学习动机（删去后对文本内容与读者理解无影响）	装饰性	装饰功能	影响功能
引入主题	引出新的学习主题，插图内容与学习主题息息相关	/	/	导向功能
呈现文本	文本包含插图蕴含的信息（删去后不影响文本内容，但影响读者理解）	表征性	强化功能	注意功能
补充文本	插图涉及并超越原有文本信息，引起读者产生新的学习或思考（删去后影响文本内容与读者理解）	表征性	扩展功能	认知功能
创设情境	呈现相关主题下的生活、学习情境（插图无对应文本或无完全对应文本，但与主题紧密相关）	/	扩展功能	影响功能
理解概念	通过类比、举例、联想等方式促进学生对相关概念的理解（插图无对应文本，但与概念紧密相关）	解释性	/	认知功能

需要说明的是，本文参考了姜浩哲的分析框架建立模式[32]，先对不同版本的教科书各随机抽取约 20%的分析单元进行预分析，建立插图类型和功能的初步编码框架，并对抽取的分析单元进行预编码，随后与研究者讨论协商，适当调整原编码框架，最终确定表 5 与表 6。

1.3 研究过程

首先，根据插图的定义及重合的课程内容（表 2、表 3），三位研究者共同确定本研究的分析单元。其次，三位研究者根据上文建立的分析框架（表 5、表 6），对分析单元的类型和功能进行背靠背编码。最后，三位研究者共同比对所有编码条目，共同讨论不一致的编码条目，最

终达成一致。

2 研究结果及分析

2.1 不同版本下插图数量的比较

2.1.1 三版教科书插图数量的宏观比较

由表 4 可知，在教科书插图总数方面，北师大版、人教版、Belin 版的插图总数分别为 487、396 和 259，其中，北师大版的插图总数最高，而 Belin 版的插图总数最低。事实上，不能简单论断 Belin 版插图不够丰富，究其原因，主要是由于中法教科书知识点无法完全对应以及内容呈现比重的不同，特别体现在图形与几何领域。在图形与几何领域，北师大版与人教版的插图数量大致相同，前者为 289、后者为 272，但 Belin 版的插图数量为 120，远低于国内两版。一方面，国内教科书知识点多于 Belin 版。例如，由表 2 可知，国内的课程内容“四边形”仅对应 Belin 版的“平行四边形”；国内的课程内容“尺规作图”仅在 Belin 版的“线段中垂线”提及。已有文献表明，中国义务教育阶段的数学知识广度明显高于法国，主要体现在“图形的性质”模块[33]。另一方面，几何课程是数学课程中最不统一的一个部分[34]，中国相较于法国更重视几何内容的呈现[35]。此外，值得注意的是，北师大版在三个领域的插图数量均为三版教科书中最高；而人教版在数与代数、概率与统计这两个领域的插图数量为三版教科书中最低。

2.1.2 不同知识领域下三版教科书插图数量的微观比较

从三版教科书中插图数量在各个知识领域的占比来看，人教版、北师大版、Belin 版均在图形与几何领域的插图数量占比最高，分别为 68.7%、59.3%及 46.3%；均在概率与统计领域的插图数量占比最低，分别为 7.4%、10.5%及 11.6%。由于图形与几何领域涉及大量的几何图形，因此相较于其余两领域，教科书会相应地增加插图的数量以培养学生的几何直观。而概率与统计领域插图的占比最低，是由于折线图等简单的数据统计类图不包括在本文的插图定义内。此外，国内两版中图形与几何领域的插图数量占比远高于其余两个领域，Belin 版中图形与几何、数与代数这两个领域的插图数量占比则差别不大，这也进一步佐证了中国更加重视图形与几何的教学[34]。

2.2 不同版本下插图类型的比较

表 7 给出了不同领域下三版教科书插图的类型差异性分析。

表 7 不同领域下三版教科书插图的类型差异性分析

	类型	教科书版本（%）			皮尔逊卡方值	显著性差异（双侧）
		人教版	北师大版	Belin 版		
数与代数	历史材料	8.4	2.7	9.2	69.927	<0.001
	艺术作品	1.1	0.0	2.8		
	统计图表	3.2	2.0	1.8		
	技术绘图	32.6	34.0	2.8		
	卡通漫画	17.9	42.2	56.9		
	摄影作品	31.6	12.2	20.2		
	类型混合	5.3	6.8	6.4		
图形与几何	历史材料	3.3	1.7	1.7	96.180	<0.001
	艺术作品	0.7	1.7	6.7		
	统计图表	0.0	0.0	0.0		
	技术绘图	51.8	49.8	12.5		
	卡通漫画	17.3	18.0	50.8		
	摄影作品	18.0	20.4	21.7		
	类型混合	8.8	8.3	6.7		
概率与统计	历史材料	3.4	0.0	0.0	19.126	0.039
	艺术作品	0.0	0.0	0.0		
	统计图表	0.0	17.6	10.0		
	技术绘图	44.8	45.1	10.0		
	卡通漫画	27.6	27.5	50.0		
	摄影作品	24.1	5.9	30.0		
	类型混合	0.0	3.9	0.0		

由表 7 可知，经过卡方检验，在数与代数、图形与几何、概率与统计这三个知识领域，三版教科书中插图的类型均存在显著性差异（在数与代数、图形与几何领域 $p<0.001$，在概率与统计领域 $p<0.05$）。就插图的类型分布而言，国内两版较为一致，而 Belin 版与国内两版具有较大差异。

2.2.1 中法教科书插图类型的宏观比较

国内两版的插图以技术绘图类为主，在三个领域中，技术绘图类插图的数量均超过插图总数的 30%，而 Belin 版在技术绘图类插图的数量远低于国内两版。Belin 版的插图以卡通漫画类为主，在三个领域的数量占比均达到 50%及以上，且在总体上，国内两版卡通漫画类插图的数

量在各领域下都远低于 Belin 版。

北师大版与人教版使用了较多的技术绘图类插图，此类插图较为准确规范，因此国内两版整体风格严谨、贴近现实；Belin 版设计大量的卡通漫画类插图，使得教科书整体风格活泼，可读性较强。如人教版七下“相交线与平行线”一节中的一幅技术绘图（图 1），利用木条引出同一平面内的三条直线，进而引出两直线平行的条件；在相应主题下，Belin 版则利用卡通漫画展现同位角的相互“对话”（图 2），突出同位角“成对出现”的性质。Belin 版卡通漫画类插图特色鲜明，通过创设虚拟卡通人物、生活实物拟人化、融数学图形与符号于图、人物动物互动等形式使插图富有创意且幽默诙谐。如 Math 3e 第 1 章“整数和有理数”中的插图，小绿怪兽对小红怪兽打招呼说：“Hi，你好，0.857142857…”，小红怪兽回复：“哇！如果念成小数形式就要念一整晚了，请称呼我为$\frac{6}{7}$！”。该插图生动地展现出用分数表示无限循环小数的简洁与便利。又如，在 Math 5e 第 5 章“正负数”的插图中，“-1”与“1”两人产生争执，“0”从中调和说：“别打了！对我来说，你们是一样的！”。该插图将数字拟人化，通过创设情境展现“-1”与“1”这一对相反数的绝对值相等。分析中法教科书插图整体风格不同的原因，一方面，我国课程标准要求，教科书素材的选取应尽可能地贴近学生的现实，以利于学生经历从现实情境中抽象出数学知识与方法的过程，发展抽象能力、推理能力等[36]，因此我国插图也多以较为真实准确的技术绘图类与摄影作品类插图为主。另一方面，法国的基础教育核心内容充分彰显了学生作为学习主体的价值及其作为独立个体的价值，具有一定的浪漫的空想社会主义印记[37]， 这在一定程度上解释了法国教科书插图设计以学生为本，可读性较强的特点。

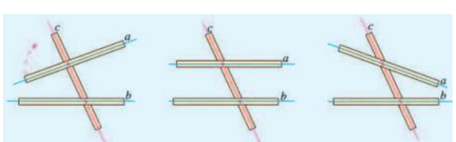

图 1 三木条相钉

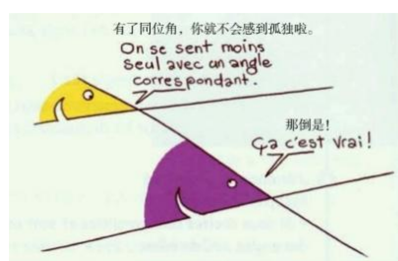

图 2 同位角“对话”

2.2.2 特定类型下三版教科书插图的微观比较

值得注意的是，Belin 版的艺术作品类插图数量高于国内两版。在 Belin 版中，艺术作品类插图多位于章首位置以引入主题，此类插图通过绘画、影视作品体现艺术与数学的结合，让学

生不仅能感受到数学之美，还能体会到艺术中渗透的数学之妙，从而激起学生的好奇心与求知欲，进而达成引入之效。例如，Math 4e 第 10 章“毕达哥拉斯定理”的章首图展示了 16 世纪意大利画家拉斐尔的名作《雅典学派》的一部分，画中描绘了毕达哥拉斯正在展卷阅读的场景（图 3），此图既提升了学生的审美与文化素养，又引出了本章的主题。Belin 版的艺术作品类插图较多缘于法国教科书对文化的重视。法国《课程大纲》明确提出，要激发学生在文化、常识、历史知识建构上的兴趣[37]。且相关文献也已论证，法国教科书中蕴含着丰富的文化内涵[12][14][15]。

图 3 Belin 版“毕达哥拉斯定理”章首图

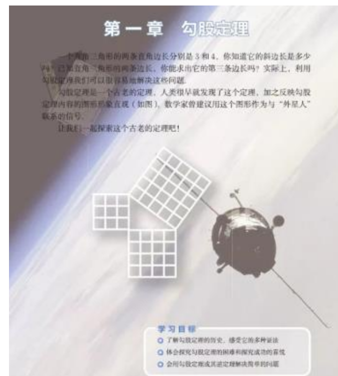

图 4 北师大版“勾股定理”章首图

此外，三版教科书均存在类型混合类插图。北师大版与 Belin 版的章首图多为类型混合类插图，富有特色。如图 3 为 Belin 版 Math 4e 第十章“毕达哥拉斯定理”的章首图，整幅图由艺术作品类、技术绘图类与卡通漫画类共同组成。章首页主图为画作《雅典学派》，右边为 3 块以直角三角形的边长为各自边长的正方形巧克力，并附之文字：“如果给你一块边长等于直角三角形斜边的大正方形巧克力，或者两块边长为同一直角三角形另两边的小正方形巧克力，你会如何选择？”左下方漫画为一数学家站在成堆的草稿上，手中的纸上画了直角三角形，该图与旁边的文字共同表示出历史上很多数学家们使用不同的方法来证明毕达哥拉斯定理。右下方漫画呈现出一数学家激动地将证明草稿抛出，生动地传递了数学家证明成功后的喜悦之情。图 4 为北师大版八上第一章“勾股定理”的章首图，该图由摄影作品、技术绘图、历史材料共同构成。章首页的中左位置呈现了勾股定理图形的形象直观，为技术绘图；主背景与卫星主要为摄影作品类图，用来呈现文本“数学家曾建议，用勾股定理图形作为与‘外星人’联系的信号”；左上方图为历史材料，即《周髀算经》中的“赵爽弦图”，以此来展现中国数学史。可以看出，Belin 版与北师大版极为重视对章首图的设计，均挖掘知识背后的历史与文化，激发读者的兴趣，进而引

入章节主题。

2.2.3 不同知识领域下三版教科书插图类型的微观比较

从局部上看，三版教科书在不同知识领域下插图的类型分布也存在具体的差异。在数与代数领域，北师大版中的卡通漫画类数量占比达到 42.2%，超过了技术绘图类型，这主要是由于北师大版添加了大量卡通人物以补充相关知识、解释说明以及总结归纳，如图 5 所示。图 5 为北师大版七上 2.2 节的一幅卡通漫画，该插图通过卡通人物的提问帮助学生理解数轴的性质。特别地，北师大版在图形与几何领域卡通漫画类插图的数量并不突出，这是由于此领域内的插图总量较大。同时，Belin 版 Math 5e、6e 两册书也同样存在同类功能的卡通人物。在概率与统计领域，由于人教版大多采用简单的数据分析类图表，如折线图、饼图等，这并不符合本研究中插图的定义，因此人教版的统计图表类插图数量远低于其余两版。

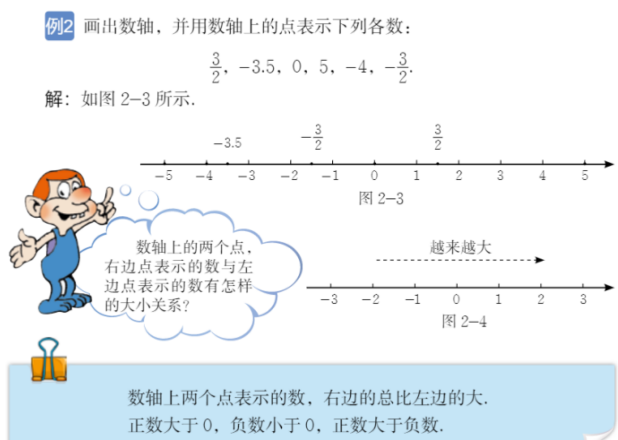

图 5 帮助学生理解“数轴”的卡通人物

2.3 不同版本下插图功能的比较

表 8 给出了不同领域下三版教科书插图的功能差异性分析。

表 8 不同领域下三版教科书插图的功能差异性分析

	功能	教科书版本（%）			皮尔逊卡方值	显著性差异（双侧）
		人教版	北师大版	Belin 版		
数与代数	装饰点缀	5.9	13.6	11.7	193.267	<0.001
	引入主题	3.7	4.5	15.0		
	呈现文本	37.1	13.6	23.3		
	补充文本	49.3	57.1	17.5		

	创设情境	4.0	10.8	15.0		
	理解概念	0.0	0.3	17.5		
图形与几何	装饰点缀	37.9	50.3	29.4	44.550	<0.001
	引入主题	9.5	2.0	16.5		
	呈现文本	22.1	12.2	20.2		
	补充文本	29.5	27.2	17.4		
	创设情境	1.1	5.4	9.2		
	理解概念	0.0	2.7	7.3		
概率与统计	装饰点缀	31.0	21.6	40.0	20.743	0.023
	引入主题	3.4	3.9	20.0		
	呈现文本	20.7	11.8	10.0		
	补充文本	34.5	58.8	10.0		
	创设情境	3.4	3.9	20.0		
	理解概念	6.9	0.0	0.0		

由表 8 可知，经过卡方检验，在数与代数、图形与几何、概率与统计这三个知识领域，三版教科书中插图的功能存在显著性差异（在数与代数、图形与几何领域 $p<0.001$，在概率与统计领域 $p<0.05$），就插图的功能分布而言，国内两版较为一致，而 Belin 版与国内两版具有较大差异。

2.3.1 中法教科书插图功能的宏观比较

总体而言，国内两版中插图的功能以补充文本为主，此类功能的插图在部分领域下的数量占比超过了 40%，而其他功能的插图在各知识领域下的数量占比均不到 11%。分析教科书可以发现，人教版与北师大版中的插图与文本结合紧密且插图主要用来呈现与补充文本，两版教科书中有较多的插图与文字共同组成完整的例题或练习，以帮助学生明确题意。相比而言，Belin 版的功能分布较为均衡，其中装饰点缀类插图的数量占比较大，但均不超过插图总数的 40%。虽然将删去此类插图不会影响学生对教科书的理解与认知，但装饰类插图无疑会影响学生对教科书的情感态度[38]。同时，Belin 版的引入主题与创设情境的插图占比均超过国内两版，分析发现，在 Belin 版中存在部分“以插图为主、文本为辅”的插图，这类插图主要用来引入主题与创设情境，而在国内两版中，插图主要以文本为主，故而造成引入主题与创设情境功能的插图较少。例如 Math 3e 第 2 章“方程与不等式、二元一次方程组”中的一幅卡通漫画图，图中男孩说：“虽然是未知的，但我也不怕两个未知数。”此图通过创设学生学习二元一次方程组的学习情境，帮助学生建立学习数学的信心。此外，Belin 版的理解概念功能插图也整体高

于国内两版。例如 Math 5e 第五章“正负数”中的一幅卡通漫画插图，交警站在限速 30 的路牌边，生气地对一司机说：“难道你认为以每小时 40 公里的速度反向行驶，将是 – 40，从而就不会超速了？”通过此插图帮助学生理解相反数与绝对值的概念：虽然以每小时 40 公里的速度反向行驶可以表示为 – 40，但汽车行驶的速度大小应该是其绝对值即 40，大于 30，故而超速。此外，该插图结合现实生活情境渗透德育，教导学生遵守交通规则。

2.3.2 不同知识领域下三版教科书插图功能的微观比较

分析在三大知识领域下不同版本中插图功能的分布差异，发现在数与代数领域，三版教科书的插图功能均以补充、呈现文本为主；在概率与统计领域，国内两版中插图的主要功能仍为补充、呈现文本，但此时，装饰点缀功能的插图数量占比也较大，而 Belin 版中插图的功能则以装饰点缀为主；在图形与几何领域，三版教科书中插图的功能整体以装饰点缀为主。分析其原因，首先，数与代数领域的知识兼具抽象性与模式化的特点，对学生的数学抽象思维要求较高，因此，通过插图来补充、呈现文本能够有效地帮助学生将“抽象问题直观化”“代数问题几何化”。在概率与统计领域，三版教科书都存在着简单的统计图，其功能为呈现和补充文本，但此类统计图不符合本文的插图定义故而未纳入考虑，相应地导致了本研究中呈现、补充文本功能类的插图占比减小。在图形与几何部分也存有相同情形，教科书通过大量的简单几何图形来呈现、补充文本，排除简单图形后，本文分析的插图在此领域的主要功能即为装饰点缀。

3 结论与启示

3.1 研究结论

本研究通过对中法三版教科书的插图进行分析和比较，发现从插图的整体数量与领域分布上看，北师大版在三版教科书中插图数量最多、插图内容最为丰富，而三版教科书的插图均主要位于图形与几何领域。分析三版教科书中插图的类型与功能，得到以下共性及差异：

3.1.1 三版教科书中插图类型的共性及差异

在插图的类型分布上，中法两国教科书的差异明显。其中，国内两版教科书的插图类型分布较为一致，Belin 版则与国内两版具有较大差异。插图类型分布的差异体现了不同的插图风

格与插图设计理念。从整体上看，国内两版的插图以技术绘图类为主，故呈现的整体风格偏严谨精确；Belin 版的插图以卡通漫画类为主，故呈现的整体风格偏活泼幽默。此外，相较于人教版，北师大版与 Belin 版的章首图设计精心，呈现出更多类型混合的插图，富有特色。两版教科书的章首图不仅注重挖掘相关主题的历史与艺术文化，还与后续知识联系紧密，为展开主题的核心内容埋下伏笔。

3.1.2 三版教科书中插图功能的共性及差异

在插图的功能分布上，国内两版教科书较为一致，而与 Belin 版具有较大差异。从整体上看，三版教科书的主要功能均包括呈现、补充文本与装饰点缀，其中，国内两版的插图秉承严谨科学的风格，与文本联系紧密，多为辅助类插图，侧重于文本的功能，单纯起装饰作用的插图较少；而法国教科书存在部分“文字为辅、插图为主”类插图，侧重于插图的功能，故而 Belin 版存在更多的创设情境、理解概念功能的插图。此外，Belin 版的插图将数学与人文教育有机地结合起来，不仅彰显了法国的文化特色，还展现了世界的多元艺术与文化，充满了人文色彩。

3.2 研究启示

3.2.1 丰富插图类型，适当增加卡通漫画类插图

国内两版的插图风格偏严谨精确，考虑到初中生的心理认知发展特点，此类风格或难以吸引读者，相较而言，Belin 版的插图风格活泼幽默且可读性较强，这能够充分激发读者的好奇心。在设计插图时，我国教科书应丰富插图的类型，适当增加卡通漫画类插图，提高插图的可读性。同时，教科书可以增加体现中国优秀文化的历史材料、艺术作品类插图，从而发挥插图的国家特色和文化价值。

3.2.2 重视章首图地位，发挥其重要作用

章前页是一个能让学生充分体会数学价值的平台，设计好章前页不仅能更好地统领整章，还能带给学生较好的数学学习情感体验[14]。章首图作为章首页的重要组成部分，不仅能够从整体上暗示后续的学习内容，还将影响学生的数学学习体验。Belin 版和北师大版的章首图以类型混合为主，这能够帮助读者从宏观上初步认识本章的学习内容，并产生对主题知识的兴趣。

建议在设计章首图时考虑使用类型混合的插图，以充分发挥其引领和激趣作用。

3.2.3 挖掘插图功能，适当增加创设情境类与理解概念类插图

国内两版中的插图是学生理解教科书内容的重要媒介，呈现出“以文本为主、插图为辅”的特点，而 Belin 版插图功能分布较为均衡，注重插图本身的功能。因此，我国教科书可适当增加创设情境类与理解概念类插图，一方面通过插图创设现实生活中的情境，使学生有身临其境之感，了解数学对于实际生活的重要意义，渗透德育价值；另一方面可以利用插图的直观性和趣味性帮助学生建立数学情境，理解复杂抽象的数学概念。

3.2.4 发挥插图多元效果，以插图作为文化的载体

插图是承载丰富文化的重要舞台，文化的融入有助于落实立德树人的目标，提高学生的审美情趣。Belin 版注重将文化融合渗透于插图之中，不仅彰显了法国的本土文化特色，还展示了欧洲乃至世界其他地区的不同文明，使数学具有较强的人文气息。有鉴于此，我国教科书也可适当增加插图中的文化元素，将插图作为文化的载体，利用插图直观形象的特点对学生进行中华优秀传统文化的熏陶，从而培养学生的文化自信和审美感知力，进而落实立德树人的根本任务。

事实上，教科书中插图的设计凝聚着编者团队的心血且展现了不同时空背景下多元的设计理念。考虑到教科书难以及时地更新修订，在实际教学中，教育工作者在使用插图时也应有的放矢，与当下时代同行，从而彰显教科书插图的教育价值。

参考文献

[1] 夏征农, 陈至立, 主编. 辞海[M]. 上海: 上海辞书出版社, 2009: 233.

[2] Hannus, M., Hyönä, J. Utilization of Illustrations during Learning of Science Textbook Passages among Low- and High-Ability Children[J]. *Contemporary educational psychology*. 1999, 24(2): 95-123.

[3] 张维忠, 胡智慧. 中美初中数学教科书插图质量的比较[J]. 数学教育学报, 2022, 31(1): 64-69.

[4] 陈亚红, 李如密. 教材建设的美育审思及展望[J]. 教育学术月刊, 2023, 40(3): 84-90.

[5] 中共中央、国务院印发《中国教育现代化 2035》 [EB/OL]. [2019-02-23]. http://www.moe.gov.cn/jyb_xwfb/s6052/moe_838/201902/t20190223_370857.html.

[6] 李舒. 中国和新加坡小学一年级数学教科书中“生活类插图”的比较研究[D]. 江苏: 扬州大学, 2019: 39.

[7] 周谷平. 蔡元培与法国教育管理模式的移植及其启示[J]. 高等教育研究, 2005, 26(2): 87-92.

[8] 张玉环, Alain Leger, 王沛. 中法高中最新数学课标几何比较研究[J]. 数学教育学报, 2013, 22(5): 37-41.

[9] 汪晓勤. 法国初中数学教材中的数学史[J]. 数学通报, 2012(3): 16-20, 23.

[10] 蒲淑萍. 中、法数学教材“方程”内容中的数学史[J]. 数学通报, 2012(10): 3-7.

[11] 蒲淑萍, 汪晓勤. 数学史怎样融入数学教材: 以中、法初中数学教材为例[J]. 课程·教材·教法, 2012(8): 63-68.

[12] 汪晓勤, 张力蔚. 法国数学教材中的“不等式、序与运算”: 文化视角[J]. 中学数学月刊, 2011(4): 7-9.

[13] 蒲淑萍, 汪晓勤. 法国数学教材中的“乘法公式与零积方程”[J]. 初中数学教与学, 2012(3): 21-24.

[14] 李卓忱, 汪晓勤. 中法初中数学教科书章前页中的数学文化比较研究[J]. 数学教育学报, 2022, 31(2): 26-34.

[15] 李卓忱, 汪晓勤. 法国初中数学教科书习题中的数学文化研究[J]. 比较教育学报, 2022(2): 160-175.

[16] 胡智慧, 张维忠. 数学教科书插图研究的现状及反思——基于文献的分析与思考[J]. 中学数学杂志, 2020(11): 19-22.

[17] 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心. 数学・七年级—九年级[M]. 北京: 人民教育出版社, 2012-2014.

[18] 马复, 史炳星, 章飞, 等. 数学・七年级—九年级[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2012-2014.

[19] Cuaz, L. et al. *Math 3e*[M]. Paris: Belin, 2008.

[20] Ancel-Lepesqueur, C. et al. *Math 4e*[M]. Paris: Belin, 2007.

[21] Jacob, N. et al. *Math 5e*[M]. Paris: Belin, 2009.

[22] Jacob, N. et al. *Math 6e*[M]. Paris: Belin, 2009.

[23] 宋振韶. 教科书插图的认知心理学研究[J]. 北京师范大学学报, 2005(6): 22-26.

[24] Phillips F, Alford SJ, Guina S. Illustrations in Financial Accounting Textbooks: Function and Placement Interact to Affect Student Learning[J]. *Issues in Accounting Education*, 2012(4): 999-1017.

[25] 张文宇, 任乙佳. 中美小学数学教科书插图比较研究[J]. 教学与管理(理论版), 2017(12): 121-124.

[26] Pohonets, Ivanna. Textbooks illustration features for junior schoolchildren in the establishment of state independence of Ukraine period (1990-2000)[J]. *Journal of Education, Health and Sport,* 2020(10): 415-424.

[27] Duchastel, P. & Waller, R. Pictorial illustration in instructional texts[J]. *Educational Technology*, 1979(1): 19, 20, 25.

[28] Levin, J. R. On functions of pictures in prose[A]. Pirozzolo. F.J., Wittrock. M.C. *Neurophysiological and cognitive processes in reading*[M]. New York: Academic Press, 1981: 203-228.

[29] Hunter, B., Crismore, A., Pearson, P. D. Visual displays in basal readers and social studies textbooks[A]. *Willows D.M., Houghton, H.A. The psychology of illustration, Vol II*[M]. Springer New York, 1987: 116-135.

[30] Mayer, R. E. *Learning and Instruction*[M]. New Jersey: Merrill Prentice Hall. 2003: 308-313.

[31] Carney, R.N., Levin, J.R. Pictorial Illustrations Still Improve Students' Learning from Text[J]. *Educational Psychology Review*, 2002(14): 5-26.

[32] 姜浩哲. 我国传统数学文化融入教科书的价值、现状与展望——以人教版小学数学教科书为例[J]. 课程.教材.教法, 2021(1): 98-104.

[33] 张玉环, 吴佳桧. 知识与核心素养视角下中法图形与几何比较研究——基于法国 2018 版与中国 2011 版义务教育课程标准[J]. 数学教育学报, 2022, 31(1): 70-78.

[34] 马迎秋, 曹一鸣. 初中数学教科书几何内容分布的国际比较研究[J]. 数学教育学报, 2018, 27(4): 12-17, 75.

[35] 吴立宝, 曹一鸣. 初中数学课程内容分布的国际比较研究[J]. 数学教育学报, 2013, 22(2): 29-36.

[36] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 94.

[37] 于国文, 曹一鸣. 从理念到实践: “数学取士”法国文化传统与数学教育[J]. 外国中小学教育, 2018(6): 38-46.

[38] 张维忠, 胡智慧. 数学教科书中的非语言元素分析——以浙教版八年级数学教科书为例[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版), 2019, 42(3): 351-355.

专题研究

美英早期几何教科书中直角三角形全等的判定

刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

直角三角形是一类特殊的三角形，因此对于一般三角形全等的判定定理对直角三角形都适用。不仅如此，针对于直角三角形全等的判定定理还有 HL、HA 定理等，这些判定定理不仅对于学生日常的解题、应用起到了举足轻重的作用，同时，学生在后续继续学习勾股定理的过程中也会用到直角三角形全等判定的相关知识。

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》指出，要求学生探索并掌握判定直角三角形全等的“斜边、直角边”定理[1]。现行八年级上册的人教版和苏科版教科书均将 HL 定理放在全等三角形一章中，现行沪教版则是在七年级下册学习全等三角形，而到八年级上册学习 HL 定理且把这一内容归于直角三角形一章中。与此同时，人教版教科书通过作图的方式探究得出 HL 定理，沪教版和苏科版则是在作图的基础上，将两个直角三角形拼接成等腰三角形，再利用等腰三角形三线合一证明 HL 定理。

在提倡素质教育且要求学生学会学习、学会做人、学会发展的今天，传统数学知识的讲授已不能满足时代的要求。数学史作为以“素质教育”为目标的数学教育的内在要求，师生有必要了解知识背后的来龙去脉[2]。18 世纪，法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）在其所著的《几何学和三角学的基础》一书中利用反证法证明了 HL 定理[3]。19 世纪，美国数学家皮尔斯（B. Pierce, 1809-1880）在《平面与立体几何基础》中运用等腰三角形三线合一证明 HL 定理，这也契合了现行教科书上的证明方法[4]。

学生作为数学学习的主体，“学生学会了什么”既是教学的起点，又是教学的归宿；既是教学过程的方向，又是教学有效的证据[5]。数学史作为帮助学生理解数学知识的有力工具，将其融入数学教学是大势所趋。鉴于此，本文聚焦直角三角形全等的判定定理，对美英早期几何

教科书进行考察，试图回答以下问题：证明 HL 定理的方法有哪些？早期教科书中还有哪些直角三角形全等的判定定理？历史上出现的各种判定定理和证明方法对今日教学有何启示？

2 早期教科书的选取

本文选取 1829-1948 年间出版的 77 种美英早期几何教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

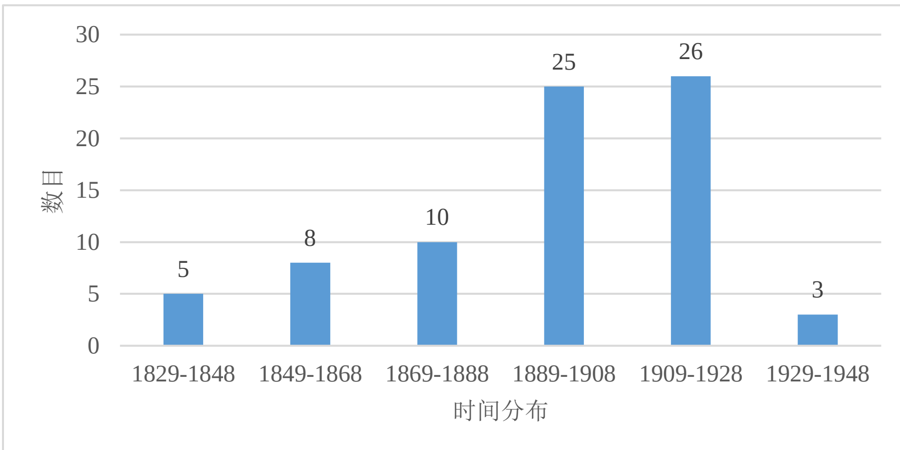

图 1 77 种美英早期几何教科书的出版时间分布

直角三角形全等的判定定理所在章节主要包括“直线形”“三角形”“线、角和多边形”“命题”“线和直线形”“全等三角形”和“其它”（如“平行线、垂线、角、角和”“多边形的边和角”“直线和圆的性质”“模型演示”“比例及其在几何中的应用”等）七类，表 1 给出了直角三角形全等的判定定理所在章节的分布情况。其中，这一部分的内容也多归于“直线形”章中的“三角形”或“平行线”一节中。同时，直角三角形的判定通常位于几何教科书的前几章中，其重要程度不言而喻。

表 1 直角三角形全等的判定定理所在章节的分布情况

章名	直线形	三角形	线、角和多边形	命题	线和直线形	全等三角形	其它
数量	29	14	8	7	6	3	10
百分比	38%	18%	10%	9%	8%	4%	13%

图 2 给出了直角三角形全等的判定定理所在章节的时间分布情况。由图 2 可见，19 世纪中叶以前，直角三角形全等的判定定理的内容多出现在“命题”一章，此时的教科书通常没有明

确的章名，而只是以命题的方式呈现。从 19 世纪下半叶开始，虽然章节名逐步呈现出多样化的趋势，但这一部分的内容被越来越多的教科书编者归入“直线形”或“三角形”一章。

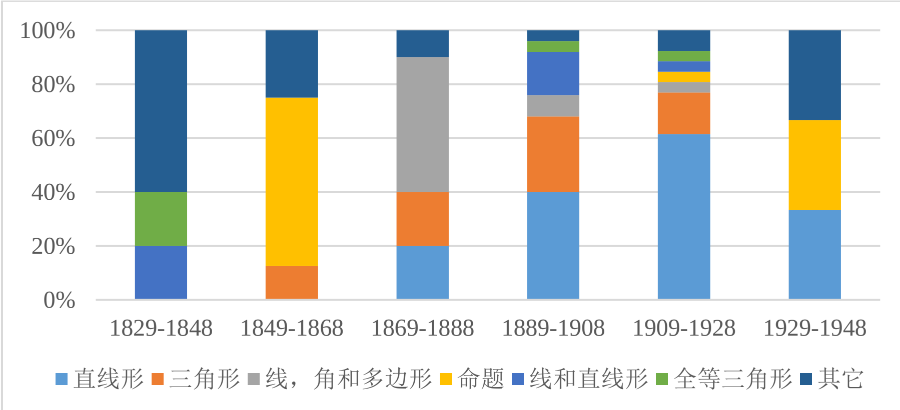

图 2 直角三角形全等的判定定理所在章节的时间分布

3 直角三角形全等的判定

在 77 种几何教科书中，针对直角三角形全等的判定定理共有四类，即给定直角三角形的“斜边和直角边”（HL）、“斜边和其中一个锐角”（HA）、“直角边和其中一个锐角”（LA）和“两直角边”（LL），于是可以判断两个直角三角形全等。

3.1 HL 定理

在两个直角三角形中，如果直角三角形的斜边和一条直角边对应相等，则这两个直角三角形全等（简记为 HL），即在 Rt△ABC 和 Rt△DEF 中，已知 $AB=DE$、$AC=DF$、$\angle ABC=\angle DEF=90°$，于是△$ABC$≌△$DEF$（图 3）。

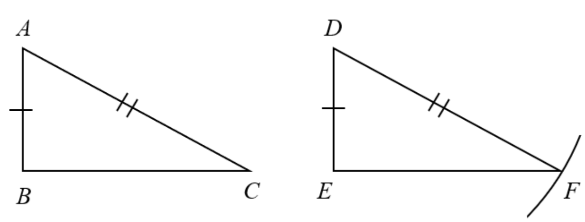

图 3 HL 定理

在 77 种给出 HL 定理的教科书中，证明方法可以分为直角边重合法、反证法、斜边重合法、SSA 法、勾股定理以及叠合法六类。在邻边重合法中，诸多教科书又用到了不同的全等三角形判定定理进行证明。图 4 是证明 HL 定理的具体分类情况。

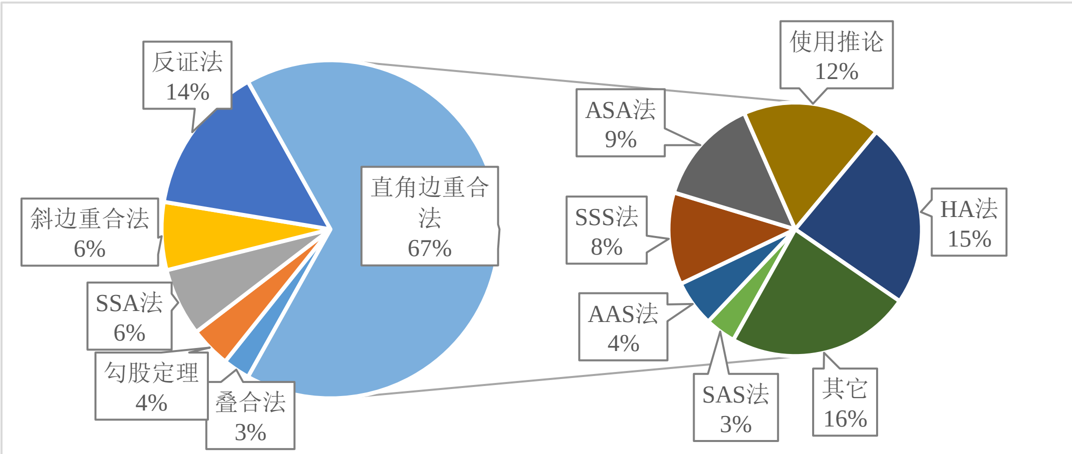

图 4 证明 HL 定理的分类情况

3.1.1 直角边重合法

51 种教科书先让两个直角三角形的直角边对应重合，于是得到一个等腰三角形，从而运用等腰三角形的性质完成证明（图 5）。

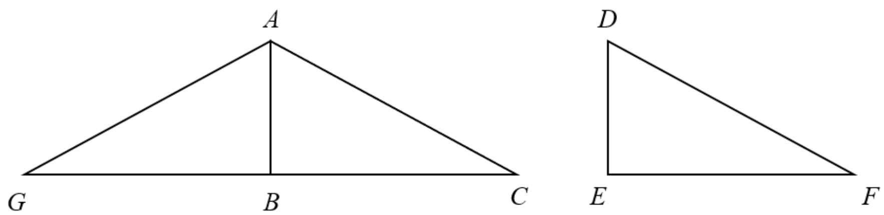

图 5 直角边重合法证明 HL 定理

其中，72%的教科书将两个直角三角形拼成等腰三角形后，得到其直角边或内角对应相等，随后运用 SSS、AAS、SSS、ASA 或 HA 定理来证明 HL 定理[6-10]。如图 5，将 Rt△*ABC* 和 Rt△*DEF* 的直角边 *AB*、*DE* 重合，由 *AB*=*DE*，于是点 *A*、*D* 重合，点 *B*、*E* 重合。因为 $\angle ABC=\angle DEF=\angle ABG=90°$，所以点 *G*、*B*、*C* 在同一直线上。又因为 *AC*=*AG* 且 *BC*=*EF*=*GB*，由等腰三角形三线合一，故∠*C*=∠*G*，∠*BAC*=∠*BAG*。运用以上 5 种判定定理即可证明△*ABC*≌△*ABG*，于是△*ABC*≌△*DEF*。16%的教科书按照同样的方式进行拼接，但均未提及运用何种判定定理，而是直接证明全等[11]。

还有 12%的教科书用到了关于等腰三角形的推论，即从一定点向一定直线画两条相等的斜线，并从定点向定直线引垂线，则斜线与定直线的两个交点到垂线的距离相等。于是得到另一直角边对应相等，进而证明△*ABC*≌△*DEF*[12]。

3.1.2 反证法

11 种教科书采用了这一方法。其中，8 种教科书先假设 $BC=EF$，由 SSS 定理即可证明△ABC≌△DEF。再假设 $BC\neq EF$，不妨设 $BC>EF$，于是可以在 BC 上找到一点 G 使得 $BG=EF$（图 6）。联结 AG，因为△ABG≌△DEF，所以 $AG=DF$，故 $AG=AC$，显然两者不会相等，产生矛盾。故 $BC=EF$，于是△ABC≌△DEF[13]。

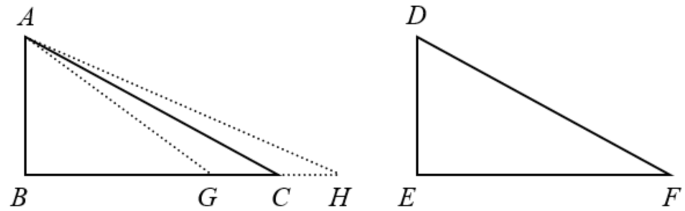

图 6 反证法证明 HL 定理

2 种教科书让两个直角三角形叠合，随后假设点 F 落在点 C 的左边或右边[14]，还有 1 种教科书则假设 DF、AC 不重合而 DF、AG 重合[15]，两种假设都可以导出矛盾，进而完成证明。

3.1.3 斜边重合法

Macnie 将点 A、D 重合，点 C、F 重合，连结 BG（图 7）[16]。因为 $AB=DE=AG$，所以 $\angle ABG=\angle AGB$，又因为$\angle ABC=\angle AGC$，所以$\angle CBG=\angle CGB$，于是 $CB=CG$。由 SSS 定理即可证明△ABC≌△AGC，于是△ABC≌△DEF。

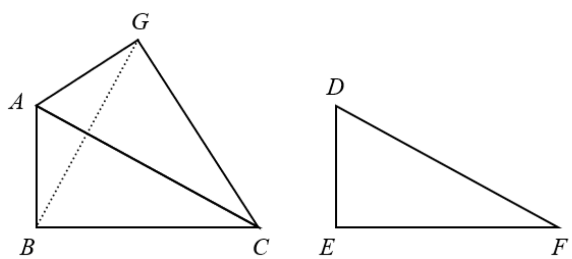

图 7 斜边重合法证明 HL 定理

3.1.4 SSA 法

有 5 种教科书和 Tappan 一样使用了 SSA 定理[17]。在一般三角形中，SSA 并不能作为全等三角形的判定定理，而当我们为其加上一个条件，SSA 定理即可成立。在△ABC、△DEF 中，已知 $AB=DE$，$AC=DF$，$AC\geqslant AB$，$\angle B=\angle E$，则△ABC≌△DEF。显然 Rt△ABC 和 Rt△DEF 满足以上条件，于是△ABC≌△DEF。

3.1.5 勾股定理

勾股定理的历史源远流长，而使用勾股定理来证明 HL 定理的教科书却屈指可数。在 3 种教科书中，已知直角三角形的邻边和一直角边对应相等，于是运用勾股定理即可证明另一直角边也对应相等，进而得到△*ABC*≌△*DEF*[18]。

3.1.6 叠合法

Walker 依然使用叠合法证明 HL 定理[19]。如图 3，将△*ABC* 放到△*DEF* 上，使得点 *A*、*D* 以及射线 *AB*、*DE* 重合，因为 *AB*=*DE*，所以点 *B*、*E* 重合。因为$\angle ABC=\angle DEF=90°$，所以射线 *BC*、*EF* 重合，故点 *C* 或落在射线 *EF* 上。以 *D* 为圆心，*DF* 为半径，作弧l_1，因为 *AC*=*DF*，所以点 *C* 会落在弧l_1上。于是点 *C* 会落在射线 *EF* 和弧l_1的交点处，即点 *C*、*F* 重合，这样△*ABC* 和△*DEF* 重合，即△*ABC*≌△*DEF*。

3.2 HA 定理

在两个直角三角形中，如果直角三角形的斜边和其中一个锐角对应相等，则这两个直角三角形全等（简记为 HA）。在给出 HA 定理的 49 种教科书中，证明方法包括叠合法和 ASA 法两类。

3.2.1 叠合法

在叠合法中，邻边重合是教科书编者常用的一种方法，有 17 种教科书采用了这一方法。在 Rt△*ABC* 和 Rt△*DEF* 中，已知 *AC*=*DF*，∠*C*=∠*F*，$\angle ABC=\angle DEF=90°$（图 8）。

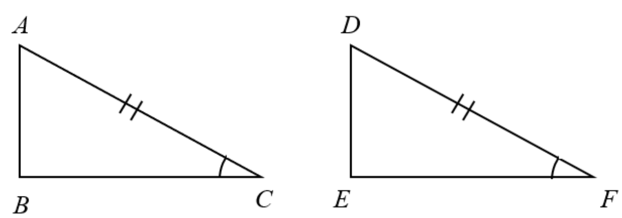

图 8 重合法证明 HA 定理

Macnie 将△*ABC* 放到△*DEF* 上，使得点 *A*、*D* 及射线 *AC*、*DF* 重合，因为 *AC*=*DF*，所以点 *C*、*F* 重合。因为∠*C*=∠*F*，所以射线 *CB*、*FE* 重合。又因为过点 *D* 有且只能作 1 条射线 *FE* 的垂线，于是点 *B*、*E* 重合，则△*ABC* 和△*DEF* 重合，即△*ABC*≌△*DEF*[16]。

还有 5 种教科书采用了顶角重合法。Robbins 把△*ABC* 放到△*DEF* 上，使得∠*C* 的顶角和∠*F* 的顶角重合，因为∠*C*=∠*F*，于是射线 *CA*、*FD* 重合，射线 *CB*、*FE* 重合。因为 *AC*=*DF*，所以点 *A*、*D* 重合。又因为过点 *D* 有且只能作 1 条射线 *FE* 的垂线，于是点 *B*、*E* 重合，则△*ABC*≌△*DEF*[20]。

3.2.2 ASA 法

14 种教科书会把 HA 定理作为 ASA 定理的一个推论，又有 13 种教科书采用了 ASA 法证明 HA 定理。在 Rt△*ABC* 和 Rt△*DEF* 中存在一个隐含条件，即三角形的两个直角对应相等，又因为三角形的一个锐角对应相等，由命题“三角形内角和为180°”可知，三角形的另一组锐角也对应相等，于是运用 ASA 定理得△*ABC*≌△*DEF*[14]。

3.3 LA&LL 定理

在 29 种给出 LA 定理的教科书中，证明方法均类似于 Robbins 的做法，有 9 种教科书使用 ASA 定理进行证明，而有 20 种教科书将其作为 ASA 定理的推论出现。在两个直角三角形中，如果直角三角形中的直角边和其中一个锐角对应相等，则这两个直角三角形全等（简记为 LA）。假设对应相等的锐角与对应直角边相邻，此时有两角及其夹边对应相等，于是两个直角三角形全等。假设与直角边相对的锐角对应相等，同样由命题“三角形内角和为180°”出发，可以得到另一个锐角也对应相等，此时由 ASA 定理完成证明[20]。

LL 定理即在两个直角三角形中，如果直角三角形的两直角边对应相等，则这两个直角三角形全等。LL 定理在美英早期几何教科书中出现的频次最低，其首次出现温特沃斯（G. A. Wentworth, 1835-1906）于 1899 年出版的《平面与立体几何》一书中[10]。有 15 种给出 LL 定理，其中有 13 种均将其作为 SAS 定理的推论出现，还有 2 种教科书也是运用 SAS 定理完成证明。

4 HL 定理的演变

在 1829-1948 年的美英早期几何教科书中，HL 定理的证明方法十分丰富，这也是在现行教科书中难以看到的。以 20 年为一个时间段，图 9 给出了 HL 定理证明方法的时间段分布情况。由图可见，证明方法由多元走向单一。早在 20 世纪以前，各种证明方法“百家争鸣”，在

教科书中均占有一定的比例，而从 19 世纪中叶开始，直角边重合法迅速成为教科书中的主流方法，我们认为，这一趋势背后有其更深层次的原因。

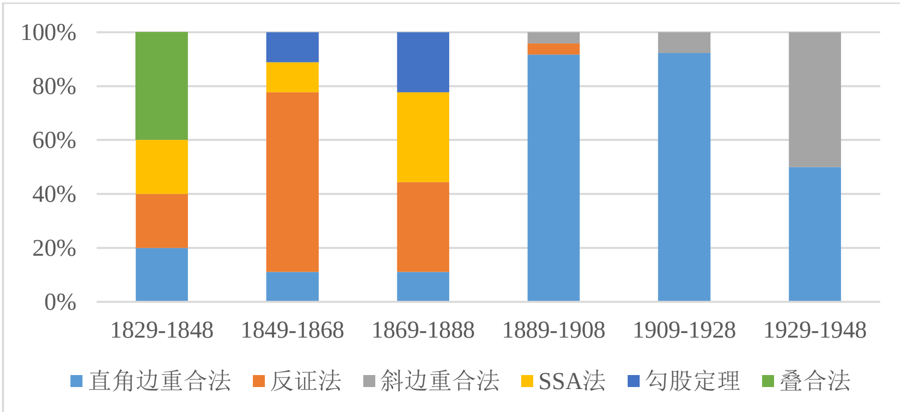

图 9 HL 定理证明方法时间分布

从历史序看，19 世纪开始，美国的教育逐渐摆脱英国的模式，他们转而引进法国的数学课程与课本，因而法国数学家勒让德的几何教科书受到了美国数学教育的关注，于是勒让德在 18 世纪几何教科书中所采用的反证法受到美国教科书编者的欢迎。到了十九世纪中叶及以后，皮尔斯（B. Peirce, 1809-1890）逐渐成为了这一时期的代表人物之一，是美国数学教育和研究发展的时代缩影。在这个时期，皮尔斯着手改革数学教育，抛弃旧的教育体系，而引进了很多新教材和新内容，这也让美国数学在世界上逐步崭露头角。当我们翻开皮尔斯的几何教科书，他所采用的正是直角边重合法。

从教材序看，全等三角形和等腰三角形的内容通常被安排在直角三角形全等判定之前，因此，结合这两部分知识证明 HL 定理显得水到渠成。与此同时，HL 定理通常位于教科书前几章，我们认为其证明不应过于繁琐，这也符合教科书编者希望教科书是按照由简到繁、由易到难、由浅入深的思路进行编排。

从学生心理序看，HL 定理是学生较早接触到的几何学知识，学生往往没有丰富的知识基础，如果证明方法较为繁琐，学生会丧失数学学习的兴趣，对数学产生畏惧心理。因此证明方法应尽量简洁并易于学生的理解，相比之下直角边重合法正满足这样的要求。

5 结论与启示

综上所述，历史上出现的四类直角三角形全等的判定定理以及证明 HL 定理的方法，为今

日直角三角形全等的判定的教学提供了诸多启示。

第一，构建知识之谐。全等三角形判定定理中所用到的叠合法、反证法对于本节课内容的教学具有十分重要的借鉴意义，因此教师可以将其作为学习直角三角形全等判定的前序知识让学生予以回顾。与此同时，教师还可以借助于直角三角形纸片，让学生进行平移旋转，这样教师在运用叠合法或反证法方法进行证明时，学生才会觉得水到渠成、易于理解。

第二，营造探究之乐。在上课前，教师可以让学生先准备好直角三角形纸片。在教学过程中，教师则可以设计探究活动，让学生尝试拼一拼、画一画直角三角形，学生在小组探究的过程中可以各抒己见、将自己的奇思妙想与同伴进行分享并予以实践。在这一过程中，课堂上沉闷的学习气氛瞬间变得活跃起来，一方面改变原来枯燥的定理学习模式，让学生爱上定理学习，更重要的是让学生能够动口说数学、动手做数学，在一说一做中学生可以获得成就感，体会到成功所带来的乐趣。

第三，展示方法之美、实现能力之助。即使是现行教科书在证明 HL 定理时已经用到了直角边重合法，但这一方法中的不同做法也告诉我们，学生还可以尝试运用不同的判定定理再次予以证明。这样一题多解、一题多思、一题多变的数学学习态度，有助于培养学生良好的思维能力，培养发散性思维。与此同时，教师还可以运用微视频向学生展示数学史上多样的精彩证明，最后再运用中学中十分重要的反证法予以证明。这种衔接方式不仅开阔了学生的视野，让学生体会到多种证明方法的巧妙之处，证明过程中所蕴含的类比思想、分类讨论思想、化归思想等，无疑有助于培养学生的直观想象和逻辑推理等数学素养。

第四，展示文化之魅、达成德育之效。不同时空的数学家对这四类直角三角形全等的判定定理作出了自己的证明，反映了数学文化的多元性。同时，数学史的融入让历史和现实之间架起了一座桥梁，学生跨越时间和空间，走进数学家的心灵，增加对于数学的亲切感，学生在小组合作的过程中，培养学生求助和助人、倾听和表达、欣赏和表现、责任和分享、包容与反思的品质，为学生的终身学习、全面发展打下坚实的基础。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 66.

[2] 张丽清. 浅谈数学史对数学教育的重要性[J]. 中国校外教育, 2017(3): 127-128.

[3] Legendre, A. M. *Elements of geometry and trigonometry*[M]. New York: Chicago, 1798: 36-37.

[4] Peirce, B. *An Elementary Treatise on Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: James Munroe & Company, 1837: 19.

[5] 彭刚, 汪晓勤, 程靖. 数学史融入数学教学: 意义与方式[J]. 成都师范学院学报, 2016, 32(1): 115-120.

[6] Keigwin, H. W. *The Elements of Geometry*[M]. New York: Henry Holt & Company, 1897: 34.

[7] Milne, W. J. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1899: 50.

[8] Keller, S. S. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1908: 27.

[9] Schultze, A. & Sevenoak, F. L. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1908: 32-33.

[10] Wentworth, G. A. *Plane and solid geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1899: 35-39.

[11] Shutts, G. C. *Plane and Solid Geometry*[M]. Chicago: Atkinson, Mentzer & Grover, 1905: 42.

[12] Bowser, E. A. *The Elements of Plane and Solid Geometry*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1890: 39.

[13] Davies, C. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: A. S. Barnes & Company, 1841: 31-32.

[14] Perkins, G. R. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: D. Appleton & Company, 1855: 32.

[15] Schuyler, A. *Elements of Geometry*[M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Company, 1876: 56-57.

[16] Macnie, J. *Elements of Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1895: 35-36.

[17] Tappan, E. T. *Treatise on Plane and Solid Geometry*[M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864: 97.

[18] Robinson, H. N. *Elements of Geometry, Plane & Spherical Trignometry Geometry*[M]. New York: Ivison, Blakeman, Taylor & Company, 1868: 50.

[19] Walker, T. *Elements of Geometry*[M]. Boston: Richardson & Lord, 1829: 23.

[20] Robbins, E. R. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1907: 28-29.

西方早期教科书中的解析几何定义

朱轶萱，刘梦哲

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引 言

17 世纪，由于科学研究的需要和对方法论的兴趣，笛卡尔（R. Descartes, 1596-1650）和费马（P. de Fermat, 1601-1665）创立了解析几何[1]。起初，解析几何被视为用代数工具解决几何作图问题的一种数理方法，笛卡尔不仅解决了古典几何的作图问题，还研究了方程和曲线的对应关系[2]。随着数学的发展，人们对于这一学科的认识也发生了变化。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》将解析几何定位于运用代数方法，研究直线、圆、椭圆、抛物线、双曲线等曲线的图形、性质及其位置关系[3]。可见，虽然解析几何的本质仍是运用代数方法解决几何问题，但今天的解析几何已与它初露头角时的内涵不尽相同。

同时，解析几何在中学教学中占据重要地位，其在发展核心素养、彰显知识联系、培养数学思想等方面均发挥着不可替代的作用。然而，已有研究表明，学生在学习解析几何时存在认知和情感上的多重障碍，例如，难以建立代数与几何之间的联系、囿于纷繁复杂的计算而对解析几何的学习缺乏兴趣、未能在解析几何的学习中灵活运用三角、向量、函数等知识，等等。究其原因，很大程度上是学生对解析几何的本质理解不深刻[4-5]。

近年来，已有教师开展了 HPM 视角下解析几何序言课、单元课的教学[6-8]，这些课例的开展正需要一线教师深刻理解解析几何的内涵。历史是最好的教科书，唯有走进历史，探寻解析几何之源，经历其研究内容和研究目的的演变过程，才能看清这门学科蕴藏的科学价值与教育价值，从而更好地解决认知困惑、激发学习动机。鉴于此，本文聚焦解析几何的定义，对 19 世纪至 20 世纪的西方解析几何教科书进行考察，试图回答以下问题：早期教科书给出了解析几何的哪些定义？这些定义是如何演变的？不同定义体现了解析几何与其他数学分支之间怎样的联系？

2 研究对象

本文选取 1804-1963 年间在美国、英国和法国出版的 100 种解析几何教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

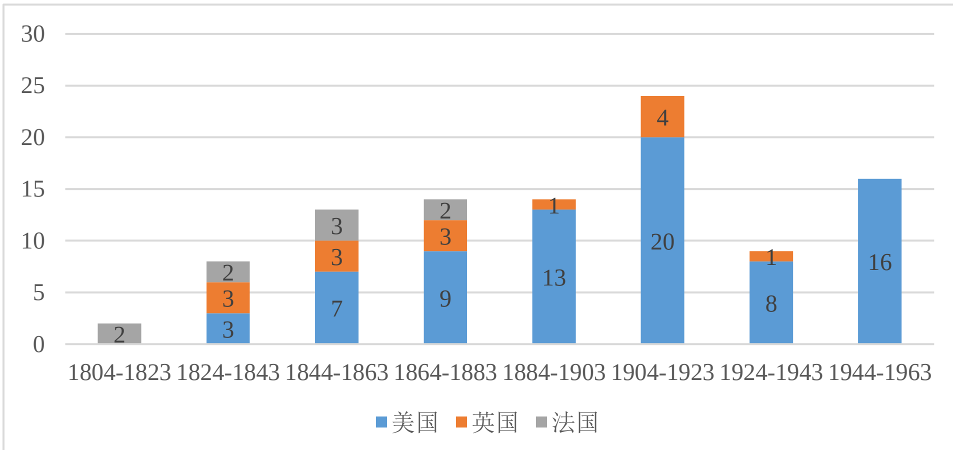

图 1 100 种早期解析几何教科书出版时间分布

在 100 种教科书中，有 63 种明确给出了解析几何的定义。为此，按年份依次检索上述 63 种教科书，从前言、扉页等部分分别摘录出与解析几何定义相关的表述，并对其进行分类，回答研究问题 1；通过对 100 种教科书的内容的分析，将其归于解析几何定义的不同阶段，并分析其演变，回答研究问题 2；从定义中考察解析几何与其他数学分支的关系，回答研究问题 3。

3 解析几何的定义

17 世纪，笛卡尔既批评希腊人的几何过于抽象且过多地依赖图形，以至“只能使人在想象力大大疲乏的情况下，去练习理解力”；又对当时代数完全受法则和公式的控制，以至于“成为一种充满混杂与晦暗、故意用来阻碍思想的艺术”的现状深感不满，但他窥见了两者结合的巨大潜力，解析几何这样一门“将代数运用于几何”的学科由此诞生[2]。

解析几何在早期还有许多别称，Fine & Thompson 归纳道：“这门学科被称为坐标几何，因为一个点是由它的坐标决定的，反之亦然；被称为代数几何或解析几何，因为它用方程表示几

何关系；被称为笛卡尔几何，因为该方法被笛卡尔于 1636 年出版的《几何学》中首次提出；被称为圆锥曲线，因为这些曲线是用该方法研究的。”[9]值得注意的是，在 18 世纪著名的《百科全书》中，法国数学家达朗贝尔（d'Alembert, 1717-1783）把“代数”和“解析”当作同义词使用，“解析几何”之名应运而生，并作为标准名词沿用至今[1]。

对于解析几何的定义，早期教科书对其表述随着学科研究内容的演变，可划分为两个阶段。

3.1 第一阶段：适定几何与不定几何并存

表 1 给出了第一阶段的典型定义，其突出使用符号来表示几何量，并通过代数方法分析符号间的关系，以实现对量的性质的研究。

表 1 第一阶段典型定义

年份	作者	定义叙述
1831	D. Lardner	代数几何的研究对象是利用代数符号和运算来研究和分析几何量的图形和性质。[10]
1836	C. Davies	几何大小有三种:即线、面和体。在几何学中，这些量的性质是通过推理过程来确定的，在推理过程中，量本身不断地呈现在头脑中。然而，如果我们愿意，我们可以用代数符号来表示它们，而不是直接根据量来进行推理。这样一来，我们就可以用已知的代数方法来对这些符号进行运算，而且所得的所有结果对于几何量和表示几何量的代数符号都是正确的，这种处理问题的方法叫做解析几何。[11]
1851	A. E. Church	解析几何可以定义为数学的一个分支，其中所考虑的量是用字母来表示的，而这些量的性质和关系是用代数的推理规则来呈现的。[12]
1857	J. M. Peirce	解析几何是关于空间的科学，在代数的形式和运算下展开。[13]

同时，教科书编写者还表示，解析几何的内容分为“适定几何”与“不定几何”两部分。Church 指出：“适定几何的目的在于解确定的问题，即在这些问题中，已知条件限制了所需部分的数量，并提供了推断其值的手段。”他还归纳了解决确定问题的一般步骤[12]：

第一步：从几何角度设想要解决的问题，并绘制包含给定和要求的图形，以及为说明它们之间的关系而可能需要的其他线段；

第二步：用字母表的第一个字母表示已知线段，最后一个字母表示未知线段。考虑这些线段之间的几何关系，并用等式表示出来；

第三步：求解这些等式，并在图形中构造出由此得出的值。

Howison 称：“解决这一类问题本质上依赖两种操作：解和构造”，即代数方程的解和几

何作图的构造[14]。以作给定线段的黄金分割点为例。

如图 2，给定线段 $AB=a$，令黄金分割后较长和较短的线段长分别为 x 和 $a-x$，则由黄金分割定义可列出方程 $\frac{x}{a}=\frac{a-x}{x}$，即 $x^2+ax=a^2$。解得

$$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} \text{ 或 } x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}\text{。}$$

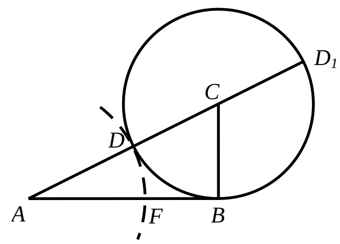

图 2 绘制线段的黄金分割点

作 Rt△ ABC，其中 $BC=\frac{a}{2}$，以 C 为圆心，$\frac{a}{2}$ 为半径作圆，与直线 AC 交于 D 和 D_1，则有 $AD=x_1$，$AD_1=-x_2$。再以 A 为圆心，AD 为半径作圆弧交 AB 于 F，即 $AF=AD=x_1$，此时 F 即为所求作的黄金分割点，其中 AF 为黄金分割后较长的一段。

事实上，这一类用代数方法解决适定几何的问题在 16-17 世纪已被韦达（F. Viète, 1540-1603）等数学家系统研究，是几何与代数结合的早期产物，这种依赖代数方法来研究几何问题的思维为解析几何的产生奠定了基础。自称“从韦达结束的地方开始”的笛卡尔在《几何学》中首先模仿韦达的方式，展示了一般一元二次方程正根的几何作图，接着他开创性地考虑了一类崭新的问题——不定几何。

“解析几何的第二个分支，其主要目的是研究线和面的一般性质，它的应用范围比刚刚研究过的适定几何要广泛得多，其结果也有趣得多。它之所以称为不定几何，是因为在所使用的方程中，未知量可以有无数个值，或者说是不定的，因此称为变量；而从适定几何所讨论问题的性质来看，它们的未知量只能为有限个值，而且必须是确定的。”正是因为不定几何问题的产生，数学研究开始进入变量时代。Smyth 直言：“解析几何作为一门科学的起源，是由于这一类不定问题。”[15]

3.2 第二阶段：仅不定几何

如 Howison 所言：“适定几何的方法与其说是代数的方法，不如说是普通几何的方法。它的推理主要依靠图解，代数符号的唯一用途是简化术语。”[14]因而随着时间的推移，适定几何逐渐脱离解析几何，被纳入纯几何学的范畴。因此，有教科书编写者认为，解析几何是仅研究不定几何的学科，而在“解析几何是将代数运用于几何”的共识之余，还有教科书进一步地给出了更具体的定义，可被归纳为四种角度，分别关注解析几何的研究工具、研究过程、研究对象和学科性质。从不同视角出发的阐释或许能够帮助我们更加深刻地认识解析几何这门学科。

3.2.1 基于研究工具的定义

（一）坐标定义

Maltbie 分析了建立数形关系的困难之处：“我们试图建立几何与代数之间的联系，但一开始就遇到了一个难题：几何几乎只涉及固定的对象，如确定的点、线和面，而代数主要涉及变量。但我们可以从现在起把所有曲线看作是由一个可变点描画出来的，从而解决这个困难，我们将试图把这个点位置的变化与代数变量值的变化联系起来”[16]，坐标法是实现这一联系的根本工具。在承认这一核心方法的基础上，Brien 给出如下定义：“坐标几何是指笛卡儿发明的一种方法或体系，在这种方法或体系中，点的位置是用所谓的坐标来确定的，曲线和曲面的形式是用所谓的坐标来定义和分类的。”[17]

（二）有序数对定义

Taylor 称：“用平面上的点来表示实数的有序对，以及用两个变量的关系来确定这些点的集合的研究，称为平面解析几何。”[18]这一定义具有承上启下的作用，上承坐标定义，阐释了坐标法的原理，即利用坐标系将点表示为有序数组，建立起平面内点与有序数组之间的一一对应，下接不定方程定义，通过求得有序数组满足的曲线方程。自此，几何问题化为代数问题。

（三）不定方程定义

Docharty 将解析几何定义为“用不定方程对几何量的一般性质的分析研究。”[19]这不仅说明了不定方程是解析几何研究的代数工具，将其与适定几何明确剥离，还蕴含了曲线与方程这一核心概念。德国科学史家金特（S. Gunther, 1848-1923）曾将解析几何的历史分为三个阶段：第一阶段是两条坐标轴的引入，第二阶段是基于横、纵坐标的曲线作图，第三阶段是关于横、

纵坐标的方程的建立[20]。在关键的第三阶段，正是借助方程这一重要工具，才建立起代数与几何之间的真正联系。

3.2.2 基于研究过程的定义

Sonnet 从解释研究过程的角度给出了如下定义：“二维解析几何是将对平面内直线的研究简化为对确定其不同点位置的方程的研究。”[21]Peirce 补充道：“以‘确定一条包含所有圆心的线，这些圆可以与给定的圆相切’为例，由于所求直线无法直接用一个未知量表示，所以用代数方法求解该问题在第一步便遇到了障碍。为了用代数方法解决上述问题，我们在不改变其意义的前提下，将问题改述为‘求与两个给定圆相切的圆的圆心’，现在迫切需要的不是直线，而是一个点的位置，这个点必须位于原来要找的直线上，因此我们可以通过这个点来确定直线。因此，在解析几何中，所有与线的形式有关的问题都被转化为与点的位置有关的问题。”[13]既内蕴轨迹的定义，即符合一定条件的点的全体所组成的集合，又从侧面反映了坐标法的可行性。

3.2.3 基于研究对象的定义

（一）轨迹定义

Candy 称：“解析几何本质上是研究轨迹和轨迹的性质的一种方法。”[22]Phillips 进一步阐释了轨迹与方程的对应关系：“轨迹是方程的图形表征，而方程是轨迹的代数表示，方程的解析性质对应于所表示的轨迹的几何性质。利用相应的解析特征来推导几何性质，构成了一门叫做解析几何的学科。”[23]由此可见，此类定义与不定方程定义的遥相呼应，各有侧重，恰对应了笛卡尔“从轨迹出发寻找方程”与费马“从方程出发研究轨迹”，揭示了解析几何基本原理的两个相反的方面。

（二）线面性质定义

Peck 认为：“解析几何是数学的一个分支，它用代数方法研究线和面的性质和关系。其中平面解析几何研究的是完全在一个平面上的线；空间解析几何研究的是在空间中以任何方式存在的线和面。”[24]线、面是初等几何中静态的原始概念，在解析几何中被赋予了新的认识，即动态的轨迹，因而此类定义和轨迹定义异曲同工。Nowlan 指出了解析几何研究的两类问题：“解析几何是代数在几何研究中的应用，它包括用方程来表示与点、线和面有关的关系，反之，也包括通过解释方程来推导点、线和面关系的性质。”[25]

3.2.4 基于学科性质的定义

笛卡尔创立解析几何的原动力是他对普适性方法的追求，恰如 Borger 所言："解析几何通过引入代数分析作为研究几何的工具，向学生展示了一种新的数学思想形式，其目的是发展一种新的方法，即解析方法。本书的目的是提供材料，使学生能够养成从几何和代数两方面考虑每个问题的习惯，并认识到每一个问题都能照亮另一个问题。"[26]

Gibson 认为："对直线和圆的解析处理在初学时是必要的，与其说是为了得到几何结果，不如说是为了便于公式的使用和解释；只有通过这样的练习，初学者才能学会看到分析背后的几何学。"[27]类似地，Schmall 指出："深入了解这种方法的学生所取得的成就，远比熟记所有已知性质的学生所取得的成就要大得多。"[28]由此可见，解析几何作为一种方法论的重要性远大于其作为几何分支的重要性。

4 解析几何定义的演变

以 20 年为一个时间段进行划分，图 3 给出了早期教科书中解析几何定义的演变情况。其中，对于 42 种未明确给出解析几何定义的教科书，通过对教科书内容进行分析，我们同样可以将其归于上述两个阶段。

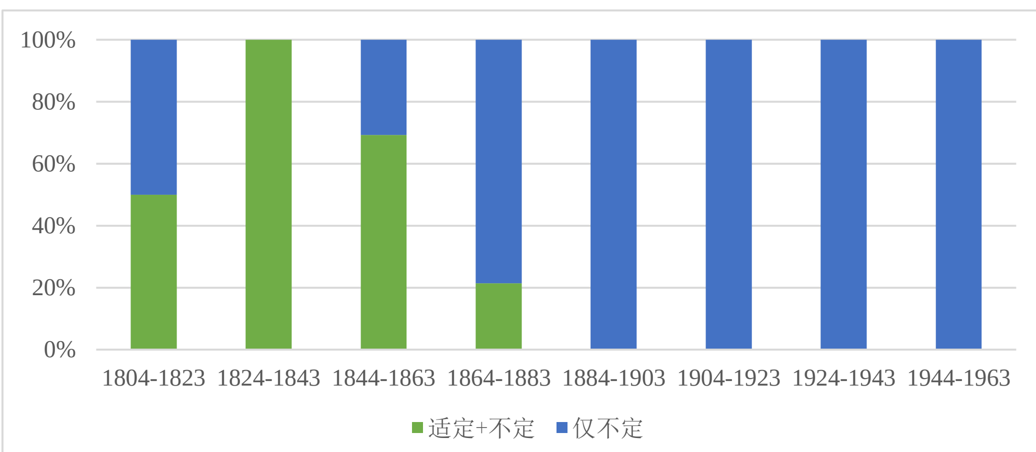

图 3 早期教科书中解析几何定义的演变情况

由图 3 可知，19 世纪 90 年代以前的早期教科书受笛卡尔《几何学》的影响，将适定几何和不定几何均归为解析几何的研究范畴。但值得注意的是，对笛卡尔而言，研究两类几何的最终目的均是解决方程根的作图问题，而随着作图问题重要性的日渐减弱和解决物理世界运动变

化问题的需求日益增加，早期教科书中不定几何的研究重点已经变为用代数方程研究曲线本身。19 世纪 90 年代之后，适定几何由于其仅仅是用代数符号简化几何作图问题而被排除在解析几何之外，归于纯几何研究，至此解析几何已演变为一门较为成熟的学科。

5 解析几何与其他数学分支的关系

多种教科书对比了解析几何法与纯几何法的优劣，并强调了它们的互补性。此外，从 Nathan 的表述中可以看出，解析几何与其他数学分支也存在密切联系："解析几何不仅通过照亮代数领域的一些黑暗区域，回报了它的恩人代数；还几乎在数学的每一个分支中都得到了广泛的应用，并因此成为所有科学的有力工具。"[29]

本节将梳理解析几何与不同数学分支的关系。

5.1 与纯几何学的关系

解析几何的诞生很大程度上弥补了原先几何学的不足，许多教科书说明了这一点。例如，Davies 强调了解析几何具有通性通法："由于这一令人愉悦的发明，原先困难而互不相关的各种研究方式，在每一具体情况下能否成功，都取决于调查者的技巧和聪明才智，而且往往是偶然的，现在都简化为一个简单而统一的过程。"[11]而 Docharty 强调了解析几何的简明性："用欧几里得的方法来解决几何学上的问题，需要进行漫长而费力的推理，需要不断地参照先前所建立的命题，但这些问题可以用简明的分析方法，从最基本的原理出发来解决。"[19]

然而，事物总有其两面性，部分几何学家认为，解析几何的高效性是在牺牲几何推理的优雅性的基础上达成的。德国数学家爱德华（S. Eduard, 1862-1930）称坐标几何学的机器似的过程为"坐标磨坊的嘎嘎声"[30]；Murnaghan 在教科书中也承认"它带走了几何学的一些魅力"[31]。

相比之下，Coffin 采取了更加辩证的视角，客观地分析了两者各自的优势："它们各有其独特的优点，我们可以像研究初等几何一样，直接从图形本身来研究它们;这种方法被称为几何方法，它的优点是对所考虑的性质提供更清晰的概念。或者我们可以按照笛卡儿发明的方法，先用一个方程来表示图形的几个部分，然后用纯代数来进行研究。这种方法的优点是使我们能够将研究范围扩展到远远超出其他方法所能做的范围。"进一步，他强调："分析方法之于几

何，就像代数之于普通算术一样——作为辅助工具是有价值的，但作为替代品则是荒谬的。要学好数学，掌握这两方面的知识是必不可少的。”[32]

5.2 与微积分的关系

一方面，Borger 称：“这门学科成为后来课程的重要基础，特别是微积分。”[26]解析几何的方法论为微积分的创立铺平了道路。另一方面，如 Riggs 所言：“微积分的方法和符号已经被应用于求平面上的切线、法线、最值，以及空间上的切面和直线等”[33]，可见，微积分又反过来成为了解析几何的补充，以帮助解决后者研究中萌生出的涉及极限的问题，这种“反哺”使解析几何的研究更加入微。因此，部分教科书将两者结合起来研究：“在解析几何中，算术和代数支持几何，而在我们的微积分方法中，几何是为分析服务的，因此，将这两门学科结合起来研究是合理的。”[34]

5.3 与三角学的关系

多种教科书在预备知识部分特别回顾了三角学基础知识，Ford 认为：“三角学要先于分析学，因此分析学，尤其是在其早期阶段，应该被呈现出来，以形成三角学的自然延续。”[35]事实上，解析几何中极坐标方程的定义与转换、斜率的定义与计算、坐标轴的旋转、向量夹角的计算等内容均离不开三角学。特别地，Peirce 说明了用三角函数定义极坐标的合理性：“三角函数的科学价值在于，它能用符号表示线段和角这两类简单但本质上不同的量，这些符号可以带入同一个公式，可以用于研究这两类量的相互对应的基本性质。因此，三角学是解析几何的入门。”[13]

6 结论与启示

综上，西方早期教科书中解析几何的定义包括“适定几何与不定几何并存”和“仅不定几何”两类，且呈现出从前者向后者演变的趋势。同时，早期教科书中多样化定义的呈现和对学科关系的剖析，使我们对解析几何有了更加立体和深刻的认识。上述内容为今日教学提供诸多启示。

其一，建立知识关联，促进正向迁移。就几何体系内部而言，高中解析几何内容既含有初

中平面几何中已探究过的直线与圆，又包括源起于纯几何研究的圆锥曲线，因此教师首先可以合理引导学生发现纯几何方法的局限之处，使其意识到解析几何登场的必要性，再带领学生探究两种方法的异同，发现它们的互补性；而在几何体系之外，解析几何也可以成为一座沟通各数学分支的桥梁，一方面巩固三角函数、向量等旧知，促进正向知识迁移；另一方面适当拓展，引导学生思考椭圆面积、曲线长度等问题，为将来高等数学的学习留白。

其二，追溯历史渊源，认清学科本质。首先教师应明确“解析几何是一种方法论”的学科定位，注重坐标法思想内涵的理解和数形结合思维的培养，让学生在相应历史背景下感悟用坐标工具研究几何图形性质的程序性和普适性，避免一味将精力浪费在机械而复杂的计算上。其次，不妨以关系图的形式帮助学生厘清研究解析几何的基本工具、过程和方法（图 4），加深对解析几何这门学科的理解。

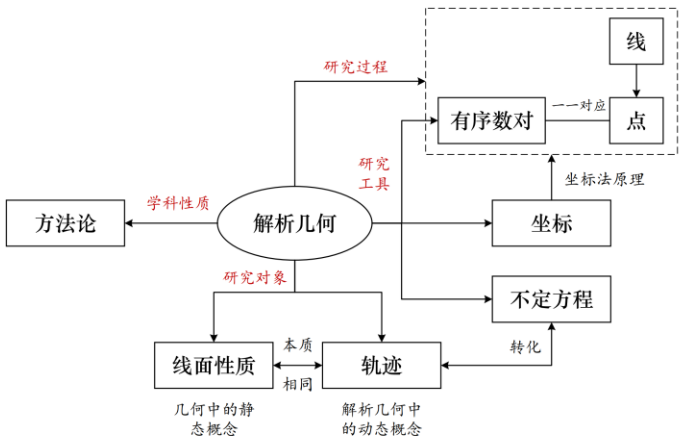

图 4 解析几何本质剖析

其三，挖掘有益素材，营造探究之乐。韦达等数学家用代数方法帮助几何作图的研究，为几何与代数的结合铺平了道路，而笛卡尔作为解析几何的创始人之一，亦是以确定的几何作图问题作为出发点。尽管 20 世纪之后的解析几何教科书中已不见适定几何的踪影，但其作为数与形初步结合的产物，依然可以成为今日课堂教学的有益素材。以黄金分割点的作图为例，初中教师可在介绍黄金分割概念后，鼓励学生驱动思维的齿轮，探究用尺规作出线段黄金分割点的多样方法，同时，尝试比对代数解决确定作图问题之法与欧几里得于《几何原本》中提供的纯几何方法的优劣，从而，一方面使学生体会黄金分割、圆、一元二次方程等知识点的内在联系；另一方面培养其表征转换能力，为日后高中解析几何的学习做铺垫。

参考文献

[1] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想(第 2 册)[M]. 朱学贤, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 1-26.

[2] Descartes, R. *Geometry*[M]. New York: Dover Publications, 1954: 1-37.

[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 43.

[4] 朱城. 高中生解析几何学习障碍及教学对策[D]. 上海: 上海师范大学, 2014.

[5] 陆旌霞. 高二学生解析几何学习障碍及对策研究[D]. 江苏: 南京师范大学, 2017.

[6] 韩粟, 王巳震, 汪晓勤. HPM 视角下平面解析几何序言课的教学实践与思考[J]. 数学通报, 2022, 61(8): 23-29, 40.

[7] 庞海燕. HPM 视角下“解析几何序言课”实践与研究[J]. 数学教学通讯, 2020(27): 9-12.

[8] 任念兵. 一个新课型案例:《解析几何序言》的教学设计[J]. 数学教学, 2014(11): 9-13.

[9] Fine, H. B. & Thompson, H. D. *Coordinate Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1914: 183.

[10] Lardner, D. *A Treatise on Algebraic Geometry*[M]. London: Whittaker, Treacher & Arnot, 1831: 1.

[11] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Company, 1836: 1-2, 13.

[12] Church, A. E. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: A.S. Barnes, 1851: 1, 18.

[13] Peirce, J. M. *A Text-book of Analytic Geometry*[M]. Cambridge: J. Bartlett, 1857: 1, 44.

[14] Howison, G. H. *A Treatise on Analytic Geometry*[M]. Cincinnati, Wilson, Hinkle & Company, 1869: 1-2, 24-25.

[15] Smyth, W. *Elements of Analytical Geometry*[M]. Boston: Sanborn, Carter and Bazin, 1855: 1.

[16] Maltbie, W. H. *Analytic Geometry*[M]. Baltimore: The Sun Job Printing Office, 1906: 4.

[17] O'Brien, M. *A Treatise on Plane Coordinate Geometry*[M]. Cambridge: Deightons, 1844: 12

[18] Taylor, H. E. *Plane Analytic Geometry*[M]. New York: Wiley, 1962: 4.

[19] Docharty, G. B. *Elements of Analytical Geometry, and of the Differential and Integral Calculus*[M]. New York: Harper & Brothers, 1865: 1.

[20] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 151.

[21] Sonnet, H. & Frontera. G. *Éléments de géométrie analytique*[M]. París: Hachette, 1863: 1.

[22] Candy, A. L. *The Elements of Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Company, 1904: iii.

[23] Phillips, H. B. *Analytic Geometry and Calculus*[M]. Mass: Addison-Wesley Press, 1942: 101.

[24] Peck, W. G. *A Treatise on Analytical Geometry*[M]. New York: A. S. Barnes & Company, 1876: 9.

[25] Nowlan, F. S. *Analytic Geometry*[M]. New York: The McGraw-Hill Book Company, 1946: 1.

[26] Borger, R. L. *Analytic Geometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1928: v.

[27] Gibson, G. A. & Pinkerton, P. *Elements of Analytical Geometry*[M]. London: Macmillan & Company, 1919: viii.

[28] Schmall, C. N. *A First Course in Analytic Geometry, Plane and Solid*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1921: v.

[29] Nathan, D. S. *Analytic Geometry*[M]. New York: Ronald Press Company, 1949: 1.

[30] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想(第 3 册)[M]. 万伟勋, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 245.

[31] Murnaghan, F. D. *Analytic Geometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1946: 1.

[32] Coffin, J. H. *Elements of Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Collins, 1881: 3-4.

[33] Riggs, N. C. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1911: v.

[34] Holmes, C. T. *Calculus and Analytic Geometry*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1950: 1.

[35] Ford, W. B. *A Brief Course in Analytic Geometry and The Elements of Curve-Fitting*[M]. New York: H. Holt & Company, 1925: v.

教学实践

课堂留白视角下概念型数学模型教学实践与思考

——以一元二次方程教学为例

李 荣

（苏州市阳山实验初级中学校，江苏 215151）

1 引 言

课堂留白是指在数学课堂教学过程中，为了引导学生更好的提升数学素养，教师有意无意的留出一定的空白，促使学生对数学理解进行自我建构的一种策略或教学艺术[1]。新课标强调，学生的学习是一个主动地过程，学生独立思考、自主探索、合作交流是数学学习的重要方式[2]，课堂留白让学生的自主探索成为可能，课堂留白能让学生充分借助课堂之白填补知识框架之白和数学素养之白。

概念型数学模型主要是数学中的基本概念，一元二次方程模型是典型的概念型数学模型。数学建模是连接现实世界与数学的重要桥梁，模型意识和模型观念也是中学生数学核心素养的重要组成部分，通过数学建模让学生体会到数学的实用性和价值，进而提升数学素养。

课堂留白和数学建模最终的落脚点相同，都是为了提升学生的核心素养。课堂留白作为一种教学策略或教学艺术应用于概念型数学模型教学，给学生数学素养的提升上了双保险。本节课教师把课堂留白贯穿于整个数学建模过程，主要包括“模型引入-模型求解-模型建立和修正-模型应用”的四个方面[3]，整节课的思路遵循从实际问题中来到实际问题中去的明线设计。

2 教学分析

“一元二次方程”是苏科版九年级上册第一章第一节的内容，本节课主要介绍一元二次方程的概念，是典型的概念型数学模型课。学生已经学习了一元一次方程、二元一次方程组、可化为一元一次方程的分式方程等知识，积累了一定的学习方程模型的经验。一元二次方程是以

前学过的方程知识的延续和深化，是以后学习二次函数等其他知识的基础，也对其他学科的学习有重要意义。

结合概念型数学模型的授课方法，本节课由北宋数学家刘益《益古根源》中古题引入[4]，通过创设真实的问题情境，让学生切实感受到数学来源于生活，方程是刻画现实世界的有效模型。本节课还从课堂留白视角让学生经历一元二次方程模型的探究过程，让学生加深对概念型数学模型的理解，同时让学生感受课堂留白对于概念型数学模型课的促进作用。

3 教学设计与实施

3.1 模型引入

课前分享：初中阶段已经学习了一元一次方程、二元一次方程组、分式方程等，我们是如何引入方程、又如何研究方程？

【设计意图】通过课前留白，让学生思考之前学过的方程模型，回顾方程模型的探究过程，为接下来新课的探究作铺垫。由于之前已有方程模型的学习经验，所以经过思考，学生基本能按照“实际问题-引入方程-方程解法-方程应用”的流程，纵向总结概念型数学模型的探究过程。

师：本节课我们继续来研究方程，在我国古代也有很多关于方程的问题，北宋时代数学家刘益在其《益古根源》中用方程解决了如下问题。(题目经过翻译和改编)

【设计意图】留白式教学强调知识的情境性[5]，通过古题引入，让学生体会中国古代劳动人民的智慧，了解中国传统文化，同时经过对后续一元二次方程的探究，体现数学的发展性和实用价值，渗透学科德育。

问题 1：一块矩形田地，面积 864 平方米，长 36 米，宽多少米？

【设计意图】此问题要求用方程解决问题，引导学生复习一元一次方程模型，为学习一元二次方程进行知识唤醒。虽有部分学生用算术法去解决，对问题 1 用算术法求解很简洁，但随着问题深入他们会发现方程的实用性，凸显了本节课的必要性。

问题 2：一块矩形田地，面积 864 平方米，长是宽的 $\frac{3}{2}$ 倍，宽多少米？

问题 3：一块矩形田地，面积864平方米，长比宽多 12 米，宽多少米？

问题 4：一块矩形田地，面积 864 平方米，长比宽两倍少 12 米，宽多少米？

问题 5：一块矩形田地，面积 864 平方米，周长 120 米，宽多少米？

【设计意图】一元二次方程模型来源于生活，根据以上实际问题的依次呈现，让学生产生认知冲突，由熟悉的一元一次方程模型过渡到一元二次方程模型。呈现问题之后，进行课堂留白，给学生留时间让他们列方程，并对所列的方程进行类比观察，渗透类比的数学思想，为后面模型求解作铺垫。

3.2 模型求解

经过前面的系列问题，学生可以成功列出以下方程：$\frac{3}{2}x^2=864, x(x+12)=864, x(2x-12)=864, x(60-x)=864$。

思考：这些是我们熟悉的方程吗？他们有何共同点？

生：方程都只含有一个未知数，等号右侧都是常数 864，并且未知数的次数是 2。

生：未知数的最高次数是 2。

师：如何得出未知数的次数？

生：可以把他们“算出来”。

师：如何计算？

生：把等号左侧单项式与多项式相乘，分别得出 $x^2+12x=864, 2x^2-12x=864, 60x-x^2=864$，这样就可以得出未知数最高次数是 2。

【设计意图】此环节属于模型得出的关键环节，培养学生分析问题的能力。

3.3 模型建立与修正

3.3.1 模型的文字表示及修正

思考：你能给刚才探究的方程取个名字吗？

生：一元二次方程。

师：你能给一元二次方程下定义吗？

生：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的方程叫做一元二次方程。

学生对此定义没有异议，教师继续引导。

师：大家思考 $x^2+x+\dfrac{1}{x}=3$ 是一元二次方程吗？

生：是的，他符合我们下的定义。

生：不是，此方程分母中含有字母，所以他是分式方程。

生：为了不产生歧义，一元二次方程的定义中还需添加整式方程。（很多学生恍然大悟）

师：现在能否给出一元二次方程的完整定义？

生众：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程。

【设计意图】此环节属于模型建立，也可以定位成模型的文字叙述与模型的一次修正。数学概念是高度抽象的，同时也是精准的、没有歧义的，教师通过给出分式方程模型 $x^2+x+\dfrac{1}{x}=3$ 制造认知冲突，让学生意识到自己建立的模型是不完美的，是可以进一步修正的，让学生体会了数学的严谨性。从课堂留白的角度看属于陈述之白，教师没有直接告知模型概念，而是通过让学生经过探讨自己总结模型，必要时给与引导，促进模型的进一步完善，在此过程中，学生能体会到数学的严谨性，也有助于提升数学思维品质。

及时巩固：我们学习了一元二次方程，你能写出一些一元二次方程吗？

【设计意图】此环节主要是为了让学生巩固一元二次方程的定义，此环节没有像大多数概念型数学模型课一样对数学概念进行过度辨析，而是通过让学生写方程，体会一元二次方程定义的要点，同时感受变化的是系数，不变的是未知数的个数和次数，为后面抽象出一元二次方程的一般模型作铺垫。

【微视频】教师播放视频：一元二次方程的历史，主要介绍古今中外一元二次方程的发展过程。

师：通过以上视频观看，分享一下感受。

【设计意图】本环节从课堂留白的角度属于超越之白，通过观看一元二次方程发展史的视频，一方面提升学生的课堂积极性，另一方面让学生感受数学家锲而不舍的精神、数学的发展性和学习数学的价值。

3.3.2 模型的符号表示及修正

思考：一元二次方程是写不完的，千千万万的一元二次方程，他们的共性是什么呢？有没有一般形式？数学追求简洁美，除了文字叙述还有没有其他方式去概括一元二次方程的模型？

生：可以用 $ax^2+bx=c$（a,b,c 为常数，$a\neq 0$）去表示。

师：能否像一元一次方程的一般形式一样，写成等号右侧为 0 的形式？

生：$ax^2+bx-c=0$（a,b,c 为常数，$a\neq 0$）。

师：等号右侧的多项式我们习惯写成几个单项式和的形式，可以怎么修正一下？

生：$ax^2+bx+c=0$（a,b,c 为常数，$a\neq 0$）。

【设计意图】因为之前有一元一次方程一般形式的经验，结合一元一次方程的一般形式 $ax+b=0$（a,b 为常数，$a\neq 0$），经过学生思考，会想到用字母去表示一元二次方程的系数。此环节为模型的符号表示及二次修正，用数学语言表达现实世界也是核心素养的要求，从文字到符号在数学史上是个巨大的飞跃，教师课上给学生补充数学家们学会用字母表示数经历了三千多年，激发学生的共情心理。用字母表示数对学生来说也是难点，所以课上要充分给学生留白去思考，实现难点的突破。一元二次方程一般模型得出让学生深切体会到数学的发展性和数学家们对真理的不懈追求，把数学这门看似冷冰冰的学科赋予温度，这对学生数学兴趣的激发无疑是有益的。

3.4 模型应用

问题 6：如图 1，在一块长为 36 米，宽为 24 米的矩形田地上，要修建同样宽的两条互相垂直的道路（两条道路各与矩形的一条边平行），剩余部分种水稻，要使种树水稻为 805 平方米，道路宽应为多少米？

变式：如图 2，在一块长为 36 米，宽为 24 米的矩形田地上，修筑同样宽的道路（图中阴影部分），剩余部分种水稻，要使种水稻面积为 805 平方米，道路宽应为多少米？

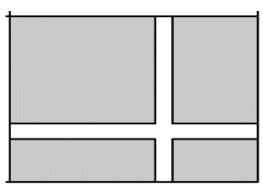

图 1 问题 6 图

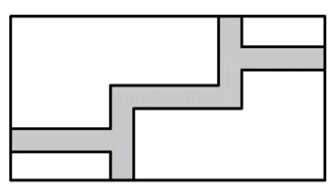

图 2 变式图

思考：这两条路还可以怎么修，保证种树面积不变？

【设计意图】数学模型从实际问题中来，到实际问题中去，本环节是一元二次方程模型在

实际问题中的应用，通过问题 6 和变式加深学生对此类问题本质（即图形平移）理解。最后的思考题答案不唯一，可作为问题之白可以让学生课后讨论。

4 教学思考

4.1 提高学生对概念型数学模型的探究意识

在学生甚至部分一线教师心目中，数学概念就是一个名词，知道他是什么就可以了，学生很难想到通过探究一个数学概念还能提升自己的数学素养。本节课以学生为主体，对概念型数学模型即一元二次方程模型从模型引入、求解、建立及检验、应用四个部分组织教学，让学生亲历概念型数学模型得出的整个过程，加深了学生对概念型数学模型的理解。

4.2 巧用课堂留白，让建模课堂实现真探究

纵观现在数学课堂，不乏有“是不是”“对不对”等无效问题充斥其中。课上要调动学生积极性，让学生实现真探究, 离不开教师的自我提升。教师好好学习，学生才能天天向上，这需要教师个人甚至整个备课组的集体智慧，要精准把握课堂的重难点。课堂留白为学生发现和提出、分析和解决问题创造了条件，提高学生课堂参与度，促进学生核心素养的培养[5]，它是数学建模课的重要组成部分。课堂问题的开放性决定了课堂生成的丰富性，如何让课堂生成有效地服务于数学建模，需要教师在实践中进一步探索。本节课主要涉及陈述之白，让学生经历模型的深层探索，不断修正完善；超越之白，让学生在数学学习的过程中除了学到冰冷的知识，更体会到知识背后那一颗颗火热的心，让学生产生情感共鸣。

4.3 学生素养提升要从课堂延伸到课后

素养提升是总目标，更是师生时时刻刻要追求的目标。本节课整体比较顺畅，但也暴露了平时教学中的问题：一是学生会做不会说，教育的功利性让学生越体会到上课是为了写作业，所以现在越多的学生呈现出会做不会说的状态，比如在发现一元二次方程未知数最高次数是 2、单项式乘多项式等，很多学生不会准确表达；二是学生的创新意识和创新能力亟待加强，比如让学生写一元二次方程时，有的学生会把二次项系数由 1 写到 10，他们没有意识到去思考系

数的正负性或者系数的类别，思维比较局限。

针对以上现象我们可以从以下两个方面去改善：一方面，组织“数学小讲师”活动，让每位学生在课后走上自己的小讲台去表达，把重难点、易错点、关键点等录成视频上传，教师予以修正，这样可以加深学生对基础知识的理解，提升学习数学的自信心；另一方面，课后少布置客观题，多布置主观题和拓展类的题目，让学生在课后也能积极思考问题，并且把思考的问题及时以小作文的形式整理下来，可以课上与其他学生一起研读交流，激发智慧的火花。

参考文献

[1] 尹超. 21 世纪以来我国中小学数学课堂留白研究的回顾与展望[J]. 中学数学杂志, 2023(2): 11-14.

[2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

[3] 刘伟. 初中数学建模能力培养研究[D]. 山东: 曲阜师范大学, 2020.

[4] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[5] 王华, 汪晓勤. 中小学数学留白创造式教学[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

数学话剧的创编演及价值分析

——以《华蘅芳传》为例

胡永强

（苏州市阳山实验初级中学校，江苏 215151）

1 引 言

数学给人的印象往往是一堆符号的计算及推理，不少学生对数学有恐惧心理，对待数学学习兴趣不足，认为数学学习就是做题，很少有人体会过其他形式的数学学习。数学话剧是一种全新的数学学习方式，可以激发学生数学学习兴趣，改变对数学的认识[1]。近来，我们带领初中生一起探索数学话剧的创作、编排及演出，收到了良好的效果。

2 数学话剧的内涵与价值

2.1 数学话剧的内涵

数学话剧是以数学知识的发生发展过程、数学家的故事、数学与文化的关系等为主要素材，创作编演的戏剧。数学话剧依托话剧这样一种具象演绎，将数学融入其中，将数学内容生活化、艺术化、通俗化，让更多人走近数学、了解数学、喜爱数学，是传播数学文化的一种新形式[2]。

2.2 数学话剧的价值

数学话剧作为一种新的数学学习形式，具有多方面的价值。数学话剧可以促进学生数学学科知识的学习与理解，实现学科价值；可以达成良好的数学学科德育效果；可以帮助学生体悟数学的美育价值。

2.2.1 数学话剧的学科价值

学生在创作数学话剧之前需要学习相关的数学知识，在创作、排练及演出过程中，他们对相关学科知识的认识和理解会逐步加深，在此基础上可以进一步领悟到更深的思想方法层面，

甚至真正体会到数学学科的价值。

2.2.2 数学话剧的德育价值

数学话剧的创作、排练及演出可以促进学生在理性、情感、信念、品质等数学学科德育维度获得较大发展，从而达成良好的德育之效。数学话剧的创作背景是数学，数学是理性的化身，因此学生可以从中体会到理性精神。数学话剧是以故事的形式呈现数学知识或数学家的故事等，这可以提高学生数学学习兴趣，培养积极的数学情感，让他们变得喜爱数学。数学话剧演绎数学知识的发展历程，让学生深刻体会到数学并不是一个僵化的真理系统，而是一个不断发展和完善的过程，从而培养学生正确的数学信念。在数学话剧的创作、排练和演出过程中可以让学生体会到做任何事情都需要踏实勤奋、持之以恒、实事求是、合作共赢、注意倾听等优秀品质。

2.2.3 数学话剧的美育价值

现代美育把自身的全部活动看作是为受教育者全面和谐的学习与发展提供帮助，并且把这种学习与发展看作是一个审美与立美过程。美育要通过自身的立美操作（所谓“以美启真”和“以美储善”等），实现受教育者的审美学习（愉快而高效的学习）与立美发展（知、情、意诸结构按照美的规律综合协调的发展）[3]。马克思说：“人也是按照美的规律来建造的。”[4]教育自身是美的，在内容和形式上都用美的标准来要求自己，成为合目的性与合规律性、善与真相统一的实践活动，以培养具有美的品质和特性的人[5]。结合以上观点，我们可以将美育分为审美和立美两个方面，审美是借助艺术美、自然美和社会美等提升学生感悟美、欣赏美、品鉴美的能力，立美是通过引导学生参与相关教育活动过程，在此过程中通过知、情、意的协调发展提升创造美的能力。

数学话剧与数学的历史文化息息相关，涉及服装、语言、动作、舞美等诸多方面，其间蕴含着丰富的美育元素。编排与演出数学话剧的过程既能够培养学生的审美能力又能培养“立美”能力。创作、排练数学话剧的过程对参与者既是审美过程也是立美过程，更主要是“立美”的过程，观看数学话剧对观众主要是审美过程。创作、排练与演出数学话剧的全过程均可以帮助学生体悟数学的美育价值，提升审美与立美能力。

3 《华蘅芳传》的历史素材及剧本创作

3.1 历史素材

华蘅芳（1833-1902），江苏无锡人，晚清数学家、翻译家、教育家，从小酷爱数学，少年时期就遍读中国古代算不之书，14 岁时研究出勾股定理的 22 种证明方法，后来与同乡徐寿一起去上海墨海书馆拜访著名数学家李善兰，并学习西方数学，学成后加入曾国藩创办的安庆内军械所研制新式武器装备，制作出中国第一艘蒸汽轮船，在天津武备学堂任教习期间制作了我国第一个氢气球，晚年回到家乡创办新式学堂，允许女孩入学，开设英语课程。

3.2 剧本创作

根据以上历史素材，按照华蘅芳的生平轨迹创作一出数学话剧，共包括：钻研中算、学贯中西、实业救国和提携后生四幕。

第一幕 钻研中算

旁白：1833 年，在无锡荡口古镇的一个书香门第，一名男婴呱呱坠地，他自幼喜欢数学，10 岁开始就常读中国古代各种数学经书，特别是接触到程大位的《算法统宗》后，他更是废寝忘食地学习数学，他就是后来成为数学家的华蘅芳。

华蘅芳：（趴在桌面上，无精打采地看着《四书五经》。）

华父：芳儿，芳儿，坐正！打起精神读书！

华蘅芳（趁父亲不注意偷偷拿出藏在《四书五经》下面的《算法统宗》沉迷其中，边看边算。）

华父（发现后用教鞭在桌子上重重敲了一下）：芳儿，你怎么又在做数学，数学可以兼明，不可以专业，读经书、考功名才是正业啊！把主要精力用于数学，这不是舍本逐末吗！

华蘅芳：父亲，我觉得数学与《四书五经》不同，它有明显的实际用途，我就是喜欢各种算学之书。

华父（苦口婆心）：旁人怎么看你，会觉得你胸无大志啊！

华蘅芳（继续埋头苦算）：任凭别人议论！

华父（无奈地边叹气边摇头。）

旁白：日子久了，华父逐渐看出儿子的兴趣在数学而不在经史，且此心难改，于是打算检

测一下儿子的数学基础。

华父：芳儿，你来做一下这个算法测试。

旁白：华父看儿子在数学方面确实颇有天分，竟能无师自通，便不再勉强他读经史、考功名了。还从北京买来《周髀算经》《九章算术》等中国古典数学著作。

华父：芳儿，这是我买给你的算学之书，希望你能潜心钻研。

华蘅芳：谢谢父亲。

旁白：华蘅芳沉浸在数学的海洋里，如饥似渴地吸收着知识，华父还特地找人给华蘅芳做老师。近来他迷上了勾股定理的证明，连他母亲喊他吃饭都浑然不觉。

华母：芳儿，芳儿，吃饭了。

华蘅芳（自言自语）：太好了！我又找到一种证法，现在我已经找到 22 种证明勾股定理的方法了！

第二幕 学贯中西

旁白：1852 年，19 岁的华蘅芳已经学完中国古代数学，同年他结识了同乡徐寿，两人志趣相投，一见如故。他们听说上海有一家墨海书馆专门译售国外科技专著，在那里主持工作的是当时国内名望最高的数学大师李善兰，心生向往。1855 年，华蘅芳和徐寿一起奔赴上海拜访李善兰。

华蘅芳（对徐寿）：徐先生，这边。

华蘅芳（对李善兰）：李先生，您是著名数学大师，博古通今，学贯中西，我们此次慕名而来是想向您学习西方数学知识，请您不吝赐教，提携后生。

李善兰：谬赞！谬赞！

旁白：李善兰回答了华蘅芳提出的一些疑难问题，介绍了西方数学研究的情况，使他眼界大开。

华蘅芳：先生，这是什么？

李善兰：这是我正在翻译的《代微积拾级》，介绍的是微积分学方面的知识。

华蘅芳：原来数学上除了天元术以外，竟然还有微分、积分之术，我十分感兴趣，想抄录一些回去研究，不知是否可以？

李善兰：当然可以，你们如此好学上进，真是后生可畏啊！

华蘅芳&徐寿：谢谢先生！

旁白：四年后。

李善兰：蘅芳，我翻译的《代微积拾级》出版了，之前你抄录了一些，研究得怎么样？

华蘅芳：说来惭愧，想来是我才疏学浅，读完仍然有颇多困惑。

李善兰：无妨无妨，今日我把书赠与你，你可以仔细阅读。

华蘅芳：谢谢先生，我一定认真思考。

李善兰：蘅芳，你如此好学上进，以后必成大器，希望你将来能够报效国家。

华蘅芳：感谢先生倾囊相授，我定会努力钻研，不负先生厚望。

旁白：对于华蘅芳来说，结识李善兰这位良师益友，让他受益终身。后来，华蘅芳翻译了我国第二部微积分著作《微积溯源》。他在晚年回顾这段学习微积分经历时曾感慨地说："譬如傍晚之星，初见一点，旋见数点，又见数十点、数百点，以至灿然布满天空。"

第三幕 实业救国

旁白：1861 年，曾国藩筹建"安庆内军械所"发展军事工作，华蘅芳和徐寿都被招入军械所。

曾国藩：华先生、徐先生，今日找你们有一要事相商。

华蘅芳&徐寿：曾大人找我等有何事？

曾国藩：目前，我国的船只都是风帆驱动，没有风的时候只能依靠人力，甚为落后啊，之前想从洋人那里购置船只，但是被骗了七十几万两白银。所以必须要靠自己才行，希望你们能制造一艘机器驱动的轮船。

华蘅芳&徐寿：是！大人！

曾国藩：有任何需要尽管提出来，一定竭力满足。

华蘅芳&徐寿：谢大人！

徐寿（苦恼）：要想造机动船，首先要造船用蒸汽机才行，可是我国当前钢铁、机械制造业一片空白，连一颗螺丝钉都造不出来，这该如何是好啊？

华蘅芳（灵光一闪）：先生，可否还记得我们从墨海书馆购得的《博物新编》？

徐寿：自然。

华蘅芳：我记得上面有一张蒸汽机的图样。

徐寿：太好了，我们一起去研究一下。

旁白：几天后。

曾国藩：二位先生，进展怎么样了？

华蘅芳：大人，我们已经研究完蒸汽机的图样。

徐寿：但纸上得来终觉浅，需要眼见为实才行啊，洋人不会给我们看的，怎么办？

曾国藩（思索片刻）：我来租赁一艘西洋轮船，以公务为由停靠在安庆附近的江边，你们借机来考察一下。

华蘅芳（和徐寿对视一眼）：明白！

旁白：经过 3 个月的努力，他们成功制造出我国第一台蒸汽机。

曾国藩（激动难掩）：太好了！太好了！洋人能办的事情我中国人也能办到！蒸汽机有了，你们开始投入蒸汽轮船的研发制造吧，这样才能在江海上与入侵者抗衡。近期前方战事吃紧，你们要加快研制蒸汽轮船的速度呀！

徐寿（喜悦）：是！大人！

华蘅芳：我们定会夜以继日，快快研制！

旁白：经过了 4 年的实验、改进、建模、放大，1865 年由华蘅芳设计、徐寿监制的中国第一艘蒸汽机轮船终于成功试水。

徐寿：请大人给这艘船赐个名字吧！

曾国藩（摸了摸胡须，沉思一下）：古书曰：黄鹄，大鸟也，一举千里者。这艘蒸汽机轮船就叫“黄鹄号”吧。

徐寿：好名字！

华蘅芳：就叫“黄鹄号”!

第四幕 提携后生

旁白：1887 年，53 岁的华蘅芳在天津武备学堂中任数学教习，天津武备学堂是中国近代第一所陆军军官学校，为示教演习，学堂从法国购进了一只法越交战时用过的军事瞭望氢气球。一天，学生义愤填膺地来找他。

学生 1：先生，他们洋人也太瞧不起人了吧。

华蘅芳：怎么了？

学生 1：我们想试乘一下那个军事瞭望氢气球，可是不知道怎么玩，就去找了学堂里的一位德国教习求教。

华蘅芳：然后呢？

学生 1：他不但不教，还嘲笑我们说 100 多年前欧洲人就已经制造了氢气球，堂堂大清帝国连个氢气都制造不出来，还谈什么氢气球？

华蘅芳（气得肺都要炸了，果断道）：不放洋人的气球了，我们自己造！

旁白：华蘅芳立即着手制作盐酸收集氢气，制造出一枚直径 5 尺的氢气球，当场演放升空，试验非常成功。这个氢气球也是中国航空史上成功制造的第一个氢气球。

旁白：1898 年 65 岁的华蘅芳回到家乡，与同乡一起创办了中国近代第一所新式学堂，该学堂有两项创举：一是开设外语，二是男女并教，在国内属首例。华蘅芳把他一生最后的心血都投放到教育幼小的孩子身上了。

旁白：这天，华蘅芳故意在黑板上算错一道数学题。

学生 2：先生错了！（不太自信）

华蘅芳（慈祥地）：哦，那你过来改一下！

学生 2（学生走向黑板，改正错误）：老师，是这样吗？

华蘅芳（仰头微笑）：是这样的，老师算错了。我老了，做算术就不如你们喽！

旁白：1902 年，华蘅芳因病溘然长逝。华蘅芳用毕生的精力，努力学习，披荆斩棘，为国家的振兴、为科学知识传播所奋斗，他的名字和业绩永留青史。也希望像华蘅芳的故事能够赋予我们以智慧和心灵的启迪，督促我们在求学的道路上不断前进，实现我们自己的人生价值。

4 数学话剧的价值分析

在演出后，对演员及部分观众分别进行问卷和访谈，将调查结果整理如下。

4.1 学科价值分析

数学话剧是以数学的历史或者数学家的故事为基础的，这里必然涉及一定的数学学科内容，将相关的数学学科内容以话剧的形式进行创作和演出，一方面可以激发学生对相关内容的研究热情，另一方面使得学生对相关内容的认识和理解变得更加深刻。

调查显示，80%的学生对 14 岁的华蘅芳研究出 22 种勾股定理的证明方法印象十分深刻，这一内容对于初二和初三的学生较为熟悉，话剧的这一剧情激发了学生探究勾股定理证明方法的兴趣和热情，让他们投入到勾股定理这一学科知识的研究中。有学生写道："勾股定理原来有这么多种证明方法，真是让我大开眼界""华蘅芳在我们这个年纪就研究出勾股定理的 22 种证明方法，大屏幕上显示的 22 种证法图形实在让人感到震撼，我也要研究一下，看看能否找出一种新的证明方法""我发现华蘅芳都是利用图形的割补法进行证明的"。

4.2 德育价值分析

数学话剧是一种新的数学历史与文化的传播形式，创、编、演的整个流程促进学生在理性、情感、信念、品质等数学学科德育维度获得提升，达成良好的德育之效。

话剧中华蘅芳废寝忘食地坚持寻找勾股定理的新证法，促使学生体会到坚持真理和追求创新的理性精神。有学生写道："华蘅芳痴迷于寻找勾股定理的新的证明方法，连母亲喊他吃饭都听不到，他的这种善于思考的精神深深地感染了我。"数学话剧通过其独特的方式呈现数学知识、历史与文化，激发了学生对待数学的兴趣，增强了学生的数学学习动机。有学生写道："数学话剧让我看到了不一样的数学，这样的数学让我心情愉悦，激动不已，也让我体会到数学是非常有趣的。"数学话剧让学生体会到数学是人类的一种文化活动，勾股定理的不同证明方法让学生体会到数学是发展与演进，增强了学生的数学信念。有学生写道："观看本话剧让我认识到数学在一代又一代人的不断努力下逐步向前发展。"华蘅芳学习微积分的过程让学生体会到学习并不是一帆风顺的，面对困难不要灰心丧气，要有迎难而上的品质，话剧是以对话来推进情节发展，对话让学生抛弃自我中心的思维习惯，学会倾听。

4.3 美育价值分析

数学话剧以话剧的形式讲述数学的历史或数学家的故事，服装、语言、举手投足间无不向观众展示美，进而提升了观众的审美能力，演员们在创编演的过程中除了提升审美能力外还提升了立美能力，他们在创造美。

90%的观众表示观看数学话剧精彩的对话、精致的服饰、精当的动作给自己带来美的享受。许多学生写到："观看数学话剧让我享受到一场视觉和听觉的盛宴，演员的服饰搭配很美，剧

情跌宕起伏、扣人心弦，给人一种美的享受。”参与话剧创作及演出的学生表示通过自己的努力创造了美。有学生写道：“在创作话剧时，我将自己代入到不同角色中，体会到了华蘅芳对数学由衷的热爱，也体会到了处于内忧外患时期的国人非常强烈地希望通过自己的努力改变国家的落后状况，这让我深深地感悟到华蘅芳等有识之士的心灵美，我也将这种美通过话剧传递给观众。”

5 结 语

数学话剧是一种新兴的数学学习与传播方式，将数学知识、数学史与数学文化以话剧的形式呈现出来，对创编演人员及观众都产生了积极的影响，让学生对数学的兴趣变得深厚，可以很好地落实数学学科德育功能，同时还可以提升学生的美育素养。但数学话剧的研究还处于起步阶段，在选题、剧本创作、演出方式及实效分析等方面还需要在实践中不断积累、提炼与总结。

参考文献

[1] 刘欣雨. 数学话剧德育价值的实践研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2019.

[2] 胡永强. 数学话剧: 初中数学学科德育新路径——以《祖冲之与大明历》为例[J]. 数学教学, 2023(5): 20-23.

[3] 陈建翔. 现代美育: 从结构主义到节奏主义[J]. 教育科学研究, 1991(2): 5-7, 39.

[4] 卡尔·马克思. 1844 年经济学哲学手稿[M]. 北京: 人民出版社, 1985: 78.

[5] 陈建翔. 人的生命节奏与“立美育人”[J]. 高等师范教育研究, 1991(3): 27-31, 50.

时空隧道

基本不等式为何“基本”？

韩 粟

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

不等关系是数学中的基本数量关系，用于刻画不等关系的不等式则是高中数学的基石之一。在高中数学学习中，我们会遇到代数结构清晰的基本不等式，与一元二次方程和一元二次函数紧密联系的一元二次不等式，披着绝对值符号“外衣”的绝对值不等式，源于生活中糖水问题的“糖水不等式”。进一步拓展开，还有冠以历史上不同数学家之名的柯西不等式、切比雪夫不等式、闵可夫斯基不等式等。由这些“有名”的不等式，又可以证明和推导出更多“无名”但同样或美妙，或经典的不等式。在这成千上万个不等式中，有一个不等式的地位极其之高，那便是基本不等式。不知同学们有没有思考过：基本不等式何以称之为“基本”呢？

今天，我们将基于对数学史的考察，结合对教科书和高考试题的分析，从“源”“流”“形”“用”四个角度出发，尝试回答这一问题。

1 基本之“源”：算术中项与几何中项

在数学上，比较两数（量）的大小是一件再自然不过的事情。且看数学史，古人定义了两种比较的方法：比较一个数比另一个数多了多少，便产生了算术比，若两算术比相等，就得到了算术比例；类似地，比较一个数是另一个数的多少倍，便产生了几何比，进而就有了几何比例的概念。基本不等式正起源于古人对算术比例和几何比例的中项，即算术中项（Arithmetic mean, 又称等差中项）和几何中项（Geometric mean, 又称等比中项）的讨论。

用今天的符号语言来表示：若 a，A，b 成算术比例，即 $A-a=b-A$，得算术中项 $A=\dfrac{a+b}{2}$。若 a，G，b 成几何比例，即 $G:a=b:G$，得几何中项 $G=\sqrt{ab}$。不难发现，我们熟悉的基本不等式 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$ 正反映出“两正数的几何中项不超过算术中项”这一大小关系。故就历史序而言，基本不等式中的“基本”二字实则蕴含着该不等式联结着两个

在数学史上出现相当早、分量相当高的基本量的意义。

当然，热衷于研究比例关系以追求宇宙万物之和谐的人类早期数学工作者们可不仅知道以上两类中项，譬如，还有被直截了当地赋予“和谐（harmonic）”之名的调和中项 $H=\dfrac{2ab}{a+b}$。然而，无论是古巴比伦精通数学的祭司，还是古希腊毕达哥拉斯学派的众多学者，似乎都无意比较不同中项的大小关系。据推测，阿基米德（Archimedes, 前 287-前 212）可能已经知道基本不等式。

2 基本之“流”：均值不等式链

从取平均的观点，算术中项和几何中项等价于两数的算术平均数和几何平均数，这一表述对我们来说更加亲切。课本在“基本不等式”一节正是由天平两次称物的质量引入“两个正数 a, b 的算术平均数和几何平均数之间具有怎样的大小关系？”的问题。事实上，这里隐藏着基本不等式的一个英文名——“算术平均-几何平均不等式（简称 AM-GM Inequality）”，国内简称为“均值不等式”。

看到这，或许你会想，只有两种平均数吗？只有一个均值不等式吗？例如，若将调和中项等价易名为调和平均值，有没有与它相关的均值不等式呢？恭喜你，发现了基本不等式中“基本”的又一重意义所在，那就是由它可以推导出更多的均值不等式。换言之，它可以视作其余均值不等式的“基础（fundamental）”。

例如，调和平均值 $H=\dfrac{2ab}{a+b}=G\left(\dfrac{G}{A}\right)$，由 $G\le A$ 立得

$$H\le G,$$

即“调和平均-几何平均不等式”，进一步有

$$H\le G\le A,$$

再引入平方平均值 $R=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}=A\sqrt{2-\left(\dfrac{G}{A}\right)^2}$，由 $G\le A$ 立得

$$R\ge A,$$

即“算术平均-平方平均不等式”，进一步又有

$$H\le G\le A\le R。$$

这就是高中阶段常用的一条均值不等式链，常用“调几算方”四字记之，而我们熟悉的基本不等式位列于链中央。

3 基本之“形”：丰富的几何模型

仅从代数的角度，不难看出基本不等式涉及四则运算中的加法、乘法和除法，还涉及开方运算，可以用于解决求最值等问题，所谓“和定积最大，积定和最小”。反过来，用代数方法也能够简洁明了地证得基本不等式。然而，对大名鼎鼎的基本不等式的解读只限于代数的单一视角吗？

纵观数学史，从几何的角度，我们能看到基本不等式更丰富的面貌，并由其在中西不同数学原典中的无处不在感悟其“基本”。借鉴“无字证明（Proof without words）”的思想，还可以化基本不等式的几何模型为数学任务。同学们不妨拿起笔，试试看，你能完成下面三个无字证明的挑战吗？能分别说说基本不等式的几何意义吗？

继续回首古希腊，伟大的数学家欧几里得（Euclid, 约前 325-约前 265）在《几何原本》第 VI 卷命题 13 中为作两条已知线段的几何中项建立起“半圆模型”，其后帕普斯（Pappus, 约 290-约 350）在该模型的基础上继续作出算术中项和调和中项，而帕普斯对欧几里得“半圆模型”的改进便是今天课本中得出基本不等式猜想的几何模型。图 1 给出了基于“半圆模型”的基本不等式无字证明设计。说一说，该无字证明中最关键的一步是什么呢？

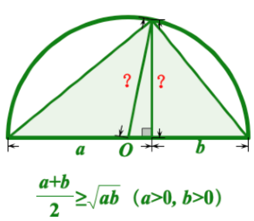

图 1 基于“半圆模型”的基本不等式无字证明

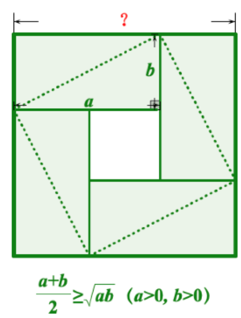

图 2 基于“大方图”的基本不等式无字证明

从中国古代杰出的数学成果中，我们也能瞥见基本不等式的形之所在。譬如课本在练习部分介绍了“弦图”，它源自三国时期的数学家赵爽（公元 3 世纪）为《周髀算经》所作注。赵爽将“弦图”中四个全等的直角三角形沿斜边外翻，得到“大方图”，其中便蕴含了基本不等式。观察图 2，这一无字证明的关键又是什么呢？

无独有偶，魏晋时期的数学家刘徽（约 220-约 280）在为《九章算术》勾股章中作注时，本意是用“出入相补”原理证明“勾股容方”（即直角三角形内接正方形边长）公式 $d=\dfrac{ab}{a+b}$，我们不妨“古图今用”一番，设计出基于“勾股容方”的基本不等式无字证明。仔细钻研图 3，基本不等式便可手到擒来。

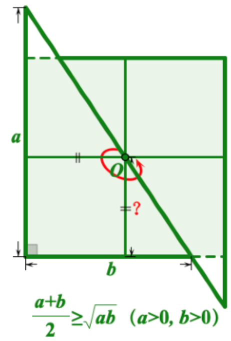

图 3 基于“勾股容方”的基本不等式无字证明

关于基本不等式的几何模型不胜其数，以上只是沧海一粟，更多的如矩形、梯形、等腰三角形这些看似平常的几何图形中也藏有基本不等式乃至均值不等式链。无字证明为尘封于千年书卷中的黑白图形赋予了新的活力，感兴趣的同学可以在上述无字证明的基础上继续创新，还可再翻翻《几何原本》，读读《九章算术》刘徽注，开动脑筋，“古算今思”，设计出自己独特的无字证明。

4 基本之“用”：从本手到妙手

基本不等式在高考中有着广泛的应用，不过，熟记的“一正二定三相等”只能算“本手”，不顾题意一贯套用公式和口诀自然是“俗手”，而能够在看似无联系的习题中及时想到并用好基本不等式才堪称“妙手”。我们不妨一起看一道近年的高考压轴题：

（2022 • 全国甲卷文科 12）已知 $9^m=10$，$a=10^m-11$，$b=8^m-9$，则（　）

A. $a>0>b$　B. $a>b>0$　C. $b>a>0$　D. $b>0>a$

乍一看，这道题考察的内容是指、对数互化，由 $9^m=10$ 可得 $m=\log_9 10$，$a=10^{\log_9 10}-10^{\log_{10}11}$，$b=8^{\log_9 10}-8^{\log_8 9}$。要比较 a 与 0 的大小，根据指数函数的单调性，只要比较 $\log_9 10$ 和 $\log_{10}11$ 的大小。由换底公式，作差

$$\log_9 10-\log_{10} 11=\frac{1}{\lg 9}-\lg 11=\frac{1-\lg 9\cdot\lg 11}{\lg 9},$$

看到同底数对数相乘，若能立刻联想到基本不等式具有“化乘为加”的妙用，而同底数对数的加法公式又能“化加为乘”，然后将它们连续使用，则有

$$\lg 9\cdot\lg 11\le\left(\frac{\lg 9+\lg 11}{2}\right)^2=\left(\frac{\lg 99}{2}\right)^2<1,$$

立得 $\log_9 10-\log_{10} 11>0$，则 $a>0$。同理得 $\log_9 10-\log_8 9<0$，则 $b<0$。故正确答案为 A。

除作差外，作商也能殊途同归。先用基本不等式“化乘为加”，再用同底数对数的加法公式“化加为乘”，则有

$$\frac{\log_{10} 11}{\log_9 10}=\lg 11\times\lg 9<1,\quad \frac{\log_9 10}{\log_8 9}=\log_9 10\cdot\log_9 8<1,$$

同样可得 $a>0>b$。

此外，近年来，随着中华优秀传统文化进数学课程，带有“中算（中国古代数学史）”背景的试题也越来越多。譬如，从“勾股容方”到“弦上容方”（图 4），“二方”的边长大小关系如何？面积大小关系如何？试着解决上述问题，再回过头想想，基本不等式在解题过程中是“本手”还是“妙手”呢？你还能编制出新的问题并用基本不等式求解吗？期待你的奇思妙想！

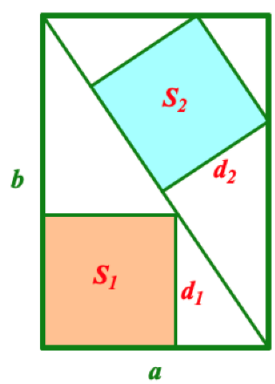

图 4 “勾股容方”与“弦上容方”

了解完基本不等式的“源”“流”“形”“用”，现在，你能回答出基本不等式为何“基本”了吗？其实，基本不等式这一名称并不是伴随着公式 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$ 而生。例析人教版教科书中相关内容的变迁，我们发现很长一段时间里基本不等式都是一个重要但却无名的不等式，直到进入新世纪，教科书编写者才赋予其“基本”之名。正如“一千个读者有一千个哈

姆雷特”一般，从不同的角度观研基本不等式，对“基本”二字的理解就会有所不同，而集齐多个角度，便能让我们更深刻地理解基本不等式本身，锤炼我们自身的数学思维。小试一下，你还能从新的角度，如函数，微言基本不等式中“基本”之要义吗？

5 小试牛刀

1. 由基本不等式的半圆模型及均值不等式链，你能马上找出半圆上到直径两端点距离之和最大的一点吗？理由是什么？（改编自课本“感受·理解”栏目）
2. 古巴比伦文明留下的楔形泥版上记录着若干关于梯形的问题，为后人留下了丰富的数学遗产，也是我们今天研究数学的珍贵素材。已知梯形 $ABCD$，上底 $AB=a$，下底 $CD=b$。

（1） 分别作两腰 AD 和 BC 的中点 G 和 H，连结 GH，求梯形的中位线 GH 长。它和梯形的两底有何关系？

（2） 梯形中位线是平行于两底，等分梯形两腰的线段。若作平行于两底，等分梯形面积的线段 MN，它和梯形的两底有何关系？MN 和 GH 孰长孰短？请说明理由。

（3） 作平行于两底，过对角线 AC 和 BD 交点 O 的线段 EF，它和上述线段孰长孰短？由此，你能想到什么？你还能作出其他的平行线段并比较其长度吗？

（改编自课本“探究·拓展”栏目）

他山之石

利用理论和经验背景信息影响几何思维的关注

吴 越

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

1 引 言

形成性评价是教学过程的重要组成部分。对于有效的形成性评价来说，有三个领域的教学内容知识是必不可少的：一般内容知识（CCK）、内容和学生知识（KCS）以及内容和教学知识（KCT）。对于 CCK，教师需要了解他们教授的材料、识别错误的答案、识别概念的错误定义；对于 KCS，教师需要预测学生可能遇到的困难；对于 KCT，教师需要安排教学顺序、选择示例引入主题。如果我们以三角形的高的概念为例，教师必须知道它的定义是从顶点到对边或其延长线的距离，并且必须能识别出哪个线段是高，这是考察 CCK。同时，教师必须知道学生很容易识别内部的高，但很难识别外部的高或与侧边重合的高，这考察了 KCS。此外，教师必须知道哪些例子可以促进学生理解，比如钝角三角形可以帮助学生理解外部的高，直角三角形可以帮助学生识别与侧边重合的高，这考察了 KCT。

关注被定义为将一些“事物”与其周围环境区分开来，从某种程度上讲，关注可以等同于感知甚至感觉。专业关注被定义为对学生的读写能力和元认知能力的准确、流畅和全面的注意，对学生读写能力和元认知行为之间的联系的思考以及实施符合学生认知需求的教学活动。因此，CCK、KCS 和 KCT 这三个领域的教学内容知识与教师的关注能力密不可分。儿童数学思维的关注由三个技能构成：识别、解释和回应。识别包括教师对学生学习困难的关注以及学习模式的辨别；解释包括教师对学生学习困难成因的推理以及对学生学习策略的理解；回应是指教师在对不同学生的学习困难和学习策略进行深入分析后所做出的教学回应。

Vinner、Hershkowitz 和 Tall 构造了一个获取数学概念的模型。这个模型最初是为了理解几何概念的习得而建立的，有两个组成部分。第一个是概念定义，它是指概念的文字/数学描述，第二个是指概念映像，它是一种认知结构，包括所有的例子和学生对该概念的认知，这种结构

是由学习者在学习期间或个人经历中建构的。Hershkowitz 等人发现，每个概念都与一个或多个原型实例相关联。这些例子是第一次习得的，故而存在于大多数学习者的概念映像中。原型例子通常是具有最长属性列表的概念实例的子集。概念的关键属性，必须存在于概念的所有实例中，而概念的非关键属性，具有强烈的视觉特征，会影响学生对概念映像的创建。Bernabeu 等人研究了三年级学生关于多边形的概念，发现学生对多边形概念的理解取决于学生如何识别多边形定义的关键属性。但原型有时不正确地为学生完成了口头定义的角色，作为对其他例子进行分类的标准。虽然超过一半的学习者知道四边形的定义，但他们还是习惯于通过原型例子来认识四边形，这使得他们很难理解各种四边形之间的包含关系。

为此，作者提出的假设是让教师接触有关几何思维教学的理论模型和实证研究会影响其对几何思维的关注。

2 研究设计

2.1 研究背景

41 位在职数学教师参与本研究，这些教师平均有 13 年的经验，曾在两所不同的师范学院攻读数学教育硕士学位。目前的研究是在几何教学的前几周进行的，且作为数学教学理论课程的一部分。该课程的主要目的是提高在职教师的内容知识和他们的几何教学心理知识。

2.2 研究过程

在项目开始前，研究人员向参与该项目的教师展示了两个任务，这两个任务是在日本的一堂课上展示的，任务涉及不改变面积的情况下进行形状变换等。教师先独自解决任务，再与研究人员沟通后，合作给出最终的解决方案。在解决过程中，教师被问了至少三个与关注有关的问题：在解决这些活动中涉及到什么几何困难？这些困难的根源是什么？你将如何克服这些困难？

在干预项目中，研究人员首先向参与项目的教师介绍了 Tall & Vinner 和 Vinner 的概念映像和概念定义理论，Hershkowitz 等人的原型现象，以及 Haj-Yahya 研究中两个因素对几何证明能力的影响。在项目的第一周，研究者强调，当学生接受认知任务时，如果学生脑海指向有限或

错误的概念映像，这可能会导致他们做出错误的反应或根本没有反应，并让教师过三条曲线上的一点画出所有可能的切线，结果表明，切线概念的有限图象可能导致学生无法构建切线或构建不正确的切线。在第二周，研究者强调，原型例子中具有强烈视觉因素的非关键属性对学生的影响，并让教师完成两个相关任务。第一个任务是从图形的一个顶点画出所有的对角线，结果表明，学生只能画出在图形内部的对角线，这是因为在学生的所有概念映像中图形的对角线只在其内部，因此，他们往往忽视了图形外部的对角线。第二个任务是从菱形、正方形和两组邻边不相等的一般筝形中识别出所有的筝形（图 1），结果发现，尽管正方形和菱形都符合筝形的定义，但绝大多数学生并没有将它们识别为筝形。

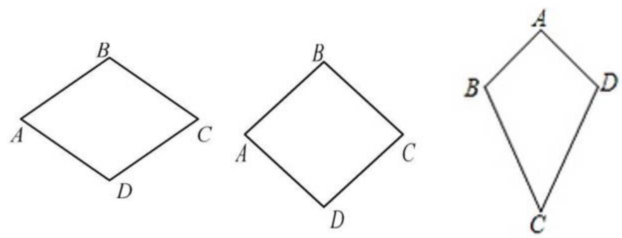

图 1 菱形、正方形、两组邻边不相等的一般筝形

在第三周，研究者强调，图形在作业单中呈现的方式一定程度上会影响学生的几何证明。在识别和证明内错角和同位角这个任务中，当以原型位置呈现角时（图 2），学生更能成功给出完整且正确的证明，而当以非原型位置呈现角时（图 3），学生往往出现了困难，但当学生旋转图形时，他们能立即识别出内错角和同位角并进行完整的证明。

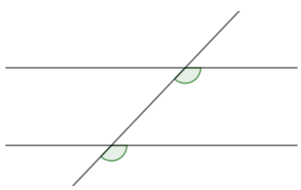

图 2 原型位置

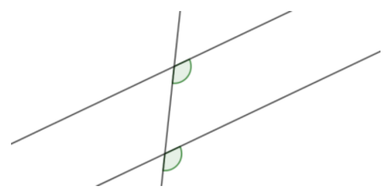

图 3 非原型位置

在完成干预项目后，研究者安排教师观察和讨论取自 VIDEO-LM 项目的课程视频，课程内容是向日本八年级学生讲授在不改变面积的情况下进行图形的形状变换，教师可以根据自己的意愿快进或倒带录制的日本课程，在教师结束观察课程 2 小时后提问至少三个问题：（1）解决这些几何任务的困难是什么？这个问题触及关注的识别部分。（2）这些困难的根源是什么？这个问题触及关注的解释部分。（3）你将如何应对这些困难？这个问题触及关注的回应部分。

2.3 研究工具

研究工具包括从 VIDEO-LM 项目中获得的课程以及相关的论文。视频课程中的任务如下所示。

任务 1：如图 4，有一块 A 地，旁边是一块 B 地。这两块土地之间的边界线是一条虚线，如何使它成为一条直线，而不改变两块邻地的面积。

任务 2：如图 5，在不改变面积的情况下把一个四边形变成一个三角形。

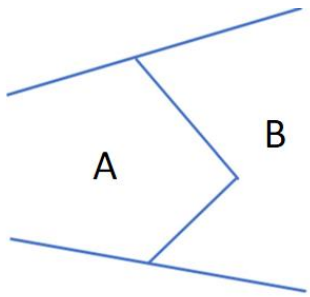

图 4 任务 1 图

图 5 任务 2 图

2.4 数据来源和分析

在干预项目前后，教师收到了同样的开放式问题，研究者采用内容分析的定性方法分析数据，即使用类似于扎根理论的定性方法进行编码和分类。研究者对数据进行分类，并使用两种编码方式。第一种是演绎预期码（deductive expected codes），当开放式问卷数据中教师提及的几何困难是先前研究已经提及的或者是来自 VIDEO-LM 项目中的教师-教育者指南，则编为演绎预期码。第二种是归纳非预期码（inductive unexpected code），当开放式问卷数据中教师提及的几何困难是研究者在编码之前没有考虑过的，则编为归纳非预期码。此外，我们将学生在解决几何问题时遇到的困难分为两类：元几何困难和特定任务的几何困难。例如，将识别非原型的高、识别非原型位置上的高和构造辅助线归类为特定任务的几何困难；将使用先前的解决方案来解决一个新问题、如何开始解决的困难、找到问题的多个解决方案以及解决策略归类为元几何困难，具体分类与编码如表 1 所示。

表 1 学生几何困难的分类与编码示例

类别	代码示例	教师回答
特定任务的几何困难	识别非原型的高（演绎预期码）	➢ 对于学生来说，识别外部的高太难了 ➢ 学生并不习惯于识别图形的外部的高
	识别非原型位置上的高（演绎预期码）	➢ 学生很难识别不再上下位置呈现的高 ➢ 学生难以识别出不在常规位置呈现的高
	构造辅助线（归纳非预期码）	➢ 三角形底部的构造和高度的构造使其变得困难 ➢ 学生没有清楚的意识到他们需要画出对角线、高或三角形的底边
元几何困难	使用先前的解决方案来解决一个新问题（演绎预期码）	➢ 该解决方案基于以前的解决方案，但学生认为这是一项孤立的任务 ➢ 学生们并没有意识到该解决方案基于以前的任务
	如何开始解决的困难（演绎预期码）	➢ 像许多几何任务一样，求解的第一步是最困难的 ➢ 没有特定的方法开始解决问题
	找到问题的多个解决方案（演绎预期码）	➢ 当前的问题有不止一个解决方案
	解决策略（归纳非预期码）	➢ 学生不知道使用哪种策略 ➢ 对于学生来说，没有问题解决的策略

而后，研究者对数据进行收集与整理，并使用 Lewins 和 Silver 的编码方案进行编码，并使用 SPSS 统计每个类别中演绎预期码和归纳非预期码的出现频率，以及识别出这些困难的教师的百分比。为了提高研究的信度和效度，研究者还得到了两位几何教育领域的专家的协助。每个研究者独立进行内容分析，然后比较两位研究者的内容分析，最终的分析结果来源于两位研究者的共识和作者的分析。

3 研究发现

3.1 识别学生的几何困难

研究者将学生解决问题时遇到的几何困难分为两类，一类是特定任务的几何困难，包括识别非原型的高、识别非原型位置上的高、构造辅助线等，另一类是元几何困难，包括使用以前的解决方案来解决一个新问题、如何开始解决困难、找到问题的多个解决方案、解决策略等。研究者区分了非原型高度和非原型位置的高度，因为非原型位置的高度这一困难通过旋转图形很容易被克服。表 2 给出了干预前后教师识别学生几何困难的具体变化。

表 2 干预前后教师对学生几何困难的识别

编码		干预前频率（%）	干预后频率（%）
特定任务的几何困难	平行线的位置	12	61
	高的位置	15	68
	三角形的位置	12	61
	三角形底的位置	17	37
	三角形外部的高	17	73
	等面积的非全等形状	/	41
	构造辅助线	7	27
	无数据计算三角形面积	24	22
	想象边的移动	/	12
	在正确的位置构造辅助线	/	20
元几何困难	利用先前课堂中的知识解决问题	83	73
	利用以前的解决方案解决新问题	29	36
	问题联系生活	34	24
	问题解决方案的数量	22	12
	学生的思考方向是否正确	80	71
	几何意识的缺乏	32	36
	问题的解决策略	49	54
	问题理解	5	/
	问题的多个解决方法	/	41

由表 2 可知，教师在干预前后对特定任务的几何困难的识别具有显著差异，而对于元几何困难，除了“找到问题的多个解决方法”之外的所有元几何困难，干预前后的频率差异未超过 10%。

3.2 识别学生的几何困难的来源

教师将几何困难的来源归结为与教具有关的因素和认知方面的因素。与教具有关的因素包括书籍、课程、班级和教师，教师将绝大多数的几何困难与教具联系起来，这在干预前后保持一致。对于认知方面的因素，如表 3 所示，干预后，大多数教师的解释更加具体，也纳入了数学教育术语。

表 3 识别学生的几何困难的来源

第一组困难	根源	教师	具体描述
非原型位置识别平行线	概念图像有限	Dem	也许平行线的概念图像不包括那个位置的平行线？看学生们转头的样子。
非原型位置识别三角形	概念图像有限	Som	在三角形的概念图像中，底在底部，学生不习惯在其他位置识别出三角形。
三角形外部的高	概念图像有限	Af	如果概念图像不包括外部高度的例子，学生就不能画出或识别它。
	原型例子的非关键属性	Han	我认为高度在形状内部的非关键属性导致了这种困难。
等面积的非全等形状	原型现象	Ase	困难的来源是原型例子中两个面积相等的图形的形状是全等的。
	原型例子的非关键属性	Han	我认为等面积的图形等边且等角的非关键属性导致了这种困难。

3.3 如何克服这些困难

教师关于如何克服该困难的回应策略与解释密切相关。表 4 给出了部分教师对不同几何困难的解释以及相应的回应策略。由表 4 可知，干预后，教师对困难的回应变得更加具体。

表 4 如何克服这些困难

困难	教师	解释	回应
识别非原型位置的平行线	Re	原型现象	建议呈现非原型位置的平行线之间的高
识别非原型位置的平行线	Alla	有限概念图像	建议在不同的位置画平行线，也在不同的位置画垂直线，以便扩展这些概念的概念图像，使它们不会局限于它们的原型位置
识别外部高度	Alla	原型例子的非关键属性	建议通过在不同位置展示该概念的示例去强调概念的定义
想象不出边的移动	Mla	任务中固定的图形	建议使用技术工具如 GeoGebra，使学生能够移动图形的边进行探究

4 讨 论

本研究旨在探究让教师接触几何思维教学方面的理论经验背景信息是否会影响教师对学生几何困难的关注。结果表明，让教师接触几何思维教学的理论经验背景信息会影响关注的三个部分，即识别、解释和回应。

在关注方面，干预后，教师在关注特定任务的几何困难上存在显著差异，对元几何困难的

关注没有明显的影响。元几何困难是与特定的几何主题或概念无关的困难，而是与整个数学内容有关的困难，关于元几何困难的知识可以在教师的经验中获得。参与者在干预中接触到的理论和经验背景信息侧重于几何思维的认知，这可能会让我们看到干预后教师在关注特定任务的几何困难的变化，因此，教师成功地将理论和经验文章中介绍的知识应用到其他几何环境中。

在解释方面，干预后，教师对第一组困难（即平行线的位置、高度的位置、三角形的位置、三角形底的位置、外部高度和具有相等面积的非全等形状）的解释效果大于第二组困难。这可能是因为教师接触到的理论和论文大多涉及与概念图像、原型现象以及原型例子的非关键属性相关的困难，与第一组困难相类似。

在回应方面，教师的回应表现与他们的解释表现密切相关，当解释变得更具体时，回应也变得更具体。教师的建议受到他们对特定困难来源的解释的强烈影响，干预可能有助于参与者对学生元认知行为的关注变得更加准确、流畅和全面，并帮助他们设计符合学生需求的教学步骤。

此外，教师的 KCS 在干预后得到发展，这可以从他们识别和解释学生的几何困难的知识中看出。对学生和教学内容的了解有助于教师预测哪些材料可能会让学生觉得困难、容易或困惑，并帮助他们更加具体、合理地解释学生的困难的来源。教师的 KCT 在干预后同样得到了发展，这可以从他们对克服这些困难的回应中看出。教师还提及改进教学设计，包括例子的选择、使用技术工具如 GeoGebra，这体现了内容和教学方面的知识。

参考文献

[1] Haj-Yahya, A. Using theoretical and empirical background information to affect noticing of geometrical thinking[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2022, 111(3): 493-513.

通过比较判断以概念理解的形式评估共变性

姚 瑶

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

1 引 言

世界上大多数学课程，包括意大利的教学大纲，都强调在学生活动中建立模型的重要性，以培养最新的数学素养。然而，尽管共变推理具有教学意义，但在意大利课堂上采用共变推理作为常规和有效的做法还存在一些障碍：首先，共变推理在意大利国家课程中没有明确涉及，这种缺失反映在学校实践和大多数学教科书中，大多意大利教师没有意识到共变推理，因此也没有在他们的课堂上促进其使用；其次，就共变推理所代表的概念理解形式而言，它很难被评估。

本研究的目标是评估一些与真实情境中的数学模型有关的开放式书面任务。在真实情境中对共变的概念性理解和推理技巧的恰当使用，可以极大地帮助学生探索和描述数学模型与所调查的真实现象之间的相互联系。本研究在比较判断（CJ）中发现了一个有价值的工具，用于评估学生对涉及共变技能的概念理解，并使对共变不太自信的教师更容易进行评估。本研究的研究对象是在 2019 年进行的教学实验结束时对 10 年级学生进行的开放式测试。学生被要求准备一份书面报告，内容是关于著名的伽利略实验的活动，即一个球沿着斜面滚动的运动规律。

本研究有两方面的具体目标：首先，研究 CJ 如何帮助评估建模任务的开放式测试，这些建模任务中共变推理技能可以有效促进理解；其次，通过研究验证教师是否能（隐含地或明确地）认识到共变推理的特征在评定学生作品时的重要性，同时也可以获得一些关于意大利教师对 CJ 方法的反应的理解。

2 研究方法

2.1 CJ 实验的背景

本研究分析的是 2019 年在都灵省（意大利）一所以科学为导向的学校的 10 年级班级进行

的大型教学实验的结果。实验历时 3 周，总时长近 16 小时。该班由 22 名学生组成，他们以 4-5 人组成小组。所有的小组研讨之后，在教师的指导下进行了课堂讨论。活动的主要目的是探索球沿斜面运动的现象，即伽利略实验。这一目标是通过不同呈现形式的各种模拟现象互动来实现的：特别是呈现实验的视频和 GeoGebra 环境中的一些小程序来模拟这一现象并提供一个有限差分表。实验最终的目的是实现对球的运动规律的牢固掌握，$s = k \cdot t^2$，其中 s 是球所走过的距离，t 是时间，k 是一个取决于倾斜平面的角度的参数。

本研究提出的活动设计要求学生：（i）探索时间和距离之间的关系，这要关注视频中提供的时间和覆盖距离之间的数字关系以及小程序中提供的第一个有限差分表；（ii）探索距离-时间图象如何受平面倾斜角度变化的影响，这要通过 GeoGebra 小程序中包含的倾斜平面来模拟，以及通过拖动位于其末端的蓝色点来改变其倾斜度，从而获得相关的离散距离-时间图象。GeoGebra 小程序的屏幕如图 1 所示。

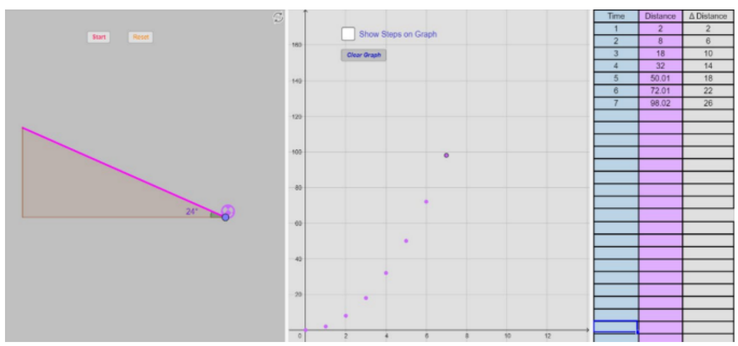

图 1 GeoGebra 小程序界面

在关于视频和 GeoGebra 小程序的工作组研讨上，学生被要求探索和阐述关于球的运动规律的一些假设。这些工作小组研讨之后是课堂讨论。研究过程中可以注意到，只有共变推理才能使人设想到时间和距离同时连续变化，并理解平面的倾斜角度如何全面影响距离-时间关系。在项目结束时，学生被要求写一篇文章，在其中描述（给另一个班的学生）完成的活动和得到的运动规律，为研究提供一种理论支持。以下是论文任务报告：

回想一下在斜面上进行的工作，给另一个班的同学写信，概述一下工作本身，具体来说，就是描述和从数学角度解释球沿斜面运动之间的关系。这份报告应该为你和你同学们的研究提供理论支持。

选择向不同班级学生的叙述的方式和研究的理论支持的方式，是为了引导学生采取一种规

范化的方法。学生们已经习惯了这种任务，并熟悉提示中使用的术语。

2.1.1 参与者

习惯于数学和物理书面任务的学生，在没有被事先通知的情况下参与了这项活动，有两个小时的时间来完成任务，并且没有得到关于论文正式结构的具体指导。论文长度为 2-4 页；学生可以在他们的书面作业中自由报告图表、公式和数字表格。

2.1.2 评 委

研究小组从预先存在的联系人中招募了 13 名评委。所有的评委都是数学工作者和该领域的专家。具体来说，其中 2 名是中学教师，7 名是高中数学和物理教师，4 名是大学数学和物理专业的教授。根据非正式的访谈可知，没有一个评委听说过 CJ 评估技术。评委的数学能力对于确保结果的可靠性是必要的，特别是他们被要求从数学的角度识别更好的文本，而不是从展示更多的共变推理的角度。所有评委都是自愿参加案例研究的，没有得到任何经济补偿。学生的老师不在评委之列，她对学生的文章进行了个人评价。

2.2 研究设计

2.2.1 比较判断前的阶段

在 CJ 研讨开始前几周，评委们通过电子邮件的方式了解了比较性判断，邮件解释了这种评估方法的特殊性和与传统评分的主要区别。在项目开始的第一天，评委们就收到了一份说明单，其中包含了与斜面定律教学实验有关的所有信息、活动如何建构、主要目标以及交给学生的任务。在整个 CJ 研讨中，评委们可以一直拿着说明单。评委们没有进行任何 CJ 研讨试验，因为研究的目的之一是捕捉他们面对这种新的评估方法时的第一印象。

2.2.2 比较判断过程

为保护隐私，这 22 篇开放式文本被匿名化，扫描后上传到一个在线比较判断平台（www.nomoremarking.com）。开始比较时，评委们看到一个屏幕，回顾了伽利略教学实验的主要目的，并被要求“选择最好的数学文本”。评委们每人做了 17 个判断，总共 221 个判断，因此根据文献标准，每个文本至少被比较 10 次。

CJ 网站将两个文本并排显示来比较，评委只需点击左边或右边的按钮来表达自己的偏好。图 2 是显示屏幕的一个例子。

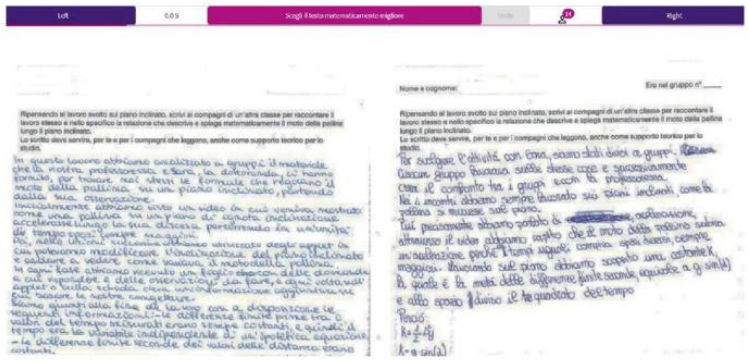

图 2 在线引擎上显示的比较屏幕

2.2.3 评审后的调查问卷

在完成 CJ 过程一周后，评委们通过电子邮件收到了新的指示，要求他们填写一份在线调查问卷。评委们收到了由研究者根据以下标准选择的两篇文章：这两篇文章获得了良好且接近的 CJ 最终得分，但它们也呈现出许多不同之处。它们是由不同性别的学生写的，有不同的长度，一个写得很清楚，但出现了拼写错误，而另一个则比较不整洁。

两篇文章首先描述了他们在视频中看到的东西，然后回忆 GeoGebra 小程序和他们用它做的事情，最后用不同的表述方式总结了实验的意义。

文本 1 更注重口头描述而不是公式。学生的口头描述提供了他们共变推理的证据；我们察觉到了像“总是不变”等口头标记的使用和因变量与自变量的区分。学生介绍了一个表格，该表格浓缩了 t、s、s 的第一次有限差分之间的共变关系，以及明确说明它们相互依赖的公式。文本 1 强调简洁，并试图将信息浓缩在不多的模块中，但无论如何，这些模块包含了共变的所有本质。

文本 2 使用了更多的公式和表述，并提供了更多关于实现不同数量之间共变关系的思考过程的细节，还提到了教师对其进展的支持。学生使用一般公式，跳过对明确的数值的引用，提供了共变推理的证据，混合了文字、公式、图片以及使用箭头来标记量之间的相互关系。在这一点上，文本 2 比文本 1 要丰富得多，因为它提供了更多的细节。即使采用了不同的模式和交流方式，两位作者都显示出对共变推理的良好掌握。

问卷的第一部分旨在调查哪些因素影响了 CJ 过程的结果。在要求评委说明他们认为两篇

文章中哪一篇在数学方面更胜一筹之后，本研究拟定了一套四分的项目，表示从 1（影响小）到 4（影响大）的顺序，并向评委介绍了学生作品的一些基本特征。下面列出的 10 个特征主要有以下三类：交流方面，如表述的清晰性、文本的结构和综合能力[3 - 4 - 6]；数学方面，如使用正规的符号（如图形、图象）、正规的数学词汇、建模能力和错误的存在[1 - 2 - 5 - 7 - 8]；以及具体的共变特征，如口头或符号性地描述距离、时间和角度（平面的倾斜）之间关系的能力[9 - 10]。

1. 存在的错误
2. 使用正式记号
3. 演示文稿不整齐
4. 文本表示的结构
5. 图形和图象的使用
6. 综合的能力
7. 使用正规的数学词汇
8. 建模能力
9. 能够详尽地描述距离、时间和角度（平面的倾斜度）之间的关系
10. 能够正规地描述距离、时间和角度之间的关系

问卷最后有三个开放式问题：（1）请列出你认为在比较论文时可能影响你判断的其他特征；（2）请对这个整体经历进行评论，并陈述你在比较过程中的感受；（3）Thompson 在他的量化推理理论中指出，当一个人能够设想两个或多个量的值同时变化时，就会以共变的方式进行推理。你认为在这两篇论文中，哪一篇能更好地体现出物理量之间的共变性？为什么？

3 数据分析和结果

3.1 CJ 过程的结果

CJ 方法允许将一组复杂的对象定位在一个单维量表上。CJ 网站运用统计学上的 Bradley-Terry 模型和最大似然估计程序来拟合 221 个判断。它产生了每个学生的最终参数估计（M=0，SD=1.7）。图 3 给出了该班学生的分数分布；方框内显示了评审后问卷中涉及的两篇文章，其

数值为 0.57（文本 1）和 0.47（文本 2）。

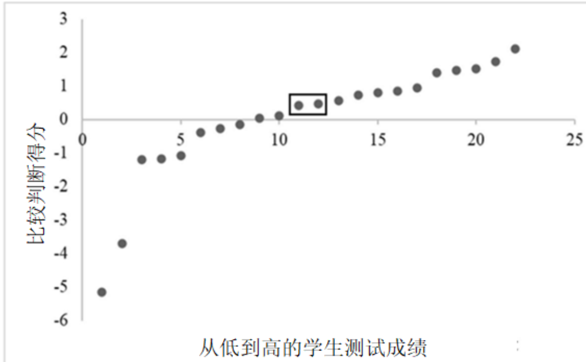

图 3 纵轴为按学生人数报告的 CJ 分数分布（N=22）

3.1.1 信 度

一个评估过程的信度是指其结果的一致性。内部一致性可以用量表分离信度（SSR）来衡量，类似于克隆巴赫系数。结果显示出高度的内部一致性，因为 SSR≥0.7（SSR=0.81）。

3.1.2 标准效度

为了评估 CJ 过程结果的效度，我们通过计算 CJ 过程的参数估计和一些基准测量之间的皮尔逊积矩相关系数来考虑标准效度。

我们将 CJ 的结果与他们在关于加速运动和物体沿斜面运动问题的物理测试中的分数相关联（r = 0.57）（图 4）。我们还将参数估计与他们的数学老师评定的分数联系起来，这位老师在共变方面有坚实的背景，在评估阶段，她自己的学生的书面作品特别注重共变技能（r=0.51）。这些结果虽然保守，但与其他关于中学和大学数学概念理解的文献研究结果一致，其报告的相关系数在 0.35 和 0.56 之间。最后，我们将 CJ 的分数与数学的最终课程分数（即学年结束时获得的评价）相关联（r=0.48）：这种正相关可以解释为共变推理是数学中的一种横向能力。

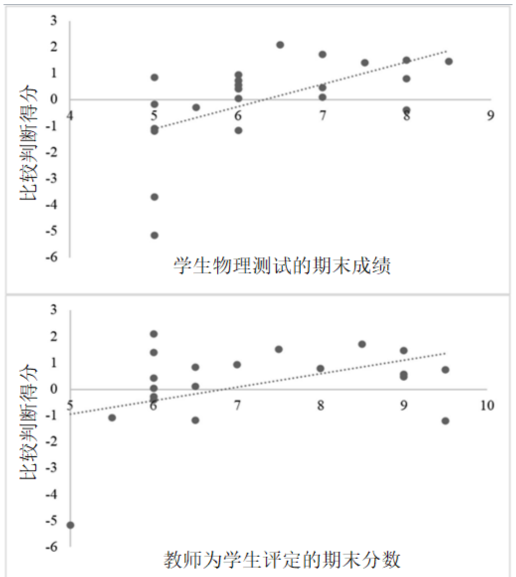

图 4 CJ 分数与同一题目的物理测试分数、同一测试中老师给分之间的关系散点图

3.2 共变有多重要？

问卷的最后一个开放式问题（3）要求评委说明两个文本中哪一个显示出更强的共变推理，以及为什么。七位评委倾向于文本 2，4 位评委倾向于文本 1，但 2 名评委表示了倾向却没有说明理由[J5][J9]。此外，一位明确表示他不知道[J12]，另一位说两者都不行，因为他认为“这两个文本非常混乱”[J4]。总的来说，在 13 个答案中，有 10 个对哪个文本在数学上更好达成了一致。

倾向于文本 1 的评委理由如下：

[J3]它清楚地表达了“空间和时间的比率是恒定的，这个比率等于加速度的一半”

[J10]它“突出了对该主题在整体方面的更多理解”

[J13]“它涉及有限差分”指的是学生做的一个表格（图 5），其中他用时间和参数 k 的函数报告了距离和距离的第一个有限差分，也就是说，提供了一个一般的表达方式，而不是数值。

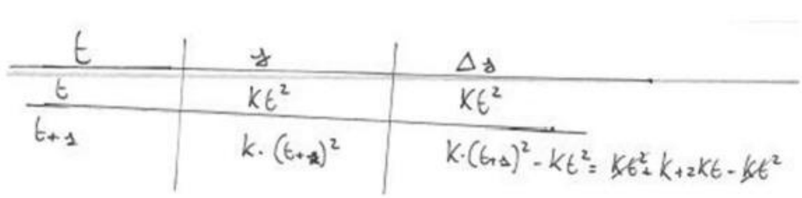

图 5 文本 1 中有限差分表的呈现

相反，那些表示倾向于文本 2 的评委提出了以下理由：

[J1]“在支持的结论中，所涉及的两个量级之间的共变关系被完美地把握住了，公式只是承担了这种共变关系的符号表达作用，所以它甚至不再被提及。”事实上，这位学生最后用一句话总结了她的考虑：“球所走过的距离与时间的平方成正比”

[J2]“在几个步骤中，强调相互增长的依赖关系”

[J6]另一个答案更难解释，她把自己的决定归因于该研究的“更有计划性的话语结构”。

[J7]“他们不仅报告公式，而且还试图解释变化。他们还提到了因变量和自变量”

[J8]“它表达了哪些量级取决于其他量级”

[J11]“结论部分总结了不同的假设，并深入讨论了每一个假设，最终以正确的术语得出了没有摩擦的情况下物体在斜面上‘下落’的规律的公式（s 是时间 t 的函数）。”

考虑到一些评委在上述陈述中赋予公式的作用，共变的概念方面得到了强调。选择文本 2 的 J1 指出，“公式只是承担了该共变的符号表达的作用”[J1]，并被“浓缩”到“球所经过的距离与时间的平方成正比”的句子中。因此，评委的一个关键点是，公式涉及概念性知识，而仅有公式并不总是足够的；这一点在另一个陈述中也得到了强调：“他们不仅报告了公式，而且还试图解释变化”[J7]。另一方面，选择文本 1 的 J13 在判断时认为公式的作用是积极的，如果他们支持使用“一般表达式”的公式，而不是简单的数字表达式，依靠的是诸如有限差分的概念表述。在这种情况下，学生使用他们现有的知识（有限差分法）来阐述解决问题的方法。在这两种情况下，共变被认为是“对支配一个领域的原则和一个领域中各知识单元之间的相互关系的隐性或显性理解”，即概念性知识的一个关键特征。

整组评委没有得到明显的不同结果。如果考虑选择文本 1 的 4 名评委分组和选择文本 2 的 7 名评委分组，结论就变得更加有意义。第一组评委更重视错误的存在和建模能力；第二组评委更重视陈述的结构、整洁度和图形与图象的使用。总的来说，我们可以看到选择文本 1 的人更重视非严格意义上的数学特征，选择文本 2 的人更重视数学特征。这两个小组都认为那些具体涉及有关量之间关系的特征是正相关的。所有的平均值和标准差如表 1 所示。

表 1 选择文本 1 和文本 2 的评委的调查特征

特征	量化特征（1=影响小，4=影响大）	文本 1	文本 2
非数学特征	文稿呈现不整齐	M=2 SD=0.71	M=2.71 SD=0.70
	文本表示的结构	M=1.75 SD=0.43	M=3.14 SD=0.83
	综合的能力	M=2.75 SD=1.09	M=2.85 SD=0.64
数学特征	存在的错误	M=3 SD=0.71	M=1.86 SD=0.83
	图形和图象的使用	M=1.75 SD=0.83	M=2.86 SD=0.64
	使用正式记号	M=2.75 SD=0.83	M=2.57 SD=0.49
	使用正规的数学符号	M=3 SD=0.71	M=2.86 SD=0.64
	建模能力	M=3.25 SD=0.83	M=2.85 SD=0.64
共变特征	能够详尽地描述距离、时间和角度之间的关系	M=2.75 SD=0.83	M=2.85 SD=0.64
	能够正规地描述距离、时间和角度之间的关系	M=3 SD=1	M=2.85 SD=0.64

因此，评委们的回答证实了他们的选择深受所采用的交流方式的影响，特别是受表述方式在表达共变性时或多或少的影响。学生们使用的交流和表述方式几乎在所有评委的语句中都明确地出现。此外，具体的共变特征在答案中出现的频率很高：所有的评委都引用了这两个特征作为相关内容。11 位评委对这两个特征给予了同等的重视；在其他两位评委中，一位对话语方面给予了更多的重视，另一位则对形式方面给予了更多的重视，因此证实了共变可以在不同的交流语境中表达，并取得同样的成功。

3.3 对 CJ 作为一种评估技术的看法

评委们对这次经历的评论表达了不同的意见。五位评委表示，这一经历是“积极的”，或者至少是“有趣的”。它被认为是“从准确评估的角度来看是最佳的，因为它把注意力从单个学生的错误上转移开了”[J1]；“两个文本之间的直接比较使（从一开始）不同的观点成为可能，而不会过多地重视或惩罚单个学生”[J2]。另一位评委说，“评估是相当快的，进行比较有利于判断”[J13]。评委们的判断时间从 2-11 分钟不等，时间中位数为 297 秒（每次比较约 5 分钟）。在该实验中，比较所需的时间与 Marshall 等人报告的估计值相差不大，在我们看来，当考虑到

文本的长度、性质以及与辨认笔迹有关的困难时，这是合理的。然而，根据经验，这个时间比用传统的评分方法对一篇文章进行评分通常所需的时间要短。

即使是那些有积极评价经历的评委也强调了一个消极的方面，那就是“字写得不好”[J5]，“拼写错误”[J4]，以及“缺乏语言上的正确性”[J3]。

还有评委认为该经历是“复杂”和“困难”的：“大多数文本都呈现出优点和缺点，并不总是能看出哪个文本是最好的”[J3]。这些文本显示了“不同的报告方式，一些学生主要使用自然语言，另一些则使用正规语言，但最终得出了相同的结论”[J8]。与“国家考试中的测试”[J10]等其他形式相比，“与学生的经历有关的描述性元素”[J10]的存在使评估具有“挑战性”。

另一位评委表示，为了“真正关注内容的数学方面”[J12]，文本应该是“视觉上可比较的”[J12]。只有两位评委明确表示，他们“更喜欢”或“需要一个评价网格”[J9-J10]。

4 讨 论

该研究数据积极地支持了这样的假设：CJ 技术可能有助于评估涉及共变推理的非结构化测试。CJ 分数与第 3.1 节中提供的三个基准度量（数学期末考试成绩、老师给出的分数和加速运动测试）之间的正相关关系表明：（i）评委在比较学生的文章时确实关注了数学方面；（ii）如果没有共变推理，学生的作品将是较低数学水平的。在评审后的调查中，13 位评委中的 10 位声称，至少就在线调查期间分析的两个文本而言，共变推理能力更强的文本也是最好的数学文本。CJ 的方法似乎提供了一个可靠的文本评估，事实上，共变推理是在如上的数学建模任务中取得成功的基本条件。

该调查还能够获得一些关于评委对共变结构看法的相关见解。评委们认为，真实现象中所涉及的量级之间的关系与他们的判断密切相关。

虽然 CJ 作为一种概念理解的有效性评估方法，但在意大利仍是一个未知的、很少使用的工具，意大利在评估领域有一个长期使用评分表的传统。通过该实验可以进一步了解意大利教师如何看待 CJ。虽然他们都没有尝试过 CJ，但没有评委表示对使用 CJ 有任何不适，只有两位评委明确提到了缺乏评分标准。参与我们研究的大多数评委都承认，CJ 允许用更全面的方法来评估概念理解。一些评委说，CJ 避免了对单个错误给予过多的重视，而这些错误在数学解决过程中往往是不相关的。

这项研究也有一些局限性。首先，教师准备的物理测试没有在课堂上得到验证，这可能会影响相关性；研究所涉及的参与学生样本较小。其次，这些学生习惯于这种非结构化的任务，这在意大利并不常见，而且他们的老师有很强的共变背景，故她的学生较了解这种推理。尽管参与本实验的评委人数与关于 CJ 的标准文献一致，但这仍然是一个小数字，无法概括调查问卷的结论：他们只是提供了自己的见解，即在阅读开放式文本时，特别是关于在真实背景下的数学主题时，哪些元素会引起注意，并提供一些关于意大利教师对共变的态度的初步信息。该研究表明，依据这些量化特征使用 CJ 的新研究，可能对于比较意大利以外的关于教师对共变的看法和认识以及它与学生建模能力的关系的调查结果是有成效的。最后，研究者选择采用比较判断的研究方向，是因为它能够解决评估概念力戒形式的建模任务的挑战和困难，但这并不排除其他方法可能是有效的，或需要对教师进行更多的共变推理培训。

参考文献

[1] Bagossi S., Ferretti F., Arzarello F. Assessing covariation as a form of conceptual understanding through comparative judgement[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2022, 111(3): 469-492.