



上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2022 年第 11 卷第 02 期



邮票上的刘徽

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：刘梦哲

编委（按姓氏字母序）：

韩粟 纪妍琳 姜浩哲 雷沛瑶 栗小妮 李卓忱 刘思璐 邵爱娣 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 余庆纯

岳增成 张佳淳 邹佳晨

刊首新语

中华优秀传统文化融入初中数学教学的若干路径

汪晓勤

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

比利时-美国科学史家萨顿 (G. Sarton, 1884-1956) 曾经说过, 科学史是文化史的核心。在提倡中华优秀传统文化进课程、进课堂的今天, 中国古代科学史料业已成为重要的中小学课程资源。

中国古代数学 (简称“中算”) 有着悠久的历史、辉煌的成就和独特的价值取向, 十进位值制记数法、分数四则运算、比例算法、平面多边形面积、多面体体积、线性方程组的解法、天元术、开高次方、高次方程数值解、一次同余组的解法、……, 都曾是领先于世界的数学杰作, 其中不乏与中小学数学课程密切相关的内容。本文从新知引入、问题设计、概念辨析、定理证明、公式推导五个方面说明中算史上的概念、问题、思想、方法等在初中数学教学中的具体应用; 最后, 从德育实施的角度呈现人物故事在课堂上的应用。

1 新知引入

运用中算史料来引入新课的方式有问题引入、方法引入、法则引入等。

在有关方程的主题上, 可以采用中国古代数学名题来引入。例如, 可用学生耳熟能详的“鸡兔同笼”或“僧分馒头”问题来引入一元二次方程, 或用《唐阙史》中所记载的公务员考试题来引入同一课题: “一位行人傍晚经过一片树林, 忽听得林间有人在说话, 细听方知是一群窃贼在讨论分赃之事。只听得一位窃贼说: ‘每人 6 匹, 则多出 5 匹; 每人 7 匹, 则少了 8 匹。’ 试问: 共有几个窃贼, 几匹赃物 (布)? ” 学生之前已经接触过这些问题, 且能够用算术方法或一元一次方程加以解决。但在只设一个未知数的情况下, 数量关系的呈现并不简易, 列方程时显得不方便; 而引入两个未知数后, 用符号语言呈现的数量关系就变得一目了然, 从而揭示多设一个未知数的必要性。

在有关几何定理的主题上, 可以采用公式或方法来引入。例如, 《九章算术》中给出了“圭

田”(三角形)面积公式“半广以乘正从”,即半底乘以高,刘徽的推导方法如下:“半广知,以盈补虚为直田也。”如图 1,通过“以盈补虚”(即出入相补),将三角形转化为矩形,从而得到三角形面积公式。据此,教师可以设计从《九章算术》三角形面积公式出发,让学生推导公式,

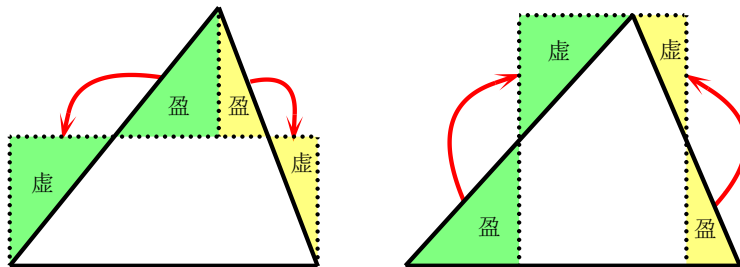


图 1 以盈补虚法

从中引出中位线概念,并由此猜想中位线与底边的位置和大小关系。

在有理数运算的主题上,可以采用运算法则来引入。《九章算术》“正负术”给出了正负有理数的加减运算法则:在做减法运算时,“同名相除,异名相益”;在做加法运算时,“异名相除,同名相益”。这里,“同名”指的是同号,“异名”指的是异号。例如,

$$(+5) - (+3) = +(5 - 3) = +2 \quad (\text{同名相除});$$

$$(+5) - (-3) = +(5 + 3) = +8 \quad (\text{异名相益});$$

$$(-5) + (+3) = -(5 - 3) = -2 \quad (\text{异名相除});$$

$$(-5) + (-3) = -(5 + 3) = -8 \quad (\text{同名相益}).$$

可见,正、负数相加减,可以通过去符号后的数相加减,结果再加上一个符号。因此,我们需要给一个正数或负数去符号后的数取个名字:“绝对值”。

2 问题设计

根据数学史料来编制数学问题的策略有再现式、情境式、条件式、目标式、对称式、串联式和自由式七种。

再现式指的是直接采用历史上的问题,除了文字翻译以外,原题中的条件和目标保持不变。以《九章算术》为代表的中国古代数学典籍往往都是以问题集的形式呈现的,为今日初中数学教学提供了丰富多彩的问题。

以二元一次方程组为例。中国古代数学文献记载了很多典型的二元问题。

• 盈亏问题

这类问题的解法被《九章算术》列为数学的九个门类之一，如：“今有共买鸡，人出九，盈一十一；人出六，不足十六。问：人数、鸡价各几何？”明代数学家程大位（1533-1606）在《算法统宗》中也收录了这类问题，如：“我问开店李三公，众客都来到店中。一房七客多七客，一房九客一房空。”用今天的代数符号表达，这类问题所涉及的方程为

$$\begin{cases} a_1x + b_1 = y \\ a_2x - b_2 = y \end{cases} \quad (a_i > 0, b_i > 0, \\ i = 1, 2)$$

• 合成问题

这类问题涉及两种不同物质的重量或两种不同商品的价格的计算。如《九章算术》中提出：“今有玉方一寸，重七两；石方一寸，重六两。今有石立方三寸，中有玉，并重十一斤。问：玉、石重各几何？”《九章算术》用“盈不足术”加以解决。《算法统宗》提出：“今有布绢三十疋，共买价钞五百七，四疋绢价九十贯，三疋布价该五十，欲问绢布各几何，价钞各该分端的，若人算得无差讹，堪把芳名题郡邑。”程大位将问题归入“方程”类。用今天的代数符号表达，这类问题所涉及的方程为

$$\begin{cases} x + y = c \\ ax + by = d \end{cases} \quad (a > 0, b > 0, c > 0, d > 0)。$$

• 互给问题

这类问题说的是甲、乙二人互给对方部分钱后所拥有的总数，求二人原有钱数。《九章算术》记载：“今有甲乙二人持钱不知其数。甲得乙半而钱五十，乙得甲太半而亦钱五十。问：甲、乙

持钱各几何？”用今天的代数符号表达，所涉及的方程为

$$\begin{cases} x + \frac{m_1}{n_1}y = c \\ y + \frac{m_2}{n_2}x = d \end{cases} \quad (m_i, n_i \in N^*, (m_i, n_i) = 1)$$

• 群物问题

这类问题涉及两种物品的价格、容积的计算，如《九章算术》：“今有大器五、小器一，容三斛；大器一、小器五，容二斛。问：大、小器各容几何？”“今有牛五、羊二，直金十两；牛二、羊五，直金八两。问：牛、羊各直金几何？”《孙子算经》：“今有兽六首四足，禽二首二足，上有七十六首，下有四十六足，问：禽兽各几何？”用今天的代数符号表达，这类问题所涉及

的方程为
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (a_i > 0, b_i > 0, c_i > 0, i = 1, 2)。$$

教师可以按照不同类型来选取历史上的问题，作为二元一次方程组的例题或练习题。

但在很多情况下，需要采用有关策略对古代问题进行适当的改编，或根据历史材料来编制全新的问题。如根据《九章算术》中的“勾股容方”问题，我们可以设计如下关于相似三角形应用的问题：

问题 1：如图 2，已知直角三角形的勾和股分别为 a 和 b ，求与直角三角形有公共直角的内接正方形边长。

问题 2：如图 3，已知锐角三角形的底和高分别为 a 和 h ，求三角形内接正方形的边长。

问题 3：根据上题结果，你能用直尺和圆规作出锐角三角形的内接正方形吗？

从“勾股容方”问题出发，运用条件式策略，得到问题 1 和 2；运用串联式策略得到问题 3。

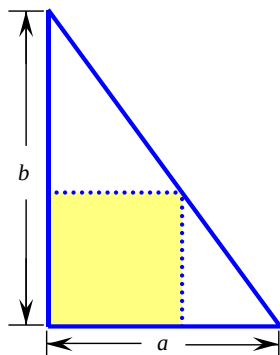


图 2 勾股容方问题

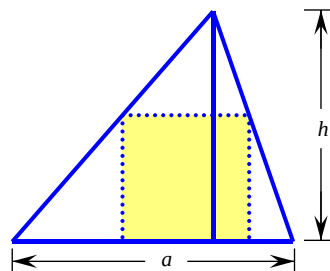


图 3 勾股容方问题的推广

自由式是根据史料来设定条件和目标，与其他策略相比，教师发挥的空间更大。例如，刘徽用两种不同的方法证明了“勾股容圆”公式，即已知直角三角形的两条直角边，则它的内切圆直径为直角边长乘积的 2 倍除以直角三角形的周长。第一种方法是从直角三角形的内心出发，将直角三角形分割成两对直角三角形和一个小正方形（图 4），将 4 个同样的直角三角形拼成两个矩形，再将其中的同类图形组合，重新拼成一个长为直角三角形的周长、宽为所求内切圆直径的大长方形。根据图 4，可以设计如下问题：

问题 1：已知 $BD = 3$ ， $AE = 4$ ，求 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的面积；

问题 2：已知 $CD = 1$ ， $BD = x$ ， $AE = y$ ，求 $(x-1)(y-1)$ 的值。

第二种方法过直角三角形内心作斜边的平行线，利用相似三角形性质以及比例的性质求得内切圆直径。如图 5，设 $CB=a$ ， $CA=b$ ， $AB=c$ ，内切圆半径为 r ，因 $\text{Rt}\triangle GEO$ 与 $\text{Rt}\triangle ACB$ 相似，故得

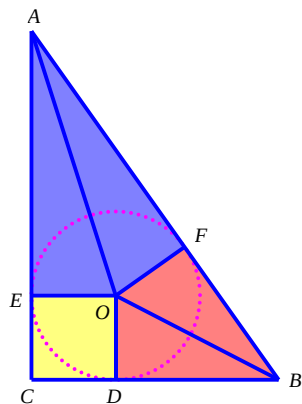


图 4 刘徽的“勾股容圆”图一

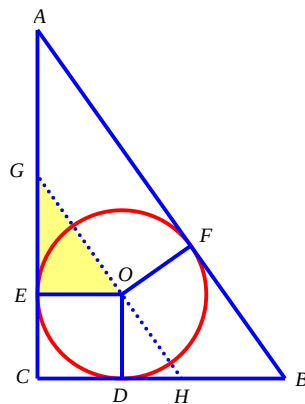


图 5 刘徽的“勾股容圆”图二

$$\frac{r}{a} = \frac{GE}{b} = \frac{GO}{c},$$

由等比定律得

$$\frac{r}{a} = \frac{r + GE + GO}{a + b + c} = \frac{b}{a + b + c},$$

于是得

$$r = \frac{ab}{a + b + c}.$$

这里，刘徽利用了结论 $GO = AG$ 。但刘徽没有说明为什么这个结论成立。据此，可以设计以下问题：

问题 3：如图 5，已知 O 为 $\text{Rt}\triangle ACB$ 的内心，过点 O 作斜边 AB 的平行线，分别交 AC 和 BC 与点 G 和 H 。试证明 $OG = AG$ ， $OH = BH$ ；

问题 4：如图 5，在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中， $CB=5$ ， $CA=12$ ， $DH=x$ ， $EG=y$ ，已知 $x+y=\frac{71}{12}$ ，求 x 和 y 。

3 概念辨析

中算史料在课堂上也可用于数学概念的辨析。例如，关于二元一次方程组是否只能含两个二元一次方程，不同教科书的说法不一，我们可以从刘徽的定义中寻找答案。刘徽《九章算术》

注称：“群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之方程。”根据刘徽的方程（即今天所说的方程组）定义，二元一次方程组含有两个方程，有几个未知数，就有几个方程。也就是说，刘徽所定义的方程是适定的。我们认为，我们可以沿用刘徽的定义。

刘徽的定义也为我们揭开了方程中的“方”的涵义。图 6 给出了牛羊问题中的方程表达。由于古人书写文字是自上而下、自左而右的，按照我们今天的写法，就是图 7 所示的增广矩阵。“方程”表达的是数量关系，但呈现的是方阵的形状。

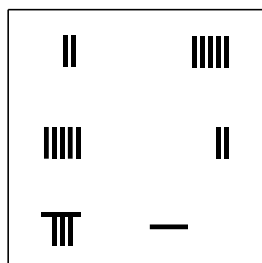


图 6 方程的算筹表示

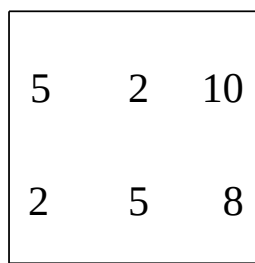


图 7 方程的矩阵表示

虽然我们今天使用的大多数数学名词都是译名，但也有不少名词源于中国古代数学，不过内涵已发生变化，如“小数”、“幂”之类。

4 命题证明

初中平面几何中的一些公式或命题，可以用中国古代数学家的方法加以推导或证明。有以下三种情形。

首先，中国古代数学家证明了某个定理，教师可以用同样的方法来证明同样的定理。如关于勾股定理，可采用赵爽的弦图或刘徽的出入相补方法，如图 8-9 所示。

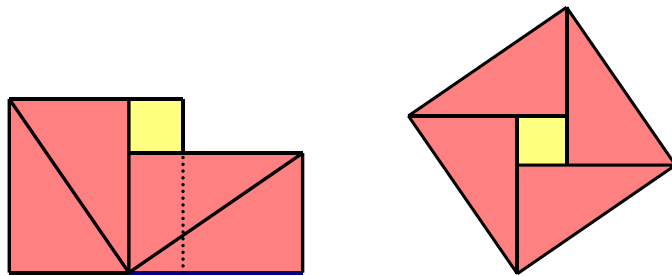


图 8 赵爽关于勾股定理的证明

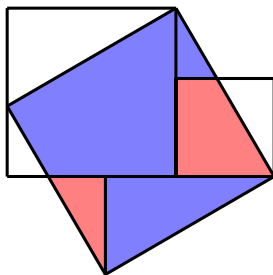


图 9 刘徽关于勾股定理的证明

其次，教师可以用中国古代数学家证明某公式的方法来证明别的定理。如关于三角形中位线定理，教师可引导学生用刘徽证明三角形面积公式的方法，将三角形转化为矩形，据此证明中位线定理。南宋数学家杨辉曾用“勾中容横、股中容直”原理来推导古代的“日高术”（详见下文）。同样的原理可以用来证明三角形一边平行线定理。

如图 10, 在 $\triangle ABC$ 中, $FG \parallel BC$, AD 为 BC 上的高。由杨辉原理知, $S_{\square FD} = S_{\square FM}$, $S_{\square GD} = S_{\square GQ}$ 。

于是得 $S_{\square KI} = S_{\square MR}$, 即 $FG \times AD = BC \times AE$, 于是有

$$\frac{FG}{BC} = \frac{AE}{AD}$$

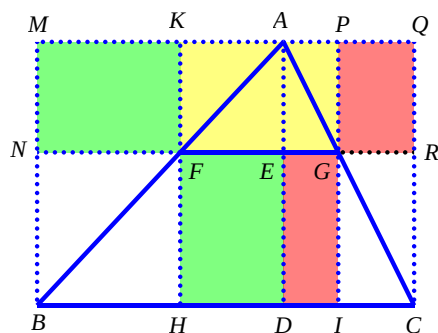


图 10 三角形一边平行线定理的证明

又由

$$\frac{FE}{BD} = \frac{EG}{DC} = \frac{AE}{AD}$$

以及勾股定理可得

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC}。$$

5 公式推导

代数教学中，教师可以用中国古代数学家惯用的方法来推导某些公式。例如，杨辉在《田亩比类乘除捷法》中记载了以下问题与解法（图 11）：

• 直田积八百六十四步，只云阔不及长十二步，问长阔共几何？术曰：四因积步，以差步自乘，并而开平方除之，得长阔共步。

• 直田积八百六十四步，只云长阔共六十步，问长多阔几何？术曰：四之积步，减和自乘之积，余，开平方除之，得长阔之差步。

前一题说的是，已知长方形面积为 864，长宽之差为 12 步，求长宽之和，利用图 12（1），将四个长方形（红色）连同以长宽之差为边长的小正方形（黄色）拼成一个大正方形，其边长即为长宽之和，故得所求长宽之和为 $\sqrt{4 \times 864 + 12^2} = 60$ 。

后一题说的是，已知长方形面积为 864，长宽之和为 60 步，求长宽之差，同样利用图 12

（1）可得长宽之差为 $\sqrt{60^2 - 4 \times 864} = 12$ 。

这里，杨辉的几何解法实际上对应于解一元二次方程的配方法（该方法可以上溯至赵爽《周髀算经》注）。如图 12（2）所示，若所解方程为

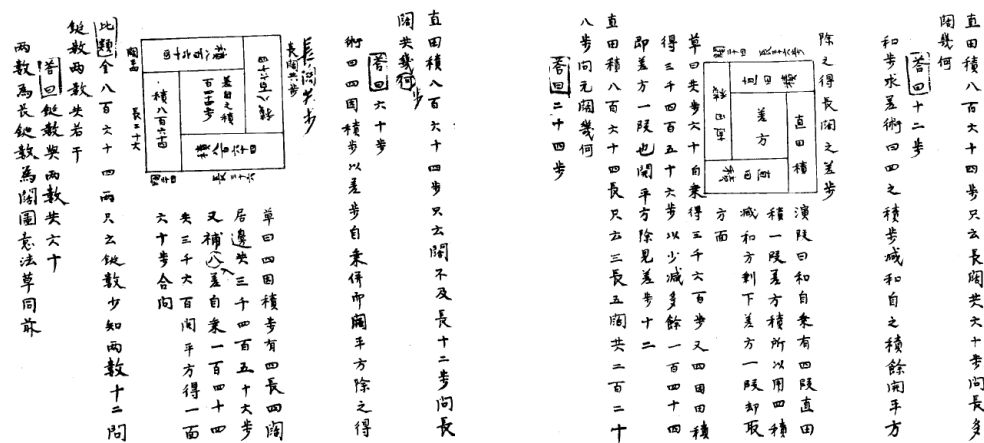


图 11 杨辉《田亩比类乘除捷法》书影

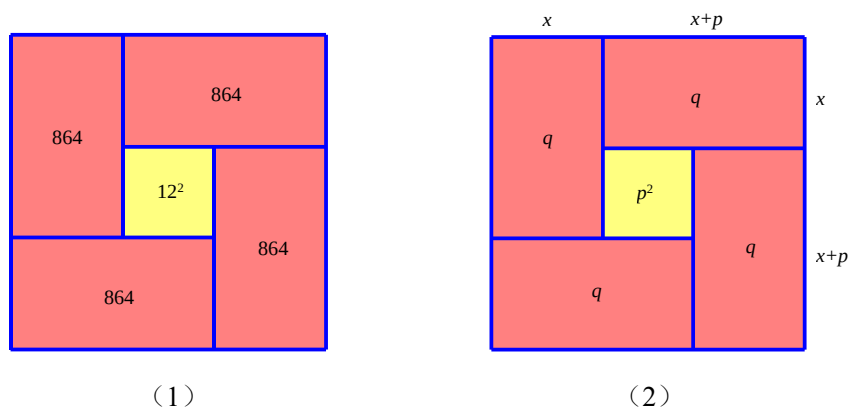


图 12 杨辉的配方法

$$x^2 + px = q \quad (1)$$

则对方程进行变形：

$$4x(x + p) = 4q$$

两边加上 p^2 得

$$4x(x + p) + p^2 = p^2 + 4q$$

即

$$(2x + p)^2 = p^2 + 4q$$

于是得方程 (1) 的正根为

$$x = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

类似地，方程 $x^2 - px = q$ 的正根为

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

6 德育实施

中国古代数学家的故事是数学课堂上实施德育的理想素材。在课例“平方差公式”中，教师引导学生用几何方法证明平方差公式后，将学生的方法进行古今对照，指出其中一种方法（图

13) 是三国时代数学家赵爽在注释《周髀算经》时给出的；接着，讲述布衣数学家赵爽“负薪余日，聊观《周髀》”的故事，告诉学生：古代数学家为生计而辛劳，却珍惜光阴，勤奋钻研学问，最终取得杰出成就。

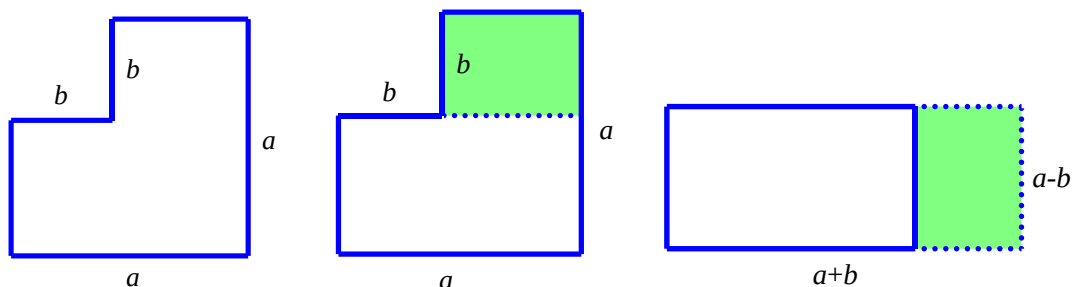


图 13 平方差公式的几何证明

中国古代数学文献中的测量问题是“相似三角形应用”的理想教学素材。早在西汉时期，天文学家提出的一种测量日高的公式——“重差术”。如图 14，用长度为 a 的竿子（表）在不同的地点测日影，得影长 s_1 和 s_2 ，两地间距为 d ，则日高为

$$H = a + \frac{ad}{s_2 - s_1},$$

由于大地并非如西汉时期人们所想象的那样是“平”的，故用上述公式测日高显然是荒唐的。后来，三国时期的刘徽将“重差术”用于海岛高度的测量，并著《海岛算经》一书。

南宋杨辉在阅读《海岛算经》时，对于“重差术”产生了浓厚的兴趣。他在《续古摘奇算法》中写道：“辉尝置海岛小图于座右，乃是先贤作法之万一。”可想而知，杨辉每天下班回家，钻进书房，对着海岛小图苦思冥想，寻求古人“秘旨”，有一天，终于恍然大悟，获得了“重差术”的推导方法。杨辉所据即上文所说的“勾中容横、股中容直”原理。利用该原理，图 14 中有两对等面积的矩形，分别相减，即得“重差术”。从杨辉的故事中，我们看到了古代数学家精思致力、孜孜以求的探究精神。

徐光启（1562-1633）翻译《几何原本》的故事是初中平面几何序言课上的素材。利玛窦（M. Ricci, 1552-1610）在汉译《几何原本》（前六卷）序言中称：

“客秋，乃询西庠举业，余以格物实义应。及谭几何家之说，余为述此书之精，且陈翻译之难及向来中辍状。先生曰：‘吾先正有言，一物不知，儒者之耻。仅此一家已失传，为其学者，皆暗中摸索耳。既遇此书，又遇子不骄不吝，欲相指授，岂可畏劳玩日，当吾

世而失之！呜呼！吾避难，难自长大，吾迎难，难自消微，必成之。”

从利玛窦的这段回忆中，我们看到当时徐光启心中的那份沉甸甸的责任感和攻坚克难的巨大勇

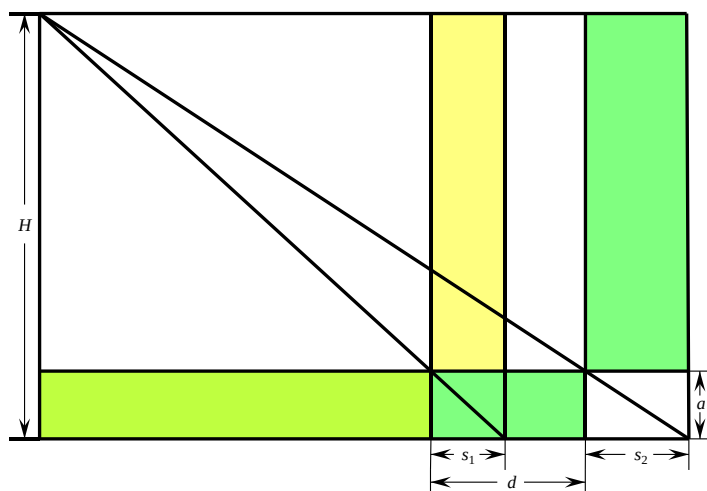


图 14 杨辉关于“重差术”的证明

气。在谈到徐光启不畏困难的品质时，一名学生在数学日志中写道：“徐光启能做到的，难道我们做不到吗？！”今天的学生完全可以从古代数学家的故事中汲取精神的力量。

7 结语

以上我们看到，让中华优秀传统文化进课堂，并不仅仅是一句口号。就数学教学而言，作为传统文化不可分割的一部分的中算史为教师提供了丰富多彩的素材和思想养料，这些素材或思想，可用于课堂教学的各个环节。和世界数学史料所具有的教育价值一样，中算史可以帮助教师构建知识之谐、彰显方法之美、营造探究之乐、实现能力之助、展示文化之魅。

就像一个人的思维方式会打上民族文化烙印一样，一个国家的数学教育也绝不可能脱离本国的历史和文化。诚然，中国古代数学注重实用，注重算法，没有建立起自己的演绎体系，但这不是我们数典忘祖、崇洋媚外的理由。中国古代数学文化博大精深，本文所举只是沧海一粟。我们有理由相信，教育取向的中算史研究、中算史融入中学数学教学的实践和评价都将是未来 HPM 领域的重要课题。

目 录

刊首新语

中华传统优秀数学文化融入初中数学教学的若干路径	汪晓勤 I
-------------------------------	-------

历史研究

西方早期教科书中的绝对值概念	汪晓勤 1
美英早期解析几何教科书中的椭圆的定义和标准方程	孔雯晴 16
美英早期解析几何教科书中的参数方程	刘梦哲 38
美英早期三角学教科书中的三角函数图象	石 城 50

教学实践

聚焦数学文化，重构概念教学	黄 婷，王智洋，刘梦哲 61
---------------------	----------------

他山之石

创造力对问题解决专业知识的作用：通过调查提出新问题	王智洋 73
---------------------------------	--------

活动讯息

聚焦知识生成，感悟数学思想	韦润蓉，钱 秦，刘思璐 80
---------------------	----------------

CONTENT

FOREWORD

Several Paths for the Integration of Chinese Traditional Excellent Mathematics Culture into Junior High School Mathematics Teaching Wang Xiaoqin I

HISTORICAL STUDY

The Concept of Absolute Value in Early Western Textbooks Wang Xiaoqin 1

The Definition and Standard Equations of Ellipse in Early American & British Textbooks on Analytic Geometry Kong Wenqing 16

The Parametric Equations in Early American & British Textbooks on Analytic Geometry Liu Mengzhe 38

The Image of Trigonometric Functions in Early American & British Textbooks on Trigonometry Shi Cheng 50

TEACHING PRACTICE

Teaching of the Concept and Meaning of Derivatives from the Perspective of HPM Huang Ting, Wang Zhiyang, Liu Mengzhe 61

LITERATURE REVIEW

Creativity as a Function of Problem-Solving Expertise: Posing New Problems through Investigations Wang Zhiyang 73

ACADEMIC INFORMATION

Lesson Study Activities of Square Root and Extraction of Square Root Wei Runrong, Qian Qin, Liu Silu 80

历史研究

西方早期教科书中的绝对值概念

汪晓勤

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

绝对值概念是数系扩充的产物。有了负数概念, 人们就可以更简洁、更准确地表达一个量的大小和实际意义。但众所周知, 在正负数的四则运算中, 实际参与运算的却是它们的绝对值。实际上, 绝对值概念的产生正源于正负数运算的需要。我国汉代数学典籍《九章算术》中已经提出世界上最早的有理数加减运算法则: 做加法时, “同名相益, 异名相除”; 做减法时, “同名相除, 异名相益”, 这里, 做“相除”(即相减)和“相益”(即相加)运算的就是两数的绝对值, 不过, 作者并未明确提出绝对值的概念。

现代意义下的“绝对值”一词最早出现在欧拉《代数基础》的 1807 年法文版中(Euler, 1807, p.339), 但欧拉并未给出“绝对值”的明确定义。之后, “绝对值”逐渐成为西方代数教科书中的常见概念。虽然有作者关注过绝对值概念的零星史料, 但迄今为止, 尚未见到较为完整的历史研究。为了从 HPM 的视角开展绝对值概念的教学研究, 需要深入了解该概念的历史, 为重构式教学设计提供参照。

本文聚焦绝对值概念的定义, 对 20 世纪中叶之前出版的近 80 种西方数学教科书(见本文参考文献)进行考察, 对绝对值的不同定义进行分类, 并对定义的演进过程加以分析。

1 去符号定义

早期代数教科书将带有正负号的实数称为“代数数”(algebraic numbers)。一开始, 有些教科书将一个代数数去符号后的数(或值)称为该代数数的“绝对数”(absolute number)、“算术数”(arithmetic number)、“数值”(numeric value)、“绝对大小”(absolute magnitude)等, 后来, “绝对数”、“绝对大小”这样的名称逐渐被“绝对值”所取代, “数值”一词的含义逐渐发生变化, 而“算术数”这个名称保留至今, “算术平方根”一词即源于该名称。

在所考察的早期教科书中, 绝大多数用代数数“去符号”后的结果来定义绝对值。这种定

义仅仅关注外在形式，易于识记。表 1 给出了一些例子。

从表 1 中可见，“去符号”定义的许多表述针对的是“正量或负量”、“代数数”、“带符

表 1 “去符号”定义的一些例子

编者（年份）	定义表述	教科书名
Reynaud（1810）	一个量的绝对值是其不带符号的值。	《代数基础》
Mayer & Choquet （1832）	一个量去掉符号的值，称为这个量的绝对值。	《初等代数专论》
Choquet（1849）	一个量的绝对值是去掉其前面符号的组成该量的数。	《初等代数专论》
Laurent（1867）	我们将一个正量或负量的+号或-号之后的数称为该量的绝对值。	《代数专论》
Catalan（1869）	一个单项式的绝对值是其去掉符号的值。	《算术与代数手册》
F.G.M（1869）	一个代数数的绝对值或模是去掉符号后所得的算术数。	《初等代数教程》
Wentworth （1881）	带有正负号的数称为代数数，相反，不带正负号的数称为绝对数。	《代数基础》
Wells（1882）	一个量的绝对值是由该量去符号后所表示的数。	《大学代数》
Keigwin（1886）	一个代数量的绝对值是去掉其符号的值。	《初等代数原理》
Newcomb （1887）	一个量的绝对值是其不带符号的值。如-3 的绝对值与+3 的绝对值相同，即等于 3，不含任何符号。	《学校数学》
Nicholson （1888）	一个量的绝对值是其不含符号的值。	《初等代数》
Wells（1890）	一个数的绝对值是该数去符号后的数。	《大学代数》
Lilley（1894）	绝对数是不带+号或-号的数。	《代数基础》
Bourlet（1896）	我们称一个代数数去掉其符号后所得的算术数为该代数数的绝对值或模。	《初等代数教程》

续 表

编者 (年份)	定义表述	教科书名
Porchon (1896)	我们将一个量的带符号的值称为该量的代数值, 去掉符号的值称为其绝对值。	《代数基础》
Jocelyn (1902)	一个数的绝对大小是其不计+、-号的大小。	《大中学代数》
Young & Jackson (1908)	带符号的数(代数数)去掉符号后的值称为其绝对值或数值。	《初等代数》
Nicholson (1909)	一个代数数的绝对值是其不带符号的值。	《学校数学》
Hopkins & Underwood (1912)	一个数不计符号的值称为该数的绝对值。	《初等代数》
Cajori & Odell (1916)	一个数的绝对值是不考虑其符号的值。	《初等代数》
Lyman & Darnell (1917)	一个数的不带符号的值称为它的绝对值。	《初等代数》
Hallet & Anderson (1917)	一个代数数的绝对值是不考虑其符号的值, 有时又称算术值或数值。	《初等代数》
Schultze (1918)	一个数的绝对值是去掉该数符号的数。	《代数基础》
Hawkes, Luby & Touton (1919)	一个数的数值或绝对值是其不带符号的值。	《学校代数全编》
Hall & Knight (1922)	绝对值是不计+、-号的值。	《代数基础》
Wells & Hart (1924)	正数或负数的绝对值是去掉给定数的符号后剩下的算术数。	《近世代数》
Slaught & Lennes (1926)	一个有向数去掉符号的值称为它的绝对值, 有时亦称算术值。	《新代数学》
Nowlan (1947)	一个数的大小是其不带符号的值, 亦称绝对值或数值。	《大学代数》

号的数”、“正数或负数”、“有向数”等，因而未考虑零的情形，因为零本身并不带符号。因此，这些表述在今天看来并不完善。

另一方面，“去符号”定义也未考虑字母的情形，因为字母可以表示任意数，其本身不带符号，即使带有符号，也只是形式符号，因而不能仅仅通过“去符号”来获得绝对值。但就像韦达（F. Viète, 1540-1603）创立符号代数之后相当长历史时期内数学家的做法一样，早期教科书编者往往默认字母表示的是正数，因而在他们看来形式符号和实际符号是一致的。Wentworth & Smith（1913b）在给出“去符号”定义后举例说“ -4 的绝对值是 4 ， $-a$ 的绝对值是 a ”，Durell（1916）在给出同类定义之后举例说“ $+5$ 和 -5 的绝对值是 5 ， $+a$ 和 $-a$ 的绝对值是 a ”，Engelhardt & Haertter（1926）举例说“ -1 、 -3 、 $+4$ 、 $5x$ 、 $-2xy$ 的绝对值分别是 1 、 3 、 4 、 $5x$ 、 $2xy$ ”，等等，但在我们今天看来，“ $+a$ 的绝对值是 a ”、“ $-a$ 的绝对值是 a ”、“ $5x$ 的绝对值为 $5x$ ”这样的说法显然是错误的。

2 “数值”定义

一个代数数由符号和数值两部分组成，符号表示该数的性质或特征，而数值则表示该数的大小。一些早期教科书将一个代数数中的数值部分称为绝对值。“数值”定义更关注内涵，克服了“去符号”定义“以貌取值”的缺点。表 2 给出了一些例子。

表 2 “数值”定义的一些例子

编者（年份）	定义表述	教科书名
Smith（1886）	若不考虑一个量的性质或符号，则该量的大小称为绝对大小。	《初等代数》
Taylor, J. M. （1896）	代数数是既有算术值也有相反特征之一的数，如 $+5$ 和 -5 具有相反的特征，但具有相同的绝对值。	《大学代数》
Beman & Smith （1902）	由于诸如 $+a$ 和 $-a$ 、 $+5^\circ$ 和 -5° 这样的两个表达式表示不同的方向，但具有相同的大小，故称它们有相同的绝对值。	《大学代数》
Fine（1904）	我们称 3 为 -3 的数值或绝对值，用 $ -3 $ 来表示。	《大代数》

续 表

编者（年份）	定义表述	教科书名
Tanner (1904)	一个数的绝对值是指不考虑其性质的单纯的大小。	《初等代数》
Aley & Rothrock (1904)	当考虑一个数的性质时，该数就成了代数数。代数数的符号为+和-。一个数的绝对值是其不考虑性质的值。	《代数举要》
Tanner (1907)	一个数的绝对值指的是它的大小而不考虑其性质。	《中学代数》
Rietz & Crathorne (1909)	表达式 $ a $ 常读作“ a 的绝对值”，意为不带符号的数值。	《大学代数》
Slaught & Lennes (1912)	正数和负数有时又称为带符号的数，因为每个这样的数都有数值部分和表示性质的符号组成。带有符号的数的数值部分，称为该数的绝对值。	《代数初级原理》
Wentworth & Smith (1913a)	一个量不计符号的数值称为绝对值。	《学校代数》
Rothrock & Witacre (1932)	正负数被称为带符号的数，同时表达了大小和性质或方向。一个带符号的数的数值称为它的绝对值。	《第一学年代数》

从表 2 可见，“数值”定义的许多表述也只针对“代数数”或“正负数”，因而忽略了零的绝对值。虽然早期教科书很少考虑字母的情形，但由于“数值”定义更关注绝对值的内涵，即只管大小而不管性质，因而也适用于这种情形。因此，“数值”定义在“去符号”定义的基础上有所进步。

3 “单位”定义

任何一个数都由“单位”组成，这种思想可以上溯到古希腊。被誉为几何学鼻祖的泰勒斯（Thales）已将数定义为“单位的集合”，这种思想为毕达哥拉斯学派所继承。绝对值的“单位”定义指的是将一个数的绝对值定义为该数所含的单位个数，其中“单位”是不带符号的。表 3 给出了一些例子。

尽管仍有教科书针对“正负数”来定义绝对值，但“单位”定义既适用于零的情形，也适用于字母的情形，因而比“去符号”定义和“数值”定义都更完善。然而，与前两者相比，这种

表 3 “单位”定义的一些例子

作者（年份）	定义表述	教科书名
Taylor (1889)	任何一个代数数的算术值或绝对值是它所表示的单位个数。	《大学代数》
Gillet (1896)	一个数的绝对值是它所含的单位个数，不考虑单位的符号；而真实值则是同时考虑单位个数和单位符号的值。	《初等代数》
Fisher & Schwatt (1900)	一个数的绝对值是它所含的单位个数，不考虑单位的性质。	《代数基础》
Colaw & Ellwood (1903)	一个数的绝对值是它所含单位的个数，而不考虑单位的性质。	《学校代数》
Marsh (1905)	一个数的绝对值取决于该数中所含的单位个数，而不考虑单位的性质，即左右方向。	《初等代数》
Wheeler (1907)	一个量的绝对值指的是这个量所含的单位的次数，不考虑量或单位的性质，即不考虑它们的正负。	《代数初级教程》
Sommerville (1908)	从算术数拓展到正数和负数，建立起了代数数。常常需要考虑不考虑性质的数的大小，即仅考虑其所含单位的个数。例如，+5 和 -5 具有相同的大小或绝对值，因为它们都代表数字分类中同样的“组”的思想，然而，它们具有恰好相反的性质。	《初等代数》
Myers & Atwood (1916)	一个数的绝对值是其所含的单位个数，而不考虑单位的性质。	《初等代数》
Slaught (1916)	一条线段的绝对值或数值是表示其长度中所含单位个数的一个正数。	《大学代数》

定义的直观性和操作性却不够强。因此，有教科书开始用几何意义来解释这类定义。例如，Marsh

(1905) 给出图 1 所示的几何解释： OC 和 OH 均表示 4 个单位，其绝对值相等。

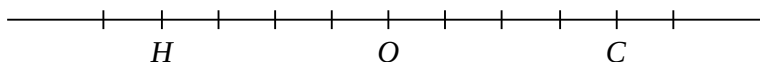


图 1 “单位”定义的图示

编者还引入符号 $\overrightarrow{7}$ 和 $\overleftarrow{7}$ ，或 $\overrightarrow{a}$ 和 $\overleftarrow{a}$ ，表示绝对值相等的一对“方向相反”的数。“单位”定义的几何意义成了绝对值的几何定义的前身。

4 “位置”定义

“位置”定义实际上是由“单位”定义的几何意义衍生得到的。Wentworth (1890) 称：“每一个代数数（如+4 或-4）都由+或-以及绝对值组成。符号说明该数是否属于正序列或负序列，绝对值则说明了该数在正序列或负序列中的位置。”Lilley (1894) 称：“代数数是用带有方向符号的代数项所表示的数，如+3，-3， $-a$ ， $+5a$ 等。绝对值显示了一个数在正负序列中所处的位置。如+3 和-3 具有相同的绝对值，即三个单位。绝对值不带正负号。”

虽然上述两个定义并未明确提及数轴，但它们实际上说的就是数在数轴上的位置，这个位置仅用“离原点的单位个数”来刻画。+3 在正数序列中处于离原点 3 个单位的位置，-3 在负数序列中也处于离原点 3 个单位的位置。

可见，“位置”定义和“单位”定义一样，也是几何定义的前身。

5 代数定义

代数定义具体指明了正数、负数和零的绝对值。这类定义最早出现于 19 世纪晚期，一开始以文字语言来表述，如 Amigues (1890) 称：“我们称一个负量的绝对值是改变符号后所得正量的值，一个正量的绝对值则是该量自身。”类似地，Fite (1913a) 称：“一般地，我们说一个正数的绝对值是该数本身，一个负数的绝对值是符号改变了的数。”Ford & Ammerman (1920) 称：“一个负数的数值或绝对值指的是它所对应的正值，任一正数的数值是该数本身。”Hart (1926) 给出的定义是：“正数的绝对值是该数本身，负数的绝对值等于将该数符号改成+所得的数。”Urner & Orange (1937) 的定义是：“当需要处理一个数的大小而不考虑其符号时，使用‘绝对值’一词比较方便。正数的绝对值是该数本身，负数的绝对值是去符号的数。……有时亦称数

值。”但上述定义忽略了零的情形。Hart (1947) 表述得更为严谨：“正数或零的绝对值是其本身，负数的绝对值是原数改变符号所得的数。”类似地，Miller & Thrall (1950) 也给出完整的定义：“正数或零的绝对值或数值为这个数本身；负数的绝对值或数值为其相应的正数。”

Davission (1910) 利用了符号语言：“ $|r|$ 读作 ‘ r 的绝对值’，定义如下：当 $r \geq 0$ 时， $|r| = r$ ；当 $r < 0$ 时， $|r|$ = 对应于 r 的正数。” Weiss (1949)、Keinstein & Murphy (1957) 和 McCoy (1960) 则进一步用符号来表述，使定义更加简洁：“ a 的绝对值为 $|a|$ ，定义如下：当 $a \geq 0$ 时， $|a| = a$ ；当 $a < 0$ 时， $|a| = -a$ 。” Vance (1963) 则采用了分段函数的表达形式：“定义实数 x 的绝对值为

$$|x| = \begin{cases} x & (x > 0) \\ -x & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}。$$

从代数定义可见，人们用文字语言来定义绝对值时，很容易忽视零的情形；用符号语言来定义绝对值时，在 $a < 0$ 的情形中，对于形式符号的表达是有一定障碍的，因为当时人们依然习惯于用字母表示正数。

6 几何定义

几何定义出现于 20 世纪。前已提及，“单位”定义和“位置”定义已经为几何定义埋下了伏笔。Fite (1913b) 首次告别旧定义，转而采用全新的定义：“一个点到原点的距离称为表示该点的数的绝对值。” Rouse (1931) 沿用了上述定义。Edgerton & Carpenter (1925) 为上述定义换了一种表述：“任何数的绝对值是从原点到表示该数的点的线段长度。” Committee on School Mathematics (1957) 给出的定义是：“在数轴上，一个数的绝对值是这个数所对应的点到 0 对应的点的距离。” Koo, Blyth & Burchenal (1963) 则默认了实数与数轴上点的对应关系：“一个数的绝对值是它到原点的距离，不考虑运动的方向。”

Hall & Kattsoff (1962) 将实数 x 的绝对值定义为“从原点到坐标为 x 的点 x 的无方向的距离。” Miller & Green (1962) 给出如下定义：“若 a 为实数轴上的任意一点，当 a 位于 0 点右边时，其到原点的有向距离是一个正数；当 a 位于 0 点左边时，它是一个负数。实数轴上任一点的绝对值或大小被定义为一个正数或零，其大小等于该点到原点的不计方向的距离。”

Harding & Mullins (1928) 则统一定义了实数和复数的绝对值：“实数、纯虚数或复数的绝对值或模是表示该数的向量的长度。”本文未涉及的许多早期教科书都只定义了复数的绝对值（或模）。

7 “相反数”定义

当人们习惯于使用形式符号时，“相反数”定义应运而生。Miles (1944) 定义绝对值如下：“ a 或 $-a$ 中的正的一个称为 a 的绝对值，记为 $|a|$ ，其中 a 表示任意实数。”但该定义忽略了零的情形。Whyburn & Daus (1955) 给出了另一种更严谨的定义：“若 $a \neq 0$ ，则 a 的绝对值是 $+a$ 和 $-a$ 中的较大者。0 的绝对值是 0。”MSG (1959) 则用文字来表述上述定义：“我们定义关于单个实数的一种新的很有用的运算——取绝对值运算。一个非零实数的绝对值是该数与其相反数中的较大者。零的绝对值为零。”Haag (1960) 则混合使用文字语言和符号语言：“一个数的绝对值是这个数与其相反数中的较大者： $|a| = a$ 与 $-a$ 中的较大者。由定义可知， $|a| \geq 0$ ，其中 a 为任意实数。”

MSG (1961) 通过具体例子来引入绝对值概念：“考虑数 5，其相反数是 -5 ，于是得到数对 5 和 -5 。它们之中哪一个更大呢？……当你回答以上问题时，你就是在做数学上的一种新的很有用的运算，称为‘取一个数的绝对值’。任意一个非零数的绝对值是这个数与它的相反数中的较大者。零的绝对值是零。”编者接下来讨论了绝对值的几何意义和代数意义。

这我们看到，到了 20 世纪 50 年代末，人们已将“取绝对值”视为一种数学运算了。

8 平方根定义

由于对于任意一个实数 a ，均有

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

故 Kelley (1960) 将 a 的绝对值定义为 $\sqrt{a^2}$ 。类似地，Vance (1963) 在给出代数定义之后，也给出了平方根定义。但该定义建立在平方根知识的基础之上，不符合大多数教科书的知识编排

顺序，故很少为人们所采用。

9 总结与启示

以上我们看到，关于“绝对值”概念，80 种教科书中共出现了 8 类定义，跨越了整整一个半世纪。若按出现的时间先后排序，则大致可以勾勒出绝对值概念的演进过程，如图 2 所示。

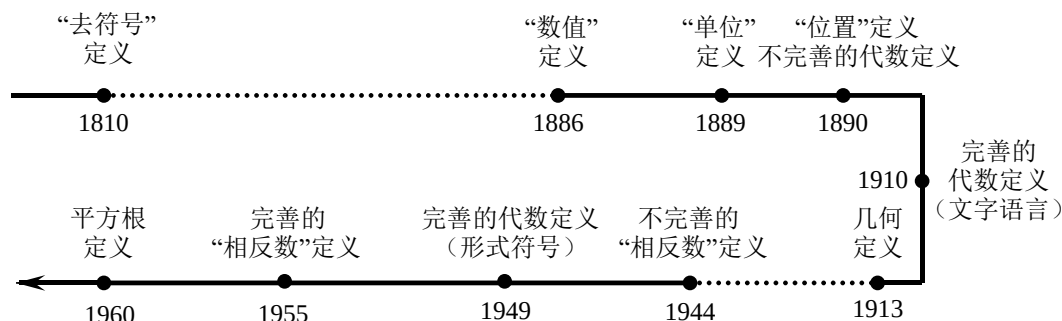


图 2 绝对值定义的历史演进

绝对值定义的演进过程有如下特点。

- 从形式到内涵。“去符号”定义曾经在很长时期内占据统治地位，即使其他定义相继登上历史舞台，但它依然没有销声匿迹，而是不绝如缕，沿用至今。这反映人们对于数学概念的认识始于直观形式，并且根深蒂固。字母表示数的普遍使用凸显了“去符号”定义的局限性，促使人们采用更加注重本质内涵的新定义。

- 从文字到符号。在代数定义出现之前，文字语言是表达绝对值定义的唯一语言，即使在代数定义出现之后，教科书编者一开始依然习惯于文字语言，随着时间的推移，符号语言以其简洁和准确而逐渐成了代数学的主流语言，绝对值定义的表达也相应得到改进。

- 从瑕疵到完善。早期的“去符号”定义、“数值”定义和代数定义往往只针对正数和负数而忽视零的情形，随着人们对实数认识的加深，零不再被遗忘，绝对值定义的缺陷得到了弥补。

- 从刻板到灵活。由于人们一开始习惯于用字母表示正数，因而只能用文字语言而不会用形式符号来表达当 $a < 0$ 时 $|a|$ 的值。也就是说，人们在对 $|a| = -a$ 或 $\sqrt{a^2} = -a$ 的认识上存在障碍，只有在这个障碍被跨越之后，字母绝对值的符号表达才变得简洁和自如。另外，即使在形式符号得到普遍采用之后，教科书依然没有用 $|x| = \max\{x, -x\}$ 这样的等式来表达“相反数”定义。

绝对值概念的历史及其演进过程为探究式教学提供了思想启迪。

首先，绝对值概念的历史所反映出的认识论障碍可以帮助教师预测学生的困难或错误，如对形式符号的认识以及对零的忽视，进而有针对性地制订有关教学策略。

其次，绝对值概念的历史演进过程可以为探究活动的设计提供参照。教师可以通过有理数运算的情境，引出绝对值概念，进而让学生构建绝对值的定义，并将学生的与历史上的定义进行对照，从而实现穿越时空的对话。

再次，绝对值的历史也为教师编制有关问题提供了丰富的素材。如，教师可以呈现历史上的“去符号”定义、“数值”定义、代数定义、相反数定义等，让学生加以辨析，从而更深刻地理解绝对值概念。

参考文献

- [1] Aley, R. J. & Rothrock, D. A. (1904). *The Essentials of Algebra for Secondary Schools*[M]. New York: Silver, Burdett & Company.
- [2] Amigues, É. (1890). *Leçon d'Algèbre Élémentaire*[M]. Paris: A. Colin.
- [3] Beman, W. W. & Smith, D. E. (1902). *Academic Algebra*[M]. Boston: Ginn & Company.
- [4] Bourlet, C. (1896). *Leçon d'Algèbre*[M]. Paris: F. Alcan.
- [5] Cajori, F. & Odell, L. R. (1916). *Elementary Algebra: Second Year Course*[M]. New York: The Macmillan Company.
- [6] Catalan, E. C. (1869). *Manual d'Arithmétique et Algèbre*[M]. Paris: J. Delalain et Fils.
- [7] Choquet, C. (1849). *Traité Élémentaire d'Algèbre*[M]. Paris: Bachelier.
- [8] Colaw, L. M. & Ellwood, J. K. (1903). *School Algebra*[M]. Richmond: B. F. Johnson.
- [9] Committee on School Mathematics. (1957). *High School Mathematics*[M]. Illinois: University of Illinois.
- [10] Davission, S. C. (1910). *College Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company.
- [11] Durell, F. (1916). *School Algebra*[M]. New York: C. E. Merrill.
- [12] Edgerton, E. I. & Carpenter, P. A. (1925). *Advanced Algebra*[M]. Boston: Allyn & Bacon.
- [13] Engelhardt, F. & Haertter, L. D. (1926). *First Course in Algebra*[M]. Philadelphia: The John C. Winston Company.

- [14] Euler, L. (1807). *Éléments d'Algèbre*[M]. Paris: Courcier.
- [15] Feinstein, I. K. & Murphy, K. H. (1957). *College Algebra*[M]. Ames: Littlefield, Adams & Company.
- [16] F. G. M. (1869). *Cours d'Algèbre Élémentaire*[M]. Tours: A. Mame et Fils.
- [17] Fine, H. B. (1904). *A College Algebra*[M]. Boston: Ginn & Company.
- [18] Fisher, G. E. & Schwatt, I. J. (1899). *Elements of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company.
- [19] Fisher, G. E. & Schwatt, I. J. (1900). *Rudiments of Algebra*[M]. Philadelphia: Fisher & Schwatt.
- [20] Fite, W. B. (1913a). *First Course in Algebra*[M]. Boston: D. C. Heath & Company.
- [21] Fite, W. B. (1913b). *College Algebra*[M]. Boston: D. C. Heath & Company.
- [22] Ford, W. B. & Ammerman, C. (1920). *Second Course in Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company.
- [23] Gillet, J. A. (1896). *Elementary Algebra*[M]. New York: Henry Holt & Company.
- [24] Haag, V. H. (1960). *Structure of Elementary Algebra*[M]. New Haven: Yale University Press.
- [25] Hall, H. S. & Knight, S. R. (1922). *Elements of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company.
- [26] Hall, D. W. & Kattsoff, L. O. (1962). *Unified Algebra and Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons.
- [27] Hallett, G. H. & Anderson, R. F. (1917). *Elementary Algebra*[M]. Boston: Silver, Burdett & Company.
- [28] Harding, A. M. & Mullins, G. W. (1928). *College Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company, 1928.
- [29] Hart, W. L. (1926). *College Algebra*[M]. Boston: D. C. Heath & Company.
- [30] Hart, W. L. (1947). *Introduction to College Algebra*[M]. Boston: D. C. Heath & Company.
- [31] Hawkes, H. E., Luby, W. A. & Touton, F. C. (1919). *Complete School Algebra*[M]. Boston: Ginn & Company, 1919.
- [32] Hopkins, J. W. & Underwood, P. H. (1912). *Elementary Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company.
- [33] Jocelyn, L. P. (1902). *An Algebra for High Schools and Academies*[M]. Philadelphia: Butler,

Sheldon & Company.

- [34] Keigwin, H. W. (1886). *Principles of Elementary Algebra*[M]. Boston: Ginn & Company.
- [35] Kelley, J. L. (1960). *Introduction to Modern Algebra*[M]. Princeton: Van Nostrand.
- [36] Koo, D., Blyth, M. I. & Burchenal, J. M. (1963). *First Course in Modern Algebra*[M]. New York: F. Ungar Publishing Company.
- [37] Laurent, H. (1867). *Traité d'Algèbre*[M]. Paris: Gauthier Villars.
- [38] Lilley, G. (1894a). *The Elements of Algebra*[M]. New York: Silver, Burdett & Company.
- [39] Lilley, G. (1894b). *Higher Algebra*[M]. New York: Silver, Burdett & Company.
- [40] Lyman, E. A. & Darnell, A. (1917). *Elementary Algebra*[M]. New York: American Book Company.
- [41] Marsh, W. R. (1905). *Elementary Algebra*[M]. New York: Charles Scribner's Sons.
- [42] Mayer, M. & Choquet, C. (1832). *Traité Élémentaire d'Algèbre*[M]. Paris: Bachelier.
- [43] McCoy, N. H. (1960). *Introduction to Modern Algebra*[M]. Boston: Allyn & Bacon.
- [44] Miles, E. J. (1944). *Basic Mathematics*[M]. New Haven: Edwards Brothers.
- [45] Miller, I. & Green, S. (1962). *Algebra and Trigonometry*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- [46] Miller, E. B. & Thrall, R. M. (1950). *College Algebra*[M]. New York: Ronald Press Company.
- [47] Myers, G. W. & Atwood, G. E. (1916). *Elementary Algebra*[M]. Chicago: Scott, Foresman & Company.
- [48] Newcomb, S. (1887). *A School Algebra*[M]. New York: Henry Holt & Company.
- [49] Nicholson, J. W. (1888). *An Elementary Algebra, Theoretical and Practical*[M]. New Orleans: F. Hansell & Brothers.
- [50] Nicholson, J. W. (1909). *School Algebra*[M]. New York: American Book Company.
- [51] Nowlan, F. S. (1947). *College Algebra*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company.
- [52] Porchon, P. (1896). *Éléments d'Algèbre*[M]. Paris: F. Alcan.
- [53] Reynaud, A. L. (1810). *Éléments d'Algèbre*[M]. Paris: Courcier.
- [54] Rietz, H. L. & Crathorne. (1909). *College Algebra*[M]. New York: Henry Holt & Company.
- [55] Rothrock, D. A. & Witacre, M. A. (1932). *First Year Algebra*[M]. New York: Charles Scribner's Sons.

- [56] Rouse, L. J. (1931). *College Algebra*[M]. New York: John Wiley & Sons.
- [57] Schultze, A. (1918). *Elements of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company.
- [58] Slaught, H. E. (1916). *College Algebra*[M]. Boston: Allyn & Bacon.
- [59] Slaught, H. E. & Lennes, N. J. (1912). *First Principles of Algebra*[M]. Boston: Allyn & Bacon.
- [60] Slaught, H. E. & Lennes, N. J. (1926). *The New Algebra*[M]. Boston: Allyn & Bacon.
- [61] Smith, C. (1886). *Elementary Algebra*[M]. London: Macmillan & Company.
- [62] SMSG. (1959). *Mathematics for High School: First Course in Algebra*[M]. Ann Arbor: Cushing-Malloy.
- [63] SMSG. (1961). *Introduction to Algebra*[M]. Ann Arbor: Cushing-Malloy.
- [64] Sommerville, F. H. (1908). *Elementary Algebra*[M]. New York: American Book Company.
- [65] Tanner, J. H. (1904). *Elementary Algebra*[M]. New York: American Book Company.
- [66] Tanner, J. H. (1907). *High School Algebra*[M]. New York: American Book Company.
- [67] Taylor, J. M. (1889). *A College Algebra*[M]. Boston: Allyn & Bacon.
- [68] Taylor, J. M. (1896). *An Academic Algebra*[M]. Boston: Allyn & Bacon.
- [69] Urner, S. E. & Orange, W. B. (1937). *Intermediate Algebra*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company.
- [70] Vance, E. P. (1963). *Introduction to Modern Mathematics*[M]. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
- [71] Weiss, W. J. (1949). *Higher Algebra for Undergraduate*[M]. New York: John Wiley & Sons.
- [72] Wells, W. (1882). *University Algebra*[M]. Boston: Robert S. Davis.
- [73] Wells, W. (1890). *College Algebra*[M]. Boston: D. C. Heath & Company.
- [74] Wells, W. & Hart, W. W. (1924). *Modern Algebra: Second Course*[M]. Boston: D. C. Heath & Company.
- [75] Wentworth, G. A. (1881). *Elements of Algebra*[M]. Boston: Ginn & Heath.
- [76] Wentworth, G. A. (1890). *A School Algebra*[M]. Boston: Ginn & Company.
- [77] Wentworth, G. A. & Smith, D. E. (1913a). *School Algebra*[M]. Boston: Ginn & Company.
- [78] Wentworth, G. A. & Smith, D. E. (1913b). *Academic Algebra*[M]. Boston: Ginn & Company.

- [79] Wheeler, A. H. (1907). *First Course in Algebra*[M]. Boston: Little, Brown & Company.
- [80] Whyburn, W. M. & Daus, P. H. (1955). *Algebra for College Students*[M]. New York: Prentice-Hall.
- [81] Young, J. W. A. & Jackson, L. L. (1908). *Elementary Algebra*[M]. New York: D. Appleton.

美英早期解析几何教科书中的椭圆的定义和标准方程

孔雯晴

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

在古希腊时期,圆锥曲线起源于平面截圆锥产生的“截线”,阿波罗尼斯(Apollonius,约前262年-约前190年)在《圆锥曲线论》中定义了圆锥曲线,自此,“椭圆”一词出现在大众的视野中。1609年,著名天文学家开普勒发现行星绕太阳运行的轨道是椭圆并提出了开普勒定律,椭圆的应用价值才得以彰显。在椭圆历史发展的初期,数学家们基于截线定义(即原始定义)对椭圆的研究都是纯几何的,随着解析几何的创立和发展,他们逐渐抛弃圆锥来研究圆锥曲线,椭圆的原始定义也逐渐被第一定义和第二定义替代。

圆锥曲线是高中平面解析几何的核心内容,在直线和圆的知识基础上,学生进一步认识圆锥曲线的几何特征,并用代数方法研究曲线的性质,培养数学抽象、直观想象和数学运算等核心素养。椭圆是圆锥曲线教学的开端,为后续抛物线和双曲线的教学奠定基础。在不同版本的现行教科书中,人教A版、沪教版、北师大版都是通过“两钉一线”的画法引出椭圆的第一定义,且推导椭圆标准方程的方法单一,均使用两次平方法。关于椭圆的来源,沪教版在课后阅读中介绍了椭圆是通过平面截圆锥得到的,类似地,人教A版和北师大版在章首页给出椭圆的截线定义。这三种教材都没有详述椭圆的第一定义是如何产生的,在实际的教学中,学生往往知其然而不知其所以然,难以深入理解和掌握椭圆的定义,更谈不上对圆锥曲线有整体的认识。

目前基于椭圆教学的研究比较丰富,但将数学史融入椭圆教学的课例相对较少,已有的HPM课例基本是借助旦德林双球模型进行概念教学。尽管有些教师已经了解HPM的价值,但由于欠缺数学史的知识,因而巧妇难为无米之炊。故本研究聚焦椭圆的定义和标准方程,梳理1830-1963年间的86种美英早期解析几何教科书,试图回答以下的问题:美英早期解析几何教科书中含有哪些椭圆定义和方程?推导方法有哪些?以为课堂教学提供丰富的素材。

2 研究对象

本文从相关数据库中选取了 86 种美英早期解析几何教科书，对于同一作者再版的教科书，若无显著变动，则视为同一本教科书，选取最早的一本，若有显著变动，则视为不同的教科书。以 20 年为一个时间段，教科书的分布如图 1 所示。

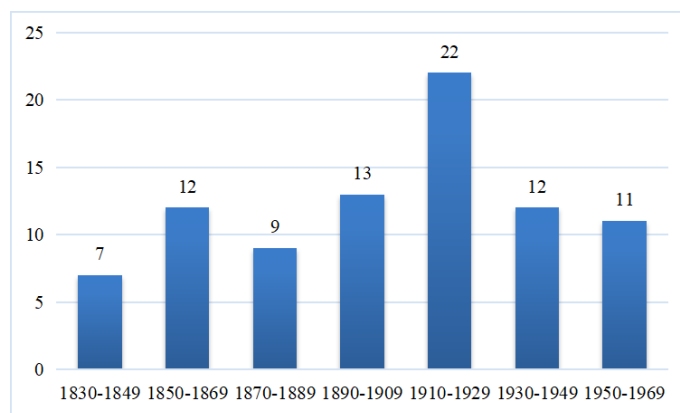


图 1 教科书的年份分布图

3 椭圆的定义

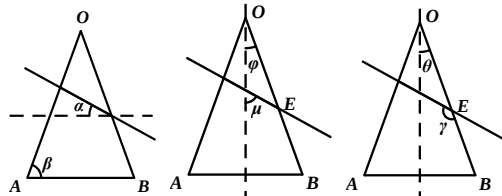
3.1 椭圆定义的分类

经考察发现，在 86 种美英早期解析几何教科书中共出现了五类定义（表 1），分别为第一定义、第二定义、原始定义、方程定义和比率定义。其中，仅有 1 种教科书出现比率定义：“如果一个圆上的点到一条选定直径的距离都以相同的比率改变，由此变形得到的曲线称为椭圆。”

第一定义出现的次数最多，共涉及 70 种教科书，但在表述上不尽相同。其中，有 1 种教科书以“……绕两个定点转动……交点构成的平面曲线……”定义椭圆。有 6 种 19 世纪的教科书没有采用“到两个定点距离之和等于常数”的说法，而是用“一条给定直线”代替了“常数”一词，Church（1851）指出这条给定直线代表椭圆的长轴。其余的 63 种教科书对定义的表述与今天的表述基本一致。

含有第二定义的教科书共有 59 种。每种教科书中可能有多个定义，在这 59 种教科书中，有 41 种教科书最先给出第二定义，且都是先给出圆锥曲线的统一定义，其中 $e < 1$ 的情况表示椭圆。在其余的教科书中，有 8 种是在第一定义的基础上，利用焦半径公式推出第二定义。

表 1 椭圆的定义

类别	定义	代表教科书	数量
第一定义	平面内与两个定点距离之和等于常数的点的轨迹叫做椭圆。 ^[2]	Ziwet & Hedric & Hopkins (1913)	64
	平面曲线上任意一点到两个定点距离之和等于一条给定直线，这样的平面曲线叫做椭圆。 ^[3]	Smyth (1855)	5
	两条半径 (two radii) 分别绕两个定点转动，且满足半径之和为定值，这两条半径的交点构成的平面曲线是椭圆。 ^[4]	Whitlock (1848)	1
第二定义	平面内到定点 F 的距离与到定直线的距离之比为常数 e ($e < 1$) 的点的轨迹叫做椭圆。 ^[5]	Bauer (1903)	59
原始定义	如图， OAB 是圆锥的轴截面，一个平面切割正圆锥体，若夹角满足下列条件之一，则截线为椭圆：① $\alpha < \beta$ ^[6] ；② $\varphi < \mu$ ^[7] ；③ $\gamma > 2\theta$ 。 ^[1]	Phillips (1942)	12
		Smith (1954)	
	平面切割一个圆锥的所有母线形成的封闭曲线叫做椭圆。 ^[8]	Ziwet & Hedric & Hopkins (1913)	
	平面只切割一个圆锥 (one nappe of the cone)，且不平行于圆锥的任何一条母线，所形成的封闭曲线叫做椭圆。 ^[9]	Kaltenborn (1951)	13
方程定义	一般的二阶方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，当 $B^2 < 4AC$ 时，方程表示的二次曲线为椭圆。 ^[10]	Hart (1963)	6
比率定义	如果一个圆上的点到一条选定直径的距离都以相同的比率改变，由此变形得到的曲线称为椭圆。 ^[11]	Tanner & Allen (1898)	53
		Phillips (1915)	1

原始定义是指用平面截圆锥的“截线”定义，所得截线为圆锥曲线，椭圆是其中的一种。

含有原始定义的教科书共有 30 种，大部分教科书将原始定义作为圆锥曲线知识的导入或补充。原始定义的表述可大致归为三类，有 12 种教科书通过比较平面截圆锥的夹角和圆锥角度的大小进行定义，所选夹角可分成三种情况，有 13 种教科书以“切割所有母线”的条件进行限制，其余的 6 种教科书表示需要满足“只切割一个圆锥且不平行于任何一条母线”的条件。

有 52 种教科书给出了方程定义，方程定义一般出现在二阶方程的相关章节中，在圆锥曲线知识的基础上研究二阶方程表示的曲线。对于一般的二阶方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，当 $B^2 < 4AC$ 时，方程表示的二次曲线为椭圆，另一种简化的形式为：对于方程 $Ax^2 + By^2 + C = 0$ ，当 $A, B > 0$ 且 $C < 0$ 时表示椭圆。

3.2 椭圆定义的演变

在 86 种教科书中，出现 4 种定义的教科书有 12 种，出现 3 种定义的教科书有 32 种，出现 2 种定义的教科书有 28 种，只出现 1 种定义的教科书有 14 种。不考虑比率定义，图 2 给出了前四种定义在不同时间段的分布情况。第一定义和第二定义均是早期教科书中椭圆的主流定义，在 1890 年之前，教科书编者更青睐使用第一定义，但在 1890 年至 1929 年间，编者使用第二定义的概率更高，在 1930 年之后，第一定义出现的次数又超过了第二定义。而今天的教科书均使用椭圆的第一定义，很少见到第二定义的踪影。

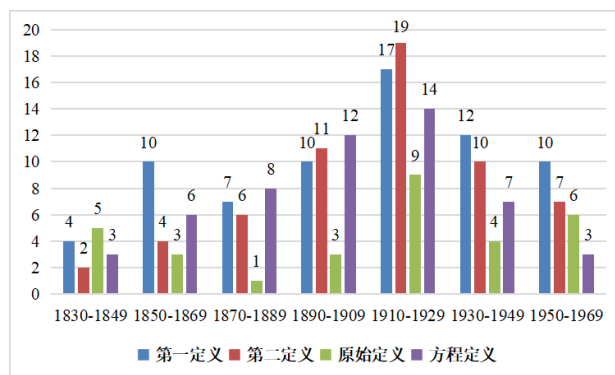


图 2 定义在不同时间段的分布情况

3.3 不同定义之间的联系

古希腊人通过平面截圆锥发现了圆锥曲线，而现在被广泛使用的第一定义和第二定义中已

不见圆锥的影子，那么原始定义与第一定义、第二定义之间有着什么样的联系呢？

3.3.1 原始定义与第一定义

有 5 种教科书借助旦德林双球模型证明了原始定义与第一定义的联系，如图 3 所示，平面 γ 与正圆锥体 V 相交的轨迹为 AA' ，圆锥的内接球 O 和内接球 O' 都与平面 γ 和圆锥 V 相切，在平面 γ 上的切点为 F 和 F' ，与圆锥相切的轨迹分别为圆 BC 和圆 $B'C'$ 。在椭圆上取任意一点 P ，连接 PF 和 PF' ，则 PF 和 PF' 分别是两个球面的切线。过点 P 分别作球 O 和球 O' 另一条切线 PT 和 PT' ，则 $PF = PT$ ， $PF' = PT'$ ，且切点 T 和 T' 分别在圆 BC 和圆 $B'C'$ 上，那么对于任意一点 P ， VT 和 VT' 都是定值，故 $TT' = VT - VT'$ 也是定值，那么 $PF + PF' = PT + PT' = TT'$ 是定值，则轨迹 AA' 是椭圆。^[12]

其中，有 2 种教科书进一步证明这个定值等于椭圆长轴。由于 B 、 C 、 B' 、 C' 都是球面与锥面的切点，则有 $AB = AF$ ， $AB' = AF' = AF + FF'$ ， $A'C' = A'F'$ ， $A'C = A'F = A'F' + F'F$ ，那么 $BB' = AB + AB' = 2AF + FF'$ ， $CC' = A'C + A'C' = 2A'F' + FF'$ ，且 $BB' = CC' = TT'$ ，故 $TT' = \frac{1}{2}(BB' + CC') = AF + FF' + A'F' = AA'$ 。Smith (1954) 指出平面 γ 分别与圆 BC 、圆 $B'C'$ 所在平面的交线 MN 、 $M'N'$ 是椭圆 AA' 的准线。^[7]

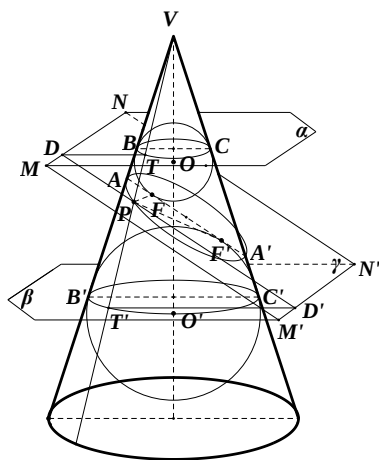


图 3 旦德林双球模型

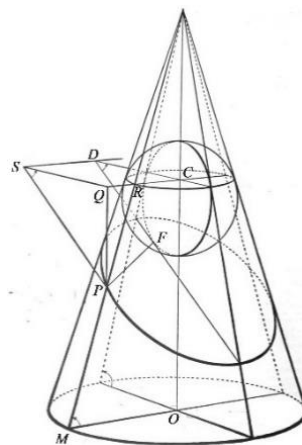


图 4 单球模型

3.3.2 原始定义与第二定义

Lambert (1897) 用旦德林双球模型先证明和为定值的性质，再用相似比推导第二定义，前者与 3.3.1 的证明一致，不再赘述。如图 3 所示， MN 和 $M'N'$ 分别是平面 γ 与平面 α 和平面 β

的交线, 易知 $MN \parallel M'N'$, 过点 P 作 MN 和 $M'N'$ 的垂线 DD' , 易证 $\triangle DTP \sim \triangle D'T'P$, 则

$$\frac{PT}{PT'} = \frac{PD}{PD'}, \text{ 且 } TT' = PT + PT', \quad DD' = DP + PD', \text{ 则 } \frac{PT}{TT'} = \frac{PD}{DD'}, \text{ 也成立, 又因为 } PT = PF, \text{ 故}$$

$$\frac{PF}{TT'} = \frac{PD}{DD'}, \text{ 即 } \frac{PF}{PD} = \frac{TT'}{DD'}. \text{ 同理可证 } \frac{PF'}{PD'} = \frac{TT'}{DD'}, \text{ 且 } TT' = AA' \text{ (3.3.1 节已证)}, \text{ 故}$$

$$\frac{PF}{PD} = \frac{PF'}{PD'} = \frac{TT'}{DD'} = \frac{AA'}{DD'}. \text{ 由于 } AA' < DD' \text{ 恒成立, 则该比例为定值且小于 1, 这与第二定义吻合。}$$

[13]

有 4 种教科书利用单球模型证明了原始定义和第二定义的联系。如图 4 所示, 与上述旦德林双球模型类似, SD 是椭圆所在平面 $SPFD$ 与圆 C 所在平面 $SQCD$ 的交线。下面证明满足第二定义: 作 $PQ \perp$ 平面 $SQCD$, 则 $PQ \perp SQ$, $PQ \perp QC$, QC 与圆 C 交于点 R 。设椭圆所在平面 $SPFD$ 与底面的夹角为 α , 圆锥的母线与底面的夹角为 β , 则 $\angle PSQ = \alpha$, $\angle QRP = \beta$, 由于 $PF = PR$,

$$\text{且在 Rt}\triangle PQR \text{ 和 Rt}\triangle PSQ \text{ 中, } PQ = PR \sin \beta = PS \sin \alpha, \text{ 则 } \frac{PF}{PS} = \frac{PR}{PS} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \text{ 是定值, 且 } \alpha < \beta < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{令 } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = e, \text{ 故 } \frac{PF}{PS} = e < 1. \text{ [14]}$$

4 椭圆的标准方程

4.1 椭圆方程的分类

所选教科书中出现的椭圆方程可归为六类(表 2)。 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ①和 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ②都是椭圆的方程, 符合 $Ax^2 + By^2 = C$ 的形式, 其中 A 、 B 、 C 的符号一致。[15]因此, 本文在梳理椭圆的方程时, 若教科书中同时出现方程①和②, 则只记录方程①的数量。在 86 种教科书中, 有 72 种教科书使用方程①, 其余的 14 种教科书使用方程②。

有 9 种教科书中给出方程 $y^2 = Px + Rx^2$ ($R < 0$) ③, 其具有圆锥曲线方程的统一形式, $R < 0$ 表示椭圆, $R = 0$ 表示抛物线, $R > 0$ 表示双曲线。[16]当坐标原点在椭圆的长轴顶点时, 方程③可表示为 $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ 。[17]

参数方程和极坐标方程在美英早期教科书中也占有一席之地, 出现椭圆参数方程 ($x = acost$, $y = asint$) 的教科书有 14 种。椭圆的极坐标方程有两种形式, 当左(或右)焦点

为极坐标原点时, 椭圆的极坐标方程为 $r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$ (或 $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$) ⑤、 $r = \frac{eq}{1-e\cos\theta}$ (或 $r = \frac{eq}{1+e\cos\theta}$) ⑥。共有 29 种教科书出现了方程⑤, 25 种教科书出现了方程⑥, 方程⑥一般由第二定义推导得到, q 的几何意义是焦点到同侧准线的距离。

表 2 椭圆的方程

序号	方程	代表教材	数量
①	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ [16] (包括 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$) [19]	Taylor & Wade (1962) Randolph & Kac (1946)	72
②	$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ [20]	Hardy (1897)	14
③	$y^2 = Px + Rx^2$, $R < 0$ [16] (包括 $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$) [19]	Howison & Ray (1869) Loomis (1851)	9
④	参数方程: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ [21]	Osgood (1936)	14
⑤	$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$ 或 $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ [22] (包括 $r = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\theta}$) [23]	Peck (1876) Peirce (1846)	29
⑥	$r = \frac{eq}{1-e\cos\theta}$ 或 $r = \frac{eq}{1+e\cos\theta}$ [2] (包括: $r = \frac{l}{1-e\cos\theta}$) [10]	Ziwet & Hedric & Hopkins (1913) Tanner & Allen (1898)	25

4.2 椭圆方程的演变

以 20 年为一个时间段, 图 5 给出了椭圆方程在不同时间段的分布情况。在 1830 年至 1869 年间, 方程①和方程②出现的频次不分上下。但在 1970 年至 1909 年间, 方程①的数量远远大于方程②。到了 1910 年之后, 椭圆的方程统一为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的标准形式。方程④仅在 1890 年至 1929 年间出现, 方程⑤的数量在 1830 年至 1929 年间逐年递减并消失, 但方程⑥的数量有后来居上的趋势。

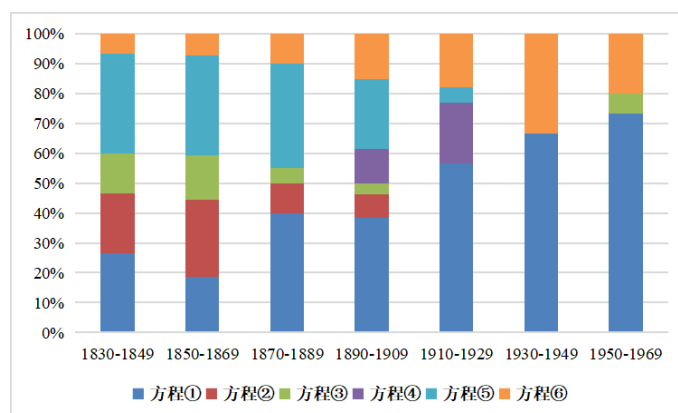


图 5 椭圆方程在不同时间段的分布情况

5 椭圆方程的推导

所选教科书提供了多种椭圆方程的推导方法，根据定义不同，这些方法可分为基于第一定义推导、基于第二定义推导和基于原始定义推导三类。

5.1 基于第一定义的推导

基于第一定义推导的方法有五种，分别是两次平方法、洛必达法、平方差法、利用余弦定理和利用焦半径公式，前四种可推导出椭圆的标准方程，后两种可推导出椭圆的极坐标方程。

5.1.1 两次平方法

如图 6 所示，点 $P(x, y)$ 是椭圆上任意一点，已知 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ，焦点为 $F_1(-c, 0)$ 和 $F_2(c, 0)$ ，且 $|PF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ ， $|PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ，则有

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (1)$$

将 $\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ 移至等式右边，(1) 式两边平方并化简，得到

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx,$$

等式两边再平方并化简，得到

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

则有

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

由于 $a > c$ ，则令 $b^2 = a^2 - c^2$ ，得到标准方程^[18]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

只有 1 种教科书没有对 (1) 进行移项，而是直接两边平方。虽然计算较复杂，但也能得到标准方程。^[2]

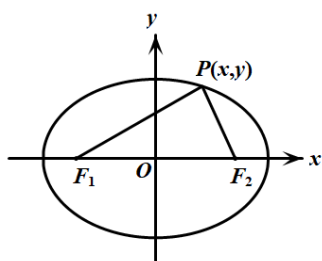


图 6 两次平方法

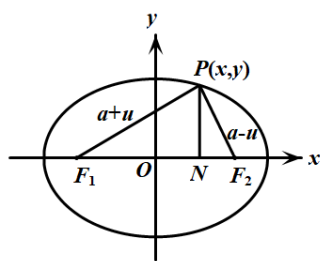


图 7 洛必达法

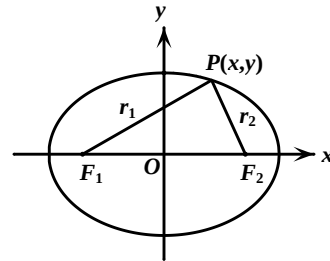


图 8 平方差法

5.1.2 洛必达法

如图 7 所示，点 $P(x, y)$ 是椭圆上任意一点，已知焦点 $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ ，且满足 $PF_1 + PF_2 = 2a$ ， $PN \perp F_1F_2$ ，则设 $PF_1 = a + u$ ， $PF_2 = a - u$ ，那么有

$$(a + u)^2 = (x + c)^2 + y^2 \quad (2)$$

$$(a - u)^2 = (x - c)^2 + y^2 \quad (3)$$

由 (2) + (3) 得到

$$a^2 + u^2 = y^2 + c^2 + x^2 \quad (4)$$

由 (2) - (3) 得到， $au = cx$ ，即

$$u = \frac{c}{a}x \quad (5)$$

将 (5) 带入 (4) 中得到

$$a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 = a^2 + u^2 = y^2 + c^2 + x^2,$$

移项化简后方程变为

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

令 $a^2 - c^2 = b^2$ 代入即可得到标准方程。^[4]

5.1.3 平方差法

如图 8 所示, 点 $P(x, y)$ 是椭圆上任意一点, 已知 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 令 $PF_1 = r_1$, $PF_2 = r_2$, 由定义可以得到

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (6)$$

则有

$$r_1^2 = (c+x)^2 + y^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2 \quad (7)$$

$$r_2^2 = (c-x)^2 + y^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2 \quad (8)$$

由 (7) - (8) 可以得到

$$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4cx,$$

又因为 $r_1 + r_2 = 2a$, 则

$$r_1 - r_2 = \frac{2cx}{a} \quad (9)$$

由 (6) 和 (9) 整理得到

$$r_1 = a + \frac{cx}{a} \quad (10)$$

$$r_2 = a - \frac{cx}{a} \quad (11)$$

令 $a^2 - c^2 = b^2$, 将 (10) 代入 (7) 整理得到标准方程。^[22]

5.1.4 利用余弦定理

如图 9 所示, 设 $P(\rho, \theta)$ 是椭圆上任意一点, 则 $PF_1 = \rho$, 由第一定义可得 $PF_2 = 2a - \rho$, 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 由余弦定理可知

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 - 2\rho \cdot 2c \cos \theta,$$

化简后方程为

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \theta} \quad (12)$$

将 $c = ae$ 代入 (12) 并化简就得到了极坐标方程^[5]

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \theta}.$$

有 2 种教科书在此基础上推导出了椭圆的标准方程, 设点 P 在直角坐标系中的坐标为 (x, y) , 焦点 $F_1(-c, 0)$, 则满足等式

$$\rho \cos \theta = x + c \quad (13)$$

将 (13) 代入 (12), 化简得到

$$a\rho - cx = a^2 \quad (14)$$

其中

$$\rho = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (15)$$

将 (15) 代入 (14) 中并化简即可得到椭圆的标准方程。^[23]

5.1.5 利用焦半径公式

如图 10 所示, $P(x, y)$ 为椭圆上任意一点, $PD \perp x$ 轴。如果将焦点 $F_2(ae, 0)$ 作为极点, 设 $\angle PF_2D = \theta$, $PF_2 = r$, 由焦半径公式可知 $r = a - ex$, 且 $OD = OF_2 + F_2D$, 即 $x = ae + r \cos \theta$, 则 $r = a - e(ae + r \cos \theta)$, 化简后得到 $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$ 。如果将焦点 $F_1(-ae, 0)$ 作为极点, 设 $PF_1 = r'$, $\angle PF_1D = \theta$, 同理可得极坐标方程为 $r' = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos \theta}$ 。^[24]

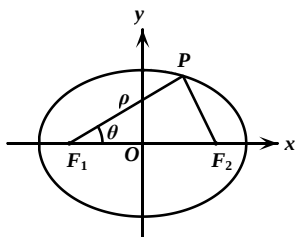


图 9 利用余弦定理

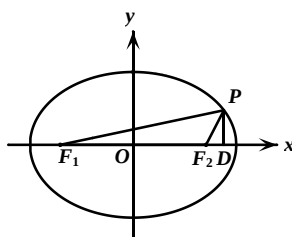


图 10 利用焦半径公式

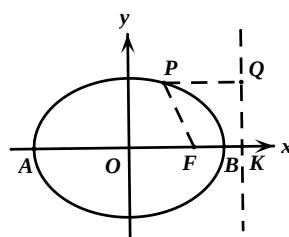


图 11 以原点为中心

5.1.6 小结

以 20 年为一个时间段, 基于第一定义推导标准方程的方法随时间演变的情况如图 12 所示, 洛必达法和利用余弦定理的方法在早期曾出现过, 但未受到重视。在 19 世纪, 平方差法受到编者们的欢迎, 但到了 20 世纪, 平方差法逐渐消失, 而两次平方法成为了主流, 编者们认为循规蹈矩的两次平方法更适合大部分学生。

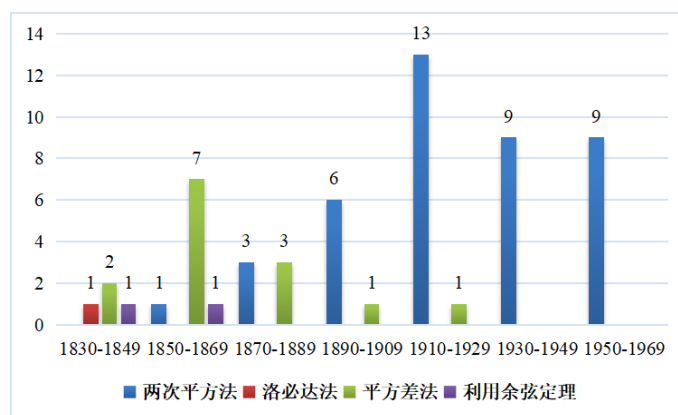


图 12 基于第一定义推导标准方程的方法的演变

5.2 基于第二定义的推导

基于第二定义推导的方法有四种，分别是以原点为中心、以准线为纵轴、以焦点为中心和坐标轴平移法，四种方法均可推导出标准方程，其中以焦点为中心的方法也可推导出极坐标方程。

5.2.1 以原点为中心

有 18 种教科书采用以原点为中心的方法进行推导。如图 11 所示，设椭圆上任意一点 $P(x, y)$ ，已知 $A(-a, 0)$ ， $B(a, 0)$ ，焦点 $F(c, 0)$ ，准线与 x 轴交点 $K(k, 0)$ 。先推导焦点可表示为 $F(ae, 0)$ ，准线为 $x = \frac{a}{e}$ ， $PQ \perp$ 准线，由 $|FP| = e|QP|$ 可知： $\sqrt{(x - ae)^2 + y^2} = e \left| x - \frac{a}{e} \right|$ ，两边平方再化简，得到 $(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)$ ，则 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$ ，令 $b^2 = a^2(1 - e^2)$ 得到 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。推导准线和焦点坐标的方法有如下三种：

一是绝对值法。由第二定义知 $|FP| = e|PK|$ ，当点 P 与点 A 重合时，那么有 $|-a - c| = e|-k - a|$ 两边平方后化简，得到

$$a^2 + 2ac + c^2 = e^2(a^2 + 2ak + k^2) \quad (16)$$

当点 P 与点 B 重合时，那么有 $|a - c| = e|k - a|$ ，两边平方后化简，得到

$$a^2 - 2ac + c^2 = e^2(a^2 - 2ak + k^2) \quad (17)$$

由 (16) - (17), 化简得到

$$c = e^2 k \quad (18)$$

由 (16) + (17) 化简得到

$$a^2 + c^2 = e^2(a^2 + k^2) \quad (19)$$

将 (18) 代入 (19) 化简得到

$$c = \pm ae, \quad k = \pm \frac{a}{e},$$

由 (18) 可知 c 和 k 是同号的, 取右侧的焦点和准线 (图 11), 那么^[25]

$$c = ae, \quad k = \frac{a}{e}.$$

二是向量法。由第二定义知 $\overrightarrow{AF} = e\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BF} = -e\overrightarrow{BK}$, 则

$$c + a = e(k + a) \quad (20)$$

$$a - c = e(k - a) \quad (21)$$

由 (20) 和 (21) 可得

$$k = \frac{a}{e} \quad (22)$$

由 (22) 式代回 (20) 式可得^[26]

$$c = ae.$$

三是几何法。由第二定义知

$$AF = eAK \quad (23)$$

$$FB = eBK \quad (24)$$

由 (23) + (24) 得

$$AB = e(AK + BK) = e(AB + 2BK) = 2e(OB + BK) = 2e \cdot OK$$

即

$$2a = 2e \cdot OK, \quad OK = \frac{a}{e},$$

由 (23) - (24) 得

$$AF - BF = e(AK - BK) = e \cdot AB,$$

即

$$2ae = AF - BF = (AO + OF) - (OB - OF) = 2OF ,$$

则 $OF = ae$ 。^[9]

几何法用坐标表示更为简洁，方程（23）即

$$ek - ae = a - c \quad (25)$$

方程（24）即

$$ek + ae = a + c \quad (26)$$

由（25）+（26）可得 $2ek = 2a$ ，即 $k = \frac{a}{e}$ ，代回（25）中可得 $c = ae$ 。^[27]

5.2.2 以准线为纵轴

有 21 种教科书采用以准线为纵轴的方法进行推导。如图 13 所示，由第二定义可知 $FP = eMP$ ($e > 0$)，以定直线作为 y 轴，定点 F 所在直线作为 x 轴，设 $F(p, 0)$ ， $P(x, y)$ ，则

$$PF = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} ,$$

那么有

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \pm ex ,$$

两边平方化简得到

$$(1-e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0 ,$$

方程可进一步变形为

$$\left[x^2 - \frac{2p}{1-e^2}x + \frac{p^2}{(1-e^2)^2} \right] + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{p^2}{1-e^2} + \frac{p^2}{(1-e^2)^2} ,$$

即

$$\left[x - \frac{p}{1-e^2} \right]^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} ,$$

该椭圆的中心为 $C(\frac{p}{1-e^2}, 0)$ ，将椭圆沿着 x 轴平移 $-\frac{p}{1-e^2}$ 个单位，此时椭圆中心位于坐标轴

的原点处，则方程转化为

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} ,$$

即

$$\frac{\frac{x^2}{p^2 e^2}}{(1-e^2)^2} + \frac{\frac{y^2}{p^2 e^2}}{1-e^2} = 1,$$

令 $\frac{p^2 e^2}{(1-e^2)^2} = a^2$, $\frac{p^2 e^2}{1-e^2} = b^2$, 那么方程化简为^[21]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

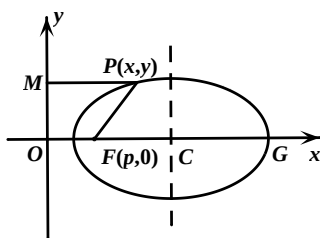


图 13 以准线为纵轴

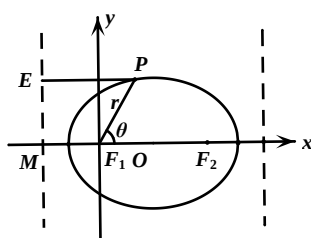


图 14 以焦点为中心

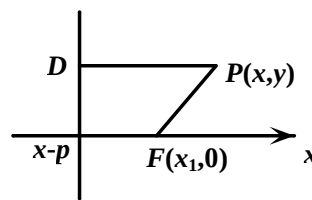


图 15 坐标轴平移法

5.2.3 以焦点为中心

Haaser (1959) 以椭圆焦点作为坐标轴原点建立方程再化简, 接着将椭圆中心平移至坐标轴原点, 即得到标准方程, 过程与 5.2.2 节的证明类似, 故不再赘述。^[28]

有 22 种教材以焦点为中心推导椭圆的极坐标方程。如图 14 所示, 设 $MF_1 = q$, 点 $P(\rho, \theta)$ 是椭圆上的任意一点, 由第二定义可知 $\frac{PF_1}{EP} = e$, $EP = q + \rho \cos \theta$, 则 $\rho = e(q + \rho \cos \theta)$, 即

$$\rho = \frac{eq}{1 - e \cos \theta}.$$

$$\rho = e(q - \rho \cos \theta) \quad (27)$$

即

$$\rho = \frac{eq}{1 + e \cos \theta}.$$

在这 22 种教材中, 有 3 种教材利用极坐标方程继续推导标准方程。以 (27) 为例, 将 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $x = \rho \cos \theta$ 带入 (27) 中, 则

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e(q - x),$$

两边平方再化简为

$$(1 - e^2)x^2 + 2e^2qx + y^2 = e^2q^2,$$

进一步将方程转化为

$$(1-e^2)(x-\frac{e^2q}{1-e^2})^2+2e^2q(x-\frac{e^2q}{1-e^2})+y^2=e^2q^2,$$

则椭圆的中心为 $(\frac{e^2q}{1-e^2}, 0)$ ，再通过平移并化简，方程变为

$$\frac{x^2}{\frac{e^2q^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\frac{e^2q^2}{1-e^2}}=1,$$

当 $e < 1$ 时方程表示椭圆，此时 $a = \frac{eq}{1-e^2}$ ， $b = \frac{eq}{\sqrt{1-e^2}}$ 。^[2]

5.2.4 平移坐标轴法

有 4 种教科书采用其他的坐标系建立椭圆的方程，再通过方程变换化简为标准方程。例如 Agnew (1962) 是任取一点作为坐标轴原点，如图 15 所示，设椭圆上任意一点 $P(x, y)$ ，焦点 $F(x_1, 0)$ ，准线为 $x = x_1 - p$ ，由第二定义可知 $|FD|^2 = e^2 |PD|^2$ ，则 $(x-x_1)^2 + y^2 = e^2 [x-(x_1-p)]^2$ ，化简得到

$$(1-e^2)x^2+2[e^2(x_1-p)-x_1]x+y^2=e^2(x_1-p)^2-x_1^2 \quad (28)$$

当一次项系数为 0 时，化简结果最简洁，令 $e^2(x_1-p)-x_1=0$ ，那么 $x_1 = \frac{-e^2p}{1-e^2}$ ， $x_1-p = \frac{-p}{1-e^2}$ ，

将其代回 (28) 式，得到

$$(1-e^2)x^2+y^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2} \quad (29)$$

令 $a^2 = \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ ， $b^2 = \frac{e^2p^2}{1-e^2}$ ，代回 (29) 式就得到标准方程。^[29]

5.2.5 小结

基于第二定义推导标准方程的方法的区别在于选取的坐标系不同，但无论选取哪一种方法，最后都通过平移椭圆中心至原点处得到标准方程。以 20 年为一个时间段，这四种方法随时间演变的情况如图 16 所示，以中心为原点和以准线为纵轴两种方法是最早出现的，自 1890 年起，以焦点为原点和平移坐标轴法开始被使用。1901 年至 1929 年是以中心为原点的证法出现的高峰时期，1950 年后，四种证法出现的频率不相上下。

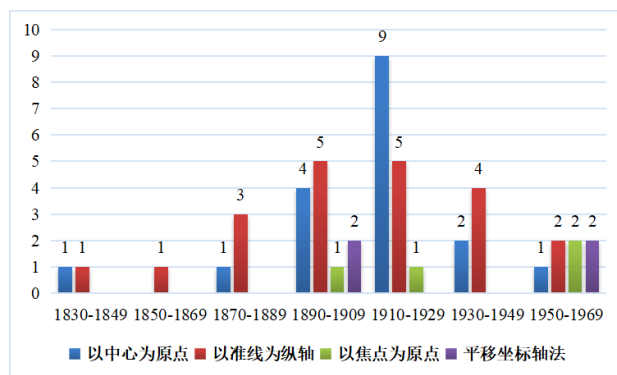


图 16 基于第二定义推导标准方程的方法的演变

5.3 基于原始定义的推导

本文的 3.3.1 节已经证明了通过旦德林双球模型能够从原始定义推导出第一定义，从而进一步推导椭圆的标准方程。下面介绍早期教科书中其他基于原始定义的推导方法，分别是阿波罗尼斯法、双圆法和三角法。这三种方法的本质都是先证明椭圆的基本性质^[30]，再用代数语言表达基本性质，就得到了椭圆的方程。

5.3.1 阿波罗尼斯法

有 2 种教科书采用阿波罗尼斯的证法，在图 17 所示的斜圆锥中，平面截圆锥得到椭圆 DE ， N 是椭圆上任意一点，过点 N 且平行于底面的平面交圆锥于圆 HJ ，再过点 A 作 $AG \parallel DE$ ，延长 BC 、 DE ，交点为 F 、 G 。椭圆 DE 与圆 HJ 的交线是 MN ，易证 $MN \perp DE$ ，由相交弦定理可知

$$MN^2 = HM \cdot MJ \quad (30)$$

由于 $\triangle DHM \sim \triangle ABG$ ，则

$$\frac{HM}{BG} = \frac{DM}{AG} \quad (31)$$

又因为 $\triangle MJE \sim \triangle FCE \sim \triangle GCA$ ，则

$$\frac{MJ}{CG} = \frac{ME}{AG} \quad (32)$$

由 (30) (31) (32) 可知 $MN^2 = \frac{DM \cdot BG}{AG} \cdot \frac{ME \cdot CG}{AG}$ ，即

$$MN^2 = DM \cdot ME \cdot \frac{BG \cdot CG}{AG^2} \quad (33)$$

且 $\frac{BG \cdot CG}{AG^2}$ 是定值，这就是椭圆的基本性质。设 $k = \frac{BG \cdot CG}{AG^2}$ ， $DE = 2a$ ， $DM = x$ ， $MN = y$ 则

$ME = 2a - x$ ，代入 (33) 中得到了椭圆的方程 $y^2 = kx(2a - x)$ 。[12]

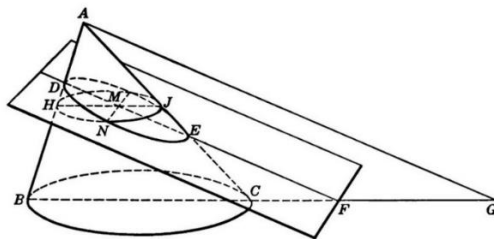


图 17 阿波罗尼斯法

5.3.2 双圆法

有 2 种教科书也利用相似三角形证明椭圆的基本性质，但构造方法与阿波罗尼斯法略有不同。如图 18 所示，在椭圆 MN 中， C 点是 MN 的中点， Q 点为线段 MN 上任意一点，过点 C 、

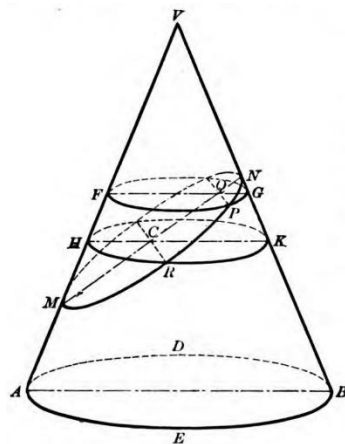


图 18 双圆法

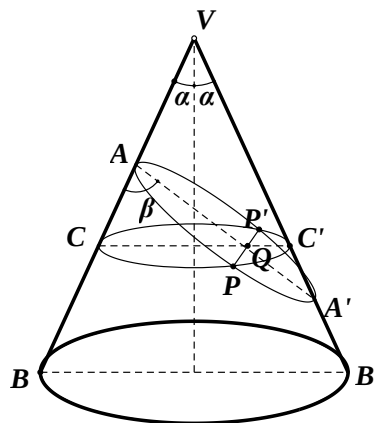


图 19 三角法

点 Q 且平行于底面的平面分别交圆锥于圆 FG 、圆 HK ，圆 FG 和圆 HK 分别与椭圆 MN 交于点 P 和点 R ，易证 $PQ \perp FG$ ， $PQ \perp MN$ ， $CR \perp HK$ ， $CR \perp MN$ 。由相交弦定理可知 $QP^2 = FQ \cdot QG$ ，

$CR^2 = HC \cdot CK$ 。由于 $\triangle MFQ \sim \triangle MHC$ 且 $\triangle NQG \sim \triangle NCK$ ，则 $\frac{FQ}{HC} = \frac{MQ}{MC}$ ， $\frac{QG}{CK} = \frac{QN}{CN}$ ，那么有

$\frac{QP^2}{CR^2} = \frac{MQ \cdot QN}{MC \cdot CN}$ 。令 $CR = b$ ， $MC = CN = a$ ，则

$$\frac{QP^2}{b^2} = \frac{MQ \cdot QN}{a^2} \quad (34)$$

在平面 $MRPN$ 上，令 MN 为 x 轴， C 为坐标轴原点。设 $QP = y$ ， $CQ = x$ ，则 $MQ = a + x$ ， $QN = a - x$ ，

均代入方程(34)中,化简后即可得到标准方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,这种构造揭示了性质中的定值等于椭圆长短轴的平方比。[31]

5.3.3 三角法

有 4 种教科书借助三角函数证明椭圆的基本性质,进而推导椭圆的方程。如图 19 所示, BVB' 是圆锥的轴截面, $BVB' = 2\alpha$,过母线 BV 上的一点 A 且与 $\overline{AC}$ 夹角为 β 的平面截圆锥得到曲线 AA' ,当 $\beta > 2\alpha$ 时,曲线 AA' 为椭圆。在椭圆上取任意一点 P ,平行于底面且过点 P 的平面与圆锥交于圆 CC' ,作 $PP' \perp$ 线段 AA' , PP' 交 AA' 于点 Q 。把 AQ 作为 x 轴,设 $AA' = 2a$,令 $AQ = x$, $QP = y$,下面证明 $\frac{y^2}{x(2a-x)} = \frac{QP^2}{AQ \cdot QA'}$ 是定值。在圆 CC' 中,由相交弦定理可知 $QP^2 = CQ \cdot QC'$,则只要证明 $\frac{CQ \cdot QC'}{OQ \cdot QO'}$ 是定值,在 $\triangle CQA$ 和 $\triangle A'QC'$ 中,由正弦定理得 $\frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin \beta}{\sin(\frac{1}{2}\pi - \alpha)}$, $\frac{QC'}{QA'} = \frac{\sin(\beta - 2\alpha)}{\sin(\frac{1}{2}\pi + \alpha)}$,故 $\frac{QP^2}{AQ \cdot QA'} = \frac{CQ \cdot QC'}{AQ \cdot QA'} = \frac{\sin \beta \sin(\beta - 2\alpha)}{\cos^2 \alpha}$ 为定值,令该定值为 k^2 ,则方程变为 $y^2 = k^2 x(2a - x)$,即 $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{(ka)^2} = 1$,此时椭圆的中心坐标为 $(a, 0)$ 。[2]

另外,有 3 种教材的推导方法非常复杂,与今天的高中教学内容差别很大,故不详述其证明过程,下面简要说明证明思路:依然如图 19 所示,设圆锥母线与底面的夹角为 v ,椭圆所在平面与底面的夹角为 u ,先在三维坐标系中推导圆锥 V 的方程和平面 $APA'P'$ 的方程,再求得截线在坐标平面上的投影,进一步建立二维直角坐标系中的椭圆方程,最后借助正弦定理和三角函数化简得到椭圆的标准方程。[32]

6 结论与启示

86 种美英早期教科书中有五种定义,包括第一定义、第二定义、原始定义、方程定义和比率定义。与现行教科书不同的是,第一定义和第二定义一直是早期教科书中的主流定义。在基于第一定义推导标准方程的方法中,洛必达法、平方差法和利用余弦定理的方法逐渐消失在历史的长河里。而两次平方法深受编者们的青睐,这与现行的教科书情况一致。早期教科书中的椭圆定义和方程及其演变对今天的教学有所启示。

在学习椭圆之前，学生对生活中的椭圆已有一定的认识，如篮球在平行光照射下的投影是椭圆，这种认识基于三维空间，与椭圆源自平面截圆锥（原始定义）有共性。但是现行教科书通过“两钉一线”引入二维的椭圆（第一定义），这对学生来说是比较突兀的。在早期教科书中，我们看到原始定义和第一定义、第二定义有着密切的联系，教师可以借助旦德林双球模型或单球模型呈现知识形成和发展的过程，帮助学生了解圆锥曲线的来源和把握椭圆定义的本质，构建知识之谐，实现能力之助。

椭圆的第一定义和第二定义在早期教科书中的地位不分上下，并且两种定义可相互证明。一方面，第二定义往往以圆锥曲线定义的一种情况出现，另一方面，方程 $y^2 = Px + Rx^2$ 也体现了圆锥曲线的一致性。由此可见，早期教科书注重呈现椭圆、双曲线和抛物线的共性，教师可以依据圆锥曲线的共性设计单元教学。

在早期教科书中，椭圆方程的推导方法百花齐放。值得注意的是，基于第二定义的推导方法虽然有四种，但其差别在于一开始选择的坐标系不同，最终都通过平移得到了最简形式的标准方程。由此我们可以发现，数学是具有简洁美的。现行教科书都是基于第一定义推导方程，尽管书中只提供了两次平方法，但课堂教学并不受限，教师可以适当“留白”以增加学生的学习机会，鼓励学生自行探索推导方法，获得探究之乐，领略方法之美。

椭圆定义和方程的发展是一个非常漫长的过程，教师应当引导学生了解数学家们的贡献，跨越时空与数学家们对话，使数学文化能够“润课堂细无声”，实现德育之效。

参考文献

- [1] Church, A. E. (1851). *Elements of analytical geometry*[M]. New York: A.S. Barnes.
- [2] Ziwet, A., Hedric, E. R. & Hopkins, L. A. (1913). *Analytic geometry and principles of algebra*[M]. New York: The Macmillan company.
- [3] Smyth, W. (1855). *Elements of analytical geometry*[M]. Boston: Sanborn, Carter and Bazin.
- [4] Whitlock, G. C. (1848). *Elements of geometry, theoretical and practical: containing a full explanation of the construction and use of tables, and a new system of surveying*[M]. New York: Pratt, Woodford.

- [5] Bauer, G. N. (1903). *The simpler elements of analytical geometry*[M]. Minneapolis, Minn: The H.W. Wilson Company.
- [6] Phillips, H. B. & Karreman Mathematics Research Collection. (1942). *Analytic geometry and calculus*[M]. Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press.
- [7] Smith, E. S. (1954). *Analytic geometry*[M]. 2d ed. New York: Wiley.
- [8] Kaltenborn, H. S. (1951). *Meaningful mathematics: a survey course for college students*[M]. New York: Prentice-Hall.
- [9] Hart, W. L. (1963). *Analytic geometry and calculus*[M]. 2d ed. Boston: Heath.
- [10] Tanner, J. H. & Allen, J. (1898). *An elementary course in analytic geometry*[M]. New York: American book company.
- [11] Phillips, H. B. (1915). *Analytic geometry*[M]. 1st ed., 1st thousand. New York: John Wiley & sons, inc.
- [12] Fehr, H. F. (1951). *Secondary mathematics: a functional approach for teachers*[M]. Boston: Heath.
- [13] Lambert, P. A. (1897). *Analytic geometry: for technical schools and colleges*[M]. New York: Macmillan.
- [14] Candy, A. L. (1904). *The elements of plane and solid analytic geometry*[M]. Boston: D.C. Heath & company.
- [15] Smith, P. F. & Gale, A. S. (1912). *New analytic geometry*[M]. Boston: Ginn.
- [16] Howison, G. H. & Ray, J. (1869). *A treatise on analytic geometry: especially as applied to the properties of conics; including the modern methods of abridged notation*[M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Company.
- [17] Loomis, E. (1851). *Elements of analytical geometry and of the differential and integral calculus*[M]. New York: Harper & Brothers.
- [18] Taylor, H. E. & Wade, T. L. (1962). *Subsets of the plane: plane analytic geometry*[M]. New York: Wiley.
- [19] Randolph, J. F. & Kac, M. (1946). *Analytic geometry and calculus*[M]. New York: The Macmillan company.

- [20] Hardy, J. J. (1897). *Elements of analytic geometry*[M]. Easton, Pa.: Chemical publishing company.
- [21] Osgood, W. F. & Graustein, W. C. (1921). *Plane and solid analytic geometry*[M]. New York: Macmillan.
- [22] Peck, W. G. (1876). *A treatise on analytical geometry*[M]. New York: A.S. Barnes & Company.
- [23] Peirce, B. (1846). *An elementary treatise on curves, functions, and forces*[M]. Boston: J. Munroe.
- [24] Nichols, E. W. (1892). *Analytic geometry for colleges, universities, and technical schools*[M]. Boston [Mass.]: Leach, Shewell & Sanborn.
- [25] Purcell, E. J. (1958). *Analytic geometry*[M]. New York: Appleton-Century-Crofts.
- [26] Poor, V. C. (1934). *Analytical geometry*[M]. New York: J. Wiley & sons inc.
- [27] Fine, H. B. & Thompson, H. D. (1914). *Coordinate geometry*[M]. New York: The Macmillan company.
- [28] Haaser, N. B. (1959). *A course in mathematical analysis*[M]. Boston: Ginn.
- [29] Agnew, R. P. (1962). *Calculus: analytic geometry and calculus, with vectors*[M]. New York: McGraw-Hill.
- [30] 汪晓勤. 椭圆第一定义是如何诞生的?[J]. 中学数学月刊, 2017(06): 28-31.
- [31] Wilson, W. A. & Tracey, J. I. (1915). *Analytic geometry*[M]. Boston: D.C. Heath & Company.
- [32] Biot, J. (1860). *An elementary treatise on analytical geometry*[M]. Rev. ed. Richmond, Va.: A. Morris.

美英早期解析几何教科书中的参数方程

刘梦哲

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

“数”与“形”是数学研究的两个主要对象,“平面解析几何”的诞生架设起了“几何的形”和“代数的式(方程)”之间的桥梁。在解析几何的学习中,直线、圆、椭圆、双曲线和抛物线是需要学生重点掌握的几类曲线,其主要内容包括标准方程及其性质等。

实现学科育人的前提是发现数学学科对学生发展的独特教育价值,逻辑严谨、思维缜密是数学的学科特点^[1]。无论从数学外部,即与物理、化学等其它学科的联系,还是从数学内部,即数学知识点之间的纵横交错,都可以看到数学是一门普遍联系的学科。因此,引导学生用数学的眼光观察世界,用数学的语言描述世界,用数学的思维思考世界,是数学学科育人的根本途径^[1]。

虽然现行沪教版教科书中没有涉及参数方程的内容,但参数方程作为解决解析几何问题的重要工具,且与三角函数具有密切地联系,它的出现无疑能够简化思路、减少变量、减轻学生的计算负担。可以说,参数方程对于学生寻找动点轨迹、理解曲线方程的意义及解题等各方面都起到了举足轻重的作用,这也是数学教师在课堂中对其进行补充的一个重要原因。

知其然,方能知其所以然。融入数学史的数学课堂,一方面使得数学知识的学习能够学懂弄通学深悟透,把握其来龙去脉,另一方面也让今天的数学课堂充满数学文化的芬芳,从而践行立德树人根本任务。当我们翻开历史的画卷,从参数方程的概念、性质到参数方程的作图、应用,19-20 世纪美英解析几何教科书对参数方程的相关内容进行了详细的介绍,但迄今我们对此知之甚少。鉴于此,本文拟聚焦参数方程,对美英早期教科书进行考察,试图回答以下问题:历史上对于参数方程是如何定义的?为什么要学习参数方程?如何实现参数方程与普通方程的互化?

2 早期教科书的选取

本文选取 1826-1965 年间出版的 75 种美英早期数学教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间及其出现参数方程的时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

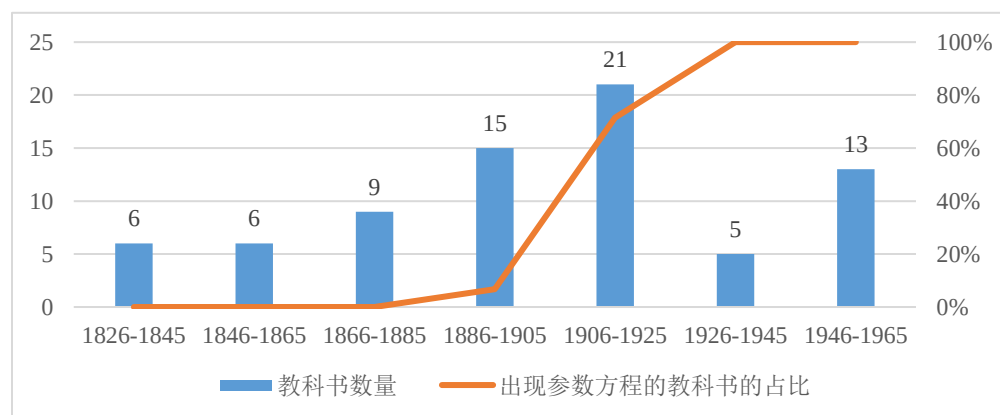


图 1 75 种美英早期数学教科书的出版及出现参数方程的时间分布

在 34 种给出参数方程的教科书中，参数方程的内容主要位于“参数方程”“轨迹的参数方程”“参数表示”“高等平面曲线”等章，部分教科书会将此内容放在“椭圆”“双曲线”“抛物线”等章中分开介绍。从折线图可以看到，参数方程出现的时间较晚，在 1826-1904 年间，没有一本教科书涉及参数方程的内容。此后，参数方程越来越受到教科书编者的重视，并从早期分散在各个章节中介绍变成放在一个大章节中对其进行论述。

3 参数方程的概念

在本文所考察的美英解析几何教科书中，最早提出参数方程（parametric equation）的教科书来自 Smith & Gale（1904），其指出：“通常来说，如果用两个方程表示曲线上任意点 (x,y) 的坐标值，而这两个方程都是用单变量参数表示，则这些方程称为曲线的参数方程。”^[2] Fine & Thompson（1914）则从解析式的角度，提出参数方程可以写成 $x = \phi(t), y = \psi(t)$ 的形式，其中 t 叫做参数（parameter）^[3]。在实际问题中，参数往往会有几何或物理上的解释，最为常见的是把时间看作参数。

曲线的参数方程的引入使得一些问题得到简化, 主要包括曲线性质的掌握、曲线的作图及曲线方程的推导三类问题。

3.1 曲线的性质

由曲线的参数方程可以方便地得到曲线的一些性质, Nathan (1947) 对此作了详细的解释^[4]。对于曲线的显式方程 $y=f(x)$ 或隐式方程 $F(x,y)=0$, 可以写出其参数方程 $x=f_1(t), y=f_2(t)$, 其中 $f_1(t), f_2(t)$ 是变量 t 的单值函数。

(1) 周期性: 如果 $f_1(t), f_2(t)$ 是关于 t 的周期函数, 且周期为 k , 即 $f_1(t)=f_1(t+k), f_2(t)=f_2(t+k)$, 则曲线上每一点 (x,y) 都是当参数 t 在长度为 k 的区间内变化得到的。例如, $f_1(t)=5+\sin 3t, f_2(t)=4\cos t$, 则这一曲线的周期为 2π 。

(2) 范围: 从 x,y 的参数表示, 可以看到曲线的定义域和值域。例如, 当 $x=2\cos\phi, y=\sin\phi$, 有 $|x|\leq 2, |y|\leq 1$; 当 $x=3t-4, y=t^5$, 有 $x, y\in\mathbf{R}$; 当 $x=\sqrt{t-1}, y=2t^3$, 因为 $t\in[1, +\infty)$, 所以 $x\in[0, +\infty), y\in[2, +\infty)$ 。

(3) 对称性: 如果对于每一个 t 都有一个 t' , 使得 $f_1(t')=f_1(t), f_2(t')=-f_2(t)$, 则当 (x,y) 在曲线上时, $(x,-y)$ 也在曲线上, 即曲线关于 x 轴对称; 相似地, 若满足 $f_1(t')=-f_1(t), f_2(t')=f_2(t)$, 则当 (x,y) 在曲线上时, $(-x,y)$ 也在曲线上, 即曲线关于 y 轴对称。例如, 曲线 $x=4t^3+t, y=t^2$ 关于 y 轴对称, 曲线 $x=a\cos t, y=b\sin^3 t$ 关于 x 轴对称。

(4) 渐近线: 如果 $f_1(t)\rightarrow\infty$ 且 $f_2(t)\rightarrow a$, 则曲线存在一条水平渐近线 $y=a$; 如果 $f_2(t)\rightarrow\infty$ 且 $f_1(t)\rightarrow b$, 则曲线存在一条垂直渐近线 $x=b$ 。例如, 对于曲线 $x=\frac{3t-5}{1+t}, y=t^2-9$, 当 $t\rightarrow\infty$ 时, 有 $x\rightarrow 3, y\rightarrow\infty$, 当 $t\rightarrow -1$ 时, 有 $x\rightarrow\infty, y\rightarrow -8$, 分别得到曲线的垂直渐近线和水平渐近线 $x=3$ 及 $y=-8$ 。

3.2 参数方程的作图

在绘制给出参数方程的曲线的图象时，最常见的作图方法类似于五点法作图，依然遵循列表、描点、连线的步骤。以 Roberts & Colpitts (1918) 给出的参数方程 $x = t^3, y = t^2$ 为例^[5]，首先对参数 t 赋值，可以计算出相应的 x 和 y 的值（图 2(a)），然后在平面直角坐标系上对这些点进行标记，最后将这些点连接成一条光滑的曲线（图 2(b)）。

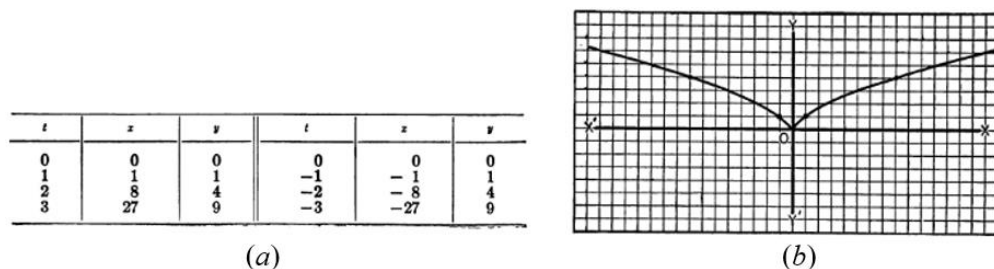


图 2 Roberts & Colpitts (1918) 中绘制曲线的插图

当然，并不是所有曲线的图象都容易被画出，例如 Nathan (1947) 给出的曲线 $x = \cos 2\theta, y = \tan \theta$ ，我们可以考虑其周期性、范围、对称性及渐近线等性质，随后列表描点，画出曲线在一个周期内的大致图象即可^[4]。Taylor (1959) 则对参数方程求导，从而方便地求出曲线的极值点、拐点等，同样可以将曲线绘制出来^[6]。

3.3 参数方程和普通方程的互化

参数方程和普通方程是直角坐标系下曲线方程的不同表示形式，它们都是表示曲线上点的坐标之间的关系，故在一般情况下，它们可以相互转化。

通过消去两个参数方程之间的参数，从而将曲线的参数方程化为普通方程，于是，可借助于熟悉的普通方程的曲线来研究参数方程的曲线的类型、形状、性质等。但是，并不是每一对参数方程都可以消参，即使可以消参，此时得到的普通方程也是非常复杂的^[7]。例如，给定曲线的参数方程为 $x = 2(\phi - \sin \phi), y = 2(1 - \cos \phi)$ ，这条曲线是一条摆线，消参后得到其普通方程为 $x = 2 \arccos(1 - \frac{y}{2}) \pm \sqrt{4y - y^2}$ ^[7]。由此可见，对于部分曲线来说，利用参数方程研究曲线的性质及画出曲线的图象会比普通方程更容易。

在一些问题中，直接推导曲线的参数方程会比普通方程更便捷，因为参数往往具有特殊的

含义。Cell (1951) 指出, 在许多工程和科学问题中, 点的位置是时间的函数, 故可以把时间看作参数, 任取参数 t 并推导点的位置时, 很自然使用轨迹推导法得到 x 、 y 的方程^[7]。

在物理中最常见的例子是确定抛射体的运动轨迹, 若无重力作用, 初始速度为 v_0 且处在与水平视角成 ε 角的抛射体, 在 t 时刻会处于位置 $x = v_0 \cos \varepsilon \cdot t, y = v_0 \sin \varepsilon \cdot t$ 。假设水平运动和垂直运动时处在平衡状态, 但由于重力加速度 g 保持不变, 因此在 t 时刻纵坐标 y 减小了 $\frac{1}{2}gt^2$, 此时抛射体在 t 时刻的坐标为 $x = v_0 \cos \varepsilon \cdot t, y = v_0 \sin \varepsilon \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$, 这就是抛射体的运动轨迹, 参数就是时间 t 。消去参数, 即可得到抛射体运动的普通方程 $y = v_0 \tan \varepsilon \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \varepsilon} x^2$ 。^[8]

从曲线的普通方程找到其参数方程也有多种技巧。Kells & Stotz (1949) 指出, 通过对 x 赋值, 即设 x 关于 t 的表达式, 再将其代入普通方程, 从而解出 y 关于 t 的表达式, 同时, 方程的选择通常是为了获得意义、便捷性或两者兼得^[9]。例如, 为了获得 $x - y = 1$ 的参数方程, 取 $x = 2 + \frac{t}{\sqrt{2}}$, 于是 $y = 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}$, 此时参数 t 表示从点(2,1)到点(x,y)的有向距离^[9]。对于曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 可以设 $y = b \sin t$, 解得 $x = \pm a \sqrt{1 + \sin^2 t}$, 显然这一对参数方程并不满足便捷性, 反而使得曲线方程变得复杂。通过观察我们可以发现, 因为 $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, 所以设 $x = a \sec t$, 此时 $y = b \tan t$, 这对参数方程将会是一组最优解^[10]。总而言之, 把普通方程化为参数方程的关键在于参数的选择。

Young, Fort & Morgan (1936) 还指出, 任何给定的曲线都可能有任何多组参数方程, 即曲线的参数方程是不唯一的^[11]。以直线方程 $y = 4x$ 为例, 其参数方程可以写为 $\begin{cases} x = t \\ y = 4t \end{cases}$ 、 $\begin{cases} x = \frac{t}{2} \\ y = 2t \end{cases}$ 、

$$\begin{cases} x = \frac{t}{4} \\ y = t \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{t}{35} \\ y = \frac{4t}{35} \end{cases} \text{ 等。}$$

4 曲线的参数方程

4.1 直线的参数方程

给定一条倾斜角为 θ ，且经过点 $P_1(x_1, y_1)$ 的直线。任取直线上一点 P ，作 $P_1Q \parallel x$ 轴， $PQ \parallel y$ 轴，两直线交于点 Q （图 3(a)）。设 t 表示有向线段 P_1P 的长度，则直线的参数方程为

$$\begin{cases} |P_1Q| = x - x_1 = t \cos \theta \\ |QP| = y - y_1 = t \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + t \cos \theta \\ y = y_1 + t \sin \theta \end{cases}$$

其中 t 是参数。消参后得到 $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{t \sin \theta}{t \cos \theta} = \tan \theta = m$ ，即 $y - y_1 = m(x - x_1)$ ，这是过点 (x_1, y_1) 、斜率为 m 的直线的点斜式方程^[12]。

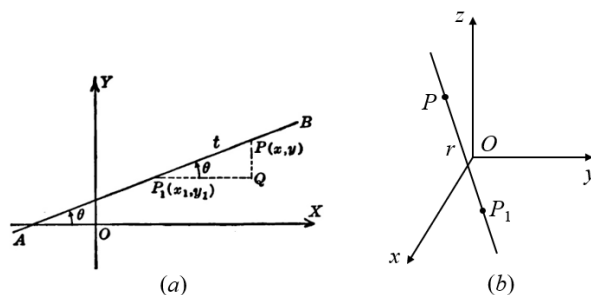


图 3 直线的参数方程

以此类推，还可以推导出三维空间中直线的参数方程。如图 3(b)，直线过点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ，且直线的方向角为 α, β, γ 。任取直线上一点 P ，设 r 表示有向线段 P_1P 的长度，于是

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{r} = \cos \alpha \\ \frac{y - y_0}{r} = \cos \beta \\ \frac{z - z_0}{r} = \cos \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + r \cos \alpha \\ y = y_0 + r \cos \beta \\ z = z_0 + r \cos \gamma \end{cases}$$

其中 r 是参数。当 r 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时， P 可以在直线上的任意位置，所以此方程代表直线^[13]。

4.2 圆的参数方程

任取以 $C(x_0, y_0)$ 为圆心、 r 为半径的圆上任意一点 $P(x, y)$ 。过圆心 C 作 x 轴的平行线，交 $\odot C$ 于点 A （图 4）。

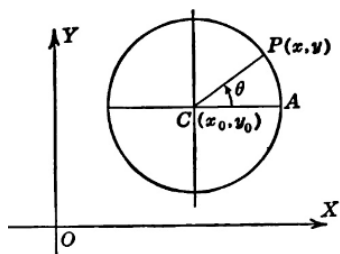


图 4 圆的参数方程

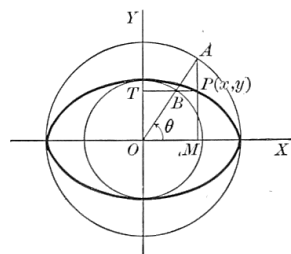


图 5 椭圆的参数方程

令 $\angle ACP = \theta$ ，于是得到圆的参数方程为

$$\begin{cases} x - x_0 = r \cos \theta \\ y - y_0 = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + r \cos \theta \\ y = y_0 + r \sin \theta \end{cases}$$

其中 θ 是参数。若将两式的两边平方相加，即可消去参数，得到圆的标准方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad [12]$$

4.3 椭圆的参数方程

Wilson & Tracey (1915) 则以 O 为圆心，任意长 a 为半径作圆，取该圆上一点 A ，作 $AM \perp x$ 轴，垂足为点 M 。^[14]再以 O 为圆心，任意长 b ($b < a$) 为半径作圆，直线 OA 交此圆于点 B ，点 P 即为点 B 在直线 AM 上的投影（图 5）。

令 $P(x, y)$ 及 $\angle MOA = \theta$ ，于是得到椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = OM = OA \cos \theta = a \cos \theta \\ y = MP = OB \sin \theta = b \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

其中 θ 是参数，又称其为偏心角。同样，两边平方相加可得椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

4.4 双曲线的参数方程

Ziwet & Hopkins (1913) 指出，在双曲线的情况下，偏心角 θ 仍然决定了点 $P(x, y)$ 的轨迹^[8]。过原点作倾斜角为 θ 的直线，交以原点为圆心、 a 为半径的圆于点 A ，同时，以原点为圆心、 b 为半径的圆交 x 轴于点 B （图 6）。

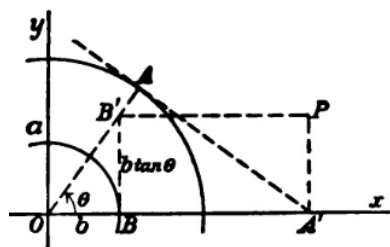


图 6 双曲线的参数方程

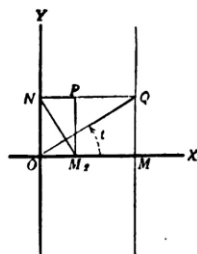


图 7 抛物线的参数方程

在点 A 处的切线交 x 轴于点 A' ，在点 B 处的切线交直线 OA 于点 B' ，分别过 A' 及 B' 作两坐标轴的平行线，交于点 P 。于是容易得到双曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = OA' = OA \sec \theta = a \sec \theta \\ y = BB' = OB \tan \theta = b \tan \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta \end{cases}$$

其中 θ 是参数。最后，两边平方相减可得双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

4.5 抛物线的参数方程

不同于椭圆和双曲线，我们可以利用三角恒等式方便的写出其参数方程，对于抛物线来说，其在参数的设定上则是多种多样的。给定抛物线的标准方程 $y^2 = 2px$ ，Borger (1928) 令

$x = 2p \tan^2 t$ ，可以解得 $y = \pm 2p \tan t$ ，于是将 $\begin{cases} x = 2p \tan^2 t \\ y = 2p \tan t \end{cases}$ 作为抛物线的参数方程，其中 t 为参

数且 $t \in [0, 2\pi)$ (图 7) [15]。

根据这一对参数方程的形式，我们可以构造出如下曲线。在 x 轴上取 $OM = 2p$ ，并过点 M 作 x 轴的垂线，任取 $\angle MOQ = t$ ，交垂线于点 Q ，此时 $MQ = OM \tan t = 2p \tan t$ 。将 MQ 投影到 y 轴上，并过点 N 作 $NM_2 \perp OQ$ ，交 x 轴于点 M_2 ，最后，过 M_2 作 $M_2P \perp NQ$ ，得到点 $P(x, y)$ 。于是计算可得 $x = OM_2 = 2p \tan^2 t$ 及 $y = MQ = 2p \tan t$ ，通过对 t 赋值，可以画出在这一条曲线上任意多的点。

对于抛物线 $y^2 = 4ax$ ，Ziwet & Hopkins (1913) 设曲线上一点的切线与 x 轴的夹角为 α ，并

以 α 为参数，给出了这一标准方程下的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cot^2 \alpha \\ y = 2a \cot \alpha \end{cases}$ 。[8]Fine & Thompson (1914)

给出的参数方程则是 $\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at \end{cases}$ 。 [3]

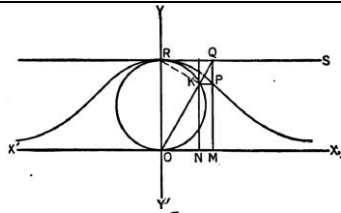
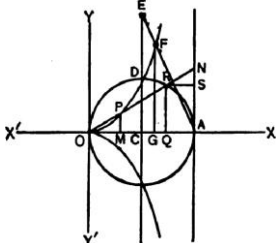
4.6 其它曲线的参数方程

除了常见曲线的参数方程，部分早期教科书还给出了一些特殊曲线的参数方程及其图象，这些曲线不仅十分优美，而且还在实际的工程问题中有着广泛的应用。以 Smith, Salkover & Justice (1954) [10] 及 Roberts & Colpitts (1918) [5] 为例，表 1 给出了部分曲线的参数方程。

表 1 部分曲线的参数方程

名称	参数方程	图象
摆线 (The cycloid)	$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$	
外摆线 (The epicycloid)	$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos \frac{a+b}{b}t \\ y = (a+b)\sin t - b\sin \frac{a+b}{b}t \end{cases}$	
圆内轮旋线 (The hypocycloid)	$\begin{cases} x = (a-b)\cos t + b\cos \frac{a-b}{b}t \\ y = (a-b)\sin t - b\sin \frac{a-b}{b}t \end{cases}$	
四尖圆内轮旋线 (The four-cusped hypocycloid)	$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$	
圆的渐开线 (The involute of the circle)	$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$	

续 表

名称	参数方程	图象
箕舌线 (The witch of Agnesi)	$\begin{cases} x = 2a \cot \theta \\ y = 2a \sin^2 \theta \end{cases}$	
蔓叶线 (The cissoid)	$\begin{cases} x = 2a \sin^2 \theta \\ y = 2a \sin \theta (\sec \theta - \cos \theta) \end{cases}$	

5 结论与启示

综上所述,从参数方程的缘起,教科书编者就将其视为探究解析几何问题的一大工具。历史上参数方程被广泛地应用于曲线性质的掌握、曲线的作图及曲线方程的推导等各方面,由此,一些复杂的曲线也能够通过简单地参数方程的形式被表示出来。可以说,这些内容均为今日参数方程的教学提供了诸多启示。

其一,找寻思想之源。每一个数学概念都有它的源头所在,参数方程也不例外。然而,在现实的教学过程中,往往只是为了学习而学习。例如,学生不理解为什么学习了斜截式、截距式等形式的直线方程后还要学习直线的参数方程。爱因斯坦曾说过:“提出一个问题往往比解决该问题更重要”^[16],今天的数学课堂应从单纯的分析问题、解决问题,向发现问题、提出问题倾斜。因此,在参数方程的教学中,教师可以从抛射体等物理问题入手,引导学生发现坐标的参数表示,通过对比这一轨迹的普通方程和参数方程,让学生总结参数方程在解决实际问题的巧妙之处。从源出发,学生将明白掌握参数方程的必要性。

其二,感悟方程之联。方程不仅仅是以数的形式存在,其背后还蕴含着形的特征。方程的几种不同形式包含着确定曲线轨迹的关键因素,从中我们可以清楚地发现曲线的对称性、顶点及范围等特点。因此,在圆锥曲线的教学过程中,教师要培养学生转化的意识,即某一种形式的方程并不是一种孤立的存在,运用一定的技巧,方程之间可以实现相互转化。例如,将圆的

一般方程转化为参数方程后，圆心和半径一目了然，于是该圆在直角坐标系上的大致图象就可以容易地被绘制出来。掌握参数方程与学生已经学过的曲线方程之间的联系（图 8），使得问题的解决变得事半功倍。

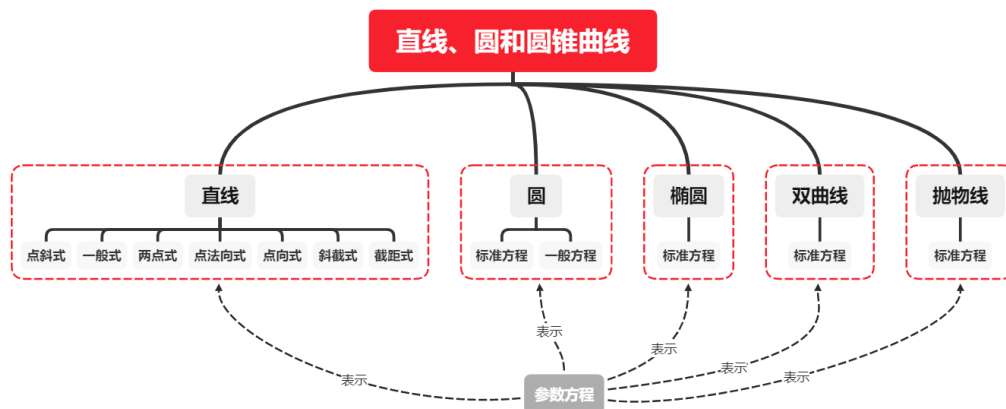


图 8 直线及圆锥曲线方程的几种形式

其三，体会图形之美。数形结合是一种非常重要的数学思想，把数和形结合起来解决问题，可以使复杂的问题变得更简单，使抽象的问题变得更直观。然而，一些形式较为复杂的方程则让图形的绘制变得困难。因此，在教学中，教师可以让学生利用参数方程绘制曲线的轨迹，在实际操作中，学生将会感受到参数方程在作图中的优势。同时，也可以让学生利用几何画板、GeoGebra 等软件，一方面培养学生利用数字化软件作图的能力，另一方面，欣赏图形的对称或不对称、规则或不规则、简单或复杂、单调或多彩等，有助于提高学生的审美能力，体会数学之美，提升数学学习的兴趣。

参考文献

- [1] 王洋洋. 让“学科育人”在数学课堂落地生根——《直线的参数方程》听课反思[J]. 中学教学参考, 2021(26): 7-8.
- [2] Smith, P. F. & Gale, A. S. *Introduction to Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1904: 123-125+248-261.
- [3] Fine, H. B. & Thompson, H. D. *Coordinate Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1914: 168-172.
- [4] Nathan, D. S. *Analytic Geometry*[M]. New York: Ronald Press Co, 1947: 220-234.

- [5] Roberts, M. M. & Colpitts, J. T. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1918: 186-196.
- [6] Taylor, A. E. *Calculus, with Analytic Geometry*[M]. New Jersey: Prentice- Hall, 1959: 222-225.
- [7] Cell, J. W. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1951: 186-198.
- [8] Ziwet, A. & Hopkins, L. A. *Analytic Geometry and Principles of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company, 1913: 109-258.
- [9] Kells, L. M. & Stotz, H. C. *Analytic Geometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1949: 107-116.
- [10] Smith, E. S., Salkover, M. & Justice, H. K. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1954: 181-188.
- [11] Young, J. W., Fort, T. & Morgan, F. M. *Analytic Geometry*[M]. Boston: Houghton Mifflin Company, 1936: 240-278.
- [12] Harding, A. M. & Mullins, G. W. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1926: 134-141.
- [13] Osgood W. F. & Graustein, W. C. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1921: 490-493.
- [14] Wilson, W. A. & Tracey, J. I. *Analytic Geometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Company, 1915: 153-156.
- [15] Borger, R. L. *Analytic Geometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1928: 43-47+200-241.
- [16] 汪晓勤,沈中宇. 数学史与高中数学教学:理论、实践与案例[M]. 上海:华东师范大学出版社, 2020: 346.

美英早期三角学教科书中的三角函数图象

石 城

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

三角函数作为基本初等函数之一, 不仅是刻画周期性变化规律的基本数学模型, 更是量化三角形边角关系, 研究度量几何的基础。然而三角函数公式繁多、内容偏难, 导致学生常常“谈三角色变”。《普通高中数学课程标准》(2017 年版) 指出, 用几何直观和代数运算的方法研究三角函数的性质; 借助单位圆理解三角函数的定义, 能画出这些三角函数的图象, 如借助单位圆的对称性, 利用定义推导出诱导公式^[1]。因此, 为了完善学生的知识结构体系, 培养学生的直观想象、逻辑推理等核心素养, 教师需要引导学生从图象的角度感知公式的内在联系, 而不是机械记忆。

现行人教 A 版和沪教版教科书中主要是研究正弦函数、余弦函数、正切函数以及正弦型函数 $y = A\sin(wx + \varphi)$ 的图象。在图象的画法上, 人教 A 版和沪教版教科书都介绍了五点画图法和单位圆作图法。在已有的研究中, 一半以上的学生能正确找到作图的关键点, 但作图不够完整, 数形结合能力不强; 可以熟练掌握正弦型函数的性质和参数的意义, 但只知道一种图象变换的方法, 对于图象变换的本质了解不清^[2]。

已有研究主要涉及国内教科书中三角函数内容的变迁^[3], 但鲜有涉及国外, 特别是英美等西方主流国家的教科书。我国著名数学家和数学教育家张奠宙认为, “要对别人已经走过的数学道路有科学的分析和认识, 才能在前人的基础上, 有所创造, 有所前进。” 鉴于此, 本文聚焦三角函数的图象, 对英美早期三角学教科书进行考察, 试图回答以下问题: 早期教科书中三角函数图象的画法有哪些? 每种画法又有何优势和不足? 以期为今日的教学提供参考。

2 早期教科书的选取

本文选取 1850-1955 年间出版的 63 种美英早期数学教科书作为研究对象, 以 20 年为一个

时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

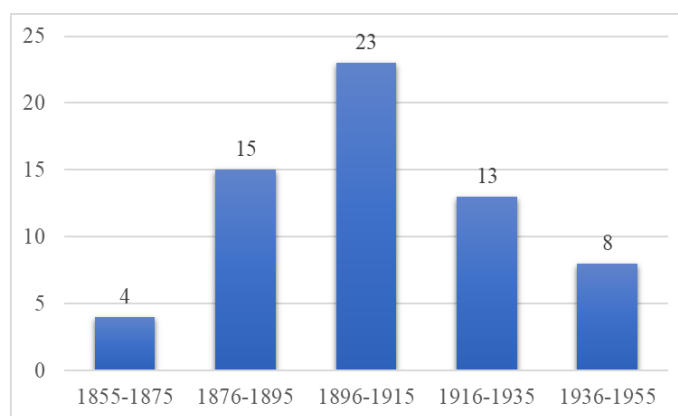


图 1 63 种英美教科书的出版时间分布

随着时代的发展，英美早期教科书越来越关注内容的整体性和简洁性，该部分内容逐渐从编排顺序、内容的增加与整合、思想方法、主次要之分等多方面完善。

从编排顺序上看，教科书中三角函数图象的位置发生了改变，从零零散散到独立成章。从内容上看，早期教科书注重教学内容的完整性，增加了物理背景（如简谐运动）和现实应用，但也整合了部分教学内容，从最初的 6 种三角函数图象到 4 种再到 3 种。从思想方法上看，教科书中呈现了多种三角函数图象的画法，所蕴含的数学思想方法越来越丰富，包括数形结合、联系与转化等。从主次要之分上看，突出正余弦函数和正弦型函数的地位，详细讲解正弦型函数的应用。三角函数图象的研究日趋完善，既提供适合社会发展的教育，又突出了简洁性、实用性和严谨性。

3 三角函数图象的画法

3.1 正余弦函数图象的画法

当三角函数线定义占据主导，概念未能符号化时，很少有教科书通过函数图象来研究三角函数。而当用线段的比来定义三角函数时，教科书采用描点法、单位圆法、机械作图法、函数性质作图法和诱导公式法画出三角函数图象。下面以正、余弦函数为例，对于其他三角函数的图象不再赘叙。

3.1.1 描点法

列表、描点、连线，是绘制函数图象的一般步骤，体现函数图象和定义的内在逻辑。

有 33 种教科书运用了描点法，占 52%。描点法从复杂到简便，可操作性逐渐提高。一开始教科书往往采用在 x 轴上任意选取一段对应一个周期 360° ，然后将其等分，通常为四等分（图 2），以 90° 时对应的正弦值为一个单位长度，求出其余各点对应的长度，十分复杂且图象比例不易把控^[4]。后来，逐渐演变为在 0° 和 360° 之间每隔 30° 取一个点^[5]，再到在 0° 到 90° 每隔到 10° 取一点，利用三角函数的对称性延展至 360° ^[6]。Hardy（1938）为了选点的简便，将网格纸的分度值与角度值对应，选取格点，然后在网格纸上画图，操作起来方便不少^[7]。

描点法从粗糙到精确，体现几何与代数的结合。早期没有引入弧度制之前，7 本教科书中单位长度为任意选取，导致图象比例失衡，即使后来的教科书中标注要求 90° 的长度应与单位长度之为 3:2^[4]，所得到的图象仍有不小的误差。当有了数值计算的相关知识后，可以更精确地绘制图象，如用泰勒公式和辛普森方法较为精确地计算三角函数的值^[8]，制作便于查找的三角函数表，使得图象的横纵坐标的比例更合理。

描点法从有限到无限，渗透极限思想。例如，Pendlebury（1895）在描出有限个点之后指出，若无限分割，将得到一条连续曲线^[9]。这说明，在一个周期内只需要取有限个点即可得到一个周期内的完整图象，而根据周期性将一个周期上的图象延拓到整个定义域，大大减少了描点法的工作量，使得其更利于推广。

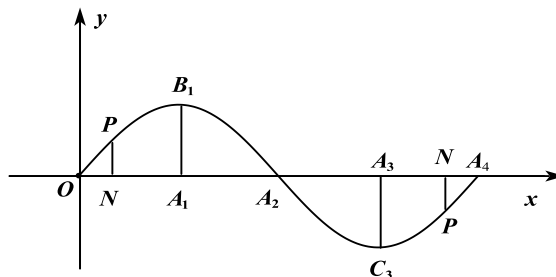


图 2 早期的描点法作图

但是早期教科书中的描点法仍有一定的局限性，一是对于正切、余切、正割及余割函数这类有间断点的不连续的函数图象，作图非常困难。例如正切函数在 90° ， 270° 处无意义，没有对应的点，此时引入的渐近线使学生感到突兀，不利于接受。虽然后续教科书引入了极限思想^[5]，如 Hun & MacInnes（1911），但在理解 $+\infty$ 、 $-\infty$ 、 ∞ 三者的区别上仍有困难。二是描点个数不

易把握。早期教科书中关于描点法的个数并不统一，并且很少有教科书解释为何选取点以及这样画图是否准确。三是教科书在编排上也有局限性。如一开始只计算 90° 的整倍数的三角函数值^[4]，关于其他特殊角，如 30° 、 45° 的三角函数值都放在后续章节讨论，使得描点法的描点个数有限。后续的教科书借助诱导公式进行完善，将三角函数讨论从 90° 的倍角延伸至负角乃至任意角^[11]。

3.1.2 单位圆法

25 种教科书运用了单位圆法，占 40%。单位圆法是指利用三角函数线和单位圆来作图，以单位圆为脚手架，从三角函数的定义出发描出正弦函数图象上的对应点，这一方法比较精确，揭示了函数图象与三角函数定义之间的内在联系。

19 世纪教科书主要采用以下画法：如图 3 所示，Oliver, Wait & Jones (1881) 先将单位圆的圆周等分，分点为 $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ ，再画出弧 $XP_1, XP_2, XP_3, XP_4, \dots$ 的正弦线 $A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4, \dots$ 和圆的切线 XY ，切点为 X 。设想圆沿着直线 XY 滚动， $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$ 为 $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ 在 XY 上所经过的点，作 $B_1C_1=A_1P_1, B_2C_2=A_2P_2, \dots$ 于是可作出一条经过点 $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$ 的连续不断的光滑曲线，即为正弦曲线。^[12]

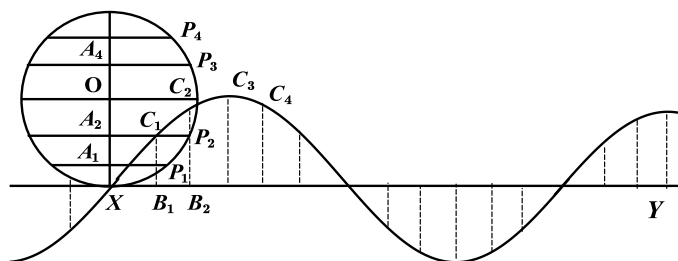


图 3 单位圆法作图

如图 4，Bohannon (1904) 形象地假设单位圆是由线围成，圆上每一点的纵坐标都有一根竖

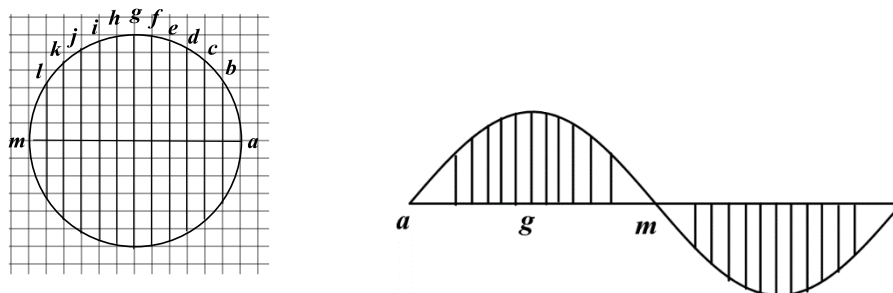


图 4 单位圆法的形象画法

直, 其末端与单位圆连接, 用一把锋利的小刀将单位圆切开, 把单位圆沿着水平方向滚动, 再用铅笔在纵坐标经过的地方画线, 最后将所有点用一条光滑曲线连接, 就得到了正弦曲线^[13]。

到了 20 世纪初, 普遍采用将单位圆 12 等分 (图 5), 将对应分点的横坐标画在一条水平线上, 在水平线上的对应点画出与正弦值相符的垂线, 将这些垂线的另一端点用一条光滑的曲线连接, 即得正弦函数图象。当圆上任意一点 P 在运动时, 其正弦线 (SP) 连续不断的变化^[14]。Rothrock (1910) 进行了更细致的划分, 如将单位圆 20 等分^[15]。

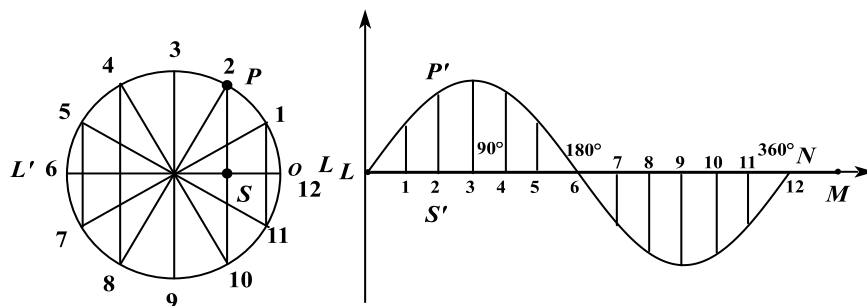


图 5 单位圆法的改进

单位圆法具有 3 点优势: 一是精准性, 随着单位圆被分割的份数越多, 所画出来的三角函数图象就越精准 (图 6)。此后教科书不断沿用, 利用单位圆本身的“对称性”可以帮助学生深入地理解“三角函数”的概念, 使复杂问题简单化。二是直观性, 单位圆法能够帮助学生理解三角函数的某些性质, 如三角函数图象的对称性, 描点法选取点数较少, 不足以严谨地说明三角函数具有对称性, 但单位圆法用单位圆的对称性来解释, 通俗易懂。三是简便性, 几何法可以避开转化角度制和弧度制。Granville (1909) 采用描点法, 强调了查找三角函数值时用角度制, 画图时用弧度制^[16]。与描点法相比, Rothrock (1910) 采用单位圆法, 只需等分单位圆, 以对应每一段的弧长划分 x 轴上的一个周期, 不涉及弧度制和角度制的互化^[17]。

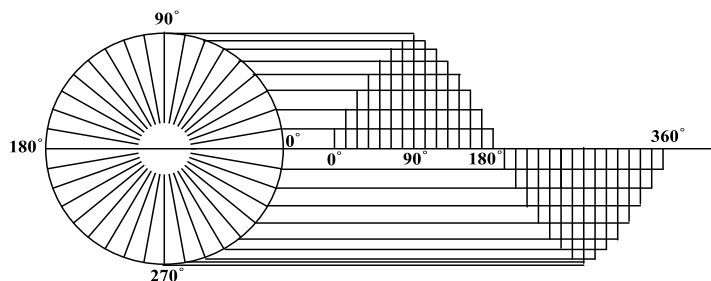


图 6 利用单位圆对称性作图

3.1.3 机械作图法

为追求精准性, 3 种教科书中介绍了机械作图法^[18], 借助方格纸和量角器可以更精确的作出正弦函数的图象(图 7), 仅通过测量长度就可以得到较准确的正弦值。以 $\sin 51^\circ$ 为例, 测量其纵坐标的长度为 23.3 个小方格, 因为单位圆的半径为 30 个小方格, 所以 $\sin 51^\circ = \frac{23.3}{30} = 0.7766$, 相当接近三角函数值表中的 $\sin 51^\circ = 0.77715$ 。^[19]这说明该方法已经较为完善, 同时提供了一种衡量图象准确性的标准。

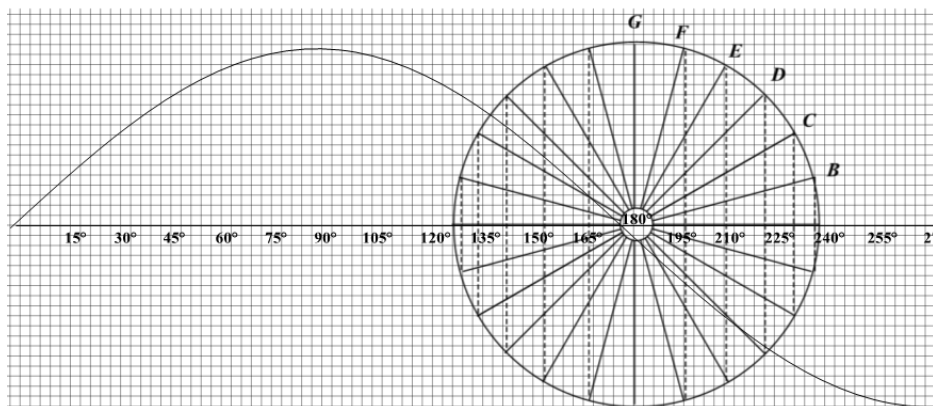


图 7 机械作图法

3.1.4 函数性质作图法

5 种教科书中先介绍了三角函数的性质, 利用性质作图。一是根据周期性作图, 一开始利用三角函数的周期性, 先完成一个周期的函数图象, 通过左右平移, 可以形成整个区间上的函数图象^[11]。二是根据奇偶性作图, 中期出现了利用函数奇偶性, 只画正半轴图象的做法^[20]。到了后期, 根据函数图象的对称性, 只需画出 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上图象, 就可以得到整个定义域上的图象^[21]。这些利用三角函数性质作图的方法往往要与描点法和几何法结合使用。

3.1.5 诱导公式法

对于余弦函数, 可以利用诱导公式 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 。根据图象之间的关系, 将正弦函数图象沿着 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度, 就可以得到余弦函数图象(图 8)^[22]。

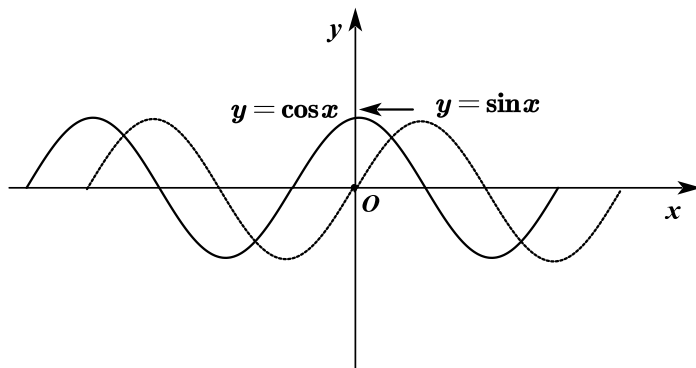


图 8 利用正弦图象画余弦图象

3.2 正弦型图象的画法

正弦型函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 在物理学、工程学有着广泛的应用，如简谐运动、交变电流、音叉颤动、桥梁振动等。在 20 世纪的教科书中，共有 13 种教科书提到了正弦型函数。教科书中采用了平移伸缩法和五点画图法两种作图法。

10 种教科书中运用了平移伸缩法，平移伸缩法对几个重要参数，包括振幅 A 、角频率 ω 、初相角 φ 进行了讨论，得出它们对图象的影响：函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ ，与正弦函数 $y = \sin x$ 的图象在水平方向上只相差 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位距离。于是，对正弦函数 $y = \sin x$ 的图象进行左右平移和上下拉伸，得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象。通过将函数 $y = \sin x$ 的图象向左平移，根据 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ 得到 $y = \cos x$ 函数的图象，这揭示了余弦曲线也是正弦型曲线^[18]。Dresden (1921) 还讨论了函数 $y = \sin x$ 和 $y = \sin(-x)$ 的图象关于 y 轴对称，进一步完善了平移伸缩法^[23]。

3 本教科书中运用了五点画图法，Gay (1935) 以 $y = 3\sin \frac{\pi x}{4}$ 为例，先确定函数在一个周期上的 3 个零点，然后确定最高点和最低点，做出简图^[24]。这种方法需要学生熟悉正弦函数的图象，熟练计算振幅和周期，才能快速找到最高点和最低点的位置，故在早期教科书中较少提及。

3.3 复合的正弦函数图象的画法

Loney (1904) 为研究函数而引入复合函数的画法。20 世纪的 2 种教科书还介绍了更为一

般的谐波曲线 (harmonic curves) $y = a \sin x + b \cos x + c \sin 2x + d \cos 2x + \dots$ (其中 $a, b, c, d, \dots$ 都是常数)。谐波曲线可以用来求解三角函数等式^[24]。

Moritz (1915) 提到对于 $y = \sin x + \cos x$, 可以利用辅助角公式, 转化为正弦型函数 $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 再画出函数图象^[18]。

更一般地, Dickson (1922) 讨论了函数

$$y = a_1 \sin(b_1 x + c_1) + a_2 \sin(b_2 x + c_2)$$

的图象^[25]。该函数是由两个正弦型函数 $y_1 = a_1 \sin(b_1 x + c_1)$, $y_2 = a_2 \sin(b_2 x + c_2)$ 复合而成。对于任意给定的一点, 其横坐标 x 所对应的纵坐标 y 都是由两条曲线的纵坐标相加得到。特别地, 若 $b_1 = b_2$, 两个函数 y_1 和 y_2 有相同的周期, 则同前述一样使用辅助角公式, 画出图象。Dickson (1922) 还简单介绍了傅里叶 (J. Fourier, 1768-1830) 的理论——任意的周期曲线总可以被看作一些简单的正弦型函数图象的复合, 用公式表述为

$$y = a_1 \sin(b_1 x + c_1) + a_2 \sin(b_2 x + c_2) + \dots$$

3.4 讨论

由上述分析可见, 早期教科书中三角函数的图象在内容设置、呈现形式上不断整合与完善。在内容设置上, 早期教科书出现的三角函数种类越来越丰富, 图象画法日趋完善, 同时又不重复赘余, 教科书往往以正弦函数为例, 将其余三角函数图象留作学生练习。内容的深度和广度渐增, 如不仅增加了正弦型曲线, 还增加了其背后丰富的物理背景, 有助于拓宽学生的视野。在呈现形式上, 20 世纪之前的教科书往往都是直接给出图象的单一画法, 而进入 20 世纪后, 部分教科书先由物理现象和现实生活引入, 如 Murray (1906) 的晴雨表, Wylie (1955) 的弹簧悬挂重物, 帮助学生先直观认识周期现象, 再思考三角函数图象的变化趋势, 最后利用单位圆来画函数图象。20 世纪起, 7 本教科书会从变量、函数讲起, 由浅入深地全面介绍何为函数图象, 再配合习题介绍多种三角函数图象的画法^[26]。

对比今日的人教 A 版和沪教版教科书, 五点画图法仍是三角函数图象的最重要画法之一。但对于为什么选择这五点却很少提及。早期教科书中五点画图法作为一种特殊的描点法,

在 20 世纪中期才出现,在此之前描点法的个数并不统一,既有少如 Nixon (1892) 的四点^[4], Wilczynski (1914) 的八点^[6],也有多如 Taylor (1904) 的十二点^[8], Palmer & Leigh (1914) 的十六点^[11],最终统一为只取 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{6}$ 的整倍数的点,如 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ 等。五点画图法的优势不言而喻,在精度要求不高时,能够较快地作出三角函数的简图,反映曲线“波浪起伏”特点,节省作图时间,提高作图效率。但对于初学者来说,仍需要更精确地认识三角函数的图象,故早期教科书在简洁性和准确性中建立平衡,增加了描点的个数。笔者认为,在实际教学中,五点画图法或许可以适当后移,等学生掌握了三角函数图象的大致走向,再总结出画图所需的关键点。

4 结论与启示

由以上讨论可知,美英早期三角函数图象讨论经历从部分到整体,从繁琐到简洁,从抽象到具体的过程。早期教科书中共提到了五种正余弦函数图象的画法,分别为描点法、单位圆法、机械作图法、函数性质作图法、诱导公式法以及两种作正弦型函数图象的方法——平移伸缩法和五点画图法。三角函数图象的画法多样化为我们今天的课堂教学提供了诸多启示。

(1) 一体化呈现。早期教科书中介绍了函数性质作图法和诱导公式法,源于教科书对章节的紧密安排。而现今的教科书如沪教版,是采用先图象后性质的顺序,使得作出三角函数图象的方法局限于单位圆法和五点画图法,画图过程稍显繁琐。而在图象研究中穿插性质,会使得学生对图象有整体的认知,更利于掌握。如苏教版先周期性再图象最后其他性质的顺序,既让学生明白三角函数的特殊之处,又自然地把图象研究限定一个周期之内,从而为五点画图法做铺垫。

(2) 多元化设计。早期教科书中有着多样化的三角函数图象画法,教师可以因材施教,根据所教学生学情,在不同学习阶段呈现不同的画法,甚至可以交给学生自主选择。如果学生的直观想象很好,能理解深入图象的变换,可以重点掌握平移伸缩法,如果学生的代数运算功底扎实,可以重点掌握五点画图法。函数作图关注图象的基本形状和关键点的位置,因而教师若选择描点法,应该注重让学生体会如何选取点的个数和位置,适当经历如早期教科书中对描点法的探索过程,从而更好地把握图象的单调性、凹凸性、对称性。在新授课中,教师可以以教

材上的单位圆法和五点画图法等基本作图方法为教学重点，而在复习课中，可以拓展至机械作图法、函数性质作图法、诱导公式法，架起知识点之间的前后联系。

(3) 跨学科交互。对于刚开始学习三角函数的高中生来说，虽然章引言已经说明三角函数是刻画周期现象的函数，学生也了解生活中的一些周期现象，但他们对于函数的“周期性”仍然比较陌生。早期教科书中通过简谐运动等物理背景的引入，体现了数学与物理学的紧密联系。三角函数物理学的其他领域如力学、光学、电学都有广泛应用，因此，在本章适当融入物理学的相关知识背景，以此为切入点研究三角函数的图象与性质，不仅能激发学生学习兴趣，更有助于提高学生的数学应用意识和能力，提升数学建模素养。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 21.
- [2] 甄天奇. 高中生三角函数的性质与图象认知水平调查研究[D]. 辽宁师范大学, 2021: 19-34.
- [3] 张露露. 中国中学三角函数内容设置变迁研究(1950-2019)[D]. 内蒙古师范大学, 2021.
- [4] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892: 42-47.
- [5] Hun, J. G. & MacInnes, C. R. *The Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1911: 21-23.
- [6] Wilczynski, E. J. *Plane Trigonometry & Applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914: 151-162.
- [7] Hardy, J. G. *A Short Course in Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan co., 1938: 61-71.
- [8] Taylor, J. M. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Co., 1904: 110-114.
- [9] Pendlebury, C. *Elementary Trigonometry*[M]. London: George Bell & Sons, 1895: 143-146.
- [10] Palmer, C. I. & Leigh, C. W. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914: 74-76.
- [11] Conant, L. L. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1909: 68-72.
- [12] Oliver, J. E., Wait, L. A. & Jones, G. W. *A Treatise on Trigonometry*[M]. Ithaca: Finch & Apgar, 1881: 22-23.
- [13] Bohannon, R. D. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1904: 184-191.

- [14] Hall, A. G. & Frink, F. G. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1910: 74-76.
- [15] Bauer, G. N. & Brooke, W. E. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1917: 39-41.
- [16] Granville, W. A. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Co., 1909: 93-98.
- [17] Rothrock, D. A. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Co., 1910: 39-43.
- [18] Moritz, R. E. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915: 253-260.
- [19] Palmer, C. I. & Leigh, C. W. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1916: 75-77.
- [20] Davison, C. *Plane Trigonometry for Secondary Schools*[M]. Cambridge: The University Press, 1919: 57-65.
- [21] Curtiss, D. R. & Moulton, E. J. *Essentials of Trigonometry with Applications*[M]. Boston: D.C Heath & Co., 1942: 43-47.
- [22] Davis, H. A. & Chambers, L. H. *Brief Course in Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1933: 44-45.
- [23] Dresden, A. *Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1921: 41-54.
- [24] Gay, H. J. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Ann Arbor: Edwards Brothers, 1935: 73-79.
- [25] Dickson, L. E. *Plane Trigonometry*[M]. Chicago: Benj H. Sanborn & Company, 1922: 153-158.
- [26] Barker, E. H. *Plane Trigonometry with Tables*[M]. Philadelphia: P. Blakiston's Son & Co., 1917: 35-39.

教学实践

聚焦数学文化，重构概念教学

——HPM 视角下导数的概念及意义的教学

黄婷¹ 王智洋² 刘梦哲²

(1.上海市七宝中学, 上海 201101; 2.华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

导数是微积分的核心内容,是现代数学的基本概念,蕴含着微积分的基本思想^[1],在科学研究、工程技术和实际生活中有着广泛的应用。导数知识作为高中数学教学的重要组成部分之一,作为学生学习过程中的重点和难点,作为研究函数性质的重要工具,其地位和重要性不言而喻,掌握这一部分知识有着非常重要的意义。《普通高中数学课程标准》(2017年版)指出,通过实例分析,让学生经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程,了解导数概念的实际背景,知道导数是关于瞬时变化率的数学表达,体会导数的内涵与思想;体会极限思想;通过函数图象直观理解导数的几何意义^[2]。

鉴于导数概念教学的重要性以及学生在学习中所遇到的困难,许多教师对导数的概念及意义的教学进行了探索。杨伟成(2012)、王志刚和郑建华(2018)以及张军(2020)等均设置高台跳水的情境引出问题,通过探索解决问题的方法,让学生经历从平均速度到瞬时速度的过程,体会逼近的思想,由此构建导数的概念^[3-5]。邱礼明和曾菁(2021)基于 HPM 视角,通过重构历史的方式来设计导数概念的教学^[6]。首先,从高台跳水的实际情境中,引导学生从瞬时速度抽象出函数的瞬时变化率,然后,引导学生从抛物线割线的斜率,得到抛物线切线的斜率,最后,由这两个例子抽象归纳得出导数的概念。导数的概念作为沪教版(2020年版)新加入的知识点之一,借鉴已有教学,不仅为今日“聚焦数学文化,重构概念教学”提供了机会,还将促进学生对本数学概念的本质理解。

在新课程改革不断深入的背景下,“数学文化”已然成为了数学教育界密切关注的热点问题。数学文化作为人类文化的重要组成部分,蕴含着丰富而且深刻的文化底蕴与内涵,与人类的繁

荣和发展一脉相连。为提高学生的文化自觉、坚定文化自信，落实立德树人根本任务，教师有必要挖掘、理解、融入与课程相关的数学史，从而实现数学的文化教育功能。鉴于此，我们希望从 HPM 的视角，重新设计“导数的概念及意义”的教学内容，并付诸实施。追本溯源，为创造学生学习动机，以此激发学生的学习兴趣。本节课拟订的教学目标如下。

(1) 通过滑雪运动的案例分析，经历从平均速度到瞬时速度的认知过程，体会用平均速度刻画瞬时速度的科学性。

(2) 理解导数的代数表达形式与几何意义，以及导数的本质是精确地刻画函数在某一点处变化快慢的数学模型，培养直观想象和数学建模的数学核心素养。

(3) 在运用“以直代曲”方法的过程中，感受无限逼近和数形结合的思想，渗透数学文化（素养）。

2 历史材料及其运用

导数是微积分的一个基本概念，萌芽于古希腊的几何学^[7]。早在古希腊，阿基米德（Archimedes，前 287-前 212）利用穷竭法在他的著作《圆的度量》《论球和圆柱》中解决了一系列问题，这种方法便是现代微积分和导数概念的出发点。

微积分的正式诞生，是为了解决 17 世纪的四类科学问题。第一类是已知物体移动的距离表示为时间的函数，求物体在任意时刻的速度和加速度；第二类是求曲线的切线；第三类是求函数的最大值与最小值；第四类是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力^[8]。其中前三类问题都和导数密切相关。

伽利略（Galileo，1564-1642）是研究第一类问题的代表人物，他认为当物体做上抛运动时，物体经过无限多级的缓慢减速，最后达到静止，物体的下落与上抛完全一样，只是顺序颠倒而已。

第二类问题——曲线的切线揭示了导数的几何意义，切线概念的形成过程经历了从静态到动态的发展，促进了导数概念的诞生。古希腊欧几里得（Euclid，约前 330-约前 275）认为圆的切线是落在圆外、与圆只有一个公共点的直线。阿波罗尼奥斯（Apollonius，约前 262-约前 190）和阿基米德用同样的方法定义了圆锥曲线与螺线的切线。阿基米德在《论螺线》中有命题 13：“若一直线与螺线相切，则它与螺线只接触于一点”，这里的螺线是针对第一圈而言的。他采用

反证法证明了该命题，即如果一条直线与螺线（第一圈）接触与两点，则该直线与螺线相交（图 1）。由此可见，阿基米德仍从“公共点的个数”角度来看切线，切线的定义还局限于静态定义——曲线仅有一个公共点且又不穿过曲线的直线。事实上，在公元前 3 世纪，切线定义的局限性实际上已经暴露出来了，但古希腊数学家未能突破这一局限。而在此后的 1800 多年间，人们对切线问题的认识并没有超出古希腊人的水平。

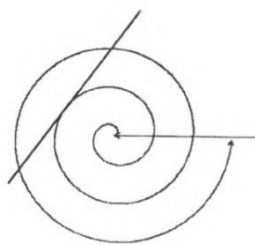


图 1 螺线的切线

直到 17 世纪，为解决“曲线切线”的三大问题，数学家们重新对曲线的切线展开了深入研究。

一是光的反射问题，早在公元 1 世纪，古希腊数学家海伦（Heron，约 10-约 75）就已经证明了光的反射定律，海伦还将其推广到圆弧的情形（图 2），此时，入射光和反射光与圆弧的切线所成角相等。那么对于其它曲线光又如何反射呢？这就需要确定曲线的切线。

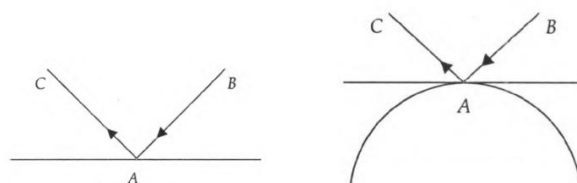
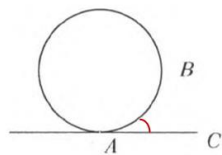


图 2 光的反射定律推广至圆弧

二是曲线运动的速度问题，我们知道，对于直线运动，速度方向与位移方向相同或相反。那么如何确定曲线运动的速度方向呢？这就需要确定曲线的切线。

三是曲线的交角问题。自古希腊以来，人们对圆弧和直线所成角——牛头角和弓形角（图 3）有过许多争议。17 世纪，数学家遇到的更一般的问题是求两条曲线所构成的角，这就需要确定曲线在交点处的切线^[9]。

牛头角：



弓形角：

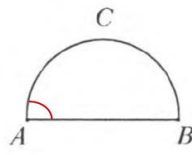


图 3 牛头角与弓形角

古希腊人的切线定义适用于圆锥曲线，但对于 17 世纪数学家所遇到的更复杂的曲线就不一定适用了。况且，他们并没有解决圆锥曲线和螺线以外的曲线的切线问题。这就促使 17 世纪数学家去寻找求切线的一般方法。直到 17 世纪下叶，德国数学家莱布尼茨 (Leibniz, 1646-1716) 将曲线的切线定义为“连接曲线上无限接近两点的直线”，或“曲线的内接无穷多边形的一条连续边”。

求炮弹的最佳发射角度等最值问题也是 17 世纪科学家研究的一类问题，费马 (Fermat, 1601-1665) 是其中的一位代表人物，他用无穷小思想处理了极值问题和切线问题。

3 教学设计与实施

根据数学史料，本节课教学设计分为实例研究引入课题，实验探究概括抽象，多元联系拓展深化，回顾反思提出问题和课堂小结五个部分。以谷爱凌滑雪运动为背景，根据历史上导致导数产生的三大问题进行研究，引导学生自主探究，讨论瞬时速度的求法，形成核心知识导数的代数表达形式和几何意义。

课前，教师要求学生完成“导数的概念”调查问卷，主要关注学生对瞬时速度和切线概念的描述，发现大部分学生都是从平均速度出发考察瞬时速度，并认为与曲线只有一个交点的直线是切线。

课上，教师首先播放谷爱凌在 2022 年冬奥会自由式滑雪女子大跳台决赛中夺冠的视频，并对她在比赛中的运动轨迹进行了更细致的分析，即她在某一时刻的瞬时速度，起跳瞬间的速度方向，以及运动过程中的最高点，从而引入课题。

(一) 实例分析，引入课题

实例 1：滑雪运动问题

教师根据谷爱凌滑雪比赛情况建立数学模型，引导学生思考瞬时速度的求法。

师：设她在起跳台腾空落到结束区过程中，相对于水平面的高度 h (单位: m)与起跳后的时间 t (单位: s)存在函数关系 $h(t) = -4.9t^2 + 9.2t + 4$ ，如何求她在某一时刻(比如： $t=1$)的瞬时速度？（图 4）

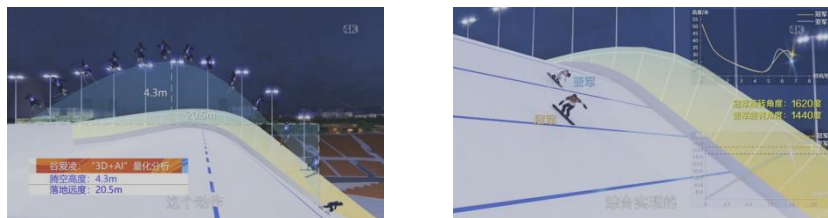


图 4 实例 1 图

教师根据课前问卷中针对求瞬时速度的回答“ $t=1$ 左右取相对短时刻计算平均速度”询问该生上述表述的具体含义。

生 1：取一个比较短的时间，比如 $t \in [0.9, 1.1]$ ，用路程除以时间，用一个比较短时间内的平均速度来替代它的瞬时速度。

师：除了 $t \in [0.9, 1.1]$ ，你还能举出其他时间段的例子吗？

生 1： $t \in [0.99, 1.01]$ 。

师：哪儿一个时间段内的平均速度更加接近她在 $t=1$ 的瞬时速度？

生 1： $t \in [0.99, 1.01]$ 。

【设计意图】以问题串的形式引导学生使用平均速度趋近瞬时速度，初步体会逼近的思想；谷爱凌冬奥会滑雪夺冠是刚刚过去的热门话题，体现了数学与体育运动之间的联系，容易激发学生的求知欲和学习热情；提出的三个问题恰好是历史上导致导数产生的基本问题，体现了历史与现实的沟通。

（二）实验探究，概括抽象

本环节主要通过引导学生探究平均速度的变化趋势引出导数的概念，在此基础上进一步研究导数的几何意义。

探究 1：函数 $h(t)$ 的平均速度的变化趋势

首先教师引导学生表示并化简 $[1 + \Delta t, 1]$ 的平均速度一般表示，并且计算不同时间段内的平

均速度。

师：为了表示方便，我们将从 t_1 到 t_2 这段时间用区间 $[t_1, t_2]$ 表示，并且将 $t=1$ 附近的时间段统一表示为 $[1+\Delta t, 1](\Delta t < 0)$ 或者 $[1, 1+\Delta t](\Delta t > 0)$ ，平均速度用 $\bar{v}$ 表示，请表示在 $[1+\Delta t, 1](\Delta t < 0)$ 与 $[1, 1+\Delta t](\Delta t > 0)$ 内的平均速度，并根据瞬时速度定义设计一个用 $\bar{v}$ 逼近瞬时速度的方案。

学生操作：设计方案-计算-观察结果-发现规律（表 1）。

表 1 函数 $h(t)$ 的平均速度的变化趋势

在 $[1+\Delta t, 1](\Delta t < 0)$ 上的平均速度	在 $[1, 1+\Delta t](\Delta t > 0)$ 上的平均速度
$\bar{v} = \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{(1+\Delta t) - 1} = -4.9\Delta t - 0.6$	$\bar{v} = \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{(1+\Delta t) - 1} = -4.9\Delta t - 0.6$
当 $\Delta t = -0.1$ 时， $\bar{v} =$	当 $\Delta t = 0.1$ 时， $\bar{v} =$
当 $\Delta t = -0.01$ 时， $\bar{v} =$	当 $\Delta t = 0.01$ 时， $\bar{v} =$
当 $\Delta t = -0.001$ 时， $\bar{v} =$	当 $\Delta t = 0.001$ 时， $\bar{v} =$
当 $\Delta t = -0.0001$ 时， $\bar{v} =$	当 $\Delta t = 0.0001$ 时， $\bar{v} =$
当 $\Delta t = -0.00001$ 时， $\bar{v} =$	当 $\Delta t = 0.00001$ 时， $\bar{v} =$
...	...

师：观察上表，你有什么发现？

生 2：当 Δt 越来越接近 0 时，平均速度趋近于 -0.6？

师：当 Δt 无限趋近于 0 时，平均速度无限趋近于一个稳定值 -0.6。通过有限项得到这个规律，体现了特殊到一般的数学思想。

引出课题：导数概念生成

师：我们通过缩小 Δt 的绝对值，发现 Δt 以任意方式趋近于 0 时，平均速度趋近于一个稳定值 -0.6，这里 -0.6 的物理意义是什么？

生 3：瞬时速度。

师：好，即 $\Delta t \rightarrow 0, \bar{v} \rightarrow -0.6$ ，瞬时速度是矢量，有正负之分，这是半符号化的语言，如何用数学符号描述“ Δt 以任意方式趋近于 0 时，平均速度趋近于一个确定的值 -0.6”？

生 3：用极限来表述。

师：很好，这是它在 $t=1$ 的瞬时速度 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{\Delta t} = -0.6$ 。现将它推广到一般，如何求在 t_0 时刻的瞬时速度？

生 4： $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)}{\Delta t}$ 。

师：-0.6 在物理学中的意义是瞬时速度，在数学中又有什么含义呢？我们将函数记作 $f(x)$ ，当 Δx 无限趋近于 0 时， $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于一个稳定值，我们将这个稳定值记作 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ，称为函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ ，即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ，它可以反映出函数在某个自变量 x_0 处的变化情况。

师：类似地，-0.6 是函数 $h(t)$ 在 $t=1$ 处的导数，记作 $h'(1)$ ， t_0 时刻的瞬时速度是函数 $h(t)$ 在 $t = t_0$ 处的导数，记作 $h'(t_0)$ 。

在引出导数的概念后，教师进行如下总结：我们利用平均速度去逐步逼近它在 $t=1$ 的瞬时速度，然后将它一般化，得到 $t = t_0$ 的瞬时速度，瞬时速度在数学中的含义是导数，反映函数 $f(x)$ 在某个自变量 x_0 处的变化情况，请同学们思考导数的几何意义？

【设计意图】学生通过设计方案，计算，观察自主探究平均速度的变化趋势，有助于培养数据分析和数学运算的核心素养；在平均速度到瞬时速度的发现过程中，学生体会无限逼近的思想，理解导数的本质是精确地刻画函数在某一点处变化快慢的数学模型；在推导过程中，极限的表述从文字语言到半符号语言再到符号语言，逐步过渡，符合学生的认知规律，帮助学生更好地理解导数的表达式。

探究 2：导数的几何意义

本环节主要通过导数的代数表达形式探究它的几何意义，引导学生从形的角度出发考察。

师：以 $h(t) = -4.9t^2 + 9.2t + 4$ 为例，思考平均速度对应的代数 $\frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{(1+\Delta t) - 1}$ ($\Delta t \neq 0$) 的几何

意义。

生 5：一开始的回答是切线，并且他认为切线是与曲线只有一个交点的直线。针对他这种错误认知，在学生观看接下来播放的曲线切线与导数概念发展的微视频后给出了解答：这是错误的说法，也是历史上切线的静态定义，切线本质是割线的极限位置，这是 17 世纪数学家莱布尼兹定义的。

教师引导学生将 $1+\Delta t$ 看作 x_1 ，将 1 看作 x_2 ，并根据 $\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}$ 的结构特征思考它表示的几何量。

生 6：割线点 $(1+\Delta t, h(1+\Delta t))$ 与点 $(1, h(1))$ 连线的斜率。

师：在这里注意到点 A 是定点，点 B 是动点。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 的过程中，即当 B 无限趋近于 A 时， $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}$ 的几何意义是什么？

学生根据图象进行思考并说明。

生 7：当 B 无限趋近于 A 时，即 Δt 无限趋近于 0，割线 AB 逐渐逼近切线 AT ，割线 AB 的斜率逐渐逼近切线 AT 的斜率。

教师分别从 B 在 A 的左右两侧分别趋近于 A 的情况进行说明，并揭示“以直代曲”的思想方法（图 5）。

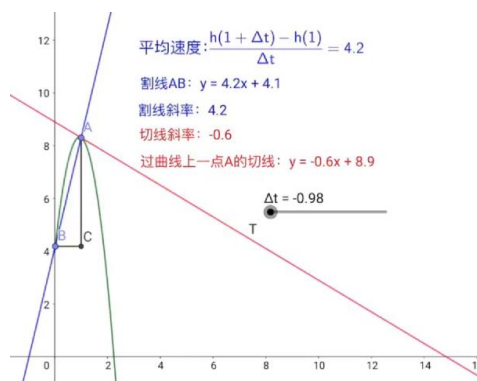


图 5 GeoGebra 动态演示

师：推广到一般，你能概括出 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 的几何意义吗？

生 8：在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率。

【设计意图】学生从直观感受上升到理性思考，概括出切线的定义与导数的几何意义；将

导数的代数表达与几何表征统一起来理解,有助于学生建立数形结合的思想;同时从认识论角度揭示宏观与微观的统一,践行学科育人。

(三) 多元联系, 拓展深化

有了切线和导数的定义,我们不仅可以用来解决瞬时速度的问题,我们还可以用它们来求解速度方向。本环节的设置是为了解决引例中抛出的第二个问题。

师:设谷爱凌在起跳台腾空落到结束区过程中,相对于水平面的高度 $f(x)$ (单位:m)与起跳后水平距离 x (单位:m)存在函数关系 $f(x) = -0.03x^2 + 0.71x + 4$, 求起跳瞬间速度方向(精确到 0.1°)。

学生 9 展示了他的求解过程,即利用导数的运算法则进行求解,又因为多数学生没有学过导数运算,引导该生从导数定义的角度进行求解(图 6)。

$$f(x) = -0.03x^2 + 0.71x + 4$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-0.03(\Delta x)^2 + 0.71\Delta x + 4 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-0.03\Delta x + 0.71) = 0.71$$

$$f'(x) = -0.06x + 0.71$$

$$\therefore k = f'(0) = 0.71$$

$$\alpha = \arctan k = 35.37^\circ$$

图 6 学生 9 的求解过程

答:起跳瞬间速度方向约和水平面斜上呈 35.4° 夹角方向。

【设计意图】引导学生将起跳瞬间速度方向转化为曲线 $f(x)$ 在点 $(0,4)$ 处的切线的斜率,培养学生的建模能力;学生可以使用逼近的思想来判断切线是否存在,也可以通过导数的定义进行考察,此题的设置将导数的几何表示和代数表征有机地结合起来,考察学生本节内容的掌握情况,体现了数形结合的求解思路;在考察 $f(x)$ 在点 $(0,4)$ 处的切线时,引导学生发现“某点附近的曲线可以用过此点的切线近似代替”,体会“以直代曲”思想方法。

从上述两例中我们可以得到导数在求解瞬时速度和速度的方向时发挥了很大作用,曲线运动过程中的瞬时速度和方向每时每刻都在变化,这也是导数产生的重要原因,我们在解决现实问题中经历了导数的诞生,体会到导数的本质是精确地刻画函数在某一点处变化快慢的数学模型,除此以外,我们还可以利用导数求解谷爱凌在运动过程中距离水平面的最大距离。由于涉

及导数的几何意义，我们下节课再展开求解。

【微视频】介绍曲线切线与导数概念发展（图 7）。



图 7 曲线切线与导数概念发展的微视频剪影

（四）结合概念，提出问题

师：仿照前面的例子，结合导数概念，还可以提出什么问题进行研究？（图 8）

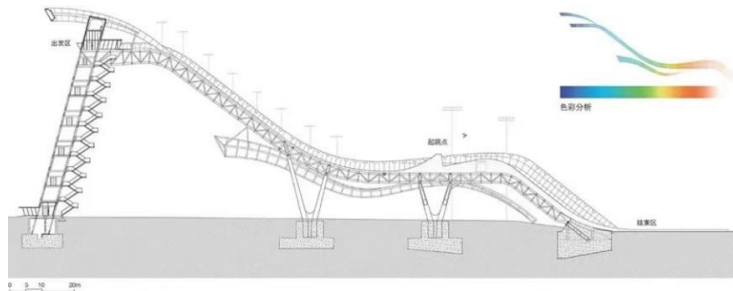


图 8 学生提问环节图

生 10：研究利润的最值，某点处变化速度。

师：求最值是导数产生的一大原因，研究某点处的变化情况是导数的本质。刚刚我们研究了谷爱凌在起跳瞬间的速度方向，跳跃过程中的瞬时速度，现在我们探究她落地后的运动情况。

（备用）思考题：设谷爱凌落地的过程中，相对于水平面的高度 $g(x)$ (单位: m) 与距离落地点的水平距离 x (单位: m) 存在函数关系： $g(x) = ax^3 + bx^2 - 0.78x + c$ ，求着陆坡的坡度。(精确到 0.1°) (a, b, c 均是已知量，但因网络上找到的数据有限，为了体现科学性，用参数表示)

之前两个问题解决的二次函数的问题，这里构造一个三次函数，体现导数应用的普遍性。

（五）归纳总结

我们通过滑雪运动的案例分析，经历从平均速度到瞬时速度的过程，并在运用“以直代曲”方法的过程中，感受无限逼近和数形结合的思想；理解导数的代数表达形式与几何意义，

以及导数的本质是精确地刻画函数在某一点处变化快慢的数学模型，培养几何直观和数学建模的数学核心素养。

4 结语

本节课基于 HPM 视角，通过重构历史的方式来设计导数概念的教学，不仅为今日“聚焦数学文化，重构概念教学”提供了机会，还将促进学生对数学概念的本质理解，使得学生在学习导数的过程中经历了导数的诞生过程，即为了解决瞬时速度，坡度和最值。因此，笔者根据本节课围绕的一个概念，两种思想，三类素养进行总结。

其一，理解导数概念。本节课首先研究导数的物理意义，即瞬时速度，引导学生发现瞬时速度是由平均速度的极限推导过来的；接着从数学角度来看导数，它的代数表达形式为函数变化率，反映了函数 $f(x)$ 在某个自变量 x_0 处的变化情况；随后讨论了导数的几何意义，即通过观察代数的结构特征，学生发现函数在该点处切线的斜率即为导数；最后又将导数的内涵与几何意义应用于求实际问题。本节课从学生已有经验出发，层层递进生成了导数的概念。

其二，感受无限逼近和数形结合思想。学生通过如下两个探究活动感受无限逼近的思想：即通过计算几段时间内的平均速度，观察得到当时间段长度可以取任意小的正数时，平均速度无限趋近于瞬时速度的结论；通过画图思考导数的几何意义，即为割线的极限位置是切线的斜率。学生在感受无限逼近思想过程中理解极限的特征：前者是导数的代数刻画，后者是导数的几何特征，笔者引导学生在运用“以直代曲”方法的过程中，感受无限逼近和数形结合的思想。

其三，培养直观想象，数学建模，数学文化的基本数学素养。从低层的直观想象要求上升到较高的直观想象能力，即先引导学生通过表格中函数的直观变化趋势归纳规律，后由代数结构出发，想象割线的几何意义，对学生的直观想象要求也经历了螺旋上升的过程，符合学生的认知；本节课的实例背景是教师依据历史上导数产生原因建立的模型，在滑雪同一背景下改变自变量设置不同的问题，以问题串的形式引发学生思考，引导学生利用导数的概念解决实际问题，同时提问环节的设置培养了学生创造新的数学工具解决实际问题的能力，促进建模与概念教学更好地融合；本节课将导数历史融入教学的同时，也将导数和切线概念的历史以微视频的

形式呈现在课堂中。在授课过程中,有同学提出切线是与曲线只有一个交点的直线,通过播放该微视频,回应了该同学的回答,他的想法是历史中切线的静态定义,随着历史发展被证明是不正确的,并强调了切线正确定义是割线的极限位置,从历史的角度进行连结阐述体现了文化之魅。

由于本节课是在疫情期间网上开设的公开课,与学生的互动只能通过问答形式展开,这种形式比较单一,像提问环节,如果以小组讨论形式开展,更有助于学生迸发思维的火花。

由此笔者认为将数学史应用于数学课堂还需要下很大功夫,一方面需要继续深入研读史料,另一方面需要对教材和学生有更深入的了解,这样才能将两者更好地结合在一起,打造出一节精彩的 HPM 课堂。

参考文献

- [1] 章建跃. 通过直观理解导数概念感悟极限思想 运用导数研究函数性质解决实际问题[J]. 数学通报, 2021,60(10): 7-12+66.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 39.
- [3] 杨伟成. 导数的概念教学设计[J]. 高中数学教与学, 2012(14): 32-34.
- [4] 王志刚,郑建华. 数学核心素养更需要在数学核心概念的教学中落实——以“导数的概念”(第一课时)教学为例[J]. 中学数学教学, 2018(04): 5-8.
- [5] 张军. 谈基于数学核心素养的抽象能力培养——以导数的概念教学为例[J]. 数学学习与研究, 2020(02): 129+131.
- [6] 邱礼明,曾菁. HPM 视角下“导数的概念”教学设计[J]. 中小学数学(高中版), 2021(04): 22-25.
- [7] 王芳. 数学史融入导数教学的行动研究[D]. 上海:华东师范大学, 2012.
- [8] 汪晓勤. HPM:数学史与数学教育[M]. 北京:科学出版社, 2017.
- [9] 吴甬翔,汪晓勤. 曲线的切线:从历史到课堂[J]. 高等理科教育, 2009(03): 38-43.
- [10] 汪晓勤,沈中宇. 数学史与高中数学教学:理论、实践与案例[M]. 上海:华东师范大学出版社, 2020.

他山之石

创造力对问题解决专业知识的作用：通过调查提出新问题

王智洋

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

我们身处于瞬息万变的 21 世纪，创造力的重要性不言而喻。如今，无论从科技进步、社会发展还是从个人角度来看，创造力的发展，尤其是数学创造力的发展是至关重要的。在中小学数学教学中，人们常常容易过度强调数学的逻辑性、严密性和确定性，而忽视了数学的创造性。因此，我们往往认为参加数学竞赛的学生比普通的数学优等生更具创造力，但也有的人持怀疑态度，那么究竟是否如此呢？

来自以色列海法大学（University of Haifa）的 Haim Elgrably 和 Roza Leikin 两位学者关于“数学创造力如何与不同类型的数学专业知识相联系？”问题设计了一个研究，观察了两组有不同专业知识的参与者在动态几何环境（DGE）下通过调查提出问题的表现情况，其论文成果《创造力对问题解决专业知识的作用：通过调查提出新问题》于 2021 年发表在《国际数学教育评论》（ZDM - Mathematics Education）期刊上。

1 研究背景与研究设计

在过去二十年中，数学教育研究人员越来越重视数学创造力和创造力导向的活动，并将其作为二十一世纪的主要技能。此外，关于数学专业知识和创造力之间的联系始终存在着争议，而且关于这种联系的实证研究也很少。

该项研究选取了两类具有丰富数学背景的参与者来测试他们的创造力和证明技巧，分别是：

（1）MO 组——8 位问题解决专家，他们是以色列国家 IMO 团队的成员；（2）MM 组——11 名数学专业的学生，他们在大学数学课程中表现优异，并获得了高中数学教学证书。

与职业数学家无意识的数学创造不同，中小学数学中的数学创造力通常与问题解决或问题提出有关，问题提出和问题解决可用于发展数学创造力。因此，本研究使用多解决方案任务模型（MST）评估创造力，该模型通过分析多种问题解决策略之间的异同，对以下三类创造力进

行评估：流利性、灵活性和独创性。本研究采用通过调查提出问题（PPI）任务来探究这种联系。PPI 是 MST 的一个实例，是一种将问题提出与问题解决相结合的数学活动。PPI 便于在动态几何环境（DGE）中进行探究，允许参与者构造、测量、寻找几何特性，检验并提出新问题，然后进行解决。PPI 任务从开始到结束都是开放的，参与者可以自由选择他们所测试的内容和方式，并且结果构成一个“问题提出个人空间”，储存所发现的性质。这些空间在问题提出的数量、类型和复杂性方面各不相同。

该项研究的主要目的是检验数学创造力对数学专业知识的作用，主要涉及证明技能（PPI 过程中的构造、提出问题的复杂性和证明的正确性）和创造力成分（流利性、灵活性和独创性），参与者被要求在 90 分钟内在 DGE 中完成一个 PPI 任务（图 1）。

- 设直角三角形 ABC ($AC \perp AB$)， $\angle ABC = 60^\circ$ 。
 $\triangle ABD$ 是等边三角形， CD 交 AB 于点 E 。
 (1) 通过在 DGE 中调查，找出至少两个非平凡性质
 (证明至少包含 3 个步骤)；
 (2) 提出新的证明问题并解决。

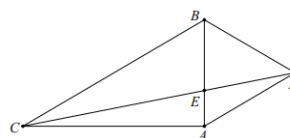


图 1 PPI 任务

本研究使用了十进制评分方案，为了测试创造力和专业知识之间的关系，评估了每个问题提出空间的创造力成分和证明技能。证明技能包括以下内容：(a) 参与者为发现性质而进行的辅助构造；(b) 证明的正确性；(c) 提出问题的复杂性。创造力成分包括以下内容：(d) 流利性，即发现性质的数量；(e) 灵活性，即发现的不同类型性质的数量；(f) 独创性，即发现性质的新颖性。问题提出的个人空间由该参与者所有发现的性质及提出的问题组成。我们评估了每个问题提出的个人空间，如表 1 所示。

表 1 关于 PPI 任务的个人空间评分方案

评分	10	1	0.1
创造力成分			
流利性 n , 提出问题的数量			
灵活性,	不同类型的性质	同一类型但操作和种类不同的性质; 在辅助构造后重复操作或相同种类的性质	重复操作或相同种类的性质
$Flx = \sum_{i=1}^n Flx_i$			
独创性,	全新视野的	之前没学过的	之前学过的
$Or = \sum_{i=1}^n Or_i$	出现频率非常低 ($P < 10\%$)	出现频率较低 ($10\% \leq P < 40\%$)	在所有参与者的个人空间中频繁出现

(P≥40%)

创造力,

$$Cr = \sum_{i=1}^n Flx_i Or_i$$

	复杂度较高	复杂度中等	复杂度较低
证明技能			
辅助构造, 关于构造的数量 $Ac = \sum_{i=1}^n Ac_i$	图形内至少 3 个构造, 或图形外至少 2 个构造	图形内不超过 2 个构造, 或图形外 1 构造	图形内最多 1 个构造 (评估为 0 而不是 0.1)
提出问题的复杂性, 关于证明长度 $Pr_c = \sum_{i=1}^n Pr_c_i$	证明包括至少 7 个步骤和至少 5 个定理 (或概念)	证明包括 4-6 个步骤和 3-4 个定理 (或概念)	证明包括 1-3 个步骤和 1-2 个定理 (或概念)
证明的正确性 Cor	完全正确	恰当但不完全正确	没有证明或错误证明

2 研究结果

2.1 Dave 和 Jerry 提出问题的个体空间

Dave 在 MO 和 MM 小组的中完成 PPI 任务表现最出色。17 岁的他在 2014 年至 2017 年间参加了国际数学奥林匹克竞赛 (IMO), 并获得了 4 枚奖牌。Dave 的辅助构造如图 2 所示, 他

Dave 的辅助构造

$AF \parallel BD$, $AF \cap CD = G$, $DF \cap AB = H$, $BG \cap AC = K$.
过 B, H, D, F 作圆 I , I 为圆心; 过 A, K, G, J 作圆 L , L 为圆心.
 $\odot I \cap CD = J$, $\odot I \cap AJ = M$.

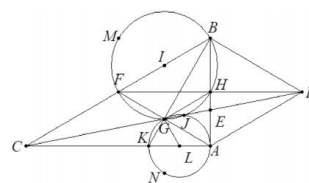


图 2 Dave 的辅助构造

的个人空间如表 2 所示。

表 2 Dave 的问题提出个人空间

发现的性质	辅助构造	问题提出的复杂性	证明的正确性	灵活性	独创性	创造力
D1 菱形 $ADBF$	0	1	10	10	10	100

D2	G 是 AF 中点	0	1	10	10	0.1	1
D3	平行四边形 $ACFD$	0	1	10	1	1	1
D4	E 是 $\triangle AFD$ 的重心	1	10	10	10	10	100
D5	B, H, G, F 四点共圆	10	1	10	10	10	100
D6	H, J, K 三点共线	10	10	10	10	1	10
D7	A, K, G, J 四点共圆	10	10	10	1	10	10
D8	$\frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$	0	1	10	0.1	0.1	0.01
D9	M, I, H 三点共线	10	10	10	1	1	1
D10	等腰梯形 $GHBF$	10	10	10	10	10	100
D11	GH 是圆 L 的切线	10	10	10	10	10	100
D12	N, G, I 三点共线	10	10	0	1	1	1
总分		71	75	110	74.1	64.2	524.01

Jerry 的问题提出个人空间在 11 名 MM 参与者中获得了最高的创造力得分。Jerry 的辅助构造

Jerry 的辅助构造

F_2, E_2, V_2, W_2 分别是 $\triangle BCE, \triangle ACE, \triangle BDE, \triangle ADE$ 的重心.
作 $W_2 X_2 \perp E_2 F_2$.

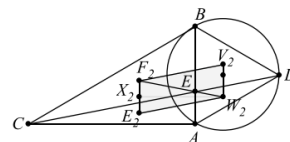


图 3 Jerry 的辅助构造

造如图 3 所示，他的个人空间如表 3 所示。

表 3 Jerry 的问题提出个人空间

发现的性质	辅助构造	问题提出的复杂性	证明的正确性	灵活性	独创性	创造力
J1 $\frac{BE}{AE} = \frac{CE}{DE} = 2$	0	1	10	10	1	10
J2 $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD}$	0	1	10	1	0.1	0.1
J3 平行四边形 $E_2 F_2 V_2 W_2$	10	10	10	10	10	100
J4 $4.5S_{E_2 F_2 V_2 W_2} = S_{ACBD}$	10	10	10	0.1	10	1
J5 $E_2 W_2 = F_2 W_2$	10	10	0.1	1	10	10

J6	$\triangle AEC \sim \triangle X_2E_2W_2$	10	10	0.1	10	10	100
J7	BC 是 $\triangle ABD$ 外接圆的切线	1	0.1	10	10	10	100
总分		41	42.1	50.2	42.1	51.1	321.1

Jerry 提出了 7 个问题，比 Dave 提出的问题少。在 Dave 提出的问题中，7 个问题具有高复杂性（得分为 10），而 Jerry 只有 4 个。Dave 证明了他提出的 12 个问题中的 11 个，而 Jerry 证明了 7 个问题中的 5 个。Dave 的灵活性得分为 74.1，Jerry 的灵活性得分为 42.1。Dave 有 6 个原创发现，他的独创性得分为 64.2，而 Jerry 的独创性得分为 51.1。Jerry 的原创发现包括以下特性：四边形是平行四边形，两个四边形的面积比等于 4.5，两个三角形的相似性以及直线和圆相切。值得注意的是，MM 组的参与者通常会研究面积比和线段比。因此，关于问题提出个人空间的所有特征，Dave 高于 Jerry。

2.2 MM 和 MO 参与者问题提出空间的总体差异

表 4 表明，8 位 MO 组的参与者通过调查提出的问题是 11 位 MM 组参与者的 2 倍多。

表 4 提出的问题在不同测试类型中得 10 分的数量

	提出问	提出问	得分为 10 的数量					创造力
	题总数	题平均 数	辅助 构造	问题复 杂性	证明正 确性	灵活性	独创性	
MO 参与者（N=8）								
总数	141	17.63	92	57	137	56	38	27
占比			65.2%	40.4%	97.2%	39.7%	27%	19.1%
平均数			11.5	7.1	17.1	7	4.8	3.4
MM 参与者（N=11）								
总数	66	6	25	21	39	14	17	12
占比			37.9%	31.8%	59.1%	21.2%	25.8%	18.2%
平均数			2.27	1.91	3.55	1.27	1.55	1.1

MO 组提出的问题的平均数量是 MM 组 3 倍。根据所有测试标准的最高分数（10 分）比较了两组参与者提出问题的空间，总体而言，MO 组提出的问题基于大量复杂的辅助构造，并有 97% 的问题得到证明，与 MM 组的 59% 形成对比。相较于 MM 组，MO 组发现的性质更具灵活性和独创性。平均而言，MO 组参与者的创造力得分为 MM 组的 3 倍多。

图 4 说明了大多数测试的标准。除 Jerry 以外，所有 MM 组参与者问题提出的最高分数低于 MO 组的最低分数。具体结果是辅助构造（44 比 57）、证明的正确性（70 比 110）、流利性（10 比 12）、灵活性（51 比 58）、独创性（22.2 比 33.83）和创造力（201 比 275）。比较所有被测试的证明技能和创造力成分的中位数得分，存在显著差异：辅助构造方面，MO 组的中位数得分比 MM 组高 4.9 倍以上，证明为 5.4 倍，问题复杂性为 2.9 倍。MO 组和 MM 组的各个创造力成分的中位数得分的比值为：流利性 2.8，灵活性 4，独创性 3.6，创造力 3.2。测试结果表明，问题提出之间的差异对于所有证明技能和创造力成分都是显著的。

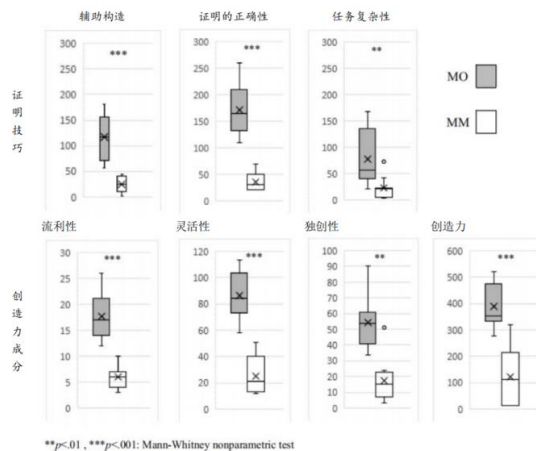


图 4 两组提出问题得分的箱线图

2.3 MO 和 MM 组内不同创造力成分与 PPI 相关证明技能之间的关系

此外，分别对 MO 和 MM 组内参与者的 PPI 结果进行比较，聚焦 MO 和 MM 组的相关证明技能和创造力成分之间的相关性，进行 Spearman 相关性测试。发现在两组参与者中，创造力和独创性之间的相关性显著（MO 组为 $r_s=0.881$, $p<0.01$ ；MM 组为 $r_s=0.991$, $p<0.01$ ）。

对于 MO 参与者提出的问题，研究发现流利性和灵活性之间存在显著相关性（ $r_s=0.862$, $p<0.01$ ）。这种相关性表明，MO 参与者提出的问题数量越多，导致不同类型的问题数量越多。这种相关性在 MM 组中似乎不显著。

MM 组 PPI 表现的灵活性与 PPI 的独创性和创造力显著相关（灵活性和独创性 $rs=0.900$, $p<0.01$; 灵活性和创造力 $rs=0.945$, $p<0.01$ ）。MM 组提出更多不同问题的能力与他们提出独创性问题相关。然而, MO 组的这些相关性似乎并不显著。研究者认为, MO 组数学专业知识所具有的证明技能促使了 PPI 表现的灵活性,而提出独创性问题的根源在于他们对几何的好奇。

3 结论和启示

奥林匹克数学竞赛与大学数学这两种数学专业知识之间存在显著差异。高水平的问题解决专业知识显著影响 PPI 的质量,反映在证明技能和创造力成分上。研究发现,大学数学课程不能培养创造性的数学能力和技能。MO 组参与者的 PPI 表现明显优于 MM 组,更具流利性、灵活性、独创性,有更复杂的问题和更复杂的辅助构造。一种可能的解释是,专业知识是多年专注努力的回报,但这一解释并不适用于研究结果,因为两组人都投入了时间和精力学习数学。故猜想,这种差异与奥林匹克数学竞赛的训练类型和竞赛的专业知识既定指标有关,而不是与主修数学有关。

MO 组的高水平数学专业知识反映在证明技能和创造力成分之间的显著相关性中。通过相关分析,研究清楚地证明了 MO 组问题提出和证明是不可分割的,即提出假设是数学专家解决问题过程中固有的一部分。

参考文献

- [1] Elgrably, H. & Leikin, R. Creativity as a function of problem-solving expertise: posing new problems through investigations[J]. *ZDM Mathematics Education*, 2021, 53(04): 891-904.

活动讯息

聚焦知识生成，感悟数学思想

——“平方根与开平方”教学观摩与研讨活动

韦润蓉 钱秦 刘思璐

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2022 年 2 月 22 日上午，数学史与数学教育（HPM）工作室初中课例研究活动在上海市实验学校南校举行。本次课例研究活动的主题是“平方根与开平方”，两位授课教师均为 HPM 工作室成员。线下参与本次活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授及 HPM 方向的硕士研究生，同时 HPM 工作室（初中）其余学员线上观摩了此次活动。

第一位授课教师是上海市进才中学的林徐励老师（图 1）。林老师通过《九章算术》两个求田地边长与面积的问题引入，让学生尝试归纳平方根的概念，并展示数学家们给出的几个定义，接着引导学生总结平方根与开平方的概念。例题部分，林老师通过课堂游戏活跃气氛，用手势判断对错，既完成了平方根概念的辨析，又让学生感悟到分类讨论的思想方法。随后，林老师播放微视频展示根号的发展历程，启示学生，数学概念或数学符号的形成需要经历漫长的演变。归纳部分，林老师带领学生回顾前面数学家给出的平方根定义，将文字语言转化为符号语言，引导学生将其一一对应，通过古今对照的方式加深学生对概念的理解。课堂小结时，林老师让学生从概念、数学思想方法与数学史方面分享了自己的感悟。



图 1 林老师的教学课堂

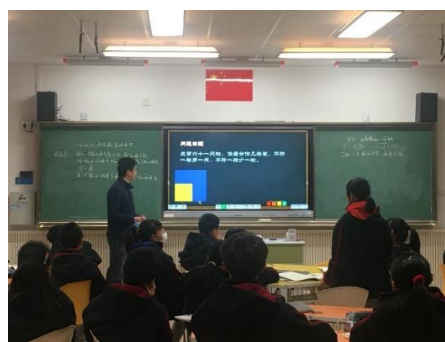


图 2 蒋老师的教学课堂

第二位授课教师是上海市实验学校南校的蒋来老师（图 2）。蒋老师在课程一开始就播放了建党 100 周年大会片段，用求行列方阵作为平方根的引入，并列举古代数学中的开平方问

题,鼓励学生也提出类似的数学问题。接着,蒋老师通过列举不同时期数学家对平方根的定义,让学生选出易于理解的一个,体会数学概念的凝练美。之后,蒋老师向学生介绍古代“出入相补”的原理来计算平方根,让学生感悟数形结合的思想,启发学生用此方法和分解素因数等不同的方法求一个较大数的平方根。蒋老师通过播放微视频让学生学习了根号的发展历史,并辅以课堂练习。在课堂总结中,学生表示自己对微视频中数学家具有深刻印象以及感悟到数形结合、分类讨论等多种思想方法。

两节课后,参与观摩的老师与研究生们对这节课展开了热烈的讨论(图3)。蒋老师首先介绍了自己的设计思路,以开国大典的方阵、古代书籍中的题目作为引入,一方面希望提高学生的文化自信,实施德育,另一方面也是锻炼学生问题提出的能力。并基于古代数学中开平方的方法,让学生了解根号的使用价值,感受因数分解的自然性,给学生较多的探究机会。林老师也介绍了自己的设计想法,通过两个古代数学问题,让学生在熟悉的知识中逆向思考问题,进而探究平方根的定义。在概念界定上采用古今对照的方式,给学生一定的留白空间。随后,上海实验学校南校的其他观课老师分别对两节课进行点评,大家一致认为这是一次精彩的教学活动。老师们肯定了蒋老师对主线的清晰把控,以及在课程中对数学思想与德育的融入,而林老师课堂的特点则是用数学史贯穿整个过程,将教学重难点落实到位。研究生们则分别从史料的选择、教学风格与呈现细节等方面与在场老师进行交流。最后,汪晓勤教授从史料内容、史料运用、学习机会与学生表现四个方面进行点评,指出两位老师的课程有很多可取之处,值得学习,未来可进一步尝试利用小组合作学习给予学生更多探究机会。



图3 课后研讨

本次活动中的两节课从不同的角度将数学史贯穿其中,发挥了立德树人的教育理念,渗透了多种重要的数学思想,凝聚了课例研究中的集体智慧。相信在未来的时间里会有更多精彩纷呈的 HPM 课例呈现在大家面前!