上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2022 年第 11 卷第 08 期

南宋马远《寒江独钓图》

刊首新语

数学史与留白创造式教学

汪晓勤 邹佳晨

（华东师范大学教师教育学院, 上海 20062）

《普通高中数学课程标准》提出：高中数学课程应力求通过各种不同形式的自主学习、探究活动，让学生体验数学发现和创造的历程，发展他们的创新意识[1]。为了培养学生的创新意识，我们需要在课堂“留白”，给学生自主学习的场景，提供学生自由想象的机会，创设学生获取知识的可能。在教学中，教师为学生留下足够的思维空间和探究机会，即为“留白”。但“留白”不是“白留”，而是为了达成明确的教学目标、最终落实立德树人。简单地说，留白创造式教学过程就是“留白”和“补白”的过程。

荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔（H. Freuthental, 1905-1990）在《作为教育任务的数学》中指出，数学学习的过程是“再创造”的过程[2]，而“再创造”就是学生在教师留白之后所完成的补白过程。所谓“留白创造式教学”，就是以学生为中心，立足育人目标，为学生学习留下充分的思维空间与探究机会，让学生在已有的知识基础上，主动学习、解决问题、创获新知、陶熔品行的教学方式。作为一种富有挑战性的教学方式，留白创造式教学在实践中应用较少，也缺乏具体的抓手。而在数学史融入数学教学的实践中，数学史运用方式的局限性使得数学史的育人价值未能得到充分的挖掘。本文拟对数学史与“留白创造式教学”之间的关系进行初步探讨，为“留白创造式教学”的理论研究与实践探索提供参考。

1 课堂六白

课堂教学中，教师为学生留的“白”和学生补的“白”通常有“陈述之白”“发现之白”“论证之白”“方法之白”“问题之白”和“超越之白”六种表现形式。其中，“陈述之白”和“发现之白”解决教学中“是什么”的问题，“论证之白”解决教学中“为什么”的问题，“方法之白”、“问题之白”和“超越之白”解决教学中“还有什么”的问题。

（1）陈述之白

德国教育家第斯多惠（F. A. W. Diesterweg, 1790-1866）在《德国教师培养指南》中指出："学生的立场就是课堂教学的出发点。教师在教学前必须认真研究学生的观点和意见。"[3]根据这一观点，教师在教学前或教学中的新知引入环节，需要了解学生的认知基础，以便确定教学的出发点。为此，教师往往需要留白。学生对于一个数学概念、命题、公式、法则等往往有自己的理解，在教学中，教师创造机会，让学生表达自己对数学知识的理解，或让学生将图形、符号语言转化成文字语言，即为学生留下"陈述之白"。

（2）发现之白

所谓"发现之白"，就是新知探索和发现的机会。第斯多惠指出："不称职的教师强迫学生接受真知，而一个优秀的教师则教学生主动寻求真知。"[3]学生发现真知的过程就是补"发现之白"的过程。在指向"发现之白"的教学中，教师需要给定情境、提出探究任务、激活学生思维、为学生发现新知创造有利的条件。无论是概念教学，还是命题教学，都有"发现之白"可留。

（3）论证之白

理性思维的训练，乃是数学最重要的教育价值之一。17 世纪英国数学家阿布斯诺特（J. Arbuthnot, 1667-1735）曾指出：人们从数学知识中收获的益处之一就是"清晰的、实证的、有法可依的推理习惯"[4]。数学家在利用合情推理发现一个命题之后，需要采用演绎推理对命题加以严格的证明。类似地，在学生通过补白发现数学定理、公式或其他数学结论之后，教师还需要继续留白：让学生对公式、命题或其他结论加以证明。数学命题、公式、结论的论证过程称为"论证之白"。

（4）方法之白

英国著名哲学家密尔（J. S. Mill, 1806-1873）说过："一个人能够对某个问题有所知的唯一办法是听不同人对这个问题所提出的不同意见，了解具有不同思维特点的人是如何使用不同的方法来探究这个问题的。所有有智慧的人都是以这种途径获得其智慧的，人的智力的本质决定了只有这种方法才能使人变得聪明起来。"[5]我们知道创新是数学研究的一个重要特征，翻开历史的画卷，对于同一个问题，不同时空的数学家会采用不同的方法加以解决，这也正是数学的魅力之所在。因此，在今天的数学课堂上，不同的学生对于同一个问题也往往会有各自的不

同方法，学习这些不同的方法有助于培养学生的创造性思维。在问题解决教学中，教师完全放手让学生探究，或在呈现某种方法后，让学生去探究更多的方法，是另一种形式的“留白”。

（5）问题之白

爱因斯坦（A. Einstein, 1879-1955）说过：“提出一个问题往往比解决该问题更重要。解决一个问题，可能只不过是一种数学或实验技能；但要提出新的问题、新的可能性，从新视角看旧问题，需要创造性的想象力，这标志着科学的真正进步。”[6] 学生在学习过程中提出问题可以促进其深刻理解概念、综合运用方法、提升思维品质。因而，问题提出和问题解决一样，是教师了解教学效果的窗口。教学中，教师从问题、命题、情境、思想、方法、工具等出发，让学生提出新的数学问题，是留白创造式教学中的基本留白活动之一。

（6）超越之白

爱因斯坦曾说过：“发展独立思考和独立判断的一般能力，应当始终放在首位，而不应当把获得专业知识放在首位。”[7]说的是在学校教育中，能力的培养要高于知识的获取。日本数学家米山国藏在其《数学的精神、思想和方法》前言中指出：“我做了多年的数学教育发现，学生在初中、高中等接受的数学知识，因毕业进入社会后没有什么机会应用这种作为知识的数学，所以通常是出校门后不到一两年，很快就忘掉了。然而，不管他们从事什么业务工作，唯有深深地铭刻于头脑中的数学的精神、数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点等，却随时随地发生作用，使他们受益终生。”[8]以上观点都表明，数学教学中，能力的培养、思维的训练、思想的引领和精神的哺育要高于知识的传授。实际上，今日数学课程中的核心素养目标也要求数学课堂实现转型，教师在课堂上不能仅仅满足于数学知识的传授，而需要将知识视为能力培养、思维训练、思想引领、精神哺育的载体。上文所讨论的陈述之白、发现之白、论证之白、方法之白和问题之白都是培养能力的手段。

在留白创造式教学中，超越知识本身、指向思想和精神目标的“白”，称为“超越之白”。一般地说，要让学生在课堂上补好“超越之白”并非易事，这需要教师对所教授的知识点有深刻的理解，对数学学科的育人价值有深刻的认识，同时，对学生也要有长期的熏陶。

2 鉴史留白

基于课堂六白的讨论，数学史在以下几个方面有助于留白创造式教学的设计与实施。

（1）了解主题历史，树立留白意识。

任何一个数学概念、公式、定理和法则都不是从天而降，都有其产生和发展的过程，如果教师不了解历史，那么，他在备课时就不会有参照系，他很可能只关注结果，而缺少过程意识。在课堂教学中，重结论轻过程的现象十分普遍，如让学生死记公式、背诵定理之类，就像在烹饪课上仅让学生品尝一道道已经做好的菜品，而不去呈现其烹饪过程一样。如果教师了解知识的前世今生，他就会逐渐关注学生发现和理解新知的路径，就知道在有关主题的教学中“有白可留”，从而树立课堂上的留白意识。

例如，现行教科书是从指数运算的“逆运算”出发定义“对数”，而历史上对数概念是因“简化运算”而建立的，17 世纪苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）通过构造相邻项间隔很小的等比数列，来简化天文研究中的大数运算，从而发明了对数[9]。教师在教学中设计“发现之白”，让学生探究从特殊正整数乘法（比如 2 的正整数次幂）到任意正整数乘法的简化方法，经历对数的发现过程，进而深刻理解对数的概念。

又如，现行教科书是利用求根公式来推导一元二次方程的根与系数关系，学生对此存疑：既已求出两根，为何还要研究两根和与积（而不考虑两根差与商）？事实上，不同历史时期的数学家采用了迥然不同的方法：16 世纪法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）和荷兰数学家吉拉德（A. Girard, 1593-1632）采用了代数相减法，18 世纪瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707-1783）采用了因式分解法，18 世纪法国数学家拉克洛瓦（S. F. Lacroix, 1765-1843）采用了“知一求二”法。教师据此可以设计“发现之白”和“论证之白”，让学生来“补白”。教师课前设置任务：求解 8 个一元二次方程并计算两根之和与积，课上让学生总结根与系数的关系，并留下论证之白：所总结的关系可以作为一个定理使用吗？学生利用求根公式法、因式分解法和代入相减法，完成补白过程。令人印象深刻的是代入相减法：设方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 x_1 和 x_2，则有

$$ax_1^2+bx_1+c=0 ，$$

$$ax_2^2+bx_2+c=0 ，$$

相减得：

$$a\left(x_2^2-x_1^2\right)+b\left(x_2-x_1\right)=0,$$

即

$$\left[a\left(x_2+x_1\right)+b\right]\left(x_2-x_1\right)=0$$

分类讨论，可得根与系数关系。实际上，这就是韦达的方法，不过韦达没有讨论重根的情形，而学生的做法更为严谨。

（2）提炼关键步骤，确定认知现状。

任何一个主题的发展过程都是由特定的“关键阶段”组成的，如函数概念发展过程由“解析式说”、“变量依赖说”、“变量对应说”和“对应法则说”等阶段组成。在学生补“陈述之白”后，有了历史这一参照系，教师就能够确定学生在概念理解上究竟达到了什么阶段，从而恰当地留白，让学生在补白过程中，自然而然地进入下一个阶段。

如，在高中函数概念的教学之前，为了确定学生的认知基础，教师设计了“陈述之白”，让学生用自己的语言描述什么是函数，相当多的学生认为“函数是解析式”。一位学生的回答是：“形如 $y=ax$， $y=\dfrac{a}{x}$， $y=x+a$， $y=x^2+a$， $y=ax^2+bx+c$， $y=x^a$ ⋯，有自变量、因变量、且对于一个 x，有且今有一个 y 的值与之对应的式子。”

学生的补白表明，经过初中阶段学习后，他们关于函数概念的认识处于“解析式”这一变量说阶段。

又如，在“导数几何意义”教学的新知引入环节中，教师首先让学生回忆：什么是圆的切线？学生的回答有三类：

- 与圆只有一个公共点的直线；
- 过圆上一点，且与该点和圆心连线垂直的直线；
- 过圆上一点，且与圆心的距离等于半径的直线。

学生的补白表明，圆的切线的静态定义是学生关于切线概念的认知起点。

（3）选取历史资源，设计合理情境

留白创造式教学的基本理念是以学生为中心，没有学生的补白，教师的留白就失去意义了。因此，教师需要充分激发学生补白的动机。然而，由于历史知识的缺失，课本上的一些知识点

往往只是披着逻辑的外衣，其必要性隐而不彰。例如：为什么要学习三角形中位线定理？为什么要学习二项式定理？为什么要学习正弦和余弦定理？……有关主题的历史为教师设计情境提供了重要资源。

如，在三角形中位线定理的教学中，教师从古代两河流域四兄弟分三角形土地的故事入手，抛出问题：如何将一个三角形分割成面积两两相等的四部分？当学生给出基于中位线的分割方案（图 1）后，教师自然引出中位线的概念；然后让学生思考：为什么这样分割得到的四个三角形面积两两相等呢？学生将三角形纸片沿中位线剪开，通过叠合，发现四个小三角形完全重叠，即四个三角形两两全等；据此发现三角形中位线与底边的未知和大小关系。

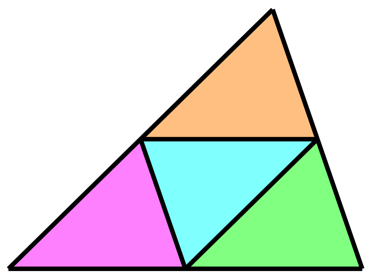


图 1 一种三角形分割方案

这里，教师所留出的三角形中位线概念及其性质之白，即使发现之白；学生通过实验操作、观察去补白。

又如，在“正弦定理”的教学中，教师根据 10 世纪阿拉伯天文学家阿尔·库希（al-Kuhi）测量流星的方案，提出流星测量问题：两位观测者分别在观测点 A 和 B 处观测同一颗流星 S，A、B、S 和地求中心 O 位于同一个平面上，已知 $\angle SAB=22°$，$\angle SBA=44°$，$AB=500\text{km}$，求流星 S 的高度 SC，由此引出解三角形问题。

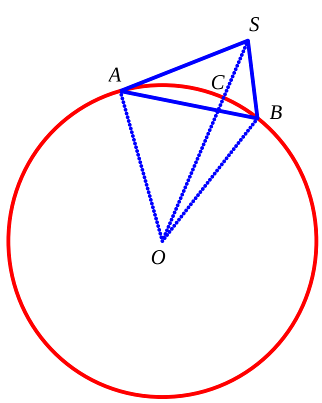


图 2 流星的测量

再从《几何原本》卷一中的“等边对等角”、“等角对等边”、“大边对大角”、“大角对大边”四个命题出发，引出三角形边角定量关系问题：在上述流星测量问题中，∠SAB 和∠SBA 所对的边之比是否也是 2:1？一般地，在ΔABC 中，是否成立$a:b=A:B$呢？学生构造图 3 所示的特殊三角形，从中发现上述等式不成立。进一步观察，发现

$$AC:BC=\sqrt{3}:1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right):\left(\frac{1}{2}\right)=\sin 60°:\sin 30°,$$

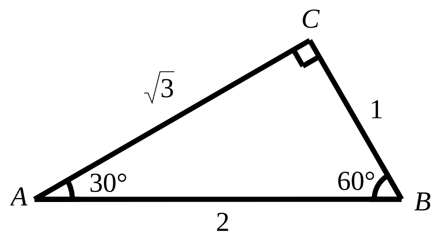


图 3 特殊直角三角形中的边角关系

据此猜想出正弦定理的结论。这里，教师留出了正弦定理的“发现之白”，学生通过特殊三角形的边角关系进行观察、归纳、反驳、猜想，完成了补白的过程。

再如，在“均值不等式”的高三专题复习课中，教师让学生根据《九章算术》中的“勾股容方”问题以及数学家刘徽的解法，设计“问题之白”，编制与均值不等式有关的数学问题。学生提出的问题丰富多彩，以下是其中的一部分。

问题 1：如图 4，两条直角边分别为 5 和 12 的直角三角形 *ABC* 中，点 *D* 在线段 *AB* 上运动，矩形 *DECF* 的面积最大值为多少？

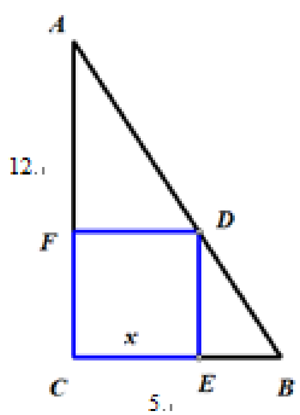


图 4 学生的问题 1-2

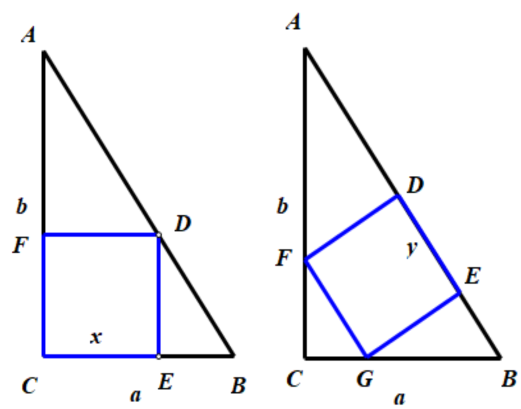


图 5 学生的问题 3

问题 2：仍如图 4，正方形边长为 *a*，若点 *A* 在 *CF* 延长线上运动，直线 *AD* 交 *CE* 延长线

于点 B，是否存在 $S_{\triangle ABC}$ 的最值，是最大值还是最小值？

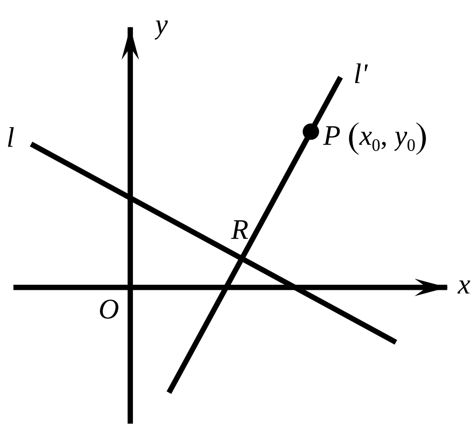
问题 3：直角三角形的哪一种内接正方形面积最大？是不是对任意直角三角形都有这个结论呢？（图 5）

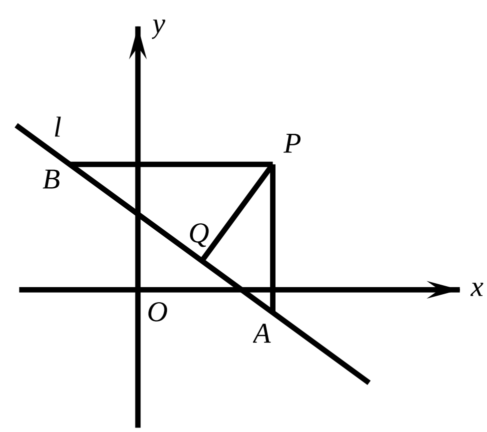
学生的问题，使得枯燥、刻板的高三复习课变得精彩纷呈。

（4）建立古今联系，开展过程评价

课堂教学过程中的每一个留白活动均由“准备与聚焦”“探索与发现”“综合与交流”“评价与延伸”等环节组成。在第四个环节，教师可以将学生的补白成果与历史上数学家证明同一个定理、推导同一个公式、解决同一个问题的方法进行对照。在证明三角形中位线定理、推导点到直线距离公式和解决“勾股容方”时，学生不仅能够想数学家之所想，而且还能想数学家所未想，这样的对照不仅凸显学生作为课堂主人的地位，而且还能显著提升学生的自信心。

比如，在“点到直线的距离”的教学中，教师设计“论证之白”，放手让学生分组推导点到直线的距离公式，学生采用了不同的推导方法：有学生将点线距离转化为两点距离、有学生将点线距离转化为三角形的高，有学生将点线距离转化为直角三角形的直角边，还有学生将点线距离转化为向量的投影，补白过程同样令人印象深刻。（图 6）





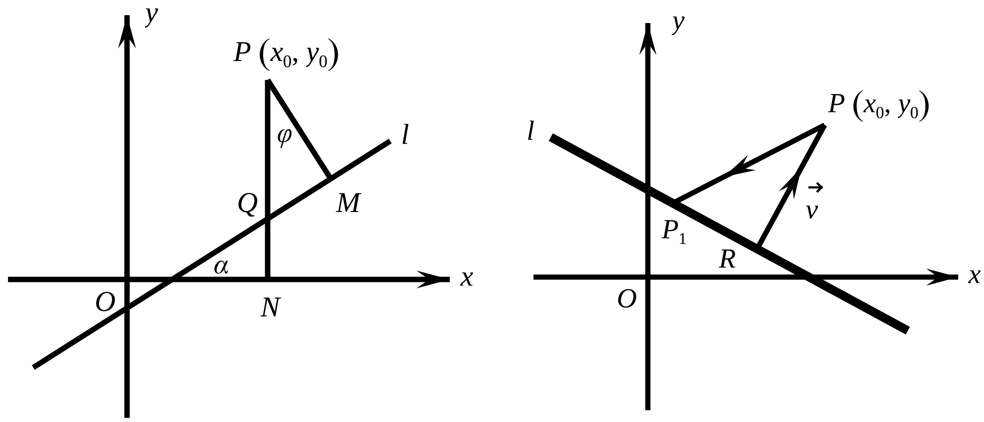


图 6 学生关于点到直线距离公式的推导

又如，当教师让 6-7 年级学生推导“勾股容方”公式（即直角三角形内接正方形边长公式）时，学生先后给出了七种方法。第一种解法是作正方形的对角线，将直角三角形分割成两个三角形（图 7），分别计算这两个三角形的面积得

$$\frac{1}{2}ad+\frac{1}{2}bd=\frac{1}{2}ab$$

故得

$$d=\frac{ab}{a+b} \qquad (1)$$

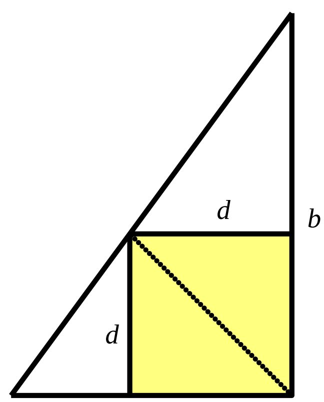


图 7 勾股容方问题解法一

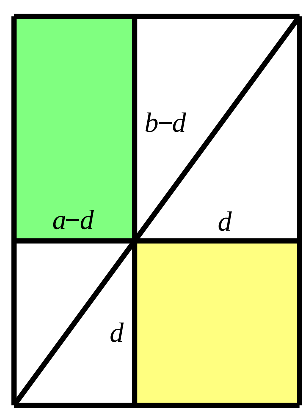


图 8 勾股容方问题解法二

第二种解法是将直角三角形补成矩形（图 8），得到内接正方形的面积与图中的长方形面积相等。分别计算长方形和正方形的面积，得

$$\left(a-d\right)\left(b-d\right)=d^2$$

整理得到（1）。

第三种解法是将直角三角形补成矩形（图 9），将每个直角三角形分割为三块，整个矩形由一对正方形、两对小直角三角形组成，分别计算其面积得

$$2d^2+\left(a-d\right)d+\left(b-d\right)d=ab$$

整理得（1）。

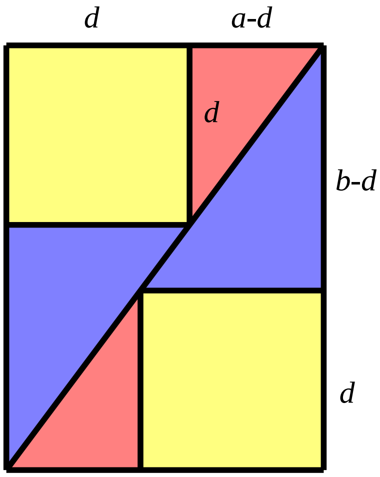


图 9 勾股容方问题解法三

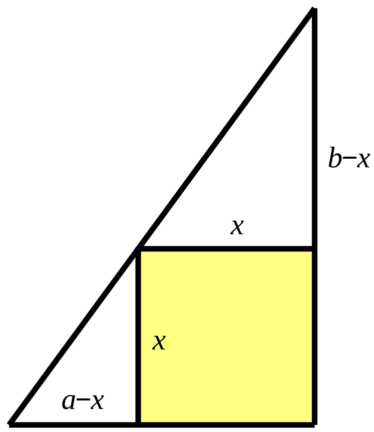


图 10 勾股容方问题解法四

第四种解法利用了三角形的相似性。如图 10，易知$\frac{a}{b}=\frac{x}{b-x}$，整理得（1）。

第五种解法是将直角三角形补成矩形，将一对正方形、两对直角三角形进行重组， 得到长为原直角三角形的两条直角边之和、宽为内接正方形边长的新长方形，如图 11 所示。分别计算面积，得

$$\left(a+b\right)d=ab$$

故得（1）。

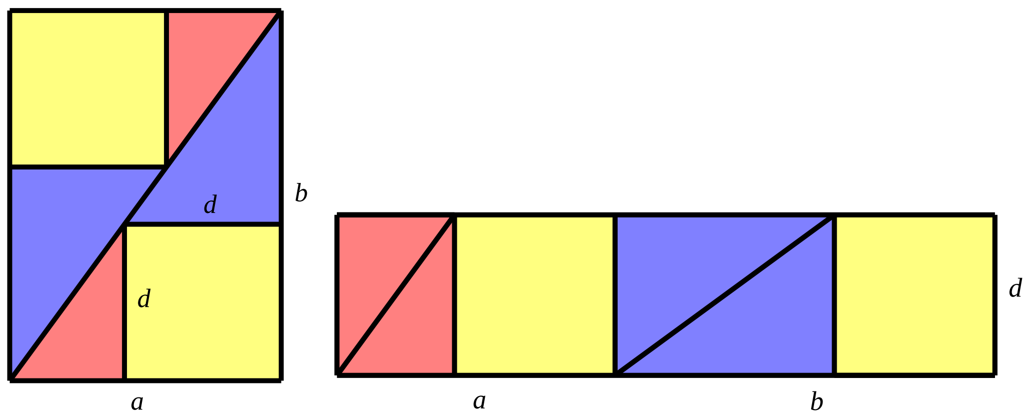


图 11 勾股容方问题解法五

第六种解法先利用相似三角形的性质，再将两个比例式相加。如图 12，设斜边上的两段长度分别为 n 和 m，则有

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{n}{m+n}+\frac{m}{m+n}=1,$$

故得（1）。

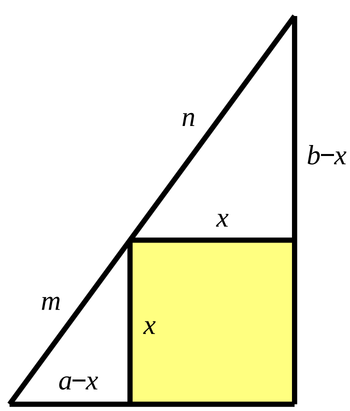


图 12 勾股容方问题解法六

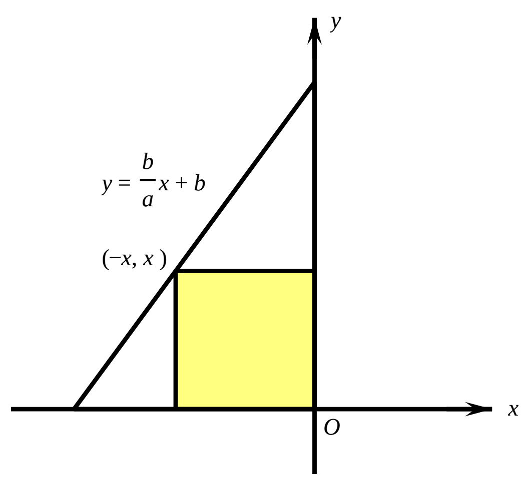


图 13 勾股容方问题解法七

第七种解法利用了直线方程。如图 13，以直角顶点为原点，以两条直角边所在直线为 x 轴和 y 轴，建立直角坐标系，则斜边所在直线方程为 $y=\frac{b}{a}x+b$。因位于斜边上的正方形顶点的坐标为 $\left(-x,x\right)$，故得

$$x=-\frac{b}{a}x+b$$

故得（1）。不过，学生似乎混淆了正、负坐标。

学生的补白既有历史上数学家的方法，也有历史上不曾有过的方法，大大超乎教师的预期。教师将课堂上的方法与历史上的方法进行对照，从而对学生的探究结果给出精彩的评价。

（5）走进先哲心灵，实现思想升华

文化多元性是历史所揭示的数学的重要特征之一。打开历史的画卷，不同时空数学家往往对同一个主题都做出贡献，勾股定理是人们最熟悉的例子。历史上，初等几何中的三角形内角和定理、线面垂直判定定理、面面平行判定定理、球体积公式，三角形中的正弦定理、余弦定理、正切定理、和角公式，解析几何中的椭圆方程、双曲线方程、点到直线距离公式，不同时空的数学家相继给出不同的证明或推导，精彩纷呈，蔚为大观。在有关主题的留白创造式教学中，历史上的很多方法都能够再现于课堂。或许有学生（甚至教师）会说：与其浪费时间留白，不如多做一套卷子。因此，教师需要让学生思考：为什么在同一个主题上会有那么多不同的方法呢？拒绝平庸、追求卓越、不断创新，这不正是数学背后所蕴含的理性精神吗？数学史为学生在课堂上和课堂外填补"超越之白"提供了丰富的机会。

在上文提到的"三角形内角和"、"三角形中位线"、"点到直线距离"、"正弦定理"等定理或公式以及"勾股容方"等历史问题的教学中，在学生完成补白，教师进行古今对照之后，教师可以让学生思考：为什么历史上数学家会采用不同的方法来证明同一个定理？不同证明方法运用了哪些数学思想？从不同的解法中可以获得什么启示？如果一位学生能够从历史上不同方法中领会数学家的创新精神、感悟数学历史的演进性、认识"倾听"对数学学习的重要性，那他便补好了一项"超越之白"!

3 结 语

数学史为课堂上的发现之白和问题之白提供了情境素材，为陈述之白、论证之白和方法之白提供了评价依据，为超越之白提供思想源泉。因此，教师在实施"留白创造式教学"时，应该充分了解、运用或借鉴数学史，设计符合学生认知基础和课堂教学目标的"留白"活动。另一方面，HPM 视角下的数学教学应该遵循"留白创造式教学"的理念，充分发挥数学文化的

育人价值，一个成功的 HPM 课例，其教学方式本质上就是“留白创造式”。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 版 2020 年修订）[S]. 北京：人民教育出版社, 2020.

[2] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M], 陈昌平等译. 上海: 上海教育出版社, 1995.

[3] 第斯多惠. 德国教师培养指南[M]. 袁一安译. 北京: 人民教育出版社, 1990.

[4] Arbuthnot, J. *An Essay on the Usefulness of Mathematical Learning* [M]. Oxford：Anth. Peisley, 1701.

[5] 穆勒. 论自由[M], 孟凡礼译. 上海: 上海三联书店, 2019.

[6] Einstein, A., Infeld, L. The Evolution of Physics[M]. Cambridge: The Cambridge University Press, 1938.

[7] 爱因斯坦. 爱因斯坦自述[M]. 北京: 新世界出版社, 2012.

[8] 米山国藏. 数学的精神、思想和方法[M], 毛正中, 吴素华译. 成都: 四川教育出版社, 1986.

[9] 王鑫, 汪晓勤, 邹佳晨. 高中数学教科书阅读材料“对数的发明”使用现状及启示[J]. 数学教学, 2018(8): 1-5, 29.

目 录

CONTENT

历史研究

美英早期三角学教科书中的同角三角函数关系

陈泓媛

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

1 引 言

三角学源于天文学，它是在研究天文问题的过程中发展起来的。常见的三角函数包括正弦函数、余弦函数和正切函数。在航海学、测绘学、工程学等领域中，还会用到余切函数、正割函数、余割函数、正矢函数、余矢函数等其他的三角函数。搞清楚这些三角函数之间的关系是三角学的基本问题之一。

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》和初中数学教科书并未对同角三角函数关系进行专门强调。苏科版数学九年级下册在“锐角三角函数”这一章的“小结与思考”中提出思考题：探索锐角 α 的正弦、余弦、正切之间的关系。沪教版数学九年级上册在“锐角的三角比”这一章中提到正切与余切间的倒数关系。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》要求学生“理解同角三角函数的基本关系式：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$”[1]。现行高中数学教科书通常在给出这两个基本关系式后通过例题的方式呈现它们的应用，例如，由一个三角函数值求其他三角函数值、证明一些三角恒等式等，而沪教版教科书多了 $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 和 $\tan x\cdot\cot x=1$ 这两个基本关系式。

在实际教学中，部分教师轻视同角三角函数关系式的意义和推导过程，将教学重点放在计算和例题训练上，数学公式的教学变得十分功利。在这样的学习过程中，学生对公式的学习只有形式上的简单记忆，缺乏对公式的本质理解。这与同角三角函数关系的研究历程背道而驰，也不利于培养学生的数学核心素养。鉴于此，本文聚焦同角三角函数关系，对 18 世纪初期至 20 世纪中叶出版的美英三角学教科书进行考察，尝试回答以下问题：同角三角函数关系及其推导方法有哪些？同角三角函数关系有何应用？

2 早期教科书的选取

本文以相关数据库中 1714-1955 年出版的 115 种美英早期三角学教科书为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，它们的出版时间和国别分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

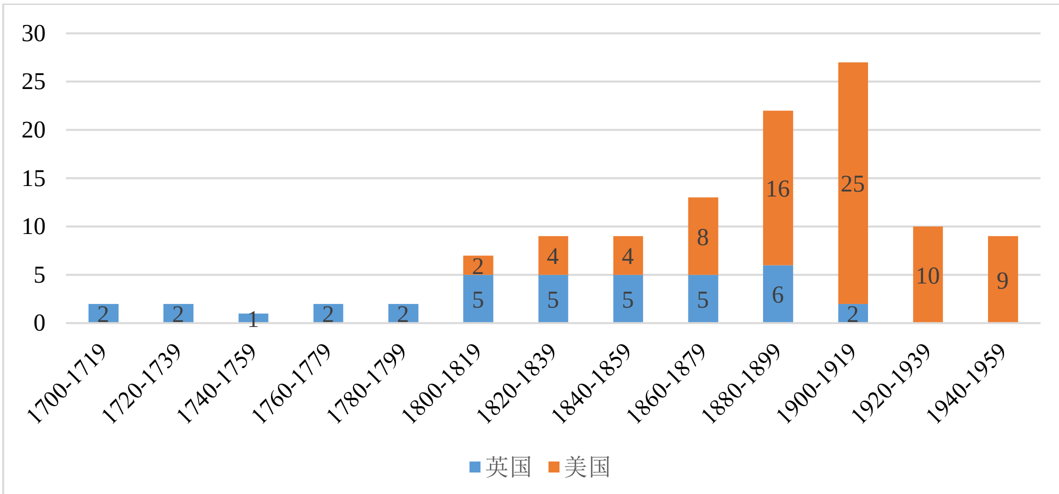


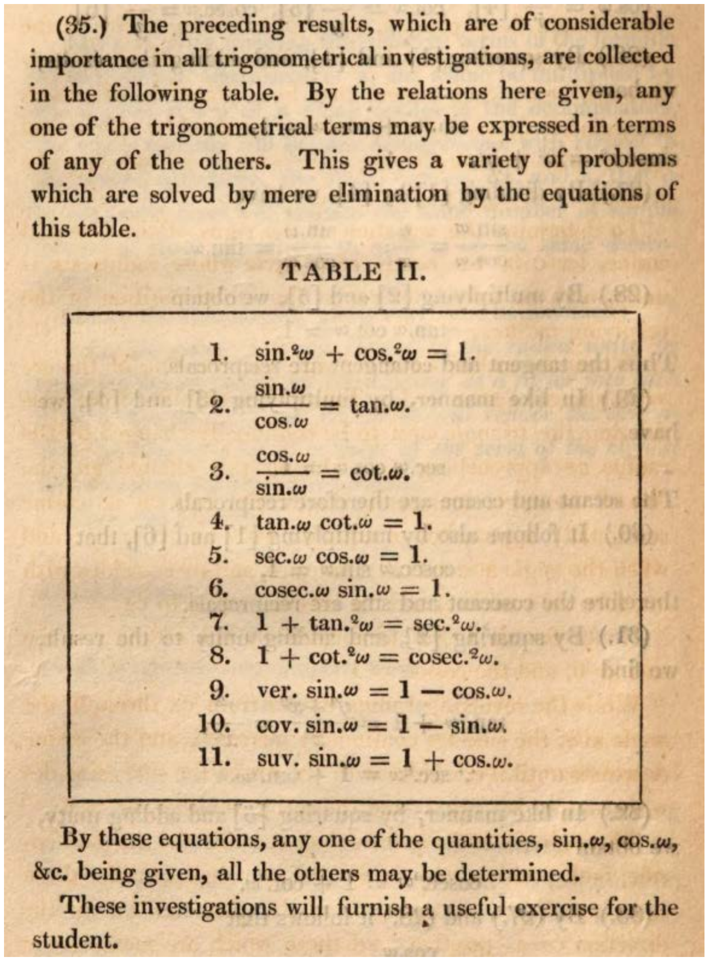
图 1 115 种美英早期三角学教科书的出版时间分布

为回答研究问题，本文按照年份依次检索上述 115 种美英早期三角学教科书，从中摘录出与同角三角函数关系相关的内容，经过整理，同角三角函数关系主要分布在“三角函数间的关系”“恒等式与方程”“三角恒等式”“三角关系”等章节，通过内容分析，总结同角三角函数的关系式、推导方法和应用。

3 同角三角函数关系的发展

随着三角学的研究和发展，早期教科书中同角三角函数关系的相关内容也在不断演变。18 世纪，许多教科书没有专门强调或研究同角三角函数关系，如 Wells（1714）在介绍各种三角函数的定义时对余弦和正矢的关系进行了注释[2]。19 世纪开始，同角三角函数关系逐渐被教科书编者所重视（图 2，采自文献[3]），并由锐角推广到任意角。

Hassler（1826）是英语世界最早引入三角比定义的教科书（图 3），编者将商数关系和倒数关系称为三角函数的“乘法表”。其中，商数关系共有 12 条之多[4]：



(35.) The preceding results, which are of considerable importance in all trigonometrical investigations, are collected in the following table. By the relations here given, any one of the trigonometrical terms may be expressed in terms of any of the others. This gives a variety of problems which are solved by mere elimination by the equations of this table.

TABLE II.

1.	$\sin.^2\omega + \cos.^2\omega = 1.$
2.	$\frac{\sin.\omega}{\cos.\omega} = \tan.\omega.$
3.	$\frac{\cos.\omega}{\sin.\omega} = \cot.\omega.$
4.	$\tan.\omega \cot.\omega = 1.$
5.	$\sec.\omega \cos.\omega = 1.$
6.	$\mathrm{cosec.}\omega \sin.\omega = 1.$
7.	$1 + \tan.^2\omega = \sec.^2\omega.$
8.	$1 + \cot.^2\omega = \mathrm{cosec.}^2\omega.$
9.	$\mathrm{ver.} \sin.\omega = 1 - \cos.\omega.$
10.	$\mathrm{cov.} \sin.\omega = 1 - \sin.\omega.$
11.	$\mathrm{suv.} \sin.\omega = 1 + \cos.\omega.$

By these equations, any one of the quantities, sin.ω, cos.ω, &c. being given, all the others may be determined.

These investigations will furnish a useful exercise for the student.

图 2 Lardner（1826）书影

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha，\quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha，$$

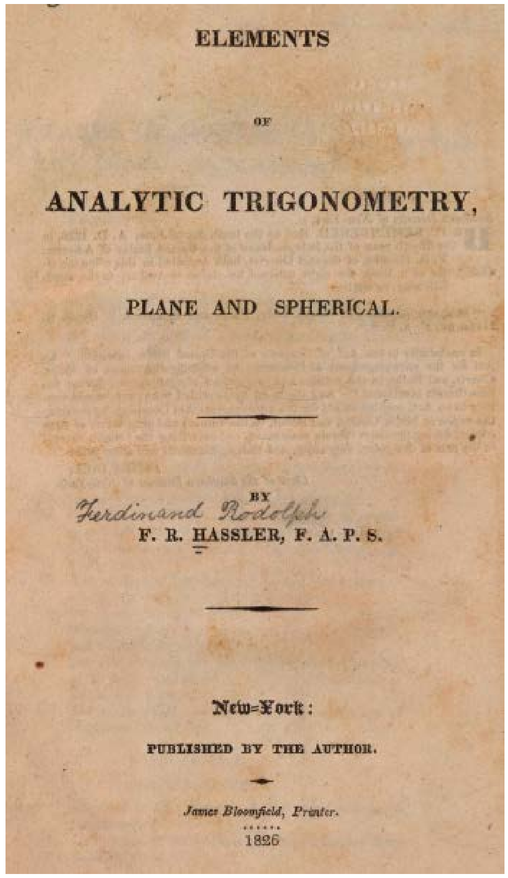
$$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=\cos\alpha，\quad \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}=\sec\alpha$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cot\alpha}=\sin\alpha，\quad \frac{\cot\alpha}{\cos\alpha}=\csc\alpha$$

$$\frac{\tan\alpha}{\sec\alpha}=\sin\alpha，\quad \frac{\sec\alpha}{\tan\alpha}=\csc\alpha，$$

$$\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha}=\cos\alpha，\quad \frac{\csc\alpha}{\cot\alpha}=\sec\alpha，$$

$$\frac{\sec\alpha}{\csc\alpha}=\tan\alpha，\quad \frac{\csc\alpha}{\sec\alpha}=\cot\alpha，$$


ELEMENTS

OF

ANALYTIC TRIGONOMETRY,

PLANE AND SPHERICAL.

BY

Ferdinand Rodolph

F. R. HASSLER, F. A. P. S.

New-York:

PUBLISHED BY THE AUTHOR.

James Bloomfield, Printer.

1826

图 3 Hassler（1826）扉页

由商数关系、倒数关系和平方关系，又导出了 21 个等式（其中 α为锐角）：

（S1） $\sin\alpha = \cos\alpha\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$，

（S2） $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$，

（S3） $\sin\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$，

（S4） $\sin\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha - 1}}$，

（S5） $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha}$，

（S6） $\sin\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}\sqrt{\sec^2\alpha - 1}$，

（S7） $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$， （C1） $\cos\alpha=\sin\alpha\sqrt{\csc^2\alpha-1}$，

（C2） $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$，

（C3） $\cos\alpha=\dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$，

（C4） $\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$，

（C5） $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$，

（C6） $\cos\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{\csc^2\alpha-1}$，

（C7） $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$，

（T1） $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$，

（T2） $\tan\alpha=\sin\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}$，

（T3） $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$，

（T4） $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\csc\alpha}$，

（T5） $\tan\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1+\tan^2\alpha}$，

（T6） $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$，

（T7） $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$。

经过百余年的演变，同角三角函数关系由 19 世纪初的杂乱无章的大量公式发展为成体系的八个基本关系式及其他恒等式。同角三角函数的八个基本关系式包括商数关系、倒数关系和平方关系，它们分别是：

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}，\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}，$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \text{。}$$

4 同角三角函数关系的推导

4.1 锐角情形

4.1.1 利用相似三角形和勾股定理

如图 4，设圆 O 的半径为 1，$\angle AOB$ 的正弦、正切、正割、余弦、余切和余割分别是 AC（或 OG），DB，OD，AG（或 OC），HF 和 OH。由于$\triangle DOB \backsim \triangle AOC$，所以 $\frac{DB}{OB} = \frac{AC}{OC}$，$\frac{OD}{OB} = \frac{OA}{OC}$，即

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

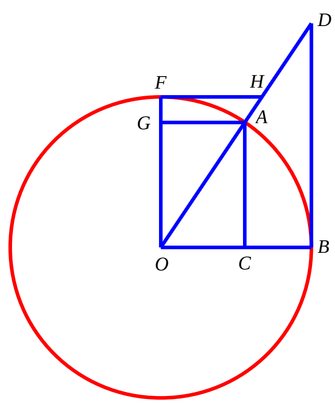


图 4 在单位圆中定义锐角三角函数

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{。}$$

由于$\triangle HOF \backsim \triangle AOG$，所以 $\frac{HF}{OF} = \frac{AG}{OG}$，$\frac{OH}{OF} = \frac{OA}{OG}$，即

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \text{。}$$

由于$\triangle HOF \backsim \triangle ODB$，所以 $\frac{HF}{OF} = \frac{OB}{DB}$，即 $\cot x = \frac{1}{\tan x}$。在$\triangle AOC$、$\triangle DOB$ 与$\triangle HOF$ 中，由勾

股定理，可得 $AC^2+OC^2=1$， $DB^2+OB^2=OD^2$， $OF^2+HF^2=OH^2$，即 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$， $\tan^2 x+1=\sec^2 x$， $1+\cot^2 x=\csc^2 x$。

4.1.2 利用三角比定义和勾股定理

如图 5，在直角三角形 ABC 中，设 $BC=a$， $AC=b$， $AB=c$， $\angle A$ 的六种三角比定义如下：

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c},\quad \cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c},\quad \tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b},$$
$$\cot A=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a},\quad \sec A=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b},\quad \csc A=\frac{AB}{BC}=\frac{c}{a}。$$

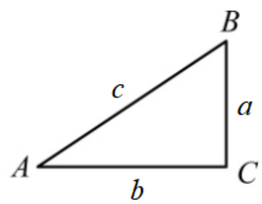


图 5 在直角三角形中定义锐角三角比

由简单的比值关系及以上三角比定义可知，

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{\sin A}{\cos A},$$

$$\cot A=\frac{b}{a}=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{\cos A}{\sin A},$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A},$$

$$\csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A},$$

$$\cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}。$$

在直角三角形 ABC 中，由勾股定理知 $c^2=a^2+b^2$，在等式两边分别除以 c^2， b^2 和 a^2，得

$$1=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2,$$

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2+1,$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

即

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1,$$

$$\tan^2 A+1=\sec^2 A,$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A。$$

4.2 任意角情形

4.2.1 利用三角函数定义

如图 6，在任意角 α 的终边上任取异于原点的一点 P，设其坐标为(x，y)，并令 $|OP|=r$，则有 $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$。角 α 的六种三角函数定义如下：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}，\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}，\quad \tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq 0)，$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}(y\neq 0)，\quad \sec\alpha=\frac{r}{x}(x\neq 0)，\quad \csc\alpha=\frac{r}{y}(y\neq 0)。$$

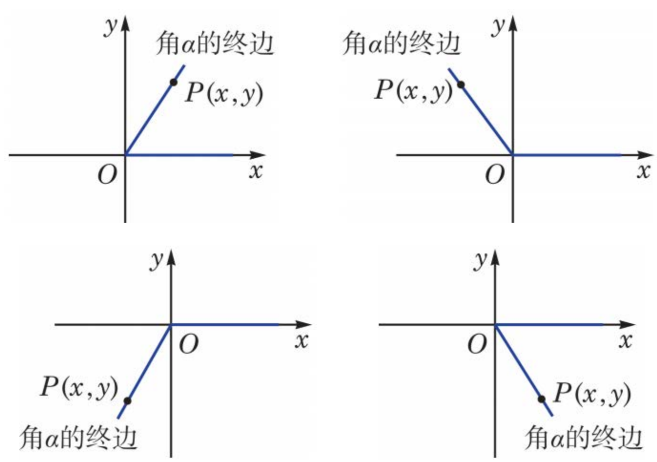


图 6 任意角三角函数的定义

由简单的比值关系及以上任意角三角函数定义可知，

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{1}{\frac{x}{r}}=\frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{1}{\frac{y}{r}}=\frac{1}{\sin\alpha},$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}=\frac{1}{\frac{y}{x}}=\frac{1}{\tan\alpha}。$$

由 $x^2+y^2=r^2$，在等式两边分别除以 r^2， x^2 和 y^2，得

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1,$$

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{r}{x}\right)^2,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+1=\left(\frac{r}{y}\right)^2,$$

即

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha,$$

$$\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha。$$

4.2.2 利用其他同角三角函数关系

由于同角三角函数的八个基本关系式之间存在一定联系，所以可以利用其中一些关系式推

出剩余关系式。例如，$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 和 $\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$ 这三个公式已知其中任意两个都可以推出第三个；在已知 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 和 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 的情况下，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 与 $\tan^2 x+1=\sec^2 x$ 之间可以互推；在已知 $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 和 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 的情况下，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 与 $1+\cot^2 x=\csc^2 x$ 之间可以互推。

5 同角三角函数关系的应用

在美英早期三角学教科书中，同角三角函数关系的应用主要有两类，一个是由已知三角函数值求其他三角函数值，另一个是证明三角恒等式或化简三角表达式。

5.1 由已知三角函数值求其他三角函数值

19 世纪后期以来的许多教科书都含有“用已知三角函数表示其他任一三角函数”或“用其他五个三角函数表示每个三角函数”，根据同角三角函数的基本关系式计算三角函数之间的两两关系，结果如图 7 所示[5]，其中正负号要根据角的终边所在的象限来确定。

	sine	cosine	tangent	cotangent	secant	cosecant
$\sin\theta$	$\sin\theta$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\dfrac{\tan\theta}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\dfrac{1}{\csc\theta}$
$\cos\theta$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos\theta$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\dfrac{\cot\theta}{\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\sec\theta}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan\theta$	$\dfrac{\sin\theta}{\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\dfrac{1}{\cot\theta}$	$\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot\theta$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\dfrac{\cos\theta}{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\tan\theta}$	$\cot\theta$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\pm\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec\theta$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\dfrac{1}{\cos\theta}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec\theta$	$\dfrac{\csc\theta}{\pm\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc\theta$	$\dfrac{1}{\sin\theta}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\dfrac{\sec\theta}{\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc\theta$

图 7 六个同角三角函数之间的两两关系

利用上表，已知某个三角函数的值，可以求出其他三角函数的值。例如：已知 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，则其他三角函数的值见表 1[6]。

表 1 已知正弦值，求其他三角函数值

三角函数	α为第三象限角	α为第四象限角
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\sec\alpha$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\csc\alpha$	-2	-2

5.2 证明三角恒等式

19 世纪以来的美英三角学教科书中的例题和习题蕴含了大量同角三角函数的恒等式，这些等式均可通过八个基本关系式和简单的有理式运算得到。教科书中还给出了证明恒等式的几种一般方法，在面对待证的三角恒等式需要选取合适的方法进行证明。

第一种方法是从等式的一边开始证明其等于另一边，通常从形式较为复杂的一边开始。例如，要证明恒等式$(\tan^2 x+1)\cot^2 x=\csc^2 x$，我们从较复杂的左式入手

$$\begin{aligned}(\tan^2 x+1)\cot^2 x&=\tan^2 x\cdot\cot^2 x+\cot^2 x\\&=(\tan x\cdot\cot x)^2+\cot^2 x\\&=1+\cot^2 x\\&=\csc^2 x\end{aligned}\text{。}$$

类似的三角恒等式还有$(1-\cos^2 x)\sec^2 x=\tan^2 x$，$(\sec^2 x-1)\csc^2 x=\sec^2 x$，$(\csc^2 x-1)\sin^2 x=\cos^2 x$等。

第二种方法是分别证明等式两边等于同一个式子。例如，要证明恒等式$\cot x+\tan x=\cot x\cdot\sec^2 x$，我们可以将左右两式化为相同的表达式

$$\cot x+\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x},$$

$$\cot x\cdot\sec^2 x=\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x},$$

证得$\cot x+\tan x=\cot x\cdot\sec^2 x$。类似地，可用该方法证明三角恒等式$\sec x-\cos x=\cos x\cdot\tan^2 x$，

$\dfrac{1}{1+\cos x}+\dfrac{1}{1-\cos x}=2(1+\cot^2 x)$ 等。

第三种方法是利用恒等式的“左式减右式为零”进行证明。例如，要证明恒等式 $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$，我们用左式减右式，得

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1+\cos x}-\frac{1-\cos x}{\sin x}&=\frac{\sin^2 x-(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x}\\&=\frac{\sin^2 x-(1-\cos^2 x)}{(1+\cos x)\sin x}\\&=\frac{\sin^2 x-\sin^2 x}{(1+\cos x)\sin x}\\&=0\end{aligned},$$

所以原式成立。类似的三角恒等式还有

$$\frac{\sec x+1}{\tan x}=\frac{\tan x}{\sec x-1},$$

$$\frac{\csc x+1}{\cot x}=\frac{\cot x}{\csc x-1},$$

$$\frac{1+\csc x}{\csc x-1}=\frac{1+\sin x}{1-\sin x},$$

$$\frac{1+\cot x}{\csc x}=\frac{1+\tan x}{\sec x},$$

$$\frac{2\tan x}{\tan^2 x-1}=\frac{2}{\tan x-\cot x},$$

等。

部分三角恒等式除了可以通过代数方法推导外，还可以通过几何方法证明。Keith（1810）分别利用射影定理和切割线定理证明了

$$\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

和

$$\frac{\sec x+1}{\tan x}=\frac{\tan x}{\sec x-1}。$$

如图 8，$\triangle AMB$ 是直角三角形，由射影定理可知 $AC^2=MC\cdot BC$，即 $\dfrac{MC}{AC}=\dfrac{AC}{BC}$，而 $MC=MO+OC=1+\cos x$，$BC=OB-OC=1-\cos x$，故得

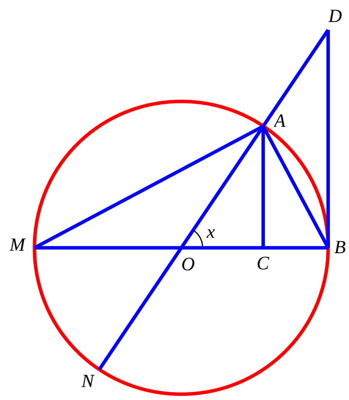


图 8 三角恒等式之几何证明

$$\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1-\cos x}。$$

由切割线定理可知 $DA\cdot DN=DB^2$，即 $\frac{DN}{DB}=\frac{DB}{DA}$，而 $DN=DO+ON=\sec x+1$，$DA=DO-OA=\sec x-1$，从而得[4]

$$\frac{\sec x+1}{\tan x}=\frac{\tan x}{\sec x-1}。$$

5.3 解三角方程

三角方程可分为以下几种情形。

第一种情形是关于某一种三角函数的方程，如 $2\sin^2 x-\sin x-1=0$，$\sec^2 x-3\sec x+2=0$ 等等，需求出三角函数的值，再求角；

第二种情形是方程中含有两种或两种以上三角函数，如 $\tan^2 x+3\sec x+3=0$，$\sin^2 x\sec x-2\sec x-\cos x=3\tan x$ 等等，需利用同角三角函数关系式，将方程化为关于某一种三角函数的方程。

6 结语

在美英早期三角学教科书中，同角三角函数关系经历了从无到有、从零散到系统、从杂乱到有序的发展过程，最终形成了八个基本关系式。早期教科书中关于同角三角函数关系的内容对当今教学也有一定的启发意义。

其一，重视基本公式，建立内在联系。19 世纪初期的一些三角学教科书包含了大量同角

三角函数关系式[7-9]，却没有把最根本的公式精简出来，到 19 世纪中期才逐渐形成了“基本公式”“基本恒等式”等说法。若一下子面对各种关系式，学生必然缺乏学习动机。因此要让学生明白研究同角三角函数的基本关系式的原因所在，即这两个基本关系式是研究其他两两关系时最基本的关系，同角三角函数的许多其他关系式都能由基本关系式推出，这其中蕴含了公理化思想[10]。有了这样合理的逻辑支撑，学生对同角三角函数的基本关系式的理解就更加深刻了。

其二，感悟数形结合，体会数学魅力。研究同角三角函数关系离不开图形的帮助，尤其是基本关系式中的平方关系。对同角三角函数的平方关系进行变形后可以得到一些分式恒等式或比例式，这些三角恒等式可以通过构造与圆相关的相似三角形来证明，可以引导学生思考和欣赏这一巧妙的做法，感受数学的魅力和有趣之处。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 22.

[2] Wells, E. *The Young Gentleman's Trigonometry, Mechanicks, & Opticks* [M]. London: James Kuapton, 1714: 5.

[3] Lardner, D. *An Analytic Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*. London: John Taylor, 1826.

[4] Hassler, F. R. *Elements of Analytic Trigonometry, Plane & Spherical*. New York: James Bloomfield, 1826: 15-20.

[5] Carson, A. B. *Plane Trigonometry Made Plain* [M]. Chicago: American Technical Society, 1943: 201.

[6] Perlin, I. E. *Trigonometry*. Scranton: International Textbook Company, 1955: 42-44.

[7] Keith, T. *An Introduction to the Theory & Practice of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. London: T. Davison, 1810: 96-100.

[8] Bonnycastle, J. *A Treatise on Plane* & *Spherical Trigonometry* [M]. London: Cadell & Davies, et al., 1818: 295-297.

[9] Lardner, D. *An Analytic Treatise on Plane & Spherical Trigonometry* [M]. London: John Taylor, 1826: 16-20.

[9] 丁益民. 公式教学应重视对公式的本质理解——以“同角三角函数关系”为例[J]. 中小学数学(高中版), 2018(04): 40-42.

美英早期三角学教科书中的和差化积公式

陈雨晴

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

和差化积公式是将三角函数和与差转换为积的公式，常用于简化三角计算，是三角恒等变换的重要内容。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》要求学生能够推导和差化积公式，但是不需要记忆[1]。经历推导过程后，学生将提高对知识的熟悉程度和理解水平，从而合理地运用公式。

数学学习中，在考虑数学内在的逻辑力量的同时，考虑数学历史发展的文化力量，将有助于学习者清楚知识的形成过程和最终的形成结果[2]。对于公式的推导，法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）在历史上率先利用几何方法证明 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$。而现行的高中数学教科书多从积化和差公式出发，利用变量代换的换元思想，推导出和差化积公式，这种处理遵循了知识的逻辑序，却将公式置于抽象的认知起点，可能导致学生囿于形式化的符号变换而无法体会公式背后的深刻内涵。由于学生的认知障碍往往是数学史上数学家曾遇到的困难，因此和差化积公式在不同时期的证明中所蕴含的数学思想，是公式学习的核心，教师理应在教学中予以呈现。

通过对早期教科书进行梳理，找到和差化积公式在不同时期的证明方法和证明特点，发掘公式证明的演变过程，可以为今日的教科书编写和教学实践提供素材。鉴于此，本文拟聚焦和差化积公式，对美英早期三角学教科书进行考察，试图回答以下问题：和差化积公式的证明方法有哪些？常见推论有哪些？这些证明方法和推论对今日教学有何启示？

2 早期教科书的选取

本文从有关数据库选取 1810-1955 年出版的 110 种美英早期三角学教科书为研究对象，对于同一作者再版的教科书，若无显著变化，则视为同一本教科书，选取出版年份较早的一本，

若变化显著，则视为不同的教科书。以 20 年为一个时间段划分，教科书的分布如图 1 所示。

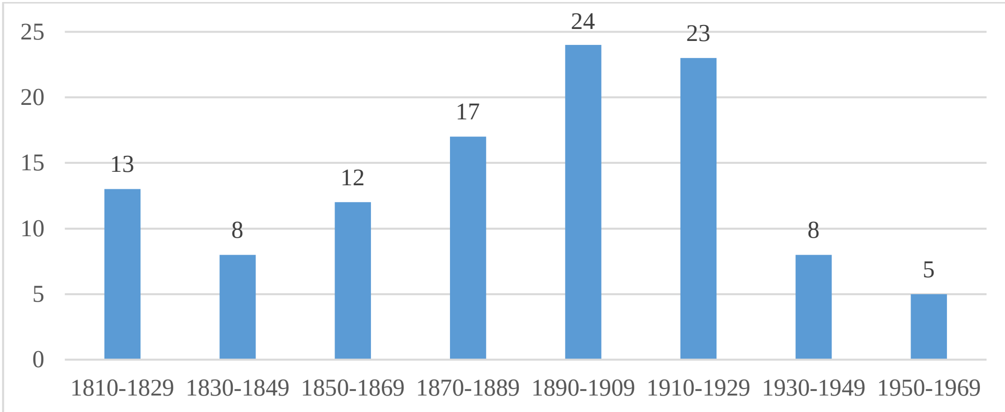


图 1 110 种美英早期三角学教科书的出版时间分布

为了回答研究问题 1 和 2，本文按照年份依次检索了上述 110 种美英早期三角学教科书，从中摘录出与和差化积公式相关的所有内容，经整理，和差化积公式主要分布在“三角学定理”“三角函数表”“三角恒等式”等章节，通过文本分析，总结出和差化积公式的证明方法，并将 110 种教科书的相应内容划分到不同类别。最后，根据不同证明方法的思想和特点以及相关的文献回答研究问题 3。

3 和差化积公式的证明

早期教科书中和差化积公式名称的演变能够体现其不断完善的过程，反映了数学家对公式的认识逐渐深入。最初，和差化积公式并没有专门的名称，仅作为和差角公式与积化和差公式的推论出现；接着，有教科书称之为“正余弦和差公式”或“和差公式”[3-4]，名称指向运算的目的——计算正余弦的和差；最后，有教科书将其命名为“和化积公式”或“因式分解公式”[5-6]，名称转而指向运算的结果——将正余弦的和差转换为乘积的形式。

上述名称的微言要义包含了教科书编者对公式的研究动机，而三角函数是圆的性质的解析表达，其“母体”是平面几何，就三角学教学而言，应该有几何和代数的视角做铺垫[7]。所考察的教科书采用了几何与代数两种方法对和差化积公式进行证明，其中，14 种教科书采用了几何方法，108 种教科书采用了代数方法，12 种教科书同时采用了两种方法。此外，还有 2 种教科书采用了兼具几何与代数取向的证明方法。

3.1 几何取向的证明

3.1.1 利用相似三角形

Carson（1942）指出，相似三角形理论是三角函数定义的基础，三角学中用到的几何方法大多涉及相似三角形的性质[8]。早期，正余弦由圆中的线段定义，利用三角形相似产生线段的各种比例关系可谓水到渠成。Lewis（1860）在单位圆中利用三角形相似证明了和差角公式，并且以和差角公式的加减运算为起点证明了和差化积公式[9]，具体的解法如下[1]：

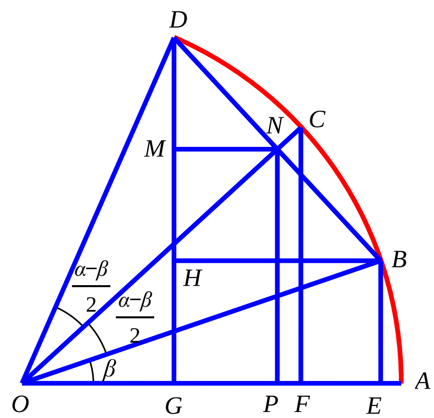


图 2 相似三角形解法

如图 2 所示，在单位圆 O 中，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$，$\angle AOD=\alpha$，$\angle AOB=\beta$，过圆心 O 作 BD 的垂线，垂足为 N，交圆于点 C。分别过 B、C、D 点作半径 OA 的垂线，垂足为 E、F、G，过点 B 作 $BH\perp DG$，过点 N 作 $NP\perp AO$，$NM\perp DG$，易知 $BN=DN$，$HM=DM$。于是有

$$CF=\sin\frac{\alpha+\beta}{2},\quad OF=\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\quad ON=\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\quad DN=\sin\frac{\alpha-\beta}{2}。$$

由 $\triangle OCF\backsim\triangle ONP\backsim\triangle DNM$，得

$$CF:OC=NP:ON=NM:DN,\quad OF:OC=OP:ON=DM:DN,$$

得

$$NP=ON\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$OP=ON\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

[1] 原文中的正余弦指的是“弧的正余弦”，为便于阅读，此处采用“角的正余弦”说法。

$$NM = DN\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$DM = DN\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}。$$

因 $BN = DN$，故 $EP = PG = NM$。由 $DG+BE=2NP$，$DG-BE=2DM$，$OG+OE=2OP$，$OE-OG=2NM$ 可得

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (1)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (2)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (3)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad (4)$$

3.1.2 利用正弦定理

相似三角形描述的是两个及以上的三角形的关系，而正弦定理则描述的是一个三角形中边和角的关系，也是产生比例的有力工具。Robinson（1873）利用正弦定理证明了和差化积公式[10]，具体过程如下[2]：

如图 3 所示，在以 C 为圆心，AK 为直径，CA 为半径的单位圆上取 B、D、G 三点，满足 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AG}$，连结 BG，交 AK 于 E，过点 D 作 BG 的垂线，交 BG 于 N，交单位圆于 F，连结 BD、BF、FG、DG，分别过点 C、D 作 FD、AK 的垂线，垂足为 M，H。

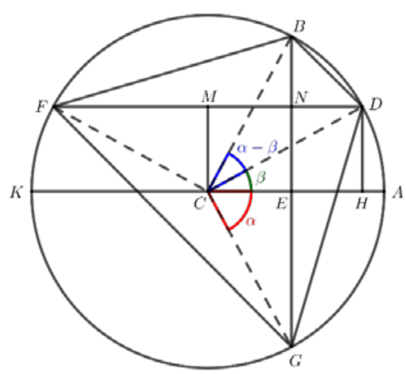


图 3 正弦定理解法

[2] 此处同 3.1.1 节，采取“角的正余弦”说法，原文并未连结 BC、CD、CF、CG。

设 $\angle ACB=\alpha$， $\angle ACD=\beta$，则 $\angle BCD=\alpha-\beta$， $\angle DCG=\alpha+\beta$，于是有

$$BE=EG=\sin\alpha，\quad EN=DH=\sin\beta，\quad FM=MD=CH=\cos\beta，\quad MN=CE=\cos\alpha。$$

由此可以得到

$$GN=\sin\alpha+\sin\beta，\quad BN=\sin\alpha-\sin\beta，\quad FN=\cos\alpha+\cos\beta，\quad ND=\cos\beta-\cos\alpha。$$

易知 $DG=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$， $BF=2\sin\dfrac{\pi-\alpha-\beta}{2}=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$， $\cos\angle NGD=\cos\dfrac{\angle BCD}{2}=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\sin\angle NGD=\sin\dfrac{\angle BCD}{2}=\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$。

在 $\triangle GND$ 中， $\sin\angle NDG=\cos\angle NGD$， $\sin\angle GND=\sin 90^\circ=1$,根据正弦定理，有

$$\sin\angle GND:DG=\sin\angle NDG:GN，$$

因此

$$1:2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}:(\sin\alpha+\sin\beta)，$$

将比例化为乘积的形式，可以得到（1）。同理，在 $\triangle FNB$ 、 $\triangle GND$ 中，由正弦定理表示不同边角之间的关系，可以推导出（2）-（4）。

同样利用图 3，Wood（1887）证明了（2）和（4）[11]，但是他是从正余弦的比值定义出发，如：

$$\sin\angle NGD=\sin\frac{\angle BCD}{2}=\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{ND}{DG}=\frac{EH}{DG}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}},$$

即为（4）。

3.1.3 利用线段和差

在平面几何中，线段之间除了可以产生比例，还可以进行加减，利用线段和差证明三角公式也是常见的几何方法。Lock（1885）利用线段的和差证明了和差化积公式[12]。

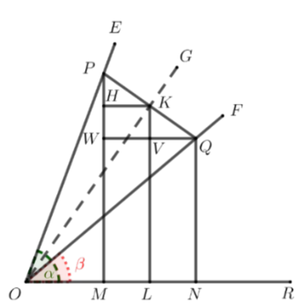


图 4 利用线段和差解法 1

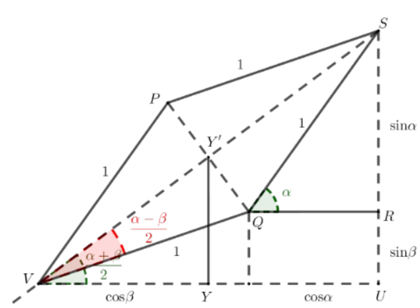


图 5 利用线段和差解法 2

在图 4 中，令 $\angle ROE=\alpha$，$\angle ROF=\beta$，则 $\angle FOE=\alpha-\beta$。OG 平分 $\angle EOF$，因此 $\angle FOG=\frac{\alpha-\beta}{2}$，$\angle ROG=\angle ROF+\angle FOG=\frac{\alpha+\beta}{2}$。在 OE 上任取一点 P，在 OF 上取点 Q，满足 $OP=OQ$，连结 PQ，交 OG 于 K，则 $OG\perp PQ$，$PK=KQ$。过点 P、K、Q 作 OR 的垂线，垂足分别为 M、L、N，则 $PM/\!/KL/\!/QN$，过点 K、Q 作 PM 的垂线，垂足分别为 H、W，QW 交 KL 于 V，则 $KH/\!/QW$，又因为 K 为 PQ 中点，所以 $PH=HW$。由 $PM/\!/KL/\!/QN$，K 为 PQ 中点，可得 $WV=VQ=ML=LN$，因此

$$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{MP}{OP}+\frac{NQ}{OQ}=\frac{MP+NQ}{OQ}=\frac{2LK}{OQ}=2\frac{LK}{OK}\cdot\frac{OK}{OQ}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

按照同样的思路，可以证明（2）-（4）。Crockett（1896）则将 OP、OQ 的长度设为 1，那么正余弦便由线段表示[13]，更凸显了构造线段和差的思想。Blakslee（1888）则是由图 5 证明了（1）[14]，其本质也是线段加减，但是与图 4 的解法相比，运算的结果有了几何表征，如 $\sin\alpha+\sin\beta$ 即为线段 SU。后来数学家们将角的范围进行推广，利用线段和差证明和差化积公式的做法同样适用于推广后的情形。

3.2 代数取向的证明

3.2.1 利用积化和差公式

积化和差公式与和差化积公式相互等价，利用积化和差公式证明和差化积公式是所考察的教科书中常见的做法，涉及到了方程的思想和换元的方法。积化和差公式指的是

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]\tag{5}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]\tag{6}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]\tag{7}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\tag{8}$$

令 $\alpha+\beta=\alpha'$，$\alpha-\beta=\beta'$，可得 $\alpha=\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')$，$\beta=\frac{1}{2}(\alpha'-\beta')$，代入（5）-（8），则可推导出（1）-（4）。

3.2.2 利用和差角公式

在所考察的教科书中，利用和差角公式推导和差化积公式最常见的做法是令 $\alpha=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$，$\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$，然后根据和差角公式得到由 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$、$\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 表示的 $\sin\alpha$、$\sin\beta$、$\cos\alpha$、$\cos\beta$，进而直接加减正余弦便可得到（1）-（4），这种变量变换的方法并非从天而降，而是暗含了“和差术”的思想，同时从几何上看，$\alpha=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$，$\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 的表示方式刻画了 α 和 β 在数轴上关于中点 $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ 的对称性。因此无论是代数上利用“和差术”的变换技巧，还是几何上关于中点的位置对称，都能够解释 $\alpha=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$，$\beta=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ 这种表示的合理性。此外，也有数学家直接从和差角公式出发，利用 $\sin(\alpha\pm\beta)$、$\cos(\alpha\mp\beta)$ 相乘得到和差化积公式[15]，这种处理体现了和差角公式作为三角学中基本公式的重要地位。

3.2.3 利用三角函数的复数表示

进入 19 世纪后期，多种教科书提到了利用三角函数的复数表示来证明三角公式。比如 Blakslee（1888）指出可以利用复数来证明（1）和（3）[14]，他在教科书中提到可以由图 5 来表征复数，从而利用复数的几何意义得到公式，但未给出详细证明。从现代数学的观点看，编者的证明思路涉及复平面上用点和向量表示复数。为了使公式推导过程更严谨，同时便于读者理解，用现在的数学语言和表示方法将完整的证明过程补充如下[3]：

令 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$，$z_2=\cos\beta+i\sin\beta$，则 z_1、z_2 在图 6 复平面中对应的点分别为 P、Q，将 z_1、z_2 相加，则所得结果 $z_3=(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)$ 在图 6 中对应的点为 $Z(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta)$，而由 $\overrightarrow{VP}+\overrightarrow{VQ}=\overrightarrow{VS}$，可得 z_3 在图 6 中对应点 S，因此点 $Z(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta)$ 和点 S 的横纵坐标分别相等。点 $Z(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta)$ 的坐

[3] 原文并未建立复平面，本文为方便读者理解，采用了复数的坐标表示。

标为$\left(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta\right)$，点 S 的横坐标$x_S=VY+YU$，而由于$VP=PS=SQ=QV=1$，因此Y'是VS的中点，从而$VY=YU$，所以$x_S=2VY$，由

$$VY=VY'\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=VQ\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

可得

$$x_S=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

同样根据Y'是VS的中点，可得点S的纵坐标$y_S=2YY'$，由

$$YY'=VY'\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=VQ\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

可得

$$y_S=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

因此点 S 的坐标为$\left(2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\ 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$，从而点$Z\left(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta\right)$的横坐标为

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

点$Z\left(\cos\alpha+\cos\beta,\ \sin\alpha+\sin\beta\right)$的纵坐标为

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}。$$

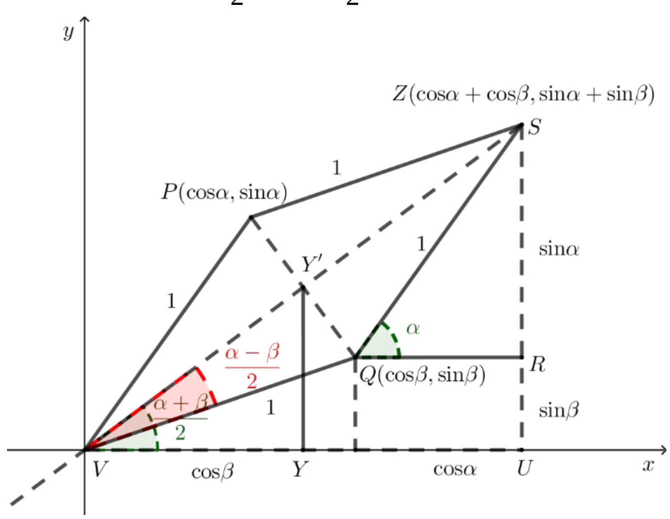


图 6 利用三角函数的复数表示解法

3.3 投影法——架设几何与代数取向的桥梁

投影在 19 世纪的教科书中是一个几何概念，如点或线段在直线上的投影也是点或线段，其本质是点、线段与一条直线上点、线段的对应关系。19 世纪末期有数学家利用投影证明和差化积公式，如 Pendlebury（1895）根据投影的几何意义，给出如下证明[16]：

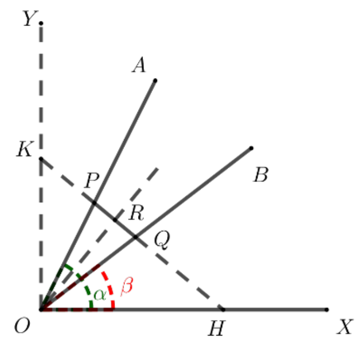


图 7 投影法

在图 7 中，设 $\angle XOA=\alpha$， $\angle XOB=\beta$，在 OA、OB 上任取两点 P、Q，满足 $OP = OQ$，连结 PQ，延长 PQ 交 OX 于点 H，交 OY 于点 K。取 PQ 的中点 R，连结 OR，则 OR 平分 $\angle QOP$，$OR \perp PQ$，由此 $\angle ROP=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$， $\angle XOR=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$， $\angle QHO=90^{\circ}-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$， $\angle QKO=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

在直线 OX 上投影（project），可以推出 $\mathrm{Proj}_{OX}OQ=\mathrm{Proj}_{OX}OR+\mathrm{Proj}_{OX}RQ$ ，即

$$\mathrm{Proj}_{OX}OQ-\mathrm{Proj}_{OX}RQ=\mathrm{Proj}_{OX}OR,$$

而

$$\mathrm{Proj}_{OX}OP+\mathrm{Proj}_{OX}PR=\mathrm{Proj}_{OX}OR,$$

两式相加，可得

$$\mathrm{Proj}_{OX}OP+\mathrm{Proj}_{OX}OQ=2\times\mathrm{Proj}_{OX}OR,$$

因此

$$OP\cos\angle XOP+OQ\cos\angle XOQ=2OR\cos\angle ROH,$$

即

$$OP\cos\alpha+OQ\cos\beta=2OR\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

可以推出（3）。同理，由

$$\mathrm{Proj}_{OX}OQ = \mathrm{Proj}_{OX}OP + \mathrm{Proj}_{OX}PQ,$$

可以推出（4）。

在直线 OY 上投影，可以推出

$$\mathrm{Proj}_{OY}OP = \mathrm{Proj}_{OY}OR + \mathrm{Proj}_{OY}RP,$$

$$\mathrm{Proj}_{OY}OP = \mathrm{Proj}_{OY}OQ + \mathrm{Proj}_{OY}QP,$$

由这两个式子可以推出（1）和（2）。

20 世纪后，向量投影的概念进入教科书，其结果为向量，从高等数学的观点看，向量投影实质为高维空间到低维空间的线性变换，而投影应用于向量，便有了明显的代数特征。多本教科书指出可以利用向量来证明三角公式，若我们利用向量投影证明和差化积公式，根据命题“两个向量之和的投影等于这两个向量的投影之和”，可得

$$\mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{OQ} = \mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{OR} + \mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{RQ},$$

即

$$\mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{OR} = \mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{OQ} - \mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{RQ},$$

而由于

$$\mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{OR} = \mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{OP} + \mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{PR},$$

两式相加，可得

$$2\times\mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{OR} = \mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{OP} + \mathrm{Proj}_{OX}\overrightarrow{OQ},$$

此即

$$OP\cos\angle XOP + OQ\cos\angle XOQ = 2OR\cos\angle ROH,$$

可推导（3），同理，利用向量投影可以推导其余的和差化积公式。

以向量为载体，投影的含义更加丰富，由几何线段的加减延伸至向量的运算，意味着投影不仅有了几何表征，还有了代数运算的特点，使得借助投影推导和差化积公式的方法脱离角的范围的限制，彰显了投影法的一般性。

4 和差化积公式的常见推论

通过对 110 种美英早期三角学教科书进行梳理，总结出如下两种常见推论。

4.1 推导正切定理

正切定理常用于解三角形，在考察的教科书中，有编者认为在利用对数解三角形的运算中，正切定理比正余弦定理更方便。正切定理的证明并不复杂，利用正弦定理及和差化积公式可以给出一个简短漂亮的证明。在$\triangle ABC$中，a、b分别表示$\angle A$、$\angle B$的对边，则

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}},$$

证明过程中和差化积公式起到了使分子分母化简的关键作用。

4.2 推导三个角的正余弦和差化积公式

对于任意三个角，其正余弦的和差能得到什么结果呢？在所考察的教科书中，由和差化积公式得到了如下推论：

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{9}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \tag{10}$$

下面将给出（9）的证明，由

$$\sin\alpha-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=-2\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2},$$

$$\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

可得

$$\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)\\&=2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-2\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\\&=2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\end{aligned}$$

$$=4\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\text{。}$$

（10）的证明方法同（9），本文不再赘述。特别地，若α、β、γ为三角形的三个内角，则$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，代入（9）和（10），即得

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\text{。}$$

5 结论与启示

110 种美英早期三角学教科书对和差化积公式的证明视角分为几何和代数，此外还有兼具几何与代数视角的投影法。代数方法抽象，但是证明严谨、过程简洁，几何方法具象，但是证明过程往往限定了条件，公式在不同条件下的合理性需要进一步讨论，而投影法从最初的几何视角拓展至向量视角，兼具几何表征的形象和代数运算的简洁，19 世纪末期起常被不同的教科书编者提起。和差化积公式在早期三角学教科书中的多种推导方法对今日教学有诸多启示。

其一，加强方法指导，渗透多元表征观点。早期教科书对和差化积公式的推导包含几何与代数方法，教师在教学中应当注重公式形式背后的几何渊源，为学生搭建数形结合的桥梁。例如，利用线段和差方法中构造的图形，既在几何上为公式证明提供了模型，又在代数上为利用三角函数的复数表示证明和差化积公式提供了几何表征，可以作为教学中提升学生数形结合能力的切入点。此外，教师还要有意识地为学生提供知识的多元表征，如符号表征的（1）在利用线段和差的方法中可由线段表示，从而为抽象的符号找到图形表征，建立几何直观。

其二，注重知识迁移，培养学生数学直觉。从形式上看，和差化积公式实现了三角函数从和、差到积的转化，这种和积转换思想已经渗透在对数的加法、因式分解等内容的学习中，公式的曾用名“因式分解公式”以及公式的作用之一“便于利用对数进行计算”也暗示着三角函数和差与积之间的某种联系[5]。教师在教学中可以让学生根据对数加法和因式分解涉及的和积转换思想，猜想三角函数和差运算结果的形式，潜移默化地培养学生的数学直觉。

其三，关注知识关联，设计探究应用课程。为了进一步凸显向量在平面几何中的应用性，现行人教 A 版教科书将正弦定理和余弦定理放在平面向量的应用一节，而早期三角学教科书启示我们和差化积公式也可以利用向量证明。教师可以在教学中设计一堂向量之于三角学的应

用课程，既能够帮助学生挖掘知识之间的关联，巩固所学知识，又能够进一步展示向量在平面几何的强大作用，让学生有意识地运用向量这一连接几何与代数的有力工具。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 22.

[2] 徐章韬, 顾泠沅. 面向教学的学科知识之课程资源开发——以数学学科为例[J]. 教育发展研究, 2014, 33(12): 26-30, 48.

[3] Galbraith, J. A. *Manual of Plane Trigonometry* [M]. London: Cassell, Petter & Galpin, 1863: 44.

[4] Rothrock, D. A. *Elements of Plane and Spherical Trigonometry* [M]. New York: The Macmillan Co., 1910: 57.

[5] Bowser, E. A. *Elements of Plane and Spherical Trigonometry* [M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1892: 49.

[6] Hun, J. G., MacInnes, C. R. *The Elements of Plane and Spherical Trigonometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1911: 44.

[7] 徐章韬, 顾泠沅. 师范生课程与内容的知识之调查研究[J]. 数学教育学报, 2014, 23(02): 1-5.

[8] Carson, A. B. *Plane Trigonometry Made Plain* [M]. Chicago: American Technical Society, 1942: 12, 65.

[9] Lewis, E. *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry* [M]. Philadelphia: Uriah Hunt & Son, 1860: 46-50.

[10] Robinson, H. N. *Elements of Plane and Spherical Trigonometry* [M]. New York & Chicago: Ivison, Blakeman, Taylor & Co., 1873: 263-265.

[11] Wood, D. V. *Trigonometry, Analytical, Plane and Spherical* [M]. New York: John Wiley, 1887: 52-53.

[12] Lock, J. B. *A Treatise on Elementary Trigonometry* [M]. London: Macmillan & Co., 1885: 128-129.

[13] Crockett, C. W. *Elements of Plane and Spherical Trigonometry* [M]. New York: American Book

Company, 1896: 76.

[14] Blakslee, T. M. *Academic Trigonometry, Plane and Spherical* [M]. Boston: Ginn & Co., 1888: 22-23.

[15] Cresswell, D. *A Treatise on Spherics* [M]. Cambridge: J. Mawmar, 1816: 184.

[16] Pendlebury, C. *Elementary Trigonometry* [M]. London: George Bell & Sons, 1895: 62-63.

美英早期三角学教科书中的正切定理

刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

解三角形是高中数学的重要教学内容，也是高考中的常见题型之一，运用三角函数、平面向量等知识，可以求解三角形中所有的边和角。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》指出，要求学生借助向量的运算，探索三角形边长与角度的关系，掌握余弦定理、正弦定理，并用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题[1]。数学来源于生活，又服务于生活，因此，解三角形对于高中数学教学的意义之大，它不仅可以提高学生的解题能力，还可以拉进学生与数学之间的距离、帮助学生解决生活中的实际问题。

在解三角形的教学中，教师将重点讲解与正弦定理和余弦定理有关的解三角形问题。虽然正切定理早已不做考试要求，并从中学数学教科书中删除，但当给定三角形的两边及夹角时，运用正切定理可方便的计算出三角形的其余两个内角。可以说，正切定理在解三角形问题中有着和正弦定理、余弦定理同样重要的作用，因而部分教师在课堂中仍然会予以补充，这就需要教师了解其背后更广阔的历史背景，掌握更为丰富的数学史素材。

回溯历史，13 世纪，纳西尔丁 • 图西（Nasir Din Tusi，1201-1274）在他著的《锐角扇形之书》中证明了正切定理，雷格蒙塔努斯（J. Regiomontanus，1436-1476）的《论一般三角形》也涉及该定理[2]。16 世纪，韦达（F. Viète，1540-1603）在他的《标准数学》一书中，收集了解三角形的公式，其中有正切定理[2]。在我国，最先就正切定理及其几何证明法进行研究的中算家是被誉为“国朝算学第一”的梅文鼎（1633-1721），其在《平三角举要》第 2 卷“锐角形第二术”中，针对已知两边夹角，“用切线分外交法”即正切定理求解问题，又在第 4 卷“用切线分外角之理”中，给出正切定理的几何证明，而这些内容都可以在更早的《崇祯历书》中找到对应内容。此后，《数理精蕴》中采用构造相似三角形的方法证明正切定理，梅瑴成（1681-1763）亦是如此[3]。

公式与定理是今天数学课程中最重要的内容之一，但在教科书中，我们往往只能找到一种

证明方法[4]。翻开历史的画卷，可以看见古今中外，上下数千年的历史长河积淀了人类的思想精华，这些精彩纷呈的思想方法扑面而来。鉴于此，本文拟聚焦正切定理，考察 19-20 世纪美英早期教科书中正切定理的不同证明方法，以期为今日教学提供思想养料。

2 早期教科书的选取

本文选取 1800-1959 年间出版的 103 种美英早期数学教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

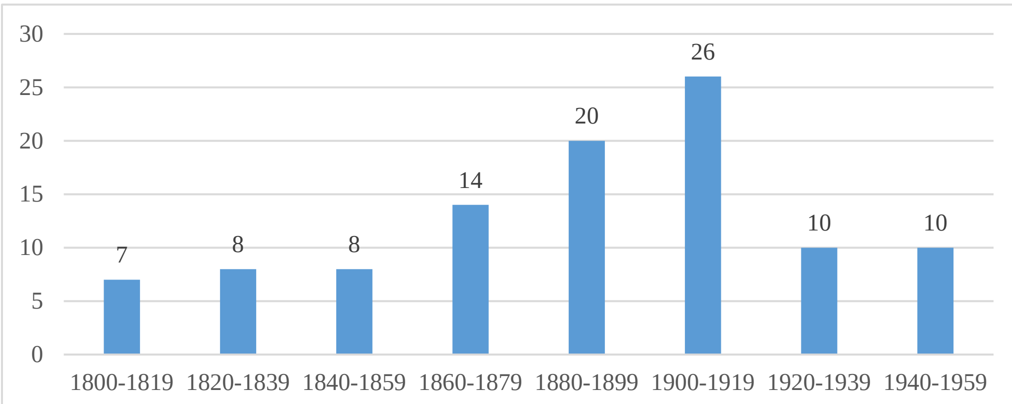


图 1 103 种美英早期数学教科书的出版时间分布

在 103 种教科书中，正切定理主要出现在“解三角形”“斜三角形”“解斜三角形”“三角形边和角的关系”等章节，此内容通常会以“正弦定理、正切定理、余弦定理”或“正弦定理、余弦定理、正切定理”的顺序进行编排。与此同时，1800-1887 年间，在检索的教科书中均不涉及正切定理一词，而只有正切定理公式的代数或几何证明，1888 年首次有教科书中出现“正切定理”（the law of tangents）一词，此后，有越来越多的教科书编者会指出所证明的公式叫做正切定理。

3 代数证法

在$\triangle ABC$中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别记为 a、b、c，由正弦定理$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$及比例的合比性质可得$\frac{a+b}{b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin B}$及$\frac{a-b}{b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B}$，两式相除得$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$。又由

和差化积公式 $\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ 及 $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$，故 $\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$，即 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$。[5]

Wylie（1955）从比例的等比性质出发得到正切定理[6]。因为 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，所以 $a-b=2R(\sin A-\sin B)$ 及 $a+b=2R(\sin A+\sin B)$，两式相除同样可得 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$，再由和差化积公式即可推导出正切定理。

Smail（1952）运用莫尔韦德公式（Mollweide's formula）推导正切定理[7]。在△ABC 中，因为 $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$ 及 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$，所以 $\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$。又因为 $\frac{1}{2}(A+B)=90°-\frac{C}{2}$，所以 $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$，则 $\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$，即

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad （1）$$

同理可得

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \qquad （2）$$

（1）和（2）称为莫尔韦德公式。此公式每个都含有三角形的六个基本元素，常用它们作解三角形的验算。该公式由莫尔韦德（K. Mollweide, 1774-1825）于 1808 年发表在他的著作中，故以此得名。其实，牛顿（I. Newton, 1643-1727）早在 1707 年发表的《通用算数》中，已给出其中的一个公式，此后，冯・奥佩尔（Von Oppel）的《解析三角学》与辛普森（T. Simpson, 1710-1761）的《三角》中也有此公式[2]。

最后，由（2）式除以（1）式可得 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\tan\frac{A-B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}$。又因为

$\tan\frac{C}{2}=\cot(90°-\frac{C}{2})=\frac{1}{\tan\frac{A+B}{2}}$，所以$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$。

4 几何证法

4.1 单位圆转化法

给定△$A_1B_1C_1$，∠A_1、∠B_1、∠C_1 的对边分别记为 a、b、c。作直径为 AM 的单位圆，在圆上截取点 B、C，使得 $\overset{\frown}{AB}=\angle A_1$ 及 $\overset{\frown}{AC}=\angle B_1$（图 2）。过点 B 作弦 $BD\perp AM$，过点 C 作 $CP\perp AM$，垂足为点 P，作 $CF//AM$，交单位圆于点 F，连结 FB、FD。以 F 为圆心作单位圆，交直线 CF 于点 G，过点 G 作 $HL\perp CF$，交 FB、FD 于点 H、L，于是 $GL=\tan\angle CFD$ 及 $GH=\tan\angle CFB$。因为∠CFD 和∠CFB 分别等于 $\overset{\frown}{CD}$ 和 $\overset{\frown}{CB}$ 所对圆心角的一半，所以 $\angle CFD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$ 及 $\angle CFB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CB}$，而 $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}$ 及 $\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AC}$，故 $GL=\tan\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}}{2}=\tan\frac{A_1+B_1}{2}$ 及 $GH=\tan\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AC}}{2}=\tan\frac{A_1-B_1}{2}$。又因为 $BD//HL$，则 $\frac{BE}{DE}=\frac{GH}{GL}$，由 $DE=\sin A_1+\sin B_1$、$BE=\sin A_1-\sin B_1$，所以 $\frac{\sin A_1-\sin B_1}{\sin A_1+\sin B_1}=\frac{\tan\frac{A_1-B_1}{2}}{\tan\frac{A_1+B_1}{2}}$。在△$A_1B_1C_1$ 中，有 $\frac{a}{\sin A_1}=\frac{b}{\sin B_1}$，则 $\frac{\sin A_1-\sin B_1}{\sin A_1+\sin B_1}=\frac{a-b}{a+b}$，于是 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A_1-B_1}{2}}{\tan\frac{A_1+B_1}{2}}$。[8]

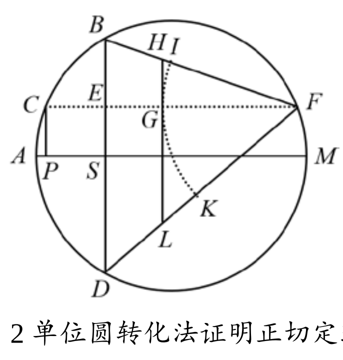


图 2 单位圆转化法证明正切定理

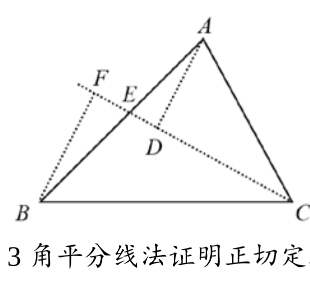


图 3 角平分线法证明正切定理

4.2 角平分线法

如图 3，给定△ABC[4]，Hall & Frink（1910）作$\angle C$的角平分线 CE，过点 A、B 分别作直线 CE 的垂线 AD、BF，垂足分别为点 D、F。由$\angle ACE=\angle ECB=\frac{1}{2}\angle C$及 $AD//BF$，所以

$$\begin{aligned}\angle DAE=\angle EBF&=90^\circ-\angle BEF=90^\circ-(\angle B+\angle ECB)\\&=\frac{\angle A+\angle B+\angle C}{2}-(\angle B+\frac{1}{2}\angle C)\\&=\frac{\angle A-\angle B}{2},\end{aligned}$$

即$\angle DAE=\frac{\angle A-\angle B}{2}$。在 Rt△$ADE$ 和 Rt△BFE 中，由△ADE∽△BFE 及 $DF=EF+DE=CF\text{-}CD$，所以

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{EF}{FB}=\frac{DE}{AD}=\frac{EF+DE}{FB+AD}=\frac{CF-CD}{FB+AD}=\frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{(a+b)\sin\frac{C}{2}},$$

于是$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}\tan\frac{A+B}{2}$。[9]

McCarty（1920）按照 Hall & Frink（1910）的方法添加辅助线，并借助两对相似三角形证明正切定理[10]。如图 3，因为$\angle EBF=\frac{\angle A-\angle B}{2}$及$\angle CBF=\frac{\angle A+\angle B}{2}$，所以$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{EF}{BF}$及$\tan\frac{A+B}{2}=\frac{CF}{BF}$，于是$\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{EF}{CF}$。由△$ADE$∽△$BFE$，所以$\frac{EF}{BF}=\frac{DE}{AD}$，由△$ADC$∽△$BFC$，所以$\frac{BF}{AD}=\frac{CF}{CD}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}$。又因为$\frac{EF}{DE}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{EF}{DE+EF}=\frac{a}{a+b}=\frac{EF}{DF}$及$\frac{CF}{CD}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{CF}{CF-CD}=\frac{a}{a-b}=\frac{CF}{DF}$，于是$\frac{EF}{CF}=\frac{a-b}{a+b}$，故$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$。

[4] 以下均将$\angle BAC$、$\angle CBA$、$\angle ACB$分别简记为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别记为 a、b、c。

4.3 运用半角公式

如图 4，给定△*ABC*，延长 *AC* 至点 *D*，使得 *AD*=*BD*，于是∠*ABD*=∠*A*、∠*DCB*=∠*A*+∠*B* 及∠*CBD*=∠*A*-∠*B*。在△*CBD* 中，由半角公式可得 $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{r}{s-CD}$ 及 $\tan\frac{A+B}{2}=\frac{r}{s-BD}$，其中 $s=\frac{BD+DC+CB}{2}$，两式相除可得

$$\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{s-BD}{s-CD}=\frac{2s-2BD}{2s-2CD}。$$

由 2*s*=*BD*+*DC*+*CB*=*BD*+(*BD*-*b*)+*a*=*a*-*b*+2*BD*，故 $\frac{2s-2BD}{2s-2CD}=\frac{a-b}{a+b}$，则 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$。[11]

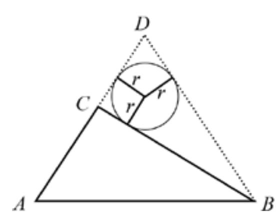


图 4 运用半角公式证明正切定理

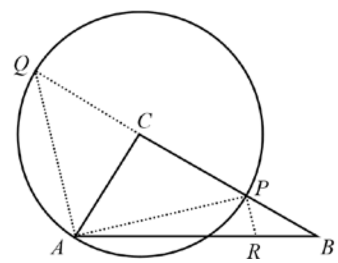


图 5 以短边为腰作等腰三角形之一

4.4 等腰三角形法

4.4.1 以短边为腰作等腰三角形

证法 1

如图 5，给定△*ABC*（*CB*>*AC*），以 *C* 为圆心、较短边 *AC* 长为半径作圆，交 *BC* 及 *BC* 延长线于点 *P*、*Q*，连结 *AQ*、*AP*。因为△*APC* 和△*ACQ* 是等腰三角形、△*APQ* 是直角三角形，所以

$$\angle CAP+\angle PAB=\angle A \tag{3}$$

$$\angle CAP-\angle PAB=\angle CPA-\angle PAB=\angle B \tag{4}$$

$$\angle QAC+\angle CAP=90° \tag{5}$$

$$\angle QAC+\angle CAP+\angle PAB=\angle QAB \tag{6}$$

（3）与（4）相加可得 $\angle CAP=\frac{\angle A+\angle B}{2}$，两式相减可得 $\angle PAB=\frac{\angle A-\angle B}{2}$，由（5）可得 $\angle QAC=90°-\frac{\angle A+\angle B}{2}$，以上三式相加得 $\angle QAB=90°+\frac{\angle A-\angle B}{2}$。

在△*ABP* 和△*ABQ* 中，由正弦定理，有

$$\frac{AB}{BP}=\frac{\sin(180°-\angle CPA)}{\sin\angle PAB}=\frac{\sin\angle CPA}{\sin\angle PAB}\Rightarrow\frac{c}{a-b}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}},$$

$$\frac{AB}{BQ}=\frac{\sin\angle CQA}{\sin\angle QAB}\Rightarrow\frac{c}{a+b}=\frac{\sin(90°-\frac{A+B}{2})}{\sin(90°+\frac{A-B}{2})}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}},$$

两式相除得 $\frac{\frac{c}{a+b}}{\frac{c}{a-b}}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$。[12]

证法 2

Moritz（1915）在此作图方法的基础上，给出了第二种证明方法[12]。如图 5，过点 *P* 作 *PR*//*QA*，于是∠*APR*=∠*QAP*=90°。在△*APQ* 及△*ARP* 中，有

$$\tan\angle CPA=\tan\frac{A+B}{2}=\frac{AQ}{AP}\text{ 及 }\tan\angle PAB=\tan\frac{A-B}{2}=\frac{PR}{AP},$$

两式相除可得 $\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{PR}{AQ}$。因为△*RBP*∽△*ABQ*（或 *PR*//*QA*），所以 $\frac{PR}{AQ}=\frac{BP}{BQ}=\frac{a-b}{a+b}$，

于是 $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$。

Young & Morgan（1919）还以不同的作图方式，得到了与图 5 类似的图像[13]。如图 6，作∠*C* 的角平分线 *CD*，并过点 *A* 作直线 *CD* 的平行线，交 *BC* 延长线于点 *E*，于是，*AC*=*CE*。过点 *A* 作 *CD* 的垂线，交 *BC* 于点 *F*，再过点 *F* 作 *AF* 的垂线，交 *AB* 于点 *G*，于是，按照 Moritz（1915）给出的第二种证明方法即可完成正切定理的证明。

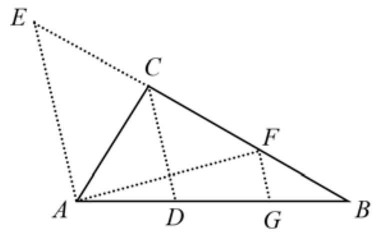


图 6 以短边为腰作等腰三角形之二

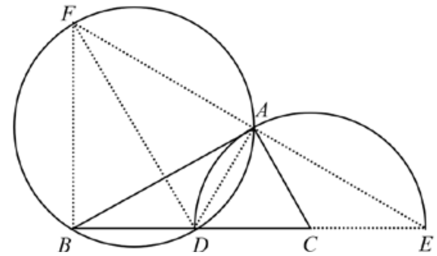


图 7 以短边为腰作等腰三角形之三

证法 3

如图 7，给定△ABC（$CB>AC$），以 C 为圆心、较短边 AC 长为半径作圆，交 BC 及 BC 延长线于点 D、E，连结 AD、AE。过点 B 作直线 BE 的垂线，交 EA 的延长线于点 F，连结 FD，因为$\angle FBD=\angle DAF=90°$，则以 FD 为直径的圆过点 A、B。由$\angle BEA=\dfrac{\angle C}{2}$，故$\angle EFB=\dfrac{\angle A+\angle B}{2}$，又由$\angle AFD$和$\angle B$都是$\overset{\frown}{AD}$所对圆周角，故$\angle AFD=\angle B$，则

$$\angle DFB=\frac{\angle A+\angle B}{2}-\angle AFD=\frac{\angle A-\angle B}{2}。$$

在 Rt△BDF 和 Rt△BEF 中，有

$$\tan\frac{A+B}{2}=\frac{BE}{BF}=\frac{a+b}{BF} 及 \tan\frac{A-B}{2}=\frac{BD}{BF}=\frac{a-b}{BF},$$

于是，两式相除可得$\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$。[14]

4.4.2 以长边为腰作等腰三角形

证法 1

如图 8，给定△ABC（$AC>AB$），以 A 为圆心、较长边 AC 长为半径作圆，交直线 AB 于点 D、E，CB 延长线交圆于点 F，连结 AF、CD。过点 E 作 BC 的平行线，交 DC 的延长线于点 G，于是，$\angle CEG=\angle ECF$。因为$\angle DAC$是△ABC和△AEC的一个外角，所以$\angle AEC=\angle ACE=\dfrac{\angle B+\angle C}{2}$，又因为$\angle AFC=\angle ACF$及$\angle B=\angle AFC+\angle BAF=\angle ACF+\angle BAF$，所以$\angle ECF=\dfrac{\angle EAF}{2}=\dfrac{\angle B-\angle C}{2}$。

在 Rt△DEC 和 Rt△EGC 中，有$\tan\dfrac{B+C}{2}=\dfrac{CD}{CE}$及$\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{CG}{CE}$，故[15]

$$\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}=\frac{CG}{CD}=\frac{BE}{DB}=\frac{AC-AB}{AC+AB}=\frac{b-c}{b+c}。$$

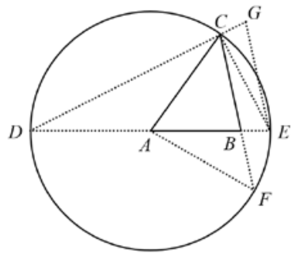


图 8 以长边为腰作等腰三角形之一

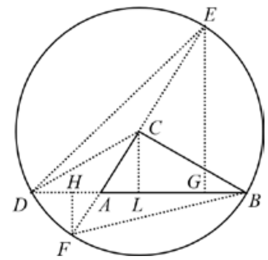


图 9 以长边为腰作等腰三角形之二

证法 2

如图 9，给定△*ABC*（*CB*>*AC*），以 *C* 为圆心、较长边 *CB* 长为半径作圆，延长 *BA* 交圆于点 *D*，直线 *AC* 交圆于点 *E*、*F*，连结 *DC*、*DE*、*BF*，过点 *F*、*C*、*E* 作直线 *BD* 的垂线，垂足分别为 *H*、*L*、*G*。由∠*ECB* 是△*ABC* 和△*FBC* 的一个外角，所以

$$\angle EDB=\angle EFB=\frac{\angle A+\angle B}{2},$$

又由∠*ACD*=∠*A*-∠*CDB*=∠*A*-∠*B*，故

$$\angle FBD=\frac{\angle ACD}{2}=\frac{\angle A-\angle B}{2}。$$

因为点 *C* 是线段 *EF* 的中点，所以 *HL*=*LG*，于是 *HB*=*DG*。

在 Rt△*FBH* 和 Rt△*DGE* 中，有 $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{HF}{HB}$ 及 $\tan\frac{A+B}{2}=\frac{EG}{DG}$，故[16]

$$\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{HF}{EG}=\frac{AF}{AE}=\frac{CB-CA}{CB+CA}=\frac{a-b}{a+b}。$$

证法 3

如图 10，给定△*ABC*（*CB*>*AC*），延长 *AC* 至点 *D*，使得 *CD*=*CB*。在直线 *CB* 上截取线段 *CE*=*AC*，连结 *AE*、*DB*，直线 *AE* 的延长线交 *DB* 于点 *F*，于是，*AD*=*CD*+*CA*=*a*+*b* 及 *EB*=*CB*-*CE*=*a*-*b*。记∠*CAE*=∠*CEA*=*x*，因为∠*DCB* 是△*ACE* 的一个外角，所以∠*DCB*=*x*+*x*=2*x*，而∠*DCB* 也是△*ABC* 的一个外角，所以∠*DCB* =∠*A*+∠*B*，则 $x=\frac{\angle A+\angle B}{2}$，并且 $\angle FAB=\angle A-x=\frac{\angle A-\angle B}{2}$。又因为△*ADF*∽△*EBF*，所以∠*AFD*=∠*EFB*，则 $AF\perp DB$，同时，

有 $\dfrac{DF}{FB}=\dfrac{AD}{EB}=\dfrac{a+b}{a-b}$。在△$ADF$ 和△ABF 中，由 $\dfrac{\tan\angle FAD}{\tan\angle FAB}=\dfrac{\frac{DF}{AF}}{\frac{FB}{AF}}=\dfrac{DF}{FB}$，可得正切定理。[17]

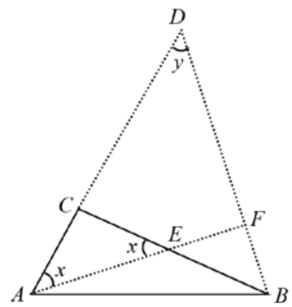


图 10 以长边为腰作等腰三角形之三

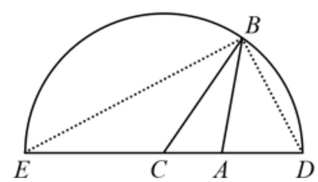


图 11 以长边为腰作等腰三角形之四

证法 4

给定△ABC（CB>AC），Dickson（1922）则以 C 为圆心、较长边 CB 长为半径作圆，交直线 AC 于点 D、E，连结 BD、BE（图 11），于是 EA=a+b 及 AD=a-b。因为∠CBD=∠CDB 及∠CBD+∠CDB=180°-∠C=∠A+∠B，所以 $\angle CBD=\angle CDB=\dfrac{\angle A+\angle B}{2}$ 及 $\angle DBA=\angle CBD-\angle B=\dfrac{\angle A-\angle B}{2}$，于是 $\angle BEA=90°-\angle CDB=90°-\dfrac{\angle A+\angle B}{2}$ 及 $\angle ABE=90°-\angle DBA=90°-\dfrac{\angle A-\angle B}{2}$。在△$ADB$ 和△EAB 中，由正弦定理，有

$$\frac{a-b}{c}=\frac{AD}{AB}=\frac{\sin\angle DBA}{\sin\angle ADB}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}},$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{EA}{AB}=\frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle BEA}=\frac{\sin(90°-\frac{A-B}{2})}{\sin(90°-\frac{A+B}{2})}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}},$$

两式相除同样可得正切定理。[18]

4.4.3 以短边或长边为腰作等腰三角形

证法 1

如图 12，给定△ABC，延长 AB 至点 E，使得 BE=BC，连结 CE，于是∠CBE=∠A+∠C。取线段 AE、CE 的中点 D、G，连结 DG，则 DG//AC。过点 B 作 BF//DG，有 $\dfrac{DB}{DE}=\dfrac{GF}{GE}$。连结

BG，则 $\angle CBG=\angle EBG=\dfrac{\angle C+\angle A}{2}$，因为 $BF//AC$，所以 $\angle FBE=\angle A$ 及 $\angle CBF=\angle C$，则 $\angle GBF=\dfrac{\angle CBF-\angle FBE}{2}=\dfrac{\angle C-\angle A}{2}$。又因为

$$\tan\frac{\angle C+\angle A}{2}=\frac{GE}{BG} \text{ 及 } \tan\frac{\angle C-\angle A}{2}=\frac{GF}{BG},$$

两式相除可得 $\dfrac{\tan\dfrac{\angle C-\angle A}{2}}{\tan\dfrac{\angle C+\angle A}{2}}=\dfrac{GF}{GE}$，由 $DE=\dfrac{AB+BC}{2}$ 及 $DB=\dfrac{AB-BC}{2}$，即得正切定理。[19]

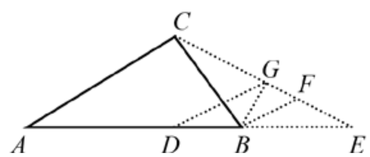


图 12 短边或长边为腰作等腰三角形之一

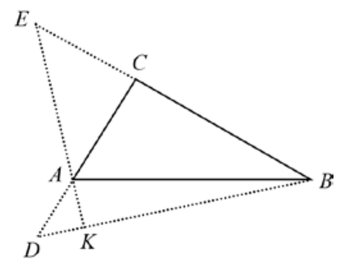


图 13 短边或长边为腰作等腰三角形之二

证法 2

如图 13，给定△ABC，延长 CA 至点 D，使得 $CD=CB$，再延长 BC 至点 E，使得 $CE=CA$，连结 DB、EA，EA 的延长线交直线 DB 于点 K，于是，$BE=a+b$ 及 $AD=a-b$。因为∠DCE 是△ABC 和△DBC 的一个外角，所以

$$\angle CDB=\angle CBD=\frac{\angle A+\angle B}{2},$$

$$\angle DBA=\angle A-\angle CDB=\angle A-\frac{\angle A+\angle B}{2}=\frac{\angle A-\angle B}{2},$$

又因为∠CEA=∠CAE=∠KAD 及∠CDB=∠CBD，于是∠CEA+∠CBD=∠KAD+∠CDB，则∠DKE=∠BKE=90°。由△KBE∽△KDA，故 $\dfrac{KB}{KD}=\dfrac{BE}{DA}=\dfrac{a+b}{a-b}$，而在 Rt△$KBE$ 和 Rt△KDA 中，有 $\tan\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{AK}{KD}$ 及 $\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{AK}{KB}$，故 $\dfrac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}}=\dfrac{a-b}{a+b}$。[20]

5 正切定理证明方式的演变

以 20 年为一个时间段，图 14 给出了正切定理证明方法的时间段分布情况。由柱状图可知，

在几何证法中，等腰三角形法是 19 世纪教科书编者较为青睐的一种证明方法，且以长边为腰作等腰三角形这一做法为主。进入 20 世纪，运用半角公式和角平分线法后来居上，其比重也超过等腰三角形法。可以说，构造几何图形证明正切定理的方法呈现出“百家争鸣”的局面。

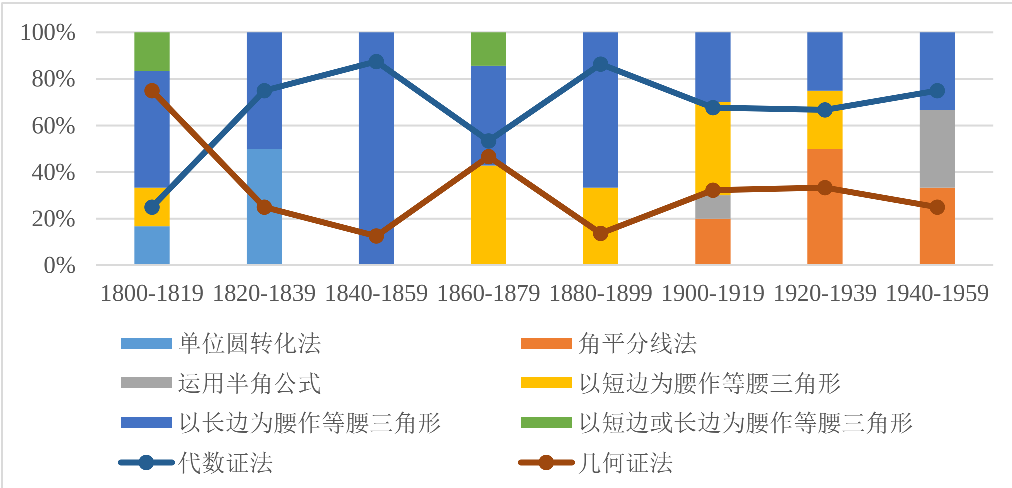


图 14 正切定理证明方法时间分布

19 世纪的代数被称为“代数学的新生”，代数方程的可解性与群的发现、从四元数到超复数、布尔代数的创立等研究成果均来自这个时代，这个时代的数学家给予了代数学充分的关注，而初等几何的发展却显得黯然失色。从折线图中可以看出，虽然在 1800-1819 年间，教科书编者倾向于使用几何的方法证明正切定理，但随着代数学的迅速发展，加之使用代数的方法较为简洁、快捷，因而代数证法在 19 世纪上半叶起的教科书中占据主流。

6 结论与启示

综上所述，美英早期教科书中给出了正切定理的多种证明方法，既有运用正弦定理、莫尔韦德公式的代数证法，也有构造等腰三角形、角平分线等的几何证法，这些内容均为今日正切定理的教学提供了诸多启示。

其一，把握知识来龙去脉，有效促进数学理解。学生能用所学习的数学定理、公式解决问题固然是数学教学的目标之一，但我们也偶有发现，学生往往会出现定理、公式记忆不清的情况，这就导致学生在考试中做错题甚至对试题无从下手。因此，教师在教学中要重视数学公式推导及证明的过程，并尽可能发挥学生的主体作用，引导学生经历数学公式推导的全过程。正切定理作为高中解三角形问题中的重要定理之一，在实际教学中，教师可以先介绍一种构造等

腰三角形证明正切定理的方法，通过类比，让学生通过小组合作等方式，尝试给出不同的添加辅助线的方法。这一做法，有利于激发学生的创新意识，尊重学生的个别差异，并让学生经历形式化公式背后的发现过程，体会数学探究与发现所带来的乐趣。

其二，渗透数学思想，培育核心素养。数学教育的目的不仅仅是让学生掌握数学知识，更重要的是让学生获得数学知识蕴含的数学思想。数学思想作为人类思想文化宝库中的瑰宝，是数学的“精髓”，是数学的“灵魂”。从正切定理的证明方法中不难发现，巧用几何图形，直观地解决代数问题，体现数形结合思想；通过类比，可以构造不同的几何图形并简化证明，体现类比思想；添加辅助线构造等腰三角形，并利用其性质完成证明，体现化归思想。在课堂教学中，教师有必要向学生渗透正切定理中所蕴含的数学思想，这不仅有助于拓展学生的数学思维，培养学生的发散性思维，还有助于培养学生的数学抽象、直观想象、逻辑推理等数学素养。

其三，从生活中来，到生活中去。三角学有着悠久的历史，早在古希腊时期，当时的三角学主要是球面三角学，其依附于天文学，是天文观测结果推算的一种方法。19 世纪，伴随许多数学家的努力，现代三角函数的符号和三角学的完整的理论随之形成，三角学也被应用于其他多门学科中。在勘探、测量等技术中，解三角形仍是一种极为普遍的应用工具，其可以避免很多误差较大或技术难度大的测量。因而，教师可以有意识的设计与实际生产生活密切相关的问题，丰富现实问题情境，让学生明白“数学源于生活，用于生活”的道理，体会数学的实用性和趣味性，提高数学学习的兴趣。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 26.

[2] 《数学辞海》编辑委员会. 数学辞海(第一卷)[M]. 北京:中国科学技术出版社, 2002: 214-215.

[3] 董杰. 清初正切定理的演变及其动因分析[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2012, 41(5): 556-561.

[4] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 167.

[5] Perlin, I. E. *Trigonometry* [M]. Scranton: International Textbook Company, 1955: 161-162.

[6] Wylie, C. R. *Plane Trigonometry* [M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1955: 205-207.

[7] Smail, L. L. *Trigonometry, Plane & Spherical* [M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1952: 155-157.

[8] Smyth, W. *Elements of Plane Trigonometry* [M]. Boston: Lilly, Wait, Colman & Holden, 1834: 36-37.

[9] Hall, A. G. & Frink, F. G. *Plane & Spherical Trigonometry* [M]. New York: Henry Holt & Co., 1910: 54-55.

[10] McCarty, R. J. *Elements of Plane Trigonometry* [M]. Chicago: American Technical Society, 1920: 32.

[11] Carson, A. B. *Plane Trigonometry Made Plain* [M]. Chicago: American Technical Society, 1942: 164-165.

[12] Moritz, R. E. *Elements of Plane Trigonometry* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1915: 130-132.

[13] Young, J. W. & Morgan, F. M. *Plane Trigonometry & Numerical Computation* [M]. New York: The Macmillan Company, 1919: 47-48.

[14] Kenyon, A. M. & Ingold, L. *Trigonometry* [M]. New York: The Macmillan Co., 1913: 34-35.

[15] Lewis, E. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry* [M]. Philadelphia: Uriah Hunt & Son, 1860: 39-40.

[16] Griffin, W. N. *The Elements of Algebra and Trigonometry* [M]. London: Longmans, Green & Co., 1875: 255-256.

[17] Durell, F. *Plane and Spherical Trigonometry* [M]. New York: Merrill, 1910: 108-109.

[18] Dickson, L. E. *Plane Trigonometry with Practical Applications* [M]. Chicago: Benj H. Sanborn & Co., 1922: 116-117.

[19] Keith, T. *An Introduction to the Theory & Practice of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. London: T. Davison, 1810: 44-45.

[20] Richards, E. L. *Elements of Plane Trigonometry* [M]. New York: D. Appleton & Co., 1878: 51-52.

教学实践

HPM 问题串的形成之旅

——以一节变化率与导数复习课为例

刘梦哲，王智洋

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

数学史与数学教育（History and Pedagogy of Mathematics，简称 HPM）是数学教育领域出现最早且较为重要的领域之一，如今越来越多的中学教师开始关注数学史的教育价值，并在教学实践中运用数学史进行讲授[1]。已有研究表明，HPM 教学对于教师观念、知识和能力等方面具有重要影响[2-3]。“基于数学史的问题串”作为 HPM 教学的支点，其为学生提供了“再创造”的机会，有助于学生经历知识的发生发展过程，形成较为完整的知识体系，获得数学活动的经验，体验“探究之乐”，感悟数学活动的本质[4]。

导数的概念是高中数学的核心概念之一，也是微积分的重要内容之一，具有较强的抽象性和严密的逻辑性。关于学生对导数概念的理解，有研究者指出，部分学生没有从本质上理解导数的概念，例如，片面的将导数理解为瞬时速度，或不清楚平均变化率、瞬时变化率与导数概念之间的关系等。[5-6]为加强学生对导数概念的理解，有必要在高中导数教学中强化导数概念的教学，融入数学史的教学模式有助于学生对导数概念的理解、体会概念背后深刻数学思想、激发学生的自信与执着[7]。

鉴于此，依托 HPM 高中数学网络研修班，针对变化率与导数的复习课开展了较为深入的课例研究。笔者通过参与并整理这一课例的形成过程，具体探讨以下问题：HPM 视角下变化率与导数的复习课是如何形成的？HPM 问题串的设计有何变化？通过本研究，以期为 HPM 视角下变化率与导数复习课的教学提供参考。

2 聚焦与准备

2.1 问题聚焦

HPM 课例研究的过程是：执教者提出对数学史料的需求以聚焦研究问题，由 HPM 高校研究人员搜集史料，执教者精心设计教学过程，HPM 专业学习共同体成员一同研讨，执教者再反复调整教学设计并实施教学[8]。

根据执教者的需求，本次课例研究拟聚焦于解决以下问题。

（1）如何借鉴历史，深化学生对导数概念的本质理解？

（2）如何将碎片化的知识串联整合，形成统一的知识框架？

（3）如何在复习课中发挥数学史的多元教育价值？

2.2 史料搜集

九层之台，起于累土。数学和科学的巨大进展中，几乎总是建立在几百年诸多研究者们一点一滴的贡献和积累之上，还需要有一个人来走那最高和最后的一步。在微积分的发展长河中，这个人就是牛顿（I. Newton, 1642-1727）。

牛顿出生于英格兰林肯郡乌尔索普村的一个农村家庭。在牛顿出生前不久，父亲便离开了人间。他从小在低标准的地方学校接受教育，是一个除了对机械设计有兴趣外，没有特殊才华的青年人。1661 年牛顿考取剑桥大学进一步潜心学习，大学期间几乎要改变方向，从自然哲学转到法律学。1665 年牛顿刚结束大学课程，鼠疫从伦敦城的外围迅速蔓延到市中心，迫使他离开了学校，独自一人回到了安静的乌尔索普的家乡，并在 1665-1666 年期间开始专心研究从青少年时代就感兴趣的问题。

在家避疫的两年时间内，牛顿在数学、光学和力学领域都取得了傲人的成果[9]。在微积分方面，他构想出了“流数术”。牛顿分析数学的基本概念是力学概念的反映，他将简单的几何图形——线、角、体都看作是力学位移的结果，即线是点运动的结果，角是它的边旋转的结果，体是面运动的结果。牛顿认为变量是运动的点，因此将任何变量称为“流动量”（或“流量”）。因为任何运动离不开时间，所以他总是把时间作为自变量，称运动的速度为“流数”，也就是我们今天的导数。构想出流数术后，牛顿将其应用于大量的几何问题和力学问题，例如，作曲

线的切线、求函数的极大值和极小值、求曲线的曲率。此外，牛顿也领悟了两种运算的互逆性：由已知的流动量求流数，由已知的流数求流动量[10]。

如此，他准确地建立了微分与积分之间的联系，只是由于返校后没能及时发表他的“流数术”，导致日后他与同时代德国数学家莱布尼茨（G. Leibniz, 1646-1716）之间引起无休止的微积分发明权之争。实际上，牛顿和莱布尼茨研究微积分虽然达到了同一目的，但各自的方法不同。如果说牛顿主要是从力学的概念出发，那么莱布尼茨作为几何学家和哲学家对方法感兴趣，他成功建立起更加方便的符号体系和计算方法，为微积分严格化奠定了基础。因此，这项伟大发明的荣誉由这两位伟大的思想家共同分享似乎是最好的结果。

第二项划时代的发现涉及到光的现象，牛顿通过光学实验成功发现了像太阳光一样的白光能分解成有色光，并设计出了反射望远镜。第三项发现因一个美丽的“苹果故事”而家喻户晓：乌尔索普的一棵苹果树下，一个苹果从树上掉了下来，激发了牛顿的灵感——使月球留在它的轨道上与使苹果落到地上的是同一个力，产生了万有引力的想法。虽然有人质疑过故事的真实性，但更多的人仍相信故事是真实的。事实上，牛顿的侄女凯瑟琳·巴顿曾向参加过牛顿葬礼的法国思想家伏尔泰讲起过这则故事。

1666 年，伦敦瘟疫伴随着一场大火而画上句号。1667 年牛顿回到剑桥大学获得硕士学位，经过四年的积累和两年的沉淀，此时的牛顿已成为世界一流的数学家和物理学家。同年 10 月，他被选为研究员。牛顿后来说：“1665 和 1666 两个鼠疫年中，是我发现力最旺盛的时期，而且对于数学和自然哲学的关心比其他任何时候都多。”[11]

在三百多年后的今天，新冠肺炎疫情蔓延全球，严重影响了人们正常的工作、学习和生活。大多数居家避疫者或感无聊、压抑，终日情绪消极而无所事事。此情此景不禁让我们回想起 1665 年的伦敦瘟疫，那远比我们现在的处境严峻得多，而牛顿作为伦敦学子为我们做出了极好的表率，他可能没有为抗疫作出什么直接贡献，但却通过潜心钻研和诸多科学成果给予人类前所未有的理性。一方面，遇到灾难时沉着冷静、充满信心地寻找科学的治疫良方；另一方面，利用避疫时光，心无旁骛地做喜欢的研究工作，在同学和同事中脱颖而出，为未来的发展打下坚实基础。

科学理论闪耀真理的光芒，伟大人物激发奋进力量。笼罩全球的阴霾终将消散，而作为学生、老师、研究者……利用疫情期间，在自己的专业领域和岗位上耕耘坚守、创新突破，不仅

是让自己有助于他人，有益于社会，有功于国家的最好方式，也是提升自我的绝佳机会。

3 研讨与设计

3.1 第一轮教学设计

高校研究者为执教者提供了导数概念的相关阅读材料，包括数学史素材、已有的教学设计、课标及教科书解读。执教者在研读相关材料之后，结合教科书、考试要求和学情分析，拟定了如下教学目标。

（1）通过问题，让学生再经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，知道导数是瞬时变化率的数学表示，体会导数的思想及其内涵。

（2）通过问题培养学生观察、分析、比较和抽象概括的能力，抽象出导数的几何意义，体会逼近的思想方法。

（3）经历从生活中的变化率问题抽象概括出平均变化率的过程，体会数学知识来源于生活，又服务于生活；通过概念的形成过程体会从特殊到一般的数学思想方法。

以下是执教者初步的教学设计（见表 1）。

表 1 教学设计I

教学环节	教学过程	具体问题
情境创设 提出问题	情境 1：几何画板演示刘徽的“割圆术”。	（1）“割圆术”中蕴含什么思想，并尝试提出一个数学问题。
	情境 2：图片展示神舟十三号载人飞船。	（2）如何测量航天器在轨道上的运行速度。
研究问题 复习概念	问题 1：伽利略研究了自由落体运动的规律，提出从下落开始，物体在每一段相等的时间内通过的位移之比为自然数奇数之比。	（1）这里的“速度”指的是什么。 （2）如何计算平均速度。
	问题 2：水以恒速注入容器，研究水的高度 h 与时间 t 的函数关系图象。	从物理与几何两个角度解释导数的意义。
	问题 3：圆的面积关于半径的导数是圆的周长，正方形面积的导数却不是正方	（1）如何定义导数。 （2）如何用数学的眼光解释这一“矛

	形的周长。 问题 4：研究函数 $f(x)=e^x-1-x-ax^2$ 的性质。	盾”结论。 （1）如果你是牛顿，会如何考虑这一问题，此问题与什么知识有关。 （2）如果你是莱布尼兹，又会怎么去考虑？
课时小结	（1）学生总结对研究问题思考方式的体会，对导数的概念的进一步认识。 （2）微视频：导数的历史。	
作业布置	已知 $\sin x < mx(2+\cos x)$ 对 $x>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围。	

3.2 第二轮教学设计

根据历史启示、教学目标和本次课例研究所聚焦的问题，HPM 专业学习共同体针对执教者的初步设计开展交流和研讨。在研讨中，大家形成以下意见。一是结合新疆的地域特点，融入富有民族特色的情境，让学生充分感受到数学源于生活、用于生活；二是创新复习课的教学模式，打破复习课唯刷题的教学策略，本节融入数学史的变化率与导数复习课需要落实“深化概念理解”“加强知识联系”“促进问题解决”“渗透思想方法”和“落实立德树人”五大教学目标；三是基于数学史，设计一以贯之的问题串，例如，可以牛顿在避疫期间发现万有引力的故事为主线设计问题串，从而加强问题之间的内在关联性。

根据研讨结果和历史启示，执教者重新制定了教学目标。

（1）通过问题，深化概念理解，让学生再次经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，知道导数是瞬时变化率的数学表示，体会导数的思想及其内涵。

（2）通过导数概念历史背景的学习，建立知识联系，培养学生的抽象概括能力与逻辑思维能力。

（3）从问题学习中提炼思想方法，让学生体会逼近和以直代曲的思想方法。

（4）通过史料的学习，落实立德树人，并借助导数概念背后的文化背景，让学生体会科学家勤于思考、敢于开拓的精神。

根据以上的教学目标，执教者改进教学设计I，并形成教学设计II（见表 2）

表 2 教学设计II

教学环节	教学过程	具体问题
情境创设 提出问题	公元前 5 世纪古希腊哲学家芝诺提出“飞矢不动”悖论。	“飞矢不动”悖论涉及哪些数学量。
研究问题 复习概念	问题 1：牛顿在避疫期间发现了万有引力定律，求树上的苹果从下落开始的每一段相等的时间内的速度之比。	（1）“每一段相等的时间内的速度”指的是什么。 （2）如何计算平均速度。 （3）如何计算相等时间内的速度之比。
	问题 2：早期的物理学家普遍认为，飞矢不动的根本原因是在“任何短时间内”箭都有一个“平均速度”，但它在某一点的“瞬时速度”为零。	（1）箭在 $t=t_0$ 时刻的瞬间速度是否为 $v=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{0}{0}$。 （2）瞬间是否是一个时刻。 （3）如何定义瞬时速度。
	问题 3：水以恒速注入喀巴克（葫芦）容器，研究水的高度 h 与时间 t 的函数关系图象。	牛顿与莱布尼兹的工作有何异同。
	问题 4：若将苹果看成一个完美的球体，则球体积与表面积之间有何关系。	（1）运用导数公式，观察球的体积与表面积公式有何关系。 （2）如何解释这一现象。
	问题 5（备选）：同教学设计I中的问题 4。	同教学设计I中问题 4 的两个问题。
课时小结	（1）同教学设计I中的课时小结（1）。 （2）身处疫情当下，如果隔离在家，思考对学习应抱有何种态度。	
作业布置	查找收集资料，整理历史上导数概念的发展历程。	

3.3 第三轮设计与教学

执教者在完成教学设计II后，HPM 专业学习共同体随即开展了第二次交流和研讨。高校研究者建议执教者，一者加强问题串的流畅性和自然性，本节课可以聚焦牛顿在避疫期间的科学发现之旅，对于“飞矢不动”悖论，可以改为思考苹果下落过程中某一时刻的运动状态，对于

葫芦形容器，可以改为苹果形茶壶，对于问题 5 中的函数，可以改为牛顿曾经研究过的函数，由此解决情境跳跃的问题；二者加强所布置的作业与本节课内容的联系，可以让学生穿越时空与牛顿进行对话，或与牛顿分享本节课的学习体会或编制数学问题，从而给学生的数学写作留下更多发挥的空间。

据此，执教者再次修正教学目标，重点关注数学史在深化概念理解、加强知识联系、渗透思想方法和落实立德树人上发挥的作用。

（1）通过问题研究，深化概念理解，让学生再次经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，理解导数与瞬时变化率的关系，提升学生数学抽象素养。

（2）将导数概念的形成融入历史背景，让学生体会数学的研究方法，建立更牢固的知识联系，培养学生抽象概括能力与逻辑思维能力。

（3）通过导数概念背后的文化背景的学习，落实立德树人，让学生体会科学家勤于思考、敢于开拓的精神，体会数学的理性精神。

执教者调整教学设计II，形成教学设计III（见表 3），并进行正式课的教学。

表 3 教学设计III

教学环节	教学过程	具体问题
情境创设 提出问题	从当下的疫情说起，谈及牛顿在避疫期间的历史，在此期间，由一颗苹果让牛顿发现了万有引力定律（微视频）。	
研究问题 复习概念	问题 1：同教学设计II中问题 1。	同教学设计II中问题 1 的三个问题。
	问题 2：求苹果下落过程中，在 $t=t_0$ 时刻的速度。	同教学设计II中问题 2 的三个问题。
	问题 3：水以恒速注入苹果形茶壶，研究壶内水的体积 y 与水面高度 x 的函数关系图象。	（1）体积 y 关于高度 x 的函数解析式能否明确表示。 （2）体积 y 关于高度 x 的函数的变化可以通过什么量反映。 （3）牛顿与莱布尼茨的工作有何异同。
	问题 4：同教学设计II中问题 4。	同教学设计II中问题 4 的两个问题。
课时小结	同教学设计II中的课时小结。	
作业布置	假如牛顿走进了我们的课堂，同学们有什么内容想与他进行交流。	

（1）分享本节课的学习体会，可以从对导数概念的理解、数学思想方法的领悟和对自己的启示等方面来交流。

（2）编制 1-2 道和导数有关的问题考考牛顿，并写出思考和解答的过程。

在此次教学中，执教者从当下的新冠肺炎疫情引出牛顿在避疫期间的历史，而后以此情境为主线，以“苹果”为研究对象设计问题串、重构教学。借助问题 1 和问题 2 介绍牛顿对平均速度和瞬时速度的研究，借助问题 3 介绍莱布尼兹对曲线切线的研究，从数和形两个角度加深学生对导数概念的本质理解，而后，借助问题 4 让学生体会知识之间的普遍联系。在课堂小结和作业布置环节，执教者适当留白，旨在让学生从知识、思想方法、情感态度等维度表达出内心的想法，彰显立德树人。

课后，执教者对本次教学进行了深刻反思。执教者认为，教学设计与教学实践正如理想与现实的关系，虽然教学设计经过多次研讨已较为完善，但在实际教学实践中仍然存在“有声无色”“有心无色”的问题。因此，在未来的教学中，一是要进一步提高语言的简洁性和精练性，二是要进一步思考数学史如何更好的融入数学教学，以发挥数学史的六大教育价值。

4 基于数学史的问题串设计

基于数学史的问题串是指以相关数学史料为主线，紧扣数学教学目标，运用一定策略提出的一系列具有内在联系、构成一个整体的数学问题[4]。在本节变化率与导数复习课中，从确定选题到教学实施，期间执教者与高校研究者多次围绕问题串的设计开展交流，最终促使 HPM 问题串日趋完善和清晰。图 1 给出了执教者三版教学设计中的问题串。

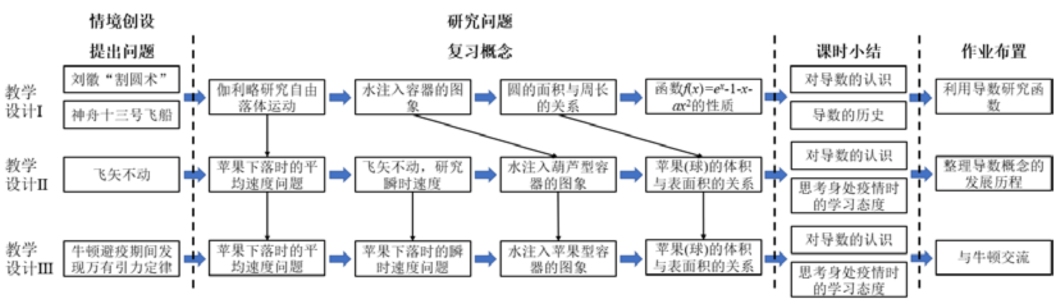


图 1 问题串的设计

通过分析本节 HPM 课例的开发过程，可以总结出 HPM 问题串设计前后发生的变化。

其一，重构历史，一以贯之。

本节课执教者希望基于 HPM 的视角，让学生再次经历平均速度逼近瞬时速度的过程，并从数和形两个角度加深学生对导数概念的理解。

在教学设计Ⅰ中，执教者尝试将数学史融入问题串设计，但是，所运用的数学史较为跳跃，既有 3 世纪刘徽的“割圆术”，又有 16 世纪伽利略的“自由落体运动”，还有 17 世纪牛顿和莱布尼茨对导数的研究成果，所用史料的时空跨度较大，且问题来回穿梭于数学内部和数学外部，因而在教学环节的衔接上略显生硬。于是，高校研究者建议执教者可以牛顿在避疫期间发现万有引力的这一段历史为主线设计问题串。

在教学设计Ⅱ中，执教者将牛顿在避疫期间的历史融入部分问题的设计，例如，研究苹果下落时的平均速度和苹果（球）的体积与表面积的问题，但不难发现，问题情境依然存在时空上的跳跃，即公元前 5 世纪的“飞矢不动”悖论、17 世纪的“万有引力定律”与现代的葫芦型容器三者间来回跳跃。

据此，执教者再次参考高校研究者的建议，在教学设计Ⅲ中用促使牛顿发现万有引力定律的一个苹果串联起整节课所需要复习的概念。相较于前两版教学设计，利用“一个人物、一段故事、一个主题”将有内在逻辑关联的问题串融入数学概念复习课，可以使问题间的衔接更加流畅和自然。

其二，关注情感，立德树人。

“立德树人”是教育的根本任务，如何在教育教学上落实“立德树人”，是数学教育研究的重要课题。

在初版教学目标和教学设计中，执教者仅在引入环节设置了时事内容，而更多关注学生在知识层面的收获，例如，体会导数的思想及其内涵、体会逼近的思想方法等，此时，执教者并没有充分发挥数学史的德育价值。为此，在教学设计Ⅲ中，执教者介绍牛顿避疫期间在科学史上作出的巨大贡献，让学生体会数学家坚韧不拔的品质；讲述牛顿和莱布尼兹对导数的贡献，让学生体会数学家创新的精神；最后，不仅让学生思考在疫情当下，对学习应抱有何种态度，还让学生在作业中跨时空与牛顿进行交流，由此让学生亲近数学、热爱数学，树立学习的自信心。

5 结 语

在本次课例研究中，变化率与导数复习课的教学设计前后经过了两次改进和一次实施，所聚焦的问题基本上得到了解决：执教者以牛顿在避疫期间的历史为背景、以一颗“苹果”的故事为主线，让学生再次经历从平均变化率到瞬时变化率的过程、体会导数的几何意义，这一过程不仅有助于深化学生对导数概念的本质理解，建立瞬时速度、切线斜率与函数的瞬时变化率的联系，体会逼近、以直代曲等思想方法，还有助于培养学生的数学抽象和逻辑推理素养，提升运用定义解决问题的能力，渗透科学精神和理性精神。可见，HPM 视角下变化率与导数复习课的教学能够发挥数学史的价值。

从本次课例研究中，我们得到以下启示。

其一，精心设计问题，提高教学效率。问题驱动是数学教学的一种重要策略，学生通过解决一个个数学问题，从而达成本节课的教学目标。因此，问题串的设计尤为重要，问题串中的问题不仅是思维训练的良好载体，还是思维链条中的路标和思维方向的指引者[12]。本节课以历史中的一个情境一以贯之设计问题串，当然，问题串的设计还有其它多种方式，例如，以一个问题展开变式、以一个主题推陈出新等。总之，问题串的设计要紧扣核心内容的认知、要立足于学生的认知起点、要处理好预设与生成的关系、要把握好梯度性原则，从而让数学课堂更有生机和更具效益[12]。

其二，创新复习模式，助力素养提升。复习课在高中数学教学中占据着重要地位，其在数学知识的整合、解题策略的构建、思维能力的提升等方面起着重要作用[13]。数学史作为一座巨大的宝藏，教师同样可以借助其中的情境、问题、方法等开展复习课的教学。借助数学史创新复习课的教学设计，不仅能让学生巩固先前所学习的知识，“螺旋式上升”地掌握重要概念、构建新知结构，还能在落实学科德育、达成立德树人根本任务上发挥独特的价值。

其三，重视学科教研，促进专业发展。已有研究证实了 HPM 课例研究的关键环节是教学设计研讨，而异质人员参与课例的研讨可以深化拓展教师 MKT 的改变[14]。HPM 理论具有丰富的理论内涵和实践价值，通过建立 HPM 专业学习共同体，广大教师和高线研究者可以高效协作，学习、传播 HPM 理念，优化、开发 HPM 课例，让 HPM 真正走进课堂教学。因而，教师应坚持教研相长，积极参与教研活动，并与共同体成员深入分享交流，不断在专业发展的道

路上前行。

参考文献

[1] 岳增成, 汪晓勤, 孙丹丹. 21 世纪国外数学史与教师教育关系研究与启示[J]. 数学教育学报, 2021, 30(06): 92-97.

[2] 蒲淑萍, 汪晓勤. HPM 视角教师专业发展的研究与启示[J]. 数学教育学报, 2015, 24(03): 76-80.

[3] 岳增成, 沈中宇, 王鑫, 邹佳晨. 影响小学数学教师 HPM 实践的叙事研究[J]. 数学教育学报, 2020, 29(06): 74-79.

[4] 马艳荣, 汪晓勤. 基于数学史的高中数学问题串初探[J]. 中学数学教学参考, 2018(10): 7-10.

[5] 黄丽梅. 高二学生导数概念理解的调查[D]. 河北: 河北师范大学, 2016.

[6] 杨安琪. 高中生“导数及其应用”的理解水平研究[D]. 福建: 闽南师范大学, 2020.

[7] 王芳. 数学史融入导数教学的行动研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2012.

[8] 张佳淳, 汪晓勤. HPM 视角下的“轨迹”课例研究[J]. 上海课程教学研究, 2020(Z1): 75-80.

[9] 卡茨(李文林, 等, 译). 数学史通论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008: 155-158.

[10] 博尔加列夫斯基(潘德松, 沈金钊, 译). 数学简史[M]. 上海: 知识出版社, 1984: 172-178.

[11] M.克莱因(张理京, 等, 译). 古今数学思想(第二册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 66-69.

[12] 王先进. 谈问题串的设计方法[J]. 数学通报, 2012, 51(07): 17-19, 23.

[13] 赵玉梅. HPM 视角下的“解三角形的应用”专题复习课[J]. 数学教学, 2020(05): 44-50.

[14] 栗小妮, 汪晓勤. HPM 课例研究对教师 MKT 的影响[J]. 数学教育学报, 2021, 30(03): 83-89.

他山之石

职前数学教师对学生统计思维的选择性注意与基于知识的推理

钱 秦

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

近几十年来，统计已经成为 K-12 数学教育中的一个重要话题。统计教育的研究集中在教师的统计内容知识，要求教师在其教学中涉及更多的统计主题，因此教师需要对统计知识有更扎实的理解。目前的政策文件要求教师除了掌握教学所需统计知识外，还应以学生对统计思想的理解和推理为基础进行教学。研究人员调查了 PSTs（职前数学教师）对学生在特定数学领域的注意情况，研究结果表明，PSTs 注意学生的方式因不同的数学主题而不同。然而，PSTs 在观察学生学习统计的过程中注意到了什么，以及他们如何利用知识来注意学生对统计概念的理解，这些都是鲜为人知的。此外，研究人员普遍认为，若要注意到学生思维的细微差别，教师必须具备该内容的专业知识，而结合专业知识对 PSTs 关于学生统计思维的注意的研究更是屈指可数。

因此，本研究的目的是探讨 PSTs 在观察统计学课程时，会选择性地注意到什么，以及他们如何利用自己的专业知识来推断学生的统计思维。在研究背景部分，作者详细探讨了已有关于教师注意、基于视频环境的职前教师注意（即调查 PSTs 在观察教学视频时的注意情况）、知识与注意的关系和统计教学知识（SKT）的研究，由此确定了研究方法和分析框架。

本研究的参与者为美国一所公立大学攻读数学教育学士学位的 8 名 PSTs，均完成了与本研究有关的两门课程：由统计学系为中学教师开设的统计学课程和中学数学教育方向第一学期的教育学课程。选择这些 PSTs 是因为他们具有统计知识，且具有使用技术分析数据的经验，也曾经通过课堂视频和学生的书面作业分析学生数学思维。这项研究选择了北卡罗来纳州立大学（North Carolina State University）的一个大规模在线开放课程项目的一个视频（为高中生开设的 13 分钟统计学课程）。这个视频不仅展示了教师的问题和学生的回答，还体现了统计思维的各种基本思想。

作者编制了一份由简答题和开放式问题组成的调查问卷。具体问题包括各种可观察的课堂

特征，以捕捉 PSTs 在观看视频时注意和忽略了什么。开放式问题要求 PSTs 写出视频中三个最值得注意的时刻或事件，并解释为什么特别值得关注，用以考察 PSTs 的选择性注意和基于知识的推理。

研究利用 Burgess（2009）的 SKT（统计教学知识）框架研究 PSTs 基于 SKT 对学生统计思维进行推理的方式，并使用 Sherin & Es（2009）的编码方案对 PSTs 选择性注意的维度进行分类：对象（教师、学生或其他）和主题（管理、气氛、教学法或统计思维）。此外，为了更好地理解 PSTs 基于知识的推理，作者还分析了 PSTs 注意特定课堂时刻的解释，根据 PSTs 解释的立场进行编码，分为描述性、评价性和解释性三类。编码框架如表 1 所示。

表 1 改编自 Sherin & van Es（2009） & Burgess（2009）的编码框架

选择性注意		**基于知识的推理**		
角色	主题	立场	用于探索学生思维的 SKT	
学生	管理	描述性	CKC 普通内容知识	需要数据
教师	气氛	评价性	SKC 专门内容知识	数据转换
其他	教学法	解释性	KCS 学生内容知识	数据变化
	统计思维		KCT 教学内容知识	模型推理
				内容整合

作者和一名研究助理利用该编码框架对 PSTs 的选择性注意和基于知识的推理进行了独立编码。编码者间的信度良好，在选择性注意和基于知识的推理中，Cohen’s kappa 统计值分别为 0.81 和 0.74，通过讨论解决了所有分歧。

PSTs 观看视频时的选择性注意的研究结果如表 2 所示。在注意的对象上，PSTs 更倾向于关注教师，而不是学生或其他。17 条回答被归类为“教师”，5 条被归类为“学生”。只有一条回答提到用来抽取随机样本的随机数生成器，被归类为“其他”。在注意的主题上，没有 PST 特别注意课堂的管理和气氛，绝大多数 PSTs 关注了教师的教学决策，如采用课堂讨论、鼓励学生回答问题等。7 个值得注意的时刻与统计思维有关，其中 3 条回答集中在一组同学的对话上（当学生们讨论车辆和燃油效率在城市道路和高速公路上的不同关系，两个男同学发现混合动力汽车并不遵循一般的模式，且提供了一个合理的解释）。上述表明，当观察到学生探索数据以发现并推断统计模型时，PSTs 认为学生的统计思维是值得注意的。

表 2 PSTs 的选择性注意

角色	频率	主题	频率
学生	5	管理	0
教师	17	气氛	0
其他	1	教学法	16
合计	23	统计思维	7
		合计	23

PSTs 基于知识的推理的研究结果如表 3 所示，其中一条解释被编码为两种类型的 SKT。对 PSTs 基于知识推理的分析表明，他们更倾向于使用解释性立场，而不是描述性或评价性立场来解释他们所关注的内容。有 16 条回答被归类为解释性立场，如 Daisy 写到“这组学生能够指出，与图表趋势不一致的数据来自节能汽车，说明学生有机会在课堂上应用他们的实际知识。”Daisy 关注到该组同学的良好表现，并解释了为什么学生能理解数据的异常，因此属于解释性立场。5 个值得注意的时刻被编码为描述性，如 Chole 认为课堂讨论值得注意：“因为它允许学生讨论数据中的不同案例，允许学生猜测为什么某些案例不符合模型。” Chole 的回答仅是她关于课堂的回忆，没有进行评价和解释，属于描述性解释。2 条解释带有评价性，如“在看到数据之前，先想想在特定情况下可能会发生什么，这是很重要的。”

表 3 PSTs 基于知识的推理

立场	频率	SKT	频率
描述性	5	SKC：数据变化	1
评价性	2	KCS：数据变化	2
解释性	16	KCS：模型推理	1
合计	23	KCT：模型推理	2
		KCT：内容整合	4
		与 SKT 无关的知识	14
		合计	24

关于在注意中使用的知识类型，研究发现，PSTs 很少基于 SKT 来推理学生的统计思维。相反，他们倾向于使用非统计学教学的知识来推理。然后作者举例说明了部分 PSTs 使用 SKT 内容进行选择性注意。如 Emily 认为，学生明白城市和高速公路间的燃油效率的关系并不适用于所有混合动力汽车。她强调数据变化的重要性，“学生注意到这一点很重要，这样他们就会

明白，不是所有汽车的关系都相同”，表明她使用了 SKC 来评估学生理解与解释数据异常的能力。同时她还预估“学生可能会理所当然地认为所有的数据都以 1 为中心，因为在刚才的例子中数据都以 1 为中心”。她也注意到教师强调过这些例子并不意味着数据中的所有值都以 1 为中心。这说明 Emily 使用了 KCS 来关注教师的解释，并推测学生在数据变化方面容易产生的误解。

而 Faith 特别关注教师对技术的使用，以及如何利用该技术培养学生的统计估计能力。当使用线性模型研究两个变量之间的关系时，Faith 认为在使用信息技术自动找到最佳模型前，让学生尝试合适的线性模型很重要。可以推断 Faith 展示了 KCT：模型推理，因为她提到了教学顺序，也知道如何使用技术工具来帮助学生建立线性模型。

Hailey 的一个回答被同时归类为 KCS：模型推理和 KCT：模型推理，Hailey 注意到教师在讲课中要求学生思考城市和高速公路上汽车的燃料效率之间的关系，并画出散点图。她预料到学生将难以理解这个统计模型，“16-18 岁的学生对这种关系有一些概念，但勾勒出一个散点图有点抽象……”，这表明 Hailey 使用了 KCS。作者进一步推断她也使用了 KCT，因为她知道有效的教学顺序以及散点图在教学中的使用。

本研究主要探讨中学 PSTs 在观看统计学课程时的选择性注意和基于知识的推理。首先，在选择性注意方面与之前的研究一致，超过 70%的值得注意的时刻的关注对象被归类为教师，而且注意更可能集中在教师的教学方法上。当前研究中的 PSTs 普遍认为，教师促进学生参与、课堂讨论等一般教学行为值得注意。其次，在 PSTs 基于知识的推理方面，以往的研究认为 PSTs 在解释学生的策略和想法上存在困难，但本文发现，PSTs 能够顺利地解释教师的教学决策和学生对统计知识的理解。一个可能的原因是，此次调查的 PSTs 都完成了教育学课程，也具有分析数学课程视频的经验。但我们不清楚在数学领域具有较强注意能力的 PSTs，是否在统计领域具有同样的注意能力。因此，未来需要探索职前和在职教师如何在不同的数学和统计背景下进行注意。同时，本研究发现许多 PSTs 试图对教师和学生的行为提供解释，但超过一半的解释与 SKT 无关，更多的出于一般教学知识，这一点同样值得探索。最后，作者在统计教师培养的课程设置上提出了建议，希望设计一门课程来帮助 PSTs 发展他们的 SKT 和基于 SKT 的统计思维推理能力，以更好地发展学生的统计思维。

参考文献

[1] Shin, D. Preservice Mathematics Teachers' Selective Attention and Professional Knowledge–Based Reasoning About Students' Statistical Thinking[J]. *Int J of Sci and Math Educ*, 2021, 19(5): 1037-1055.

活动讯息

共聚线上研学，品读理性之美

第二期 HPM 高中网络研修班——“古典概型”课例展示活动顺利举行

蔡春梦[1]，雷沛瑶[2]

(1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2.华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

2022 年 7 月 9 日晚上 7 点半，第二期数学史与数学教育（HPM）高中教师网络研修班研修活动如期举行。本次活动的主题为古典概型课例观摩与交流，由数学史与数学教育（HPM）工作室主办。华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师，HPM 工作室高中教师、第二期 HPM 高中教师网络研修班学员以及 HPM 方向的研究生共聚线上，观摩精彩课例，展开激烈讨论。

本次研修活动包含三个部分，分别是优秀课例展示、课例实践经验分享以及评课交流（图 1）。

数学史与数学教育（HPM）工作室

HPM 网络研修班-古典概型课例展示与研讨活动

7 月 9 日 晚上 19:30-21:30 腾讯会议号：420-275-512	
19:30-20:10	HPM 视角下的古典概型课例展示 张青松 云南师范大学实验中学
20:10-20:55	HPM 视角下的古典概型课例实践经验分享 张青松 云南师范大学实验中学 倪骎远 上海市平和中学 张翠妹 北京市宣武外国语实验学校
20:50-21:30	评课与交流

图 1 研修活动安排

首先，云南师范大学实验中学的张青松老师为大家带来一节“HPM 视角下的古典概型”展示课（图 2）。课堂伊始，张老师呈现骰子实物，并从数学的角度解读凯撒大帝的名言，从而引出本节课内容——古典概型。随后，张老师借助意大利数学家卡丹提出的“掷两枚质地均匀的骰子，点数之和为 7 的概率最大”这一经典历史问题，结合学生们课前实施的大量重复试

验结果，引导学生用树状图、列表法等方式表示样本空间，从而求解事件概率。紧接着，通过 3 个追问，张老师引导学生总结归纳了古典概型的定义。在巩固环节，张老师用数学语言清晰地呈现了解题过程，强调了古典概型的两个特征：有限性和等可能性。小结部分，张老师带领学生回顾了古典概型解决实际问题的步骤，并以严加安院士的悟道诗“随机非随意，概率破玄机”作结，强调了概率知识的学习对揭示随机现象背后奥秘的重要性。

图 2 张青松老师的课堂教学视频

图 3 张青松老师的课例经验分享

课堂视频结束之后，张老师从教学设计意图、学生课堂反应以及学生课后作业情况三方面对本节课进行了总结（图 3）。他指出，学生对融入数学史的教学表现出极大的兴趣，认为该方式有利于知识的理解。

随后，上海市平和中学的倪骎远老师（图 4-5）、北京市宣武外国语实验学校的张翠姝老师（图 6-7）也分享了他们的课例经验。倪老师聚焦 HPM 在 IB 课程中的实践，从课前准备、试讲改进、课堂设计、课后反思四个方面总结其收获。同时，倪老师也提出了 HPM 在 IB 课程上的进一步实践方向。张翠姝老师展示了整节课的教学流程，并强调了高三概率复习课所面临的困境。她表示，在高三这个特殊节点，概率论历史的融入能帮助学生在有限时间内更好地认识古典概型。

图 4 倪骎远老师的课例经验分享

图 5 倪骎远老师

图 6 张翠姝老师的课例经验分享

图 7 张翠姝老师

在随后的交流环节，各位老师积极分享自己的观点。上海市北虹高级中学陆鼎元老师从板书设计、例题选择等方面谈论张青松老师的课例对自己教学的启示，陕西省乾县第二中学王朋老师则从史料的适切性、方式的多元性、融入的自然性、价值的深刻性四个方面谈及收获。其他老师也从不同的视角分享了自己收获的教学启示。

最后的专家点评环节，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师从教学设计、课堂呈现等方面对这三节课都表示了肯定。他建议，经过课前研讨、正式上课、课后反思等一系列研修活动，老师们可以有所聚焦，用文字的形式总结这一过程中的收获，做到从教学中发现问题，从反思中解决问题。

华东师范大学教师教育学院汪晓勤老师则从这三节课中提炼出了四个重点。首先，数学史经典问题走进课堂的价值可归结为以下五点：提供探究机会，促进古今对话，夯实文化底蕴，深化知识理解，实现多元价值。其次，在关注学生困难方面，数学史可以提供更多的启发。借鉴古人遇到的困难，教师可以预测学生可能产生的问题，从而更好地理解学生思维。再次，关注学生生活经验，提高学生学习兴趣。对于一些经典问题，教师可以结合学生生活实际，对其改编，进而推动学生思考。最后，应重视数学史独特的德育价值。

本次观摩课活动就此圆满结束，大家满载而归。在未来的日子里，相信 HPM 专业共同体与各位老师通力合作，定能开发出更多优秀课例，为数学教育添砖加瓦！

云端交流共成长，论文撰写有方向

—— 专题讲座：HPM 课例论文的撰写：意义、方法与体会

刘叶青[1]，雷沛瑶[2]

(1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2.华东师范大学数学科学学院，上海 200241)

2022 年 7 月 23 日晚上 7 点半，HPM 网络研修专题讲座正式举行。苏州大学数学科学学院的沈中宇博士以在线会议的形式给全国各地的百余名教师带来一场题为《HPM 课例论文的撰写：意义、方法与体会》的精彩讲座（图 1）。

图 1 主讲人简介

讲座很好地回应了学员们对于 HPM 课例论文撰写的一些困惑。整体而言，沈博士从 HPM 课例论文撰写的意义、原则、结构、内容、体会等五个方面进行分享（图 2）。

图 2 HPM 课例论文的撰写

就意义而言，沈博士指出教师撰写 HPM 课例论文除了增加自身学术成果，提供职称评定所需的材料，为参与相关荣誉比赛做准备之外，还有三个方面的重大意义。一者总结教学实践

经验，二者促进自身专业发展，三者分享新鲜教学成果。沈博士表示，在 HPM 课例整个实施的过程中，教师有机会经历四次提升，其一是在史料的梳理与分析阶段，教师通过对史料的了解，可以加深对于相应主题知识的理解；其二是在与同行交流的研讨阶段，可以集思广益、博采众长；其三是在课例具体实施阶段，可以在实践中检验自己的设计，从而在行动中学习；其四是在写作反思阶段，可以重新审视教学设计及实施过程，从而学会以更全面的视角看待问题。

就原则而言，沈博士建议课例论文的撰写应该秉持以下四个原则（图 3）。其一，新颖性——创新是写作的灵魂，文章的撰写一定要有所创新。其二，科学性——论文撰写过程中，不能存在科学性的错误。其三，逻辑性——主要包括结构上的逻辑和内容上的逻辑，前者要求关注文章的起承转合，后者则要求内容能够环环相扣。其四，可读性——具体包括准确、简练、文采三个层次，其中准确是最低的要求。

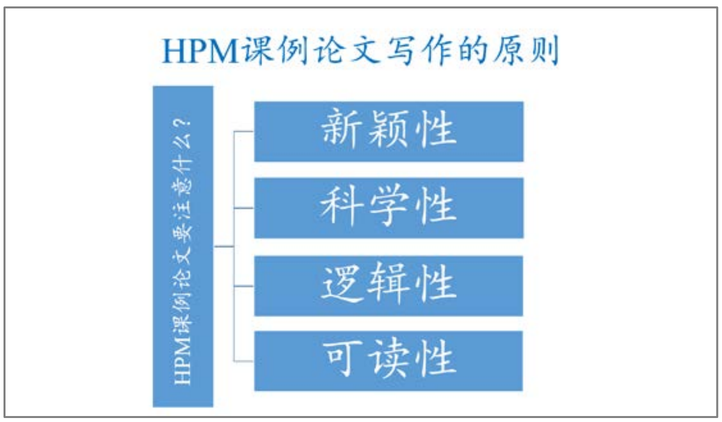


图 3 HPM 课例论文写作的原则

就结构而言，沈博士指出，课例论文的一般结构包括：引言、历史材料及其运用、教学设计与实施、学生反馈及结语。这五部分并不是彼此独立、相互分离的个体，而是一个环环相扣、紧密相连的整体。他以“HPM 视角下的周期函数概念教学”一文为例，提醒老师们需要关注引言与学生反馈的呼应、关注引言与结语部分的呼应、关注数学史料及其运用和教学设计与实施之间的呼应。

就内容而言，沈博士对每一个部分提出了详细的撰写建议。他指出，引言部分应该交代课例研究的背景，具体可以从课标、教材的情况、教学现状、教学中存在的问题、教学目标等情况进行撰写；在历史材料及其运用的部分，可以概述相关主题的发展历史，也可以梳理出历史发展的阶段；在教学设计与实施的部分，通常可以按照教学环节（引入-新授-例题-练习-小结）

进行撰写，但在撰写过程中要注意教学环节的完整性，教学过程详略得当，同时，在精彩之处可以适当插入课堂对话；在学生反馈部分，主要用来呈现课堂观察、问卷调查、课后访谈的结果，并加以分析，尽可能要有数据的展示、学生的典型回答，必要时可以插入图片（比如学生的解答、课堂实录的照片等）；在结语部分，主要用来总结教学目标达成的情况，提炼数学史在整个教学过程中所起到的具体作用，在此可以借鉴汪晓勤教授的“HPM 课堂教学评价新框架”，此部分要做到尽可能的客观与简练，同时要有所升华，即站在更高的视角，利用更高的观点去审视自己的教学。

在讲座的最后，沈博士结合自己作为论文撰写者及审稿人的双重身份给大家提了三点建议（图 4）。其一，好文章是写出来的，行动是关键。理论和实践是存在巨大鸿沟的。行甚于言，动手写起来是最好的成长途径。其二，好文章是议出来的，交流是重点。不要担心自己写的不好，要试着与别人多沟通、多研讨。其三，好文章是改出来的，修改是常态。也许在我们的精神领域有一个完美的 HPM 的课例论文，但是在现实中我们也许永远都达不到，但是我们永远在走近完美的路上。

图 4 HPM 课例论文写作的体会

讲座结束之后，各位老师反应热烈。浙江省象山中学的杨育池老师提出如何保证论文“新颖性”的疑问，沈博士表示，其实很多论文都难以有重大的创新，但即便是很微小的创新，比如史料选择内容的创新、教学方式的创新（新理念、新的教学方法、技术手段的运用等）都是创新，我们可以注意在交叉方面寻找我们的创新点。

会议的最后，华东师范大学教师教育学院的邹佳晨老师和汪晓勤教授针对沈博士的讲座内容做了补充。邹老师指出，没有动笔永远不会有进步，从 0 到 1 不容易，我们应该尽可能保证

自己的努力在时间函数上做到连续。汪老师则特别强调的四点，一者从经验型教师到专家型教师，写作是必由之路；二者写作的灵魂是创新，创新可以从新材料、新方法、新观点等角度发力，三新只要占一新即可；三者好文章是改出来的，不要怕对文章进行修改；四者一定要避免文章的套路化，避免拙劣的模仿。

至此，本次研修班的活动暂时告一段落。炎炎夏日的夜晚配上干货满满的分享，再加上各位老师智慧的头脑，是否会诞生一篇篇优秀的课例论文呢？

观摩促成长，互学共提升

第二期 HPM 高中网络研修班——“圆锥曲线”课例展示活动顺利举行

刘梦哲[1]，雷沛瑶[2]

(1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2.华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

2022 年 8 月 6 日晚上 7 点半，第二期数学史与数学教育（HPM）高中教师网络研修班“圆锥曲线”课例展示活动在线上举行，本次活动由数学史与数学教育（HPM）工作室主办，在华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授和邹佳晨老师的带领下，HPM 研究团队的硕士、博士研究生与第二期 HPM 研修班、HPM 工作室教师共同参加了本次活动，针对 HPM 网络研修班中两位老师开展的“圆锥曲线”课例进行观摩学习和交流研讨。

本次课例展示活动主要分为观摩教学视频、实践经验分享以及集体评课交流三个环节（图 1）。

数学史与数学教育（HPM）工作室 **HPM 网络研修班-圆锥曲线单元展示与研讨活动（一）**	
8 月 6 日 晚上 19:30-21:30 **腾讯会议号： 964-495-078**	
19:30-21:00	圆锥曲线的数学实验 戴泽莉 淮南二中 圆锥曲线的光学性质 王文雅 浙江大学附属中学
21:00-21:30	HPM 视角下的圆锥曲线单元-课例实践经验分享 戴泽莉 淮南二中 王文雅 浙江大学附属中学
21:30-21:50	评课与交流

图 1 研修活动安排

1 观摩教学视频

本次活动组织集中观摩了三节“圆锥曲线”课例，两位开课老师分别是安徽省淮南第二中学的戴泽莉老师和浙江省浙江大学附属中学的王文雅老师。戴泽莉老师分享了圆锥曲线的焦点探究和准线探究两节实验探究课，王文雅老师分享了圆锥曲线的光学性质一课。

戴泽莉老师第一课时聚焦圆锥曲线的焦点探究（图 2），首先借助阿波罗尼奥斯对圆锥截线的研究引出液面形状实验，学生在圆柱形、圆锥形容器中加入适量的液体，并倾斜容器，从而观察液面与容器侧面的交线的形状。其次，进行球体影子实验，通过改变光线的位置，让学生观察乒乓球在灯光下影子的形状，为后续引出旦德林内切球模型铺垫，同时也让学生直观感知焦点的位置。再次，进行旦德林双球实验，借助该模型让学生探究椭圆和双曲线的两个焦点间的性质，及抛物线的焦点性质，学生通过制作旦德林双球模型，也能够更好地感知圆锥曲线的性质，为探究提供更多的思考方向。最后，戴老师借助圆柱中的双球模型，论证椭圆焦点的位置，借助圆锥中的双球模型，论证双曲线焦点的位置。

图 2 戴泽莉老师的第一节展示课

戴老师第二课时聚焦圆锥曲线的准线探究（图 3），首先借助圆锥旦德林单球模型，论证抛物线焦点的位置，并确定其准线的位置。然后，再次利用平面截对顶圆锥模型，研究双曲线的准线问题。最后，借助圆锥和圆柱中的双球模型，研究椭圆准线的问题。

图 3 戴泽莉老师的第二节展示课

王文雅老师（图 4）先带领学生回忆平面反射和曲面反射，通过改变抛物面中点光源的位置，学生可以总结出抛物线的光学性质，并解释卫星接收器和手电筒背后的设计原理，而后，让学生思考椭圆的光学性质，并解释短距离的信号传送以及音质测试背后的原理，最后，让学生继续思考双曲线的光学性质，并对汽车后视镜上的曲面镜的原理进行解释。在引出三种圆锥曲线的光学性质后，王老师带领学生从几何的视角证明光学性质，从而让学生感受到三种圆锥

曲线内部的统一性，王老师还利用几何画板验证学生的猜想，即抛物线和双曲线在无穷远处是连通的，且从一个焦点发射的光经反射会经过另一个焦点。在后半节课中，王老师引导学生探索光学性质背后深层次的应用，辅助学生攻克一类解析几何难题，如光程问题、动弦中垂问题，培养学生分析、解决问题的能力与数学运算核心素养。

图 4 王文雅老师的展示课

2 实践经验分享

在实践经验分享环节中，两位老师从课例形成过程、教学设计思路等方面分享了实施感受。

戴老师表示（图 5），两节课中的“液面形状”“球体影子”“旦德林双球模型”三个数学实验具有层层递进的关系，学生要经历观察、猜想、建模、论证和提问的完整过程。其次，在教学过程上，教师考虑进行单元教学设计，序言课中先将数学史中的相关问题前置抛给学生，常规教学中则穿插了旦德林双球模型等史料，而两节数学实验课是以学生为主体，通过学生亲自动手，将所学习的知识进行整合。最后，戴老师从数学史课、校内公开课、第三届华人数学教育大会、第七届数学史与数学教育研究班、网络研修班、组内公开课，依次谈及整个课例开发的过程。

图 5 戴泽莉老师分享执教体会

王老师表示（图 6），在教学设计初期准备以阿基米德燃烧镜引入教学，并探索生活中的

“卫星锅”“变焦夜钓灯”，其次，让学生制作抛物面的铝箔片，通过实验让学生观察平行光反射后光线汇聚的效果，而后改变光源的位置，让学生再次观察抛物面反射光线的情况，再次，过渡到椭圆的光学性质，并让学生结合椭圆与双曲线的光学性质，思考这两类曲线间的联系，同时，还让学生猜想双曲线的光学性质，最后，让学生思考圆锥曲线的光学性质在生活中的应用。在完成初步的教学设计后，有部分老师认为教学内容虽有趣，但缺乏深度，因此王老师尝试将圆锥曲线的光学性质作为暗线开展教学。王老师以海伦、开普勒等在光学上的研究成果为背景，先带领学生探索抛物线、椭圆和双曲线的光学性质，然后利用几何方法对其进行证明，并思考这三类曲线间的统一性，最后，王老师设计了与距离、法线有关的一系列问题。

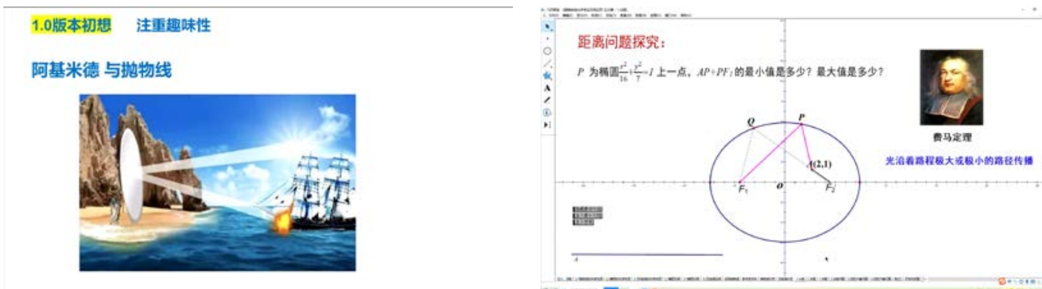


图 6 王文雅老师分享执教体会

3 集体评课交流

在评课交流环节，来自不同小组的代表老师分享了观摩的体会与收获（图 7）。河南省新乡市第一中学的孙福祥老师表示，教师可以将生动的数学文化知识融入到实际的课堂教学中，让学生感受到枯燥的数学知识背后蕴含丰富的文化背景，并体会到知识的来龙去脉。江苏省邳州市炮车中学的陈海飞老师表示，戴老师的数学实验课探究课是改变传统课堂教学的有益尝试，通过让学生做中学，体现了生本课堂的新课改理念，同时，戴老师对 GeoGebra 软件的使用也非常熟练，王老师的课程内容具有一定的深度，借助信息技术帮助学生更直观的理解圆锥曲线的光学性质及其应用。上海市卢湾高级中学的王禹老师表示，戴老师设计了数学实验活动，能让学生动手猜想、严格证明，通过灵活运用技术，还有助于学生理解，同时，小组讨论也能让班级中的每一位学生参与到课堂活动中来，王老师的课堂则给人耳目一新的感觉，运用数学史，数学内容可以变得丰富。江苏省南通中学的汪留屿老师表示，将数学实验引入数学课堂给人眼前一亮的感觉，通过课件制作，帮助学生直观的观察圆锥曲线的形成，调动了学生思考的积极

性，王老师将数学史与数学研究相结合，从生活实例抽象并探索圆锥曲线的光学性质。云南师范大学实验中学的张青松老师表示，戴老师较好的达成了教学目标，教学内容上从直观到抽象，呈现出一个递进的过程，课件制作精美，能够直观的体现三种曲线的联系及其几何性质，当然，过于依赖信息技术可能会存在“学生活动限制在讲台”“台下学生手上无工具”等问题，王老师从定性到定量的方式设计教学内容，关注到三种曲线在生活上的运用，由此引起学生对光学性质的好奇心，当然，如果借助光路图，学生可能会对光学性质有更好的理解。上海市平和学校的倪骎远老师表示，戴老师的课件和实验用具准备的非常充分，学生的实际操作对教师的课堂把控提出了较高的要求，同时，通过教师引导，学生也乐于分享自己的观点，王老师利用圆锥曲线的光学性质引入教学较为新颖，而后续问题的讨论可以考虑与实际情境相结合。新疆兵团二中的洪春梅老师表示，双曲线的旦德林模型的几何证明方法难度较大，戴老师可以尝试将其留作课下延伸学习，王老师从实际生活出发，能够激发学生的学习兴趣，利用几何画板，直观的研究抽象的几何模型，是对课本内容的再开发、再利用。

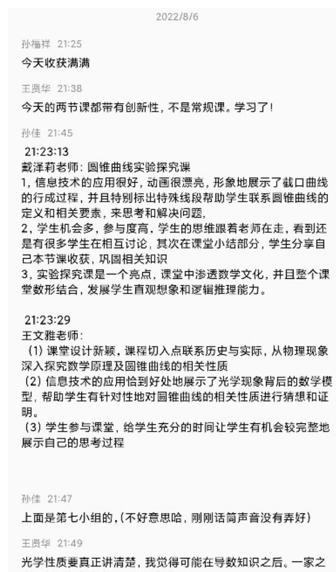


图 7 小组老师分享交流学习体会

最后的专家点评环节，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师指出，戴老师的两节课给予了学生充分的表现机会，体现了课堂留白的教学理念，在教学中，教师借助圆台型、圆柱型的量杯，让学生在做中学，这一过程有助于学生走近圆锥曲线，同时，两节探究课前后衔接，教学内容具有一定的宽度，学生在课堂中需要经历发现和证明的过程，有助于培养学生的逻辑推理、直观想象素养，加深了学生对立体图形几何直观的理解，改善了学生的数学信念。王老师

将圆锥曲线的光学性质和与之相关的问题结合在一起是非常好的尝试，一方面，使用几何方法研究圆锥曲线的几何性质非常巧妙，但也需要关注代数方法，例如，学生理解“无穷远点”有一定的难度，未来可以结合导数继续研究，另一方面，老师可以寻找实物教具与信息技术之间的平衡。

华东师范大学教师教育学院汪晓勤老师首先对两节课给予充分肯定，认为两节课各有特色，然后谈及教师课例论文的撰写。撰写课例论文时应注意创新，以戴老师的课堂为例，可以总结为“一二三四五”，即一种方法——教会学生数学研究的方法（观察、猜想、论证），两座桥梁——架起了原始定义与第一定义、原始定义与第二定义的桥梁，三种素养——整节课有助于培养学生的直观想象、逻辑推理和数学抽象素养，四类价值——发挥数学学科德育中的理性、信念、情感、品质的价值，五种留白——留白为学生提供广阔的思维空间和丰富的探究机会，本节课留出了发现之白、论证之白、发现之白、问题之白和超越之白。如此对本节课进行分析，可以让课例论文有所升华。

暑期研修促成长，学思悟行共提升，本次“圆锥曲线”课例观摩课活动圆满结束。通过此次研讨契机，开阔了教师的视野，促使教师不断思索自己教育事业的成长之路，相信 HPM 网络研修班成员们必定各有收获、各有成长。

新学期新气象，共研讨促成长

——HPM 工作室“均值不等式高三复习课”&“异面直线间的距离”课例研讨活动顺利举行

刘梦哲，刘思璐

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2022 年 8 月 28 日晚上，HPM 工作室高中课例研讨活动在线顺利举行（图 1）。本次活动由数学史与数学教育（HPM）工作室主办，华东师范大学教师教育学院汪晓勤老师、邹佳晨老师，HPM 工作室高中教师、第二期 HPM 高中教师网络研修班学员、华东师大基础教育学科教研联盟高中数学组教师以及 HPM 方向的研究生共同参与。此次活动的课例研讨主题为“均值不等式高三复习课”和“异面直线间的距离”，由教师教育学院博士生刘思璐主持。

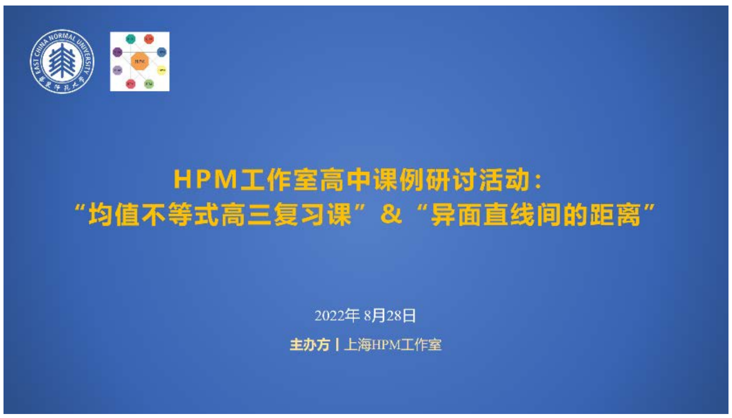


图 1 HPM 工作室课例研讨活动

【环节一：“均值不等式高三复习课”研讨】

教师教育学院硕士生钱秦报告了均值不等式的相关史料和教材分析（图 2）。钱秦首先介绍了课程标准以及各版本教科书中关于均值不等式的教学内容和要求，接着从均值定义、证明方法、模型补充和应用举例四个维度详细介绍了均值不等式的相关数学史素材。就均值定义而言，给出了算术中项、几何中项、调和中项和反调和中项的定义；就证明方法而言，给出了几何法、代数法的证明；就模型补充而言，给出了公切线模型、等腰三角形模型、二次曲线模型、函数模型；就应用举例而言，均值不等式亦与等周问题、最大视角问题、勾股容方问题密切相关。

图 2 均值不等式的相关材料分享

教师教育学院硕士生刘梦哲分享了数学史在复习课中发挥的五类教育价值，包括加强知识联系、深化知识理解、渗透思想方法、丰富问题资源和落实立德树人。上海市回民中学的徐洁岚老师表示，高三复习课要把不同知识板块的内容进行融合，同时考察高三学生的知识基础，从而合理设计本节课的教学内容。

教师教育学院汪晓勤老师指出，若想创新高三复习课，一要有新材料，二要建立知识间联系。从已有的数学史料出发可产生许多新材料，例如，基于学生熟悉的大方图模型可以构造出等腰三角形模型，基于最大视角问题可以构造出切割线模型。同时，基于新模型还需要建立知识之间的联系，例如，建立均值不等式与函数、三角之间的联系（图 3）。

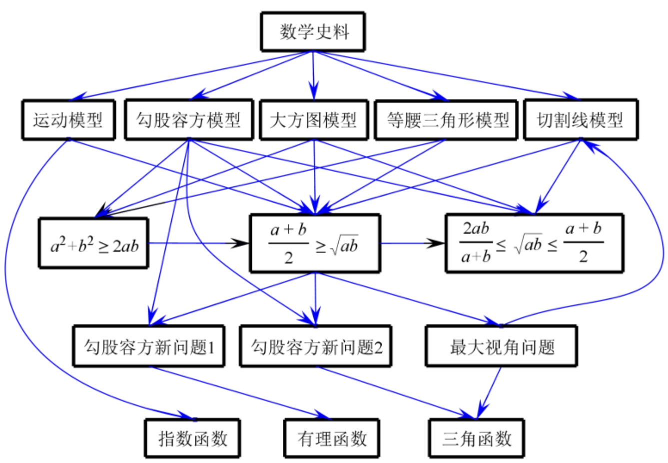


图 3 均值不等式的知识关联图

教师教育学院邹佳晨老师围绕课堂留白分享了自己的观点。邹老师认为，学生已经学习了均值不等式，能够利用均值不等式解决一些简单的问题，因此，教师可前置部分教学内容，让学生在课前对一些有挑战性的问题先进行思考，进而在课堂中由学生补白。

【环节二：“异面直线间的距离”研讨】

刘梦哲报告了异面直线间的距离的相关史料和教材分析（图 4）。刘梦哲介绍了早期教科书中异面直线间的公垂线（段）的存在性、唯一性和最小值性的不同证明方法，建议将异面直线间的距离转化为线面距离或面面距离进行计算。同时，他还分析了课程标准和沪教版教科书中异面直线间的距离的内容。

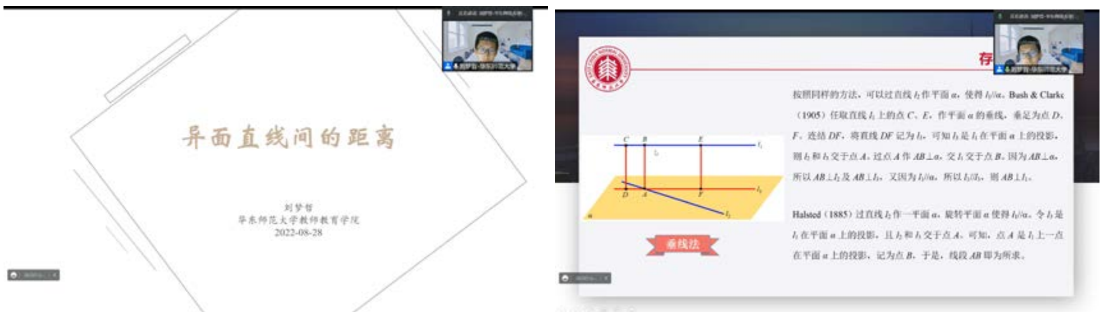


图 4 异面直线间的距离的相关材料分享

接着，各位计划开课的老师分别介绍了自己对于 HPM 视角下异面直线间的距离这节课的初步教学设计，包括上海市进才中学的吴晨昊老师、华东师范大学附属第一中学的方倩老师、上海交通大学附属中学嘉定分校的钟萍老师、上海市曹杨中学的蒋颖楠老师、上海市市北中学的舒适老师。

对于各位老师们的教学设计，其他参与活动的老师从不同的方面进行建议。

刘梦哲表示，本节课的教学容量较大，教师可将部分学习任务前置，结合“教师留白、学生补白”的方式，例如，课前设计构造公垂线的任务，留出发现之白，课上让学生说明所构造的线段是公垂线，进而留出论证之白。同时，本节课的证明对学生而言具有挑战性，教师应根据学情，合理选择史料，以此提高学生的直观想象和逻辑推理素养。

刘思璐补充到，教师可根据学情来确定教学目标，或让学生关注存在性的不同构造方法，或探究唯一性的不同证明方法，彰显不同方法的德育价值。此外，教师可思考此节课所涉及的几何学教育价值。例如，从实际应用出发，在新知引入或例题训练环节补充实际应用问题，激发学生的学习动机；或从思维训练出发，通过存在性、唯一性或最小值性的证明训练学生的逻辑推理能力和空间想象能力。

邹佳晨老师从教材、学情和留白三个方面分享了自己的想法。其一，新版沪教版教科书在立体几何内容的设计上有较大变化，更加重视立体几何内容，关注培养学生的直观想象和逻辑

推理素养。其二，存在性和唯一性的证明是本节课的重点和难点，教师应根据学情确定教学目标和要求。其三，史料中的诸多证明方法为培养学生的逻辑推理素养提供了一个很好的载体，教师可让在学生“补白”的过程中，经历从不完善到完善的过程，实现对学生数学素养的培养。

汪晓勤老师强调几何概念教学应包括三个阶段，一是直观感知，就异面直线而言，可以展示建筑、工程等领域中许多来自数学外部的例子；二是实验几何，可以设计双杠等实物模型让学生进行异面直线间距离的测量；三是演绎几何，可以让学生对相关定理进行逻辑证明。其次，在概念构建和逻辑论证环节，教师应该充分留白，让学生来补白，并采取古今对照的方式，对学生的探究结果进行评价。

在大家的热烈讨论和思考中，本次长达两个小时的研讨活动圆满结束。通过研讨，相信参与活动的各位老师必定有所收获，期待工作室的老师们未来能够上出一节精彩的“均值不等式”的高三复习课和“异面直线间的距离”的新授课，也期待我们在数学史融入数学课堂的道路上继续前行。

图 5 参会人员合影

历史现实相融合，同课异构共欣赏

——HPM 工作室“异面直线间的距离（二）”课例研讨活动顺利举行

刘倩雯，石城，刘思璐

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2022 年 9 月 12 日晚上，HPM 工作室高中课例第二次研讨活动在线顺利举行（图 1）。本次活动由数学史与数学教育（HPM）工作室主办，华东师范大学教师教育学院汪晓勤老师、邹佳晨老师，HPM 工作室高中教师、第二期 HPM 高中教师网络研修班学员、华东师大基础教育学科教研联盟高中数学组教师以及 HPM 方向的研究生共同参与。此次活动为“异面直线间的距离”课例的第二次研讨。

图 1 HPM 工作室课例研讨活动

首先，上海市市北中学的舒适老师（图 2）、上海交通大学附属中学嘉定分校的钟萍老师、华东师范大学附属第一中学的方倩老师、上海市曹杨中学的蒋颖楠老师和上海市进才中学的吴晨昊老师依次分享了上次课例研讨后修改的“异面直线间的距离”的 HPM 教学设计。

图 2 舒适老师分享异面直线间距离的教学设计

随后，其他参会老师针对五位老师的教学设计各抒己见，分享了自己的感受与建议。

教师教育学院硕士生刘梦哲表示，各位老师都将上次研讨会汪晓勤教授强调的几何概念教学的三个阶段——直观感知、实验几何、演绎几何融合到了教学之中。本节课的教学内容较多，由于课堂时间有限，教师可采取让学生在课前构造异面直线的公垂线、课中进行分享的方式。这种“教师留白，学生补白”的方式是本堂课的亮点。同时，教师可以通过制作微视频等方式将史料自然地融入课堂。

上海市建平中学的李传峰老师表示，本堂课的教学重点不仅是异面直线公垂线的存在性和唯一性的证明，还应包括公垂线段表示异面直线间距离的合理性。对此，李老师表示，可以通过类比的方式引导学生从两点之间距离到点线之间的距离再到异面直线间的距离，从而解释为什么要用公垂线段表示异面直线间的距离。

上海市嘉定区教育学院的雷世清老师与新疆维吾尔自治区阿克苏地区库车二中的杨育池老师也分享了自己的教学建议。雷老师表示，教学设计需要建立在研究学生、研究教材、研究数学史的基础上，且研究要遵循严谨务实的原则。杨老师则表示，情境的创设可以去复杂化，精简直接。

图 3 教学设计研讨

教师教育学院博士生刘思璐总结了五位教师在此次教学设计上的变化。其一，教师们在教学设计中都加入现实模型，体现了该主题的实际应用价值。其二，教师们在教学设计中更加细化了学生探究和证明的任务。异面直线间的距离作为一个几何证明主题，能够影响学生的认知，包括数学思想方法和核心素养能力，教师可关注数学史在学生认知发展方面的作用。

邹佳晨老师给出了五点建议：其一，立体几何内容的难点在于其对学生抽象能力的要求较高，因此，教师可从现实生活中抽象出的问题情境让学生更快更直接地进入主题；其二，异面直线公垂线的唯一性的证明虽是难点，但可以根据学情辅以教学工具帮助学生推导定理；其三，留白式教学设计可根据学习目标进行分组，让学生合作补白；其四，教师要让学生感受到利用数学史解决问题的过程；其五，可以通过课堂学习单、课后作业和课堂录像等多种形式收集课例数据。

最后，汪晓勤老师从三个方面进行点评。其一，关注留白，古今对照。一堂好课不仅关注“是什么”和“为什么”，还应关注“还有什么”。本节课最大的难点在于教师需要平衡有限的课堂时间与探究式教学的需要。HPM 的基本理念是再创造，一篇好的课例少不了留白，教师应让学生更多地参与课堂，提出自己的问题。其二，设计问题，一线贯通。教师在设计问题时要注意问题的衔接以及教学过程的流畅性，逻辑上环环相扣的问题串会成为教学设计的亮点。其三，双重价值，不可偏废。几何的教育价值一方面是训练思维和培养核心素养，另一方面是实用价值，教师可在课堂的最后加入实际应用的问题，与课堂引入的现实情境呼应。

在参会人员的热烈讨论与思考中，本次课例研讨活动圆满结束。通过此次研讨，希望参与研讨的各位老师对 HPM 视角下的课堂教学及其教育价值有更进一步的认识，也期待工作室的

老师接下来实施的 HPM 视角下异面直线间距离的教学。

图 4 参会人员合影