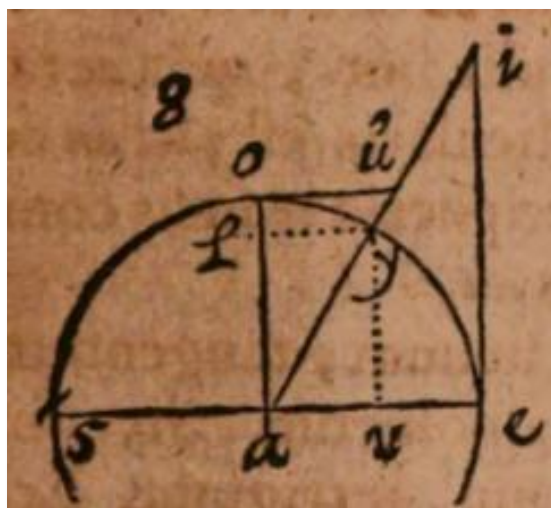




上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2023 年第 12 卷第 06 期



荷兰数学家 Snell 《三角学》

三角函数的线段定义图

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：刘梦哲

编委（按姓氏字母序）：

韩 粟 胡永强 孔雯晴 栗小妮 刘倩雯 刘思璐 秦语真 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 岳增成 邹佳晨

刊首新语

构造无字证明，设计留白教学

汪晓勤

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

学生在学习平面三角学的过程中，往往将三角公式的记忆视若畏途。实际上，历史上三角学教科书的编者们也注意到这一点，并为此设计了一些记忆的方法。例如，Bowser (1892) 通过构造图 1 所示的三个直角三角形，利用锐角三角比的定义以及勾股定理，让学生记忆平方关系、倒数关系和商数关系共八个公式。Crocket (1896) 则利用锐角三角函数的单位圆定义，

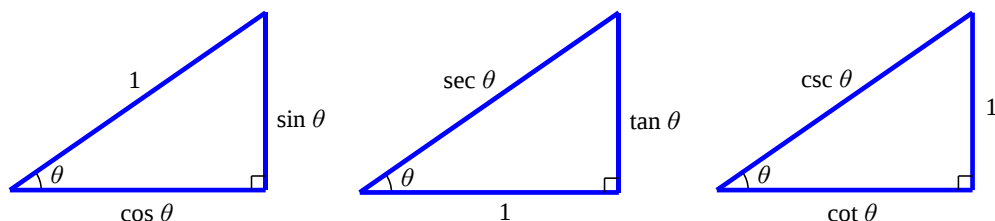


图 1 直角三角形记忆法

让学生记忆同角三角函数的关系式。如图 2 所示，在单位圆 O 中， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $\angle AOC = \theta$ ， $CD \perp OA$ ， $CF \perp OB$ ， $AE \perp OA$ ， $BG \perp OB$ ，于是得到锐角 θ 的六种三角函数。除了平方关系，从图 2 中还可以得到

$$\sin \theta : \cos \theta = \tan \theta : 1;$$

$$\cos \theta : 1 = 1 : \sec \theta;$$

$$\sin \theta : 1 = 1 : \csc \theta;$$

$$\tan \theta : 1 = 1 : \cot \theta,$$

等等。实际上，公元 10 世纪阿拉伯数学家阿布·韦发 (Abu'l Wefa, 940-998) 和 16 世纪法国数学家韦达 (F. Viète, 1540-1603) 已经利用图 2 获得了许多关系式。

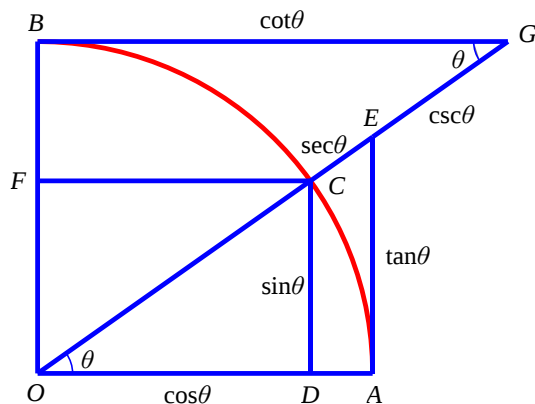


图 2 单位圆记忆法

Nicholson (1898) 发明了一种兼顾锐角三角比定义以及同角三角函数关系式的“三角圆”记忆法, 如图 3 所示, 在直角三角形中, 锐角 θ 的邻边、对边、斜边长分别为 x 、 y 和 r , 在直角三角形三边中点处标记 x 、 y 和 r , 三个中点两两连线与三角形外的一个圆交于六点, 在各点处依次标记 $\sin \theta$ 、 $\tan \theta$ 、 $\sec \theta$ 、 $\csc \theta$ 、 $\cot \theta$ 和 $\cos \theta$, 于是, 在直径或弦上 (但不在圆周上) 的每一点处的值等于其相邻两点处的值的乘积, 圆周上每一点处的值等于其相邻两点处的值的乘积, 直径或弦的两个端点处的值互为倒数。例如, $y = r \sin \theta$, $r = y \csc \theta$, $\sin \theta = \tan \theta \cos \theta$, $\sin \theta \csc \theta = 1$, 等等。

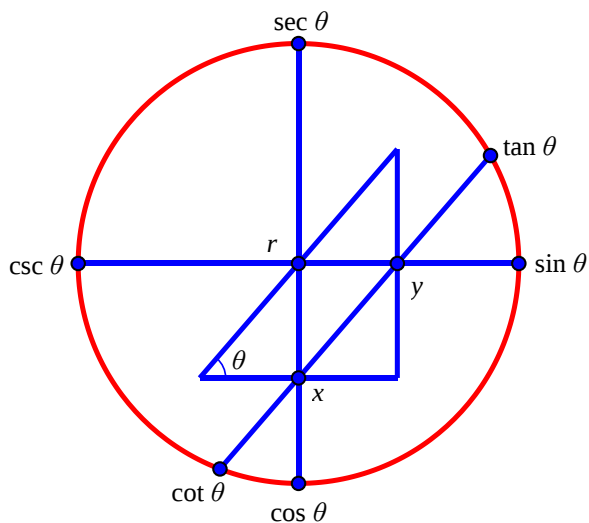


图 3 “三角圆”记忆法

直角三角形记忆法依赖于锐角三角函数的定义, 且内容单一; “三角圆”记忆法与后来的约翰逊“正六边形”记忆法一样, 纯粹是为了记忆而设计, 并没有什么实际数学内涵; 单位圆记忆法符合三角函数的历史, 将三角函数的线段定义与同角三角函数关系密切联系起来, 数学

内涵丰富，但因倒数关系和商数关系均需通过比例关系得出，故有些关系（如 $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ ）并不能一眼看出，也就是说，图 2 还不足以成为一个理想的“无字证明”。

所谓“无字证明”，是指“不含文字的证明”，其呈现方式是隐含某个命题（或公式、法则、等式、不等式）证明过程的一幅图形。无字证明有着双重价值：既可以帮助学生完成有关命题的证明，也可以帮助学生记忆有关命题。由于没有文字信息，无字证明为教师“有线索地”留白提供了理想的素材。本文拟从图 2 出发，构造出若干关于同角三角函数关系式的无字证明，并讨论无字证明的构造活动在留白创造式教学中的运用。

2 基于面积关系的无字证明

为了将图 2 改成关于同角三角函数关系的无字证明，只需将比例关系改成面积关系，使商数关系和倒数关系变得一目了然。如图 4 所示，根据杨辉定理：“弦之内，分二勾股，其一勾中容横，其一股中容直，二积之数皆同”，矩形 $QFCP$ 与 $CDAR$ 的面积相等，故得矩形 $QODP$ 与 $FOAR$ 的面积相等，即 $\tan \theta \cos \theta = \sin \theta$ 。

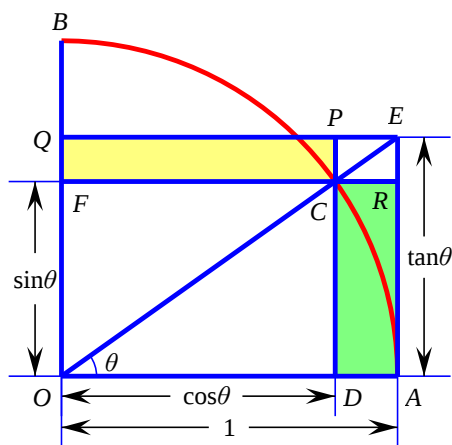


图 4 关于等式 $\tan \theta \cos \theta = \sin \theta$ 的无字证明

类似地，图 5 中的长方形 $FOTS$ 与 $BODU$ 面积相等，即 $\cot \theta \sin \theta = \cos \theta$ 。

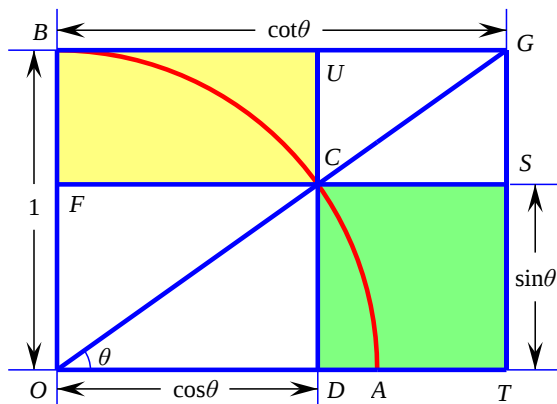


图 5 关于等式 $\cot \theta \sin \theta = \cos \theta$ 的无字证明

如图 6 所示，过点 C 作 OC 的垂线，分别交 OA 和 OB 的延长线于点 I 和 H ，连结 IG 和 EH ，因 $S_{\triangle OGI} = \frac{1}{2}OG \times CI = \frac{1}{2}OI \times OB$ ， $S_{\triangle OEH} = \frac{1}{2}OE \times CH = \frac{1}{2}OH \times OA$ ，故得 $\csc \theta \tan \theta = \sec \theta$ ， $\sec \theta \cot \theta = \csc \theta$ 。

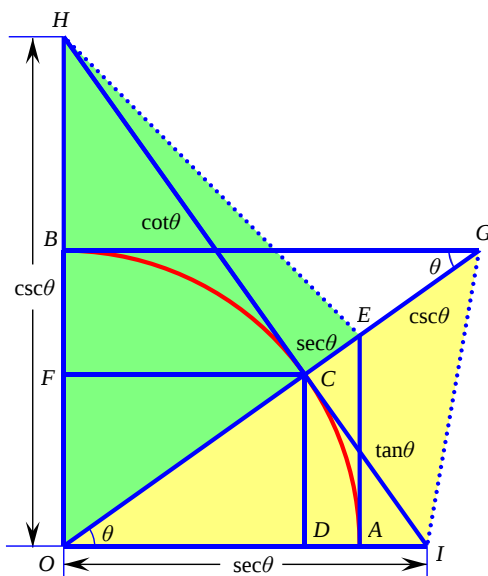


图 6 关于商数关系的无字证明

又在 $\text{Rt}\triangle OCI$ 中有 $OC \times CI = OI \times CD$ ，在 $\text{Rt}\triangle OCH$ 中有 $OC \times CH = OH \times CF$ ，在 $\text{Rt}\triangle HOI$ 中有 $OI \times OH = HI \times OC$ ，故得 $\tan \theta = \sec \theta \sin \theta$ ， $\cot \theta = \csc \theta \cos \theta$ ， $\sec \theta \csc \theta = \tan \theta + \cot \theta$ 。

改变图 2 中的正、余弦作图法，如图 7 所示，由《几何原本》卷一命题 37， $\triangle AOG$ 和 $\triangle BOE$ 均与 $\text{Rt}\triangle AOB$ 的面积相等，故得等式 $\csc \theta \sin \theta = 1$ 和 $\sec \theta \cos \theta = 1$ 。

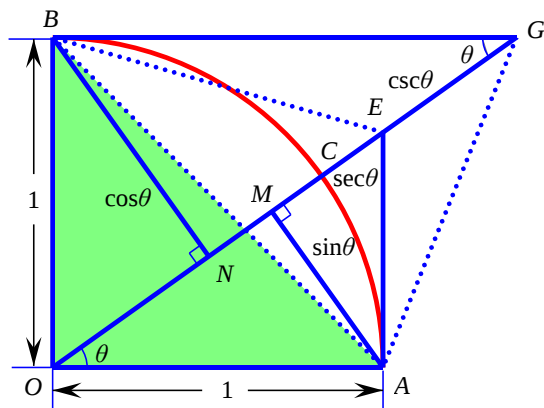


图 7 关于等式 $\csc \theta \sin \theta = 1$ 和 $\sec \theta \cos \theta = 1$ 的无字证明

又如图 8 所示，矩形 $HOKI$ 与 $BOAJ$ 的面积相等，故得等式 $\cot \theta \tan \theta = 1$ 。

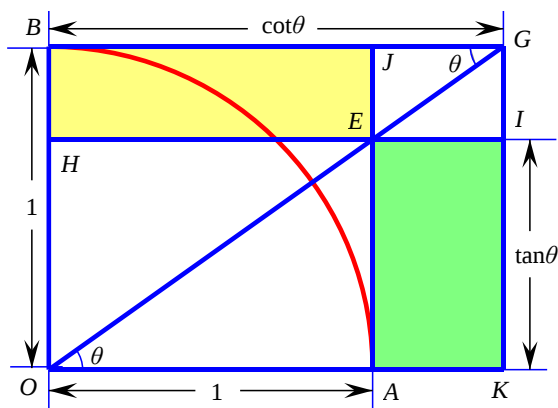


图 8 关于等式 $\cot \theta \tan \theta = 1$ 的无字证明

3 基于线段关系的无字证明

改变图 2 中的正、余切作图法，得到图 9。观察图中的各个直角三角形，聚焦各边之间的关系，根据勾股定理和射影定理，可以发现更多的同角三角函数关系式。

在 $\text{Rt}\triangle ODC$ 、 $\text{Rt}\triangle CDI$ 、 $\text{Rt}\triangle CFH$ 、 $\text{Rt}\triangle OCI$ 、 $\text{Rt}\triangle OCH$ 和 $\text{Rt}\triangle IOH$ 中，根据勾股定理，分别有 $OC^2 = CD^2 + OD^2$ ， $CI^2 = CD^2 + DI^2$ ， $CH^2 = CF^2 + FH^2$ ， $OI^2 = OC^2 + CI^2$ ， $OH^2 = OC^2 + CH^2$ ， $HI^2 = OI^2 + OH^2$ ，即

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

$$\tan^2 \theta = \sin^2 \theta + (\sec \theta - \cos \theta)^2,$$

$$\cot^2 \theta = \cos^2 \theta + (\csc \theta - \sin \theta)^2,$$

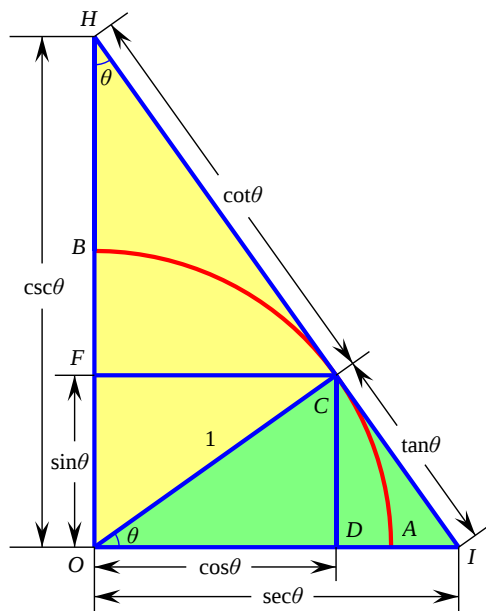


图 9 更多同角三角函数关系式的无字证明

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta ,$$

$$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta ,$$

$$(\tan \theta + \cot \theta)^2 = \sec^2 \theta + \csc^2 \theta .$$

在 $\text{Rt}\triangle OCI$ 中, 根据射影定理, 有 $OC^2 = OD \times OI$, $CD^2 = OD \times DI$, $CI^2 = OI \times DI$, 即

$$\cos \theta \sec \theta = 1 ;$$

$$\sin^2 \theta = \cos \theta (\sec \theta - \cos \theta) ;$$

$$\tan^2 \theta = \sec \theta (\sec \theta - \cos \theta) .$$

在 $\text{Rt}\triangle OCH$ 中, 根据射影定理, 有 $OC^2 = OF \times OH$, $CF^2 = OF \times FH$, $CH^2 = OH \times FH$, 即

$$\sin \theta \csc \theta = 1 ,$$

$$\cos^2 \theta = \sin \theta (\csc \theta - \sin \theta) ,$$

$$\cot^2 \theta = \csc \theta (\csc \theta - \sin \theta) .$$

在 $\text{Rt}\triangle IOH$ 中, 根据射影定理, 有 $OC^2 = CI \times CH$, $OI^2 = CI \times HI$, $OH^2 = CH \times IH$, 即

$$\tan \theta \cot \theta = 1 ,$$

$$\sec^2 \theta = \tan \theta (\tan \theta + \cot \theta),$$

$$\csc^2 \theta = \cot \theta (\tan \theta + \cot \theta)。$$

4 教学中的应用

教师可以在“历史为起点、留白促创新”的理念指导下设计“同角三角函数关系”的教学。

首先，追本溯源，引发探究。

在三角学的早期历史上，三角函数并非比值而是线段，在 17-18 世纪，数学家都利用图 2 来定义三角函数，六种三角函数分别对应于图中的六条线段。如，英国数学家哈里斯（J. Harris, 1667-1719）在《平面与球面三角学基础》（1706）中结合图 2 给出如下定义：垂直于半径 OA 的线段 CD ，称为弧 AC 的正弦； $\angle AOC$ 的边 OC 交过点 A 的切线段 AE 于点 E ，切线段 AE 称为弧 AC 的正切，线段 OE 称为弧 AC 的正割；余弧的正弦 CF 或 OD 称为余弦；余弧的正切 BG 称为余切；余弧的正割 OG 称为余割。与今日不同的是，当时数学家关注的是弧的三角函数。教师据此提出

任务 1：根据图 2，请用几何语言描述一下角 θ 的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割。

任务 1 为学生留下了“陈述之白”。学生通过补白，对六种三角函数名称的来源有了正确的理解。如：正弦是半弦，正切是切线，正割是割线，余弦是余角的正弦，等等。

任务 2：根据图 2，你能利用几何知识，尽可能多地推导出锐角 θ 的六种三角函数之间的关系吗？

任务 2 为学生留下“发现之白”。学生可能会利用相似三角形性质以及勾股定理，得到倒数关系、商数关系和平方关系。教师对学生的发现进行总结和补充，得到三种平方关系、六种商数关系和三种倒数关系。

其次，另辟蹊径，求简探新。

在中国古代，杨辉定理在“相似三角形对应边成比例”的性质与“两个长方形的等面积关系”之间建立联系，这启示我们，可以从图形面积关系的角度来推导同角三角函数的商数关系和倒数关系。教师据此提出

任务 3: 利用“相似三角形对应边成比例”这一性质所得到的部分商数关系和倒数关系，从图上看并非一目了然。你能用几何方法更直观地呈现这些关系式吗？

任务 3 为学生留下了“方法之白”。将商数关系和倒数关系写成乘积的形式，可以启发学生在图 2 中寻找面积分别为 $\csc\theta\sin\theta$ 、 $\sec\theta\cos\theta$ 、 $\tan\theta\cot\theta$ 、 $\sin\theta\cot\theta$ 、 $\sin\theta\sec\theta$ 、 $\cos\theta\tan\theta$ 、 $\cos\theta\csc\theta$ 、 $\tan\theta\csc\theta$ 、 $\cot\theta\sec\theta$ 的矩形或面积为上述乘积之半的三角形，进而寻找与它们等积的长方形或三角形，从而构造出“无字证明”。

再次，拓宽思维，扩充成果。

在任务 2 中，为了寻找有关的矩形或三角形，需要改变图 2 中的正、余弦作图法，使得对应的线段与正、余割所在直线垂直。这给学生一种启示：在图 2 中改变六种函数中的某一种或若干种的作图法，都有可能得到新的无字证明。特别地，如果改变正、余切的作图，能否得到新的无字证明呢？教师据此提出

任务 4: 可否构造出新的无字证明，仅用线段关系而不用面积关系，就可以直接“读出”所有的倒数关系和商数关系？

任务 4 进一步为学生留下了“发现之白”和“方法之白”。学生可能会利用图 7 中的 $\text{Rt}\triangle OBG$ 和 $\text{Rt}\triangle OAE$ ，由射影定理和勾股定理得出各种关系式。但是，仅利用线段关系，从图 7 中难以得到倒数关系 $\cot\theta\tan\theta=1$ 。为了寻找 $\cot\theta\tan\theta$ ，学生可能就会想到用另一种方法作出正、余切，从而得到图 9 所示的无字证明。新的无字证明，打开了同角三角函数关系的一片新天地！

教师还可以让学生根据图 2-9 编制新的数学问题，即为学生留下“问题之白”。

任务 5: 根据图 2-9，你能提出什么新的数学问题？

要提出有效的数学问题，学生需要进一步对上述无字证明进行进一步的探究。例如，学生可以设问：“根据图 9，还可以得到什么三角恒等式？”事实上，由图 10，根据杨辉定理可得新的恒等式

$$(\sec\theta - \cos\theta)(\csc\theta - \sin\theta) = \sin\theta\cos\theta。$$

学生可能还会提出以下问题：“由上述无字证明得到的关系式，对于任意角是否成立？”“对于其他象限角，是否也可以构造出无字证明？”等，针对这些问题，教师可以让学生在课余自行探究。

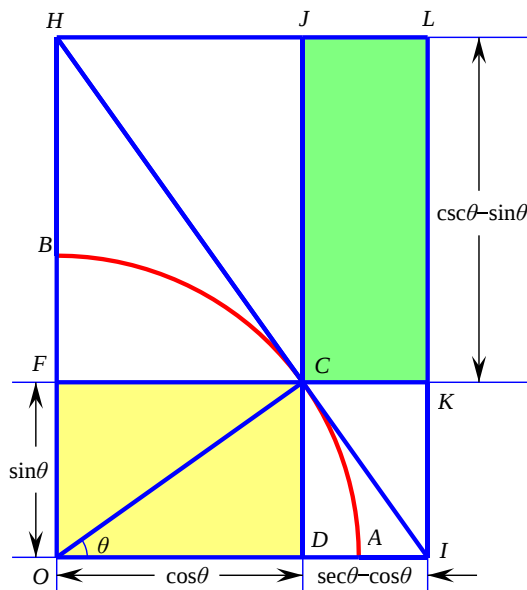


图 10 更多三角恒等式的探究

最后，图尽其用，推陈出新。任务 1-3 都局限于同角三角函数的相等关系式。但图 9 所隐含的三角学内容远不止这些。教师如果熟悉“否定属性”（what-if-not）策略，可以进一步提出

任务 6：如果不局限于等式，能否发现关于同角三角函数的新关系？

任务 6 为学生留下新的“发现之白”。实际上，进一步观察图 9，还可以发现关于同角三角函数的不等式。例如，在 $\text{Rt}\triangle HOI$ 中，根据“斜边上的中线等于斜边的一半”，可以得到关于锐角 θ 的三角不等式

$$\frac{\tan \theta + \cot \theta}{2} \geq 1,$$

当且仅当 $\theta = 45^\circ$ 时等式成立；在直角梯形 $FOIC$ 和 $CDOH$ 中，根据中位线定理，可以得到关于锐角 θ 的三角不等式

$$\frac{\cos \theta + \sec \theta}{2} \geq 1;$$

$$\frac{\sin \theta + \csc \theta}{2} \geq 1,$$

当且仅当 $\theta = 45^\circ$ 时等式成立。

另外，利用函数知识可知，在直角三角形的所有内接长方形中，长、宽分别等于两条直角边之半的那一个面积最大，由此可得另一个不等式

$$\sin \theta \cos \theta \leq \frac{1}{4} \sec \theta \csc \theta,$$

或即

$$\sin \theta \cos \theta \leq \frac{1}{2}.$$

当且仅当 $\theta = 45^\circ$ 时等式成立。

任务 7: 如果不局限于同角, 能否发现关于三角函数的新命题?

任务 7 进一步为学生留下“发现之白”。如图 11, 过点 C 作 OC 的垂线, 过点 B 作 OB 的垂线, 两条垂线交于点 J , 连结 OJ 并延长, 交 AE 的延长线于点 K , 则 $\angle JOC = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$,

$\angle KOA = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$, 易得恒等式

$$\sec \theta = \tan \theta + \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right),$$

$$\tan \theta + \sec \theta = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right).$$

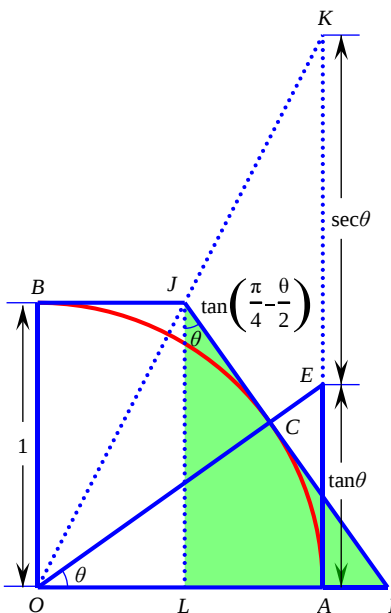


图 11 非同角三角函数恒等式的无字证明之一

如图 12, 过点 C 作 OC 的垂线, 过点 A 作 OA 的垂线, 两条垂线交于点 M , 连结 OM 并延长, 交 BG 的延长线于点 P , 则 $\angle MOC = \frac{\theta}{2}$, 易得恒等式

$$\cot \theta + \tan \frac{\theta}{2} = \csc \theta;$$

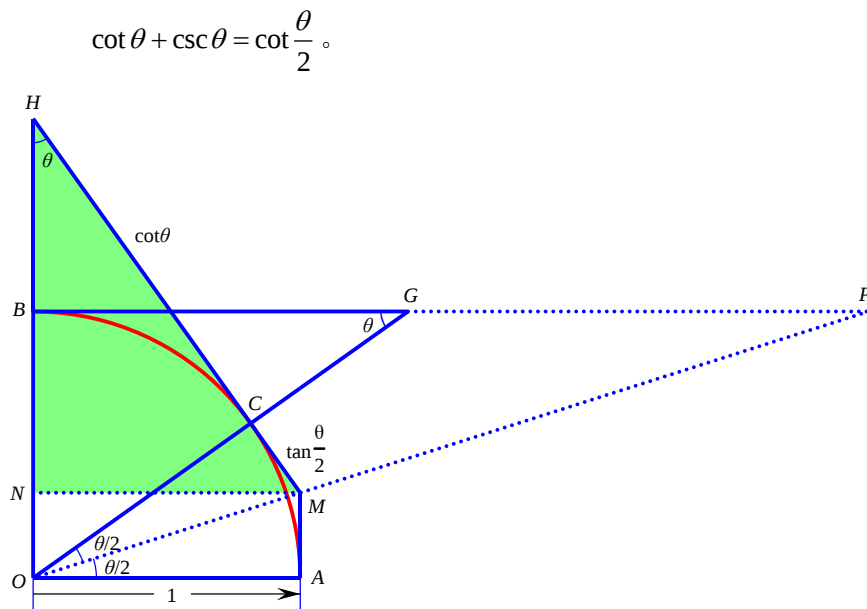


图 12 非同角三角函数恒等式的无字证明之二

在后续的三角学教学中，教师还可以在图 9 的基础上进一步提出：

任务 8：将图 9 中 θ 的余角改为另一个锐角 φ ，得到图 13。在 $\triangle OIH$ 中可以发现什么新的公式？

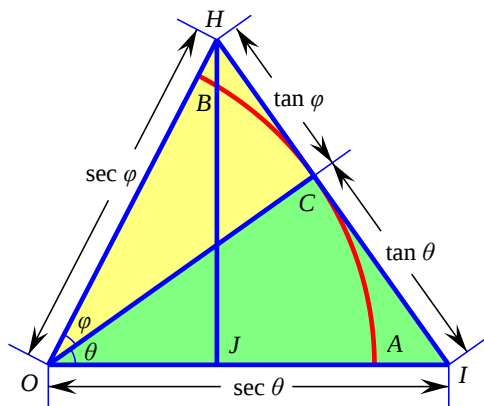


图 13 和角正、余弦公式的无字证明

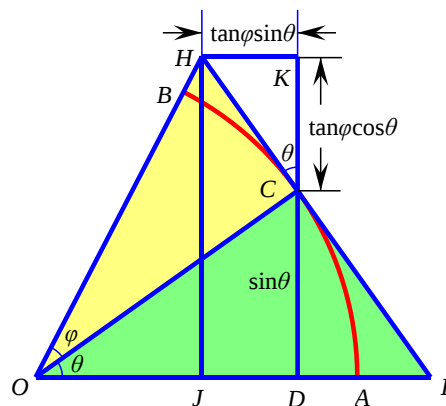


图 14 和角正、余弦公式的无字证明

事实上，在 $\triangle OIH$ 中，若聚焦线段关系，则有

$$HJ = \sec \varphi \sin(\theta + \varphi) = (\tan \theta + \tan \varphi) \cos \theta,$$

$$OJ = \sec \varphi \cos(\theta + \varphi) = \sec \theta - (\tan \theta + \tan \varphi) \sin \theta,$$

由此可得

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi,$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \sec \theta \cos \varphi - (\tan \theta \cos \varphi + \sin \varphi) \sin \theta$$

$$= (\sec \theta - \tan \theta \sin \theta) \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi,$$

在同一三角形中，若利用正、余弦定理，则有

$$\frac{\sin(\theta + \varphi)}{\tan \theta + \tan \varphi} = \frac{\sin(90^\circ - \theta)}{\sec \varphi},$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \frac{\sec^2 \theta + \sec^2 \varphi - (\tan \theta + \tan \varphi)^2}{2 \sec \theta \sec \varphi},$$

化简即得和角正、余弦公式。

此外，利用图 14 又可得

$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{\sin \theta + \tan \varphi \cos \theta}{\cos \theta - \tan \varphi \sin \theta} = \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi}.$$

类似可以推导差角公式。

5 结语

以上我们看到，在锐角范围内，同角三角函数关系式（等式或不等式）都有其几何来源，无论是从面积的观点还是从线段的观点出发，都可以构造出精彩的无字证明。利用无字证明，还可以发现同角三角函数关系式之外更多的恒等式。

在三角学教学中，以数学史为起点，设置构造无字证明的任务，是留陈述之白、发现之白、方法之白、问题之白、甚至超越之白的一种策略。一旦学生推陈出新、成功补白，三角公式将不再神秘、烦难和枯燥，公式的记忆和理解将不再是它们心中的畏途。

另一方面，在构造基于面积关系无字证明的过程中，我们不知不觉既利用了关于矩形面积关系的杨辉定理，也运用了关于三角形面积关系的欧几里得定理，从而邂逅了数学的多元文化。

因此，无字证明是在数学教学中实现数形结合、古今联系和中西对话的一个有效工具，值得人们进一步探索和实践。

目 录

刊首新语

构造无字证明，设计留白教学汪晓勤 I

教材研究

人教 A 版数学教科书中“观察”“思考”“探究”“归纳”栏目的留白探析
.....刘倩雯，韩 粟 1

专题研究

当阿波罗尼奥斯“遇见”旦德林汪晓勤 14

美英早期解析几何教科书中关于二元二次方程的讨论谢宇欣 27

教学实践

HPM 视角下线面平行判定定理的教学唐望贺，刘梦哲，杨舒捷 40

时空隧道

对数的前世今生谢宇欣 51

他山之石

选择全班讨论策略的框架陈雨晴 59

活动讯息

东西协作携手共进，共话小学数学教育刘倩雯，韩 粟，刘梦哲 67

CONTENT

FOREWORD

Constructing Proof Without Words and Designing Teaching Based on Gap-Leaving and Creation..... Wang Xiaoqin I

TEXTBOOK RESEARCH

The Gap-Leaving in "Observation", "Thinking", "Inquiry" and "Summarization" Columns of Mathematics Textbooks Liu Qianwen, Han Su 1

THEMATIC RESEARCH

When Apollonius "Met" Dandelin..... Wang Xiaoqin 14

The Discussions of Quadratic Equations in Early American & British Textbooks on Analytic Geometry Xie Yuxin 27

TEACHING PRACTICE

The Teaching of the Decision of Perpendicular Between a Line and a Plane from the Perspective of HPM..... Tang Wanghe, Liu Mengzhe, Yang Shujie 40

TOPIC STUDY

The History of Logarithms..... Xie Yuxin 51

LITERATURE REVIEW

A Framework for Selecting Strategies for Whole-class Discussions.....
..... Chen Yuqing 59

ACADEMIC INFORMATION

The Second Academic Activity of Expert Workstation in Qujing Normal University
..... Liu Qianwen, Han Su, Liu Mengzhe 67

教材研究

人教 A 版数学教科书中“观察”“思考”“探究”“归纳”栏目的留白探析

刘倩雯，韩 粟

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

“留白”是中国古代绘画中的重要表现手法，通过画面中留出的空白，给人充分的遐想、审美与有引导的思考空间。数学教科书的留白指教科书为学生自主学习数学留下充分的思维空间。^[1]20 世纪 90 年代以前，教科书多采用分科编排，以代数教科书为例，每章（编）除了正文、习题和小结，基本上没有其它元素。2004 年的教科书增加了正文中的“观察”“思考”“探究”栏目，采用设置问题情境或提问的方式引导学生思考，使其经历知识发生发展的过程。^[2]可见，从 21 世纪初期，数学教科书便常在以上栏目中为学生留白。

探究数学教科书的留白是极其必要的，《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》（以下简称《课标》）指出，教材的编写应有利于教师创造性教学，有利于学生自主学习。^[3]教科书适当留白，不仅能够为学生创设主动思考的机会，也能为教师的教学活动提供參考。同时，作为面向学生的学习材料，教科书首先应基于学生的学习心理，顺应学生的学习需求。^[4]不留白或留白较少的教科书宛如一本工具书，虽然知识已详实地呈现，但学生对知识的学习是被动的。此类教科书不仅会降低学生对数学学习的兴趣，更不利于学生思维能力的发展。《课标》也指出，发展学生数学学科核心素养是数学课程的核心目标，是教材编写的宗旨。^[3]已有学者提出，核心素养本质上不是靠教师“教”出来的，而是靠学生“悟”出来的，数学的教学需要给学生的“悟”留有充分的时间和空间。^[5]数学教科书的留白正可为学生创造“悟”的机会。

目前已有研究关注了留白在数学课堂中的应用，主要聚焦于其概念界定、研究价值、教学策略、留白原则等方面。^[6]近两年，有研究团队系统地提出“留白创造式教学”教学理念

并付诸实践。^[1]也有学者关注了数学史上的留白与创新^[7]，并探讨了数学史与留白创造式教学之间的关系。^[8]分析文献发现，鲜有研究关注到了数学教科书中的留白。

综上所述，本研究试探析《普通高中教科书·数学》A 版（下称“人教 A 版高中数学教科书”）正文中“思考”“观察”“探究”“归纳”四栏目的留白现状，以期对教科书编写与数学教学提供借鉴与启示。具体通过以下两个子问题来回应上述研究问题：高中数学教科书四栏目中的留白类型分布是什么？针对高中数学教科书四栏目中的留白，后文补白的情况如何？

2 高中数学教科书中四栏目的留白现状

2.1 分析框架的确立

首先，确定分析单元。本研究选取人教 A 版高中数学教科书全五册作为研究对象。在全册教科书的正文中，“思考”“观察”“探究”“归纳”四栏目共计 388 个，除去 5 个“归纳”栏目无显性留白外，最终确定 383 个栏目作为正式分析单元，具体栏目的分析单元如表 1 所示。

表 1 栏目分析单元统计表

栏目	思考	观察	探究	归纳
个数	208	24	148	3

其次，建立分析框架。在已有文献对数学课堂的留白分类^[1]基础上，结合教科书栏目的实际情况进一步细化，建立起数学教科书的留白类型及子类型的分析框架。

再次，修订分析框架。随机抽取 20% 的分析单元，由两位研究者按照初始分析框架进行预编码，完成后比对预编码结果，就编码不一致的分析单元交流原因，最终分析框架如表 2 所示。

表 2 数学教科书中“观察”“思考”“探究”“归纳”四栏目中的留白分析框架

主维度		子维度		编码示例
留白类型	概念界定	子类型	操作性定义	
陈述之白	解决“是什么”的问题，主要指陈述有关数学概念、公式、命题、法则的理解	举例说明	列举若干数学学科、其他学科或现实世界中的简单实例	举例说明，用自然语言、列举法和描述法表示集合时各自的特点。 (必修一 第一章 P5)
		知识应用	应用已有的概念、公式、命题、法则，解决数学问题	通过上面的学习，你能给出“四边形是平行四边形”的充要条件吗？ (必修一 第一章 P21)
		语言转化	直接运用或转化图形语言、符号语言、自然语言等描述数学对象或现实世界	你能借助以上结论，并根据正切函数的性质，画出正切函数的图象吗？正切函数的图象有怎样的特征？ (必修一 第五章 P211)
		概念理解	运用数学语言表达对概念、公式、命题、法则及其形成过程的一般性理解	知道一个函数具有周期性和奇偶性，对研究它的图象与性质有什么帮助？ (必修一 第五章 P202)
发现之白	解决“是什么”的问题，主要指发现新的数学概念、命题、公式、法则等	观察探索	观察并思考给定数学对象的数量、形式等特征，在问题引领下探索新的数学概念、命题、公式、法则	观察下面的集合，集合 A , B 与集合 C 之间有什么关系？ (必修一 第一章 P11)
		类比探新	根据两种或以上数学对象间的相似性，猜想或推测新的概念、命题、公式、法则	观察下面几个例子，类比实数之间的相等关系、大小关系，你能发现下面两个集合之间的关系吗？ (必修一 第一章 P7)
		归纳求索	归纳若干具体特例的共同特征，概括出一般的概念、命题、公式、法则	上述问题 1~问题 4 中的函数有哪些共同特征？由此你能概括出函数概念的本质特征吗？ (必修一 第三章 P62)
		数学实验	动手操作或运用信息技术展现知识的动态过程，生成新的概念、命题、公式、法则	利用信息技术作图. 如图 3.3-1, F 是定点, l 是不经过点 F 的定直线, H 是直线 l 上任意一点, 过点 H 作 $MH \perp l$, 线段 FH 的垂直平分线 m 交 MH 于点 M . 拖动点 H , 点 M 随之运动, 你能发现点 M 满足的几何条件吗？它的轨迹是什么形状？ (选修一 第三章 P130)

续表

主维度		子维度		编码示例
留白类型	概念界定	子类型	操作性定义	
论证之白	解决“为什么”的问题，主要指论证或证明公式、命题或其他数学结论	数学说理	思辨、判断给定数学命题的合理性，从数学内部解释推理的步骤或结果	有人说：“根据对应关系 $S = 350t$ ，这趟列车加速到 350 km/h 后，运行 1 h 就前进了 350 km。”你认为这个说法正确吗？ (必修一 第三章 P60)
		演绎证明	通过严密的演绎推理，证明或推导数学命题、公式或其它数学结论	由公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 出发，你能推导出两角和与差的三角函数的其他公式吗？ (必修一 第五章 P217)
		数值验证	代入具体的数值，验证结果的正确性	互为对立的两个事件是非常特殊的一种事件关系. 如果事件 A 与事件 B 相互独立，那么它们的对立事件是否也相互独立？以有放回摸球实验为例，分别验证 A 与 $\bar{B}$ ， $\bar{A}$ 与 B ， $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 是否独立，你有什么发现？ (必修二第十章 P247)
		外国分析	结合现实背景或联系其它学科，从数学外部分析所得结论的影响因素	你能结合具体实例解释产生模型(1)中随机误差项的原因吗？ (选修三第八章 P106)
方法之白	解决“怎么做”的问题，主要指探究问题解决的多种方法	总结提炼	梳理问题解决的过程，总结步骤，提炼方法	你能总结一下从正弦函数图象出发，通过图象变换得到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)(A > 0, \omega > 0)$ 图象的过程与方法吗？ (必修一 第五章 P236)
		新法探究	探究不同于教科书提供或已知的解法	在上述测量方案下，还有其他计算 A, B 两点间距离的方法吗？ (必修二 第六章 P49)
		解法反思	评价、反思并优化已有的解法	上述方法中，我们根据点到直线距离的定义，将点到直线的距离转化为两点之间的距离，思路自然但运算量较大. 反思求解过程，你发现引起复杂运算的原因了吗？由此能否给出简化运算的方法？ (选修一 第二章 P75)
		多法比较	比较不同方法应用于问题解决时的异同	如果不建立平面直角坐标系，你能解决这个问题吗？由此比较综合法和坐标法的特点。 (选修一 第二章 P94)

续表

主维度		子维度		编码示例
留白类型	概念界定	子类型	操作性定义	
超越之白	解决“还有什么”的问题，主要指超越知识本身，启迪数学思想，叩问数学精神	\		至此，我们在初中学习的基础上，运用集合语言和对对应关系刻画了函数，并引进了符号 $y=f(x)$ ，明确了函数的构成要素，比较函数的这两种定义，你对函数有什么新的认识？ (必修一 第三章 P66)
问题之白	解决“还有什么”的问题，主要指从已有的问题、情境、命题等出发，构建新的问题情境，提出新的数学问题	\		构建其他可用解析式 $y=x(10-x)$ 描述其中变量关系的问题情境。 (必修一第三章 P63)

最后，两位研究者根据表 2 所示的分析框架对所有分析单元进行背靠背编码，再比对并讨论不一致的编码条目，最终达成一致。

2.2 分析结果的呈现

2.2.1 栏目留白的类型分布

人教 A 版高中数学教科书中四个栏目的留白类型分布情况如表 3 所示。整体而言，四个栏目的留白类型中，发现之白占比最高，陈述之白与论证之白次之，超越之白与问题之白最少。

表 3 栏目中的留白类型分布

留白类型	陈述之白	发现之白	论证之白	方法之白	问题之白	超越之白
个数	81	204	65	27	1	5
占比	21.1%	53.3%	17.0%	7.0%	0.3%	1.3%

限定陈述之白、发现之白、论证之白和方法之白的留白类型，分析各自的子类型，发现每种留白类型内部又有不同的表现形式，具体分布情况如图 1 所示。

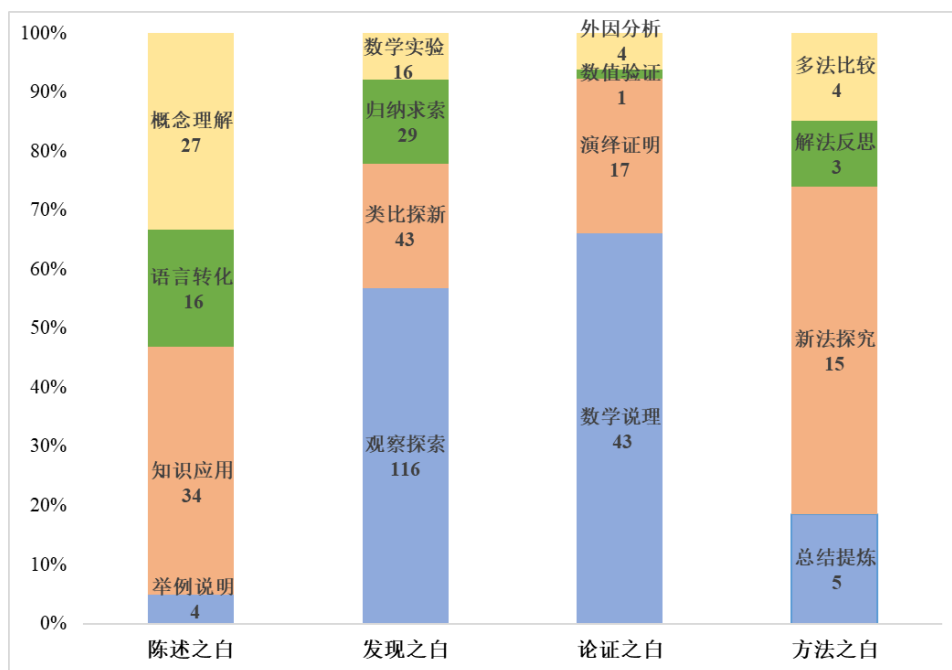


图 1 四种留白的子类型分布

分析教科书的四个栏目，发现其留白类型丰富，六种留白类型均有涉及。其中，约 53% 的栏目留下发现之白，即栏目为学生留出新知探索和发现的机会^[1]。在这部分栏目中，教科书通过情境创设、问题引导等形式促进学生思考，且主要让学生以观察的方式创获新知（见图 1）。

例如，必修一中“幂函数”一节的探究栏目，“观察函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^{\frac{1}{2}}$, $y=x^{-1}$ 的图象并结合函数解析式，将你发现的结论（定义域、值域、奇偶性、单调性）写在表内。这些函数图象有公共点吗？”该栏目通过文字与问题引导学生观察函数图象，思考并发现幂函数的特点。同时，栏目常让学生采用类比或归纳的方法，不仅能够启发学生发现数量或图形关系，还渗透了逻辑推理核心素养的培育。例如，必修一中“等式性质与不等式性质”一节的探究栏目，“类比等式的基本性质，你能猜想不等式的基本性质，并加以证明吗？”此外，数学实验也是栏目留下发现之白的一种形式，如，必修一中“函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ”一节的探究栏目让学生通过对 ω 赋不同的值，观察图象的变化，进而探索 $\omega(\omega>0)$ 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响。事实上，我们之前的教育更多培养学生的演绎推理能力，缺少了通过条件预测结果的能力培养。^[9]如今的教科书中留下了大量的发现之白，这在一定程度上体现了如今教育对创新型人才培养的重视。

约 21% 的栏目为学生留下陈述之白，即栏目让学生表达自己对数学知识的理解，或简单地应用知识。此类栏目主要有两方面的功能，其一为检验功能，考察学生对已学知识的掌握情况；其二为铺垫功能，引导学生回忆前序知识，为新知的学习做铺垫。具体而言，检验功能类的占比较大，知识应用与语言转化类型的栏目多为此功能。例如，在必修一“函数的概念及其表示”一节中，前文已给出了函数、定义域及值域的定义，同时举例一次函数与二次函数进行说明，而后，教科书设置思考栏目让学生陈述反比例函数的定义域、对应关系和值域，并用函数定义来描述此函数。此栏目的留白既能加深学生对反比例函数的认识，又检验了学生对于函数概念的内在的理解。相较而言，此类栏目中，铺垫功能类的较少，常出现在概念理解形式的栏目中，如，必修一“三角函数的图象与性质”一节中的思考栏目，“你认为应该利用正弦函数和余弦函数的哪些关系，通过怎样的图形变换，才能将正弦函数的图象变换为余弦函数的图象？”该栏目通过让学生回忆诱导公式 $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ，引导学生将正弦函数图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位得到余弦函数图象。

学生经过观察、类比、归纳等合情推理发现新命题后，需要再由演绎推理验证命题的真假，因此，教科书留下论证之白是极为必要的。约 17% 的栏目留下了论证之白，且主要是以学生数学说理的形式进行补白，演绎证明由于其严格性更强而次之，此外，也有个别栏目要求学生结合现实因素与具体数值解释并验证命题。例如，在必修一“函数的应用（二）”一节中，教科书介绍英国经济学家马尔萨斯提出的人口增长模型，并设置例题让学生据此模型预测我国人口总数达到 13 亿的时间为 1990 年，随后设立思考栏目，“事实上，我国 1990 年的人口数为 11.43 亿，直到 2005 年才突破 13 亿。对由函数模型所得的结果与实际情况不符，你有何看法？”通过该栏目启发学生，在用已知模型刻画实际问题时，不仅要注意模型的适用条件，还要考虑理论之外的现实因素。

约 7% 的栏目为学生留下方法之白，让学生探索如何解决数学问题。这类栏目较多地引导学生探索新的、不同的解题方法，以培养学生的发散性思维与创造性思维，拓宽学生的思维广度。例如，在必修一“基本不等式”一节中，前文已给出了基本不等式的代数证明，而后借用一个探究栏目（见图 2）让学生掌握基本不等式的几何证明，从数与形两方面同时解释基本不等式。这不仅促进了学生对基本不等式的理解，还体现了数学方法的多样性。在面对已有解法

与多种方法时，教科书设置栏目启发学生反思优化解法，对比分析解法。此外，也有部分栏目引导学生拓展具体问题的解法，总结归纳一类问题的方法。

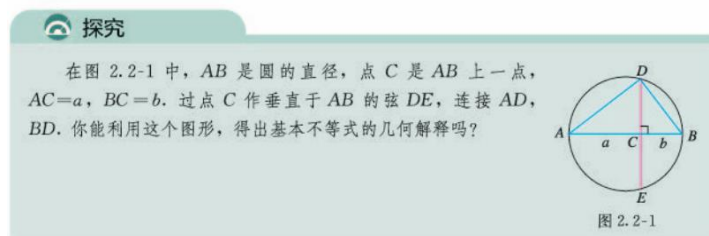


图 2 必修一“基本不等式”中的探究栏目

教科书中，只有一个栏目留下了问题之白，该栏目让学生根据表达式 $y = x(10 - x)$ 构造问题情境。已有文献指出，教科书中，学生自己提出问题的机会较少，但相较于解决问题，问题提出以及开放性题目更能考查学生的思维能力^[9]，并促进学生创造力的培养，且数学中一些重大问题的提出往往对数学学科的发展起到关键性作用^[10]。5 个栏目为学生留下超越之白，这类栏目引导学生跨越知识本身，产生有深度的感悟与思考。这也符合已有文献提出的“教科书中思想方法应显性化”的建议^[4]。

2.2.2 栏目留白的补白情况

关于人教 A 版高中数学教科书中四个栏目的留白，后文的补白情况如表 4 所示。整体而言，教科书对约 70% 的留白栏目进行了后文补白，学生仅需阅读后文便可完成栏目补白；教科书未对约四分之一的栏目进行补白，此类留白需要学生自主思考，主动补白。此外，也有约 5% 的栏目，后文对其部分补白。具体而言，教科书的部分补白可分为两类，其一为显性类，指教科书后文在形式上补白不完全；其二为隐性类，指后文在形式上虽看似完全补白，但本质上补白不完全。具体以必修一第四章“指数函数与对数函数”中的两个栏目为例，阐述两类部分补白。

表 4 栏目留白的补白情况

后文补白情况	补白	部分补白	未补白
个数	267	19	97
占比	69.7%	5.0%	25.3%

如图 3 所示，该探究栏目引导学生类比对数与指数的关系，发现对数运算性质，留下了发现之白。后文给出三条对数运算性质，但仅给出了其中一个运算过程的发现推导过程。显然，

后文对该栏目的补白并不完整，需要学生自己推出其余两个运算性质，此即形式上补白不完全。

探究

我们知道了对数与指数间的关系，能否利用指数幂运算性质得出相应的对数运算性质呢？

设 $M=a^m, N=a^n$ ，
 因为 $a^m a^n = a^{m+n}$ ，
 所以 $MN = a^{m+n}$ 。

根据对数与指数间的关系可得
 $\log_a M = m, \log_a N = n$ ，
 $\log_a (MN) = m+n$ 。

这样，就得到了对数的一个运算性质：
 $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$ 。

同样地，同学们可以仿照上述过程，由 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 和 $(a^m)^n = a^{mn}$ ，自己推出对数运算的其他性质。

于是，我们得到如下的对数运算性质：

如果 $a > 0$ ，且 $a \neq 1, M > 0, N > 0$ ，那么

- (1) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$ ；
- (2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ；
- (3) $\log_a M^n = n \log_a M (n \in \mathbf{R})$ 。

图 3 必修一“指数函数与对数函数”中探究栏目的显性“部分补白”

又如图 4 所示，该思考栏目由整数指数幂引出有理数指数幂，后文通过举例验证，规定了分数指数幂。从形式上看，教科书对该栏目的补白是完整的，最终引出了分数指数幂的概念，但本质上，此处略去了此规定的自然性与合理性，故而此处内容的补白也是不完全的。

思考

当根式的被开方数的指数不能被根指数整除时，根式是否可以表示为分数指数幂的形式？

把根式表示为分数指数幂的形式时，例如，把 $\sqrt{a^2}, \sqrt{b}, \sqrt[3]{c^2}$ 等写成下列形式：

$$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} (a > 0),$$

$$\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}} (b > 0),$$

$$\sqrt[3]{c^2} = c^{\frac{2}{3}} (c > 0),$$

我们希望整数指数幂的运算性质，如 $(a^b)^n = a^{bn}$ ，对分数指数幂仍然适用。

由此，我们规定，正数的正分数指数幂的意义是

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^+, n > 1).$$

于是，在条件 $a > 0, m, n \in \mathbf{N}^+, n > 1$ 下，根式都可以写成分数指数幂的形式。

正数的负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相仿，我们规定，

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^+, n > 1).$$

例如， $5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ 。

与 0 的整数指数幂的意义相仿，我们规定，

0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义。

规定了分数指数幂的意义以后，幂 a^x 中指数 x 的取值范围就从整数拓展到了有理数。

整数指数幂的运算性质对于有理数指数幂也同样适用，即对于任意有理数 r, s ，均有下面的运算性质。

- (1) $a^r a^s = a^{r+s} (a > 0, r, s \in \mathbf{Q})$ ；
- (2) $(a^r)^s = a^{rs} (a > 0, r, s \in \mathbf{Q})$ ；
- (3) $(a \cdot b)^r = a^r b^r (a > 0, b > 0, r \in \mathbf{Q})$ 。

数学中，引进一个新的概念或法则时，总希望它与已有的概念或法则相容。

这里，略去了规定合理性的说明。

图 4 必修一“指数函数与对数函数”中思考栏目的隐性“部分补白”

3 讨论

3.1 基于教科书留白开展留白创造式教学

“留白创造式教学”是以学生为中心，立足育人目标，为学生学习留下充分的思维空间与探究机会，是在已有的知识基础上，主动学习、解决问题、创获新知、陶冶品行的教学方式。^[1]然而，教师在课堂教学中留什么白、如何恰当地留白，仍有待思考。因此，下文拟对“教科书中的留白”与“留白创造式教学”之间的关系进行初步探讨，以期对相关研究与实践提供参考。

首先，教科书中的留白可以转化为课堂中的留白。由上文的分析可知，教科书中的栏目存在着丰富的留白，这些可以成为教学中的留白素材，为教师在课堂中给学生留下什么白提供启迪。

其次，教师可以根据教学需求与学生学情对教科书中的留白进行加工，并适当调整留白的类型。例如，在“基本不等式”一节中，教科书先通过分析法给出了基本不等式的代数证明，又在探究栏目中给出一幅无字证明（见图 2），提示学生从形的角度得到基本不等式的几何解释。在实际教学中，教师可以直接对基本不等式留下论证之白，让学生自主探索证明方法，以促进学生对知识的理解。

同时，教师在教学中可以设计多种类型的留白，充分发挥留白的功能。例如，教师可以先通过陈述之白确定学生的认知起点，再设计发现之白引导学生自主发现新知，而后可根据教学内容留下论证之白或方法之白，并在课堂小结时精心设计，留下超越之白，引导学生总结思想方法，叩问数学精神，在课后作业中也可留下问题之白，让学生围绕所学新知提出问题，从而培养学生的创造性思维。

此外，教师要注重挖掘教科书中的隐性留白与不完全补白，例如，上文所述的“指数函数与对数函数”中思考栏目，教科书未对分数指数幂规定的合理性与自然性进行补白，教师则可以在教学中解决此问题，如借助数学史带领学生经历分数指数幂概念的产生过程，从而完成补白。^[11]

3.2 从留白视角看教科书的特色

目前已有学者研究了人教 A 版高中数学教科书的问题设置^[12]、问题提出^[10]、创造性思维的培养^[13]等，本文聚焦于栏目，并以留白的视角分析教科书，发现并验证了教科书的一些特点。

其一，夯实基础，循序渐进。正文中的栏目留白以陈述之白与发现之白为主，辅之以论证之白与方法之白，再配以问题之白与超越之白，引导学生发现“是什么”，再解决“为什么”“怎么做”，最后思考“还有什么”，符合教科书对学生“注重基础，拾级而上”的寄语，更体现了数学学习的连贯性与系统性^[14]。同时，教科书通过栏目的设置指引学生学习如何研究一个数学对象，即引入一个新的数学对象后，需要研究些什么，研究方法是什么等，体现了教科书循序渐进的特点，也符合教科书的编写理念^[15]。

其二，引导学习，启发思考。正文中的栏目通过问题的形式为学生留白，启发学生思考，引导学生学习。已有文献指出，这类栏目的设置加强了“问题性”，能够有效地指导学生的数学思维活动，与原教材相比更具有学习引导性，且新增“归纳”栏目引导学生对知识、方法进行归纳概括。^[14]在栏目以外，正文中穿插的问题与作为旁注的“思考”与“贴士”也通过多样方式呈现问题，为学生创造多种学习机会，满足不同水平的学习需求。^[12]

4 启示

根据上文对教科书中“观察”“思考”“探究”“归纳”四栏目的留白探析，本文得出了以下几点启示。

第一，关注并挖掘教科书中的留白。对学生而言，思考教科书的留白并自主尝试补白，不仅能够经历知识的生成，促进知识的理解，更能锻炼思维，培养自主学习的能力。对教师而言，可以结合学情，适当选取教科书中的留白并进行加工，挖掘教科书中的隐性留白，如数学文化因素、知识产生的过程因素、知识产生的背景因素、知识体系的逻辑因素等，整合多种资源，对教学内容进行优化组合，实施留白创造式教学，营造从知识学习到能力提升的教学环境，发展学生的数学核心素养^[16]。同时，教师需要关注教科书未在后文补白或未完全补白的栏目，在教学中引导学生补白，以帮助学生构建完备的知识网络。

第二，丰富栏目的留白设计。教科书中的栏目留下了六种不同类型的白，但其中的问题之

白与超越之白两类较少。事实上，不同留白类型对学生思维作用不同，为学生创造的学习机会也不同，如发现问题是培养学生创新能力的出发点，无论是课堂上还是课后，学生都应该善于发现和提出问题，多思多想，有创造性地进行数学学习。^[14]因此，建议教科书编写者在未来修订、编写教科书时，可以适当增添问题之白与超越之白这两类留白，培养学生提出问题的能力，引领学生感悟知识背后的数学思想方法，实现数学学科的育人价值。

第三，拓展栏目的留白空间。在全部栏目中，有四个“归纳”栏目采取教科书直接归纳的形式，未为学生留白，对此，教科书可以在归纳栏目设置更多留白，引导学生自主归纳。例如，在必修二“简单几何体的表面积与体积”一节中，思考栏目提出问题“圆柱、圆锥、圆台的体积公式之间有什么关系？结合棱柱、棱锥、棱台的体积公式，你能统一成柱体、椎体、台体的体积公式吗？柱体、椎体、台体的体积公式之间又有怎样的关系？”随后，教科书即通过归纳栏目补白，给出柱体、椎体、台体的体积公式，以及三者的关系。事实上，学生通过前文所学已然能够自主归纳、自然补白，因此教科书不妨在此处完全留白，引导学生拓展探究，促进学生生成知识并内化知识，发展学生的归纳思维。此外，在教科书中，大多数的栏目留白都在后文进行了补白，其中，部分栏目的留白与后文补白连接过于紧密，并不能有效引发学生的思考，类似于自问自答方式下的问题，更多改变了平铺直叙的行文方式，并不能为学生提供充分的思考机会。^[12]因此，对于学生能够自主补白的栏目，教科书可适当减少后文的补白，拓展学生的自主思考空间，提升栏目留白的有效性。

参考文献

- [1] 王华, 汪晓勤. 中小学数学“留白创造式”教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2022: 18-19, 25, 68-81.
- [2] 王嵘. 百年高中代数教科书变迁的特点与启示[J]. 课程·教材·教法, 2017, 37(10): 100-105.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 10, 91.
- [4] 章飞, 安志军, 顾继玲, 马复. 数学教科书学习内容整体设计外显的“必要性”“内容”与方法[J]. 数学教育学报, 2021, 31(5): 59-64.

- [5] 史宁中, 林玉慈, 陶剑, 郭民. 关于高中数学教育中的数学核心素养——史宁中教授访谈之七[J]. 课程·教材·教法, 2017, 37(4): 8-14.
- [6] 尹超. 21 世纪以来我国中小学数学课堂留白研究的回顾与展望[J]. 中学数学杂志, 2023(2): 11-14.
- [7] 汪晓勤. 数学史上的留白与创新[J]. 中学数学月刊, 2023(4): 1-4.
- [8] 汪晓勤, 邹佳晨, 王华. 数学史与留白创造式教学[J]. 数学通报, 2023, 62(3): 1-6.
- [9] 史宁中. 推进基于学科核心素养的教学改革[J]. 中小学管理, 2016(2): 19-21.
- [10] 郭玉峰, 闫佳洁, 周雯佳. 问题提出融入中小学数学教科书: 现状、困境及解决思路[J]. 课程·教材·教法, 2022, 42(6): 117-123.
- [11] 汪晓勤, 叶晓娟, 顾海萍. “分数指数幂”: 从历史发生的视角看规定[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2015(4): 59-63.
- [12] 王嵘, 王翠巧. 中学数学教科书中问题设置的分析与启示[J]. 数学通报, 2021, 60(12): 8-10, 13.
- [13] 秦德生, 姜天卓. 数学教科书中创造性思维的呈现: 逻辑、现状与展望[J]. 课程·教材·教法, 2023, 43(5): 117-123.
- [14] 邵光华, 张妍. 人教 A 版高中数学新教材特色分析及使用建议[J]. 课程·教材·教法, 2019(12): 109-114.
- [15] 王嵘. 作为语言来学习, 发展数学抽象素养和逻辑推理素养——人教 A 版《普通高中教科书·数学》第一章“集合与常用逻辑用语”介绍[J]. 中学数学教学参考, 2019(25): 12-13, 24.
- [16] 喻平. 核心素养指向的数学教学内容组织[J]. 数学通报, 2022, 61(4): 5-10.

专题研究

当阿波罗尼奥斯“遇见”旦德林

汪晓勤

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

作为解析几何思想的重要载体,圆锥曲线在现行高中数学课程中具有重要地位。在圆锥曲线单元教学中,教师需要回答以下问题:(1)为什么椭圆、双曲线和抛物线被称为圆锥曲线?(2)圆锥曲线的焦点是如何产生的?(3)圆锥曲线的第一定义是如何形成的?(4)三种曲线的统一性体现在哪里?为了回答问题 1-3,一些教师尝试将旦德林球引入课堂教学,从椭圆或双曲线的截线定义出发,引导学生发现其焦半径性质,进而引出第一定义^[1],或编制有关解析几何问题,用于圆锥曲线单元的复习^[2]。然而,在以旦德林球为核心的 HPM 课例中,还存在逻辑上的瑕疵:以椭圆为例,利用旦德林球,可以证明椭圆上任意一点到旦德林球在截面上两切点的距离之和为定值(长轴长),但并未证明截面上到两切点距离之和等于长轴长的点一定在椭圆上,这就引发人们对于椭圆第一定义合理性的质疑。另一方面,在数学史上,关于圆锥曲线的逻辑链条并不完整。公元前 3 世纪,古希腊数学家阿波罗尼奥斯(Apollonius)在其名著《圆锥曲线论》中已经定义了椭圆和双曲线的焦点,即:若椭圆长轴或双曲线实轴 AB 上的点 F 满足 $AF \times FB = b^2$ (b 为椭圆的短半轴长或双曲线的虚半轴长),则称 F 为“源于面积贴合的点”^[3],今称“焦点”(开普勒最早使用该名称)。阿波罗尼奥斯借助椭圆和双曲线的切线,经过一系列命题的铺垫,得到两种圆锥曲线的焦半径性质^[4]。18 世纪,比利时数学家旦德林(G. P. Dandelin, 1794-1847)通过在圆锥和截面之间作两个内切球得到圆锥曲线的焦点^[5],但他并未从阿波罗尼奥斯的定义出发证明内切球在截面上的切点是焦点,而是通过证明“椭圆(或双曲线)上任意一点到两个切点的距离之和(或差)等于两个内切球的公切线长”,得出两个切点为焦点的结论。此外,在回答上述问题 4 时,教师往往只考虑圆锥曲线在圆锥上的来源,而忽略它们的本质特征。

本文拟从阿波罗尼奥斯的焦点定义出发，证明旦德林球在截面上的切点为圆锥曲线的焦点，并用不同于阿波罗尼奥斯和旦德林的几何方法证明椭圆和双曲线的焦半径性质，进而证明满足焦半径性质的点必在椭圆和双曲线上，由此为圆锥曲线建立更完整的逻辑链。

2 圆锥曲线的通径

众所周知，在今日数学教科书中，确定椭圆的参数是长半轴长和短半轴长，确定双曲线的参数是实半轴长和虚半轴长，确定抛物线的是通径。从三种圆锥曲线的标准方程中，并不能看出它们之间的统一性。古希腊数学家的做法与此迥然不同，他们用长半轴和通径来确定椭圆，用实半轴和通径来确定双曲线，用通径来确定抛物线，从三种圆锥曲线的本质特征中可以看出它们之间的统一性。

2.1 齐曲线（抛物线）

如图 1，过圆锥 SXY 上一点 A 作平行于母线 SY 的平面，截圆锥得到曲线 GAF 。在曲线上任取异于顶点 A 的一点 P ，过点 P 作对称轴 AE 的垂线，垂足为点 Q ，过点 Q 作 XY 的平行线，交母线于点 C 和 D 。因 $PQ \parallel FG$ ，故得三点 P 、 C 、 D 所确定的平面与圆锥的底面平行，因而它们位于平面截圆锥所得的圆上。利用射影定理和相似三角形的性质知

$$PQ^2 = CQ \times QD = \left(XY \times \frac{AQ}{SY} \right) \times \left(XY \times \frac{SA}{SX} \right) = AQ \times \left(\frac{XY^2}{SX^2} \times SA \right)。$$

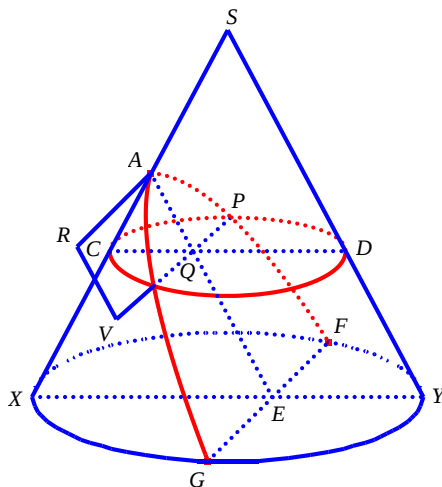


图 1 抛物线的基本性质

在平面 AFG 上过点 A 作 $AR \perp AE$ ，使得 $AR = \frac{XY^2}{SX^2} \times SA$ ，于是有

$$PQ^2 = AQ \times AR \quad (1)$$

也就是说，在 AR 上可以贴合一个长为 AQ 、宽为 AR 的长方形，其面积恰好等于 PQ^2 。故称曲线 GAF 为齐曲线（即抛物线），其中 AR 称为齐曲线的通路。

2.2 亏曲线（椭圆）

如图 2，过圆锥 SXY 上一点 A 作一平面与母线 SY 相交于点 B ，截圆锥得到曲线 PAB 。在曲线上任取异于顶点 A 的一点 P ，过点 P 作对称轴 AB 的垂线，垂足为点 Q ，过点 Q 作 XY 的平行线，交母线于点 C 和 D 。易知三点 P 、 C 、 D 所确定的平面与圆锥的底面平行，因而它们位于平面截圆锥所得的圆上。利用射影定理和相似三角形的性质知

$$PQ^2 = CQ \times QD = \left(XZ \times \frac{AQ}{SZ} \right) \times \left(YZ \times \frac{QB}{SZ} \right) = AQ \times \left(\frac{XZ \times YZ}{SZ^2} \times QB \right)。$$

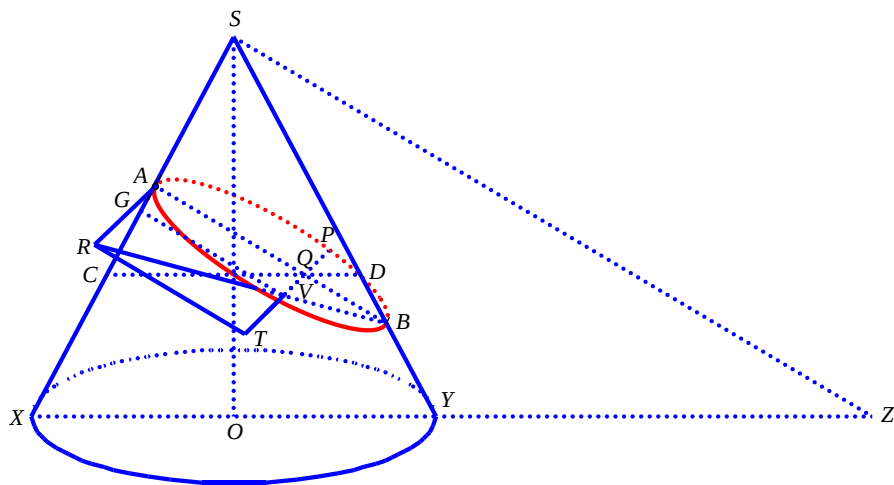


图 2 椭圆的基本性质

在平面 PAB 上过点 A 作 $AR \perp AB$ ，使得 $AR = \frac{XZ \times YZ}{SZ^2} \times AB$ ，于是有

$$PQ^2 = AQ \times \left(\frac{AR}{AB} \times QB \right) = AQ \times QV \quad (2)$$

也就是说，在 AR 上可以贴合一个长为 AQ 、宽为 QV （ $QV < AR$ ）的长方形 $AGVQ$ ，其面积恰好等于 PQ^2 ，不足于 AR 的部分 $GRTV$ 与长为 AB （设为 $2a$ ）、宽为 AR 的长方形相似，故称曲

线 PAB 为亏曲线（即椭圆），其中 AR 称为亏曲线的通路。

当 $AQ = QB = a$ 时， $PQ = b$ ，由 (2) 得 $AR = \frac{2b^2}{a}$ ，(2) 也可写成

$$PQ^2 = \frac{b^2}{a^2} (AQ \times QB) \quad (3)$$

如果以椭圆的中心为原点，以长轴所在直线为 x 轴建立坐标系，由 (3) 可得椭圆的标准方程。

2.3 超曲线（双曲线）

如图 3，过圆锥 SXY 上一点 A 作一平面与母线 SY 的反向延长线相交于点 B ，截对顶圆锥得到曲线 EAF 和 MBN 。在曲线一支 EAF 上任取异于顶点 A 的点 P ，过点 P 作对称轴 AB 的垂线，垂足为点 Q ，过点 Q 作 XY 的平行线，交母线于点 C 和 D 。易知三点 P 、 C 、 D 所确定的平面与圆锥的底面平行，因而它们在平面截圆锥所得的圆上。利用射影定理和相似三角形的性质知

$$PQ^2 = CQ \times QD = \left(XZ \times \frac{AQ}{SZ} \right) \times \left(YZ \times \frac{QB}{SZ} \right) = AQ \times \left(\frac{XZ \times YZ}{SZ^2} \times QB \right)。$$

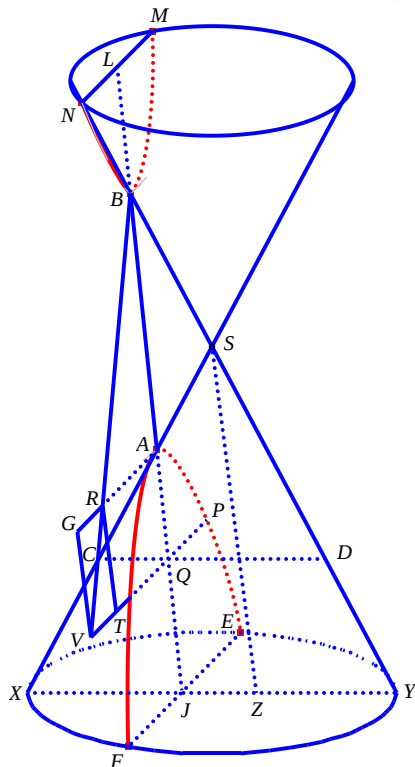


图 3 双曲线的基本性质

在平面 EAF 上过点 A 作 $AR \perp AB$ ，使得 $AR = \frac{XZ \times YZ}{SZ^2} \times AB$ ，于是有

$$PQ^2 = AQ \times \left(\frac{AR}{AB} \times QB \right) = AQ \times QV \quad (4)$$

这就是说，在 AR 上可以贴合一个长为 AQ 、宽为 QV ($QV > AR$) 的长方形 $AGVQ$ ，其面积恰好等于 PQ^2 ，且超出 AR 的部分 $RGVT$ 与长为 AB (设为 $2a$)、宽为 AR 的长方形相似，故称曲线 $EAF-MBN$ 为超曲线 (即双曲线)，其中 AR 称为超曲线的通径。类似可得 $AR = \frac{2b^2}{a}$ ，其中 b 为虚半轴长。

3 旦德林球与圆锥曲线的焦点

如图 4 所示, 在截面和圆锥之间作一个内切球 K , 与截面相切于点 I , 要证点 I 为抛物线的焦点, 即需证

$$AI = \frac{1}{4}AR \quad (5)$$

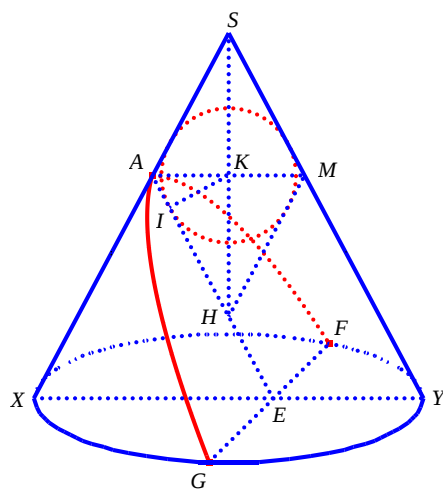


图4 抛物线焦点的发现

其中, AR 为抛物线的途径。易证四边形 $SAHM$ 为菱形, $AM \perp SH$ 。在 $\text{Rt}\triangle AKH$ 中有

$$AI = \frac{AK^2}{AH} = \frac{1}{4} \frac{AM^2}{AS} = \frac{1}{4} \frac{AM^2}{AS^2} \times AS = \frac{1}{4} \left(\frac{XY^2}{SX^2} \times AS \right) = \frac{1}{4} AR。$$

如图 5 所示, 在截面和圆锥之间作两个内切球 K 和 K' , 与截面切于点 I 和 I' 。要证明点 I 和 I' 是椭圆的焦点, 根据阿波罗尼奥斯的定义, 只需证

同理可证 $AI' \times IB = b^2$ ，因此，两个内切球在截面上的切点 I 和 I' 为椭圆的两个焦点。

如图 6 所示，在截面和对顶圆锥之间作内切球 K 和 K' ，分别与截面切于点 I 和 I' 。类似于椭圆的情形，要证明点 I 和 I' 是双曲线的焦点，根据阿波罗尼奥斯的定义，只需证 $AI \times IB = AI' \times I'B = b^2$ 。

以 KK' 为直径作圆，易知点 A 和 B 均在该圆上。延长 IK 线，交圆于点 J ，连结 JK' ，易知四边形 $IJK'I'$ 为矩形， $IJ = I'K'$ 。由圆的割线定理知：

$$\frac{AI \times IB}{AH \times HB} = \frac{KI \times IJ}{KH \times HK'} = \frac{KI \times I'K'}{KH \times HK'} = \left(\frac{KI}{KH} \right)^2,$$

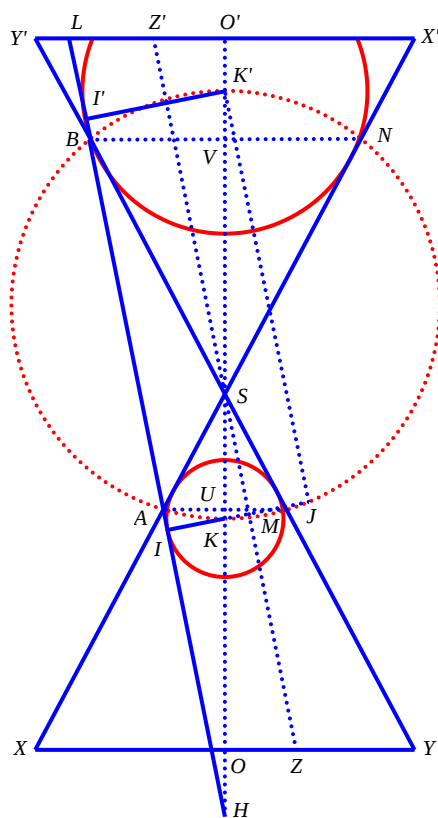


图 6 双曲线焦点的发现

于是得

$$\begin{aligned} AI \times IB &= \left(\frac{KI}{KH} \right)^2 \times (AH \times HB) \\ &= \left(\frac{KI}{KH} \times AH \right) \times \left(\frac{KI}{KH} \times HB \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= AU \times BV \\
 &= \frac{1}{4} AM \times BN \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{AM}{AB} \times \frac{BN}{AB} \right) \times AB^2 \\
 &= \frac{1}{4} \frac{XZ \times YZ}{SZ^2} \times AB^2 \\
 &= \frac{1}{4} AR \times AB \\
 &= b^2,
 \end{aligned}$$

同理可证 $AI' \times I'B = b^2$ 。因此，两个内切球在截面上的切点 I 和 I' 为双曲线的两个焦点。

4 圆锥曲线的焦半径性质

在《圆锥曲线论》中，阿波罗尼奥斯用了很长的篇幅、前后共 8 个定理证明了椭圆和双曲线的焦半径性质^[2]，而且德林则在圆锥上利用球面切线长定理来证明同样的性质。事实上，焦半径性质的证明完全可以得到简化。如图 7， P 是椭圆上异于顶点的任意一点，则由 (3) 和 (6) 得

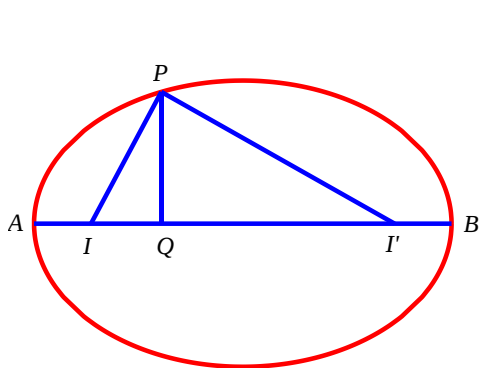


图 7 椭圆的焦半径性质

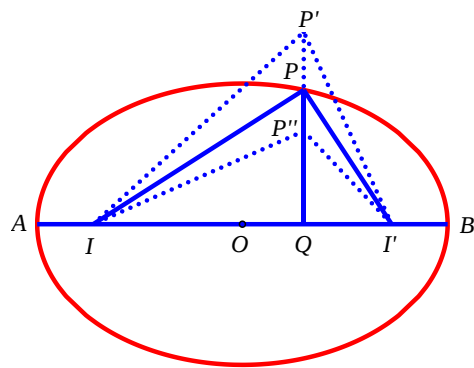


图 8 满足焦半径性质的点在椭圆上

$$\begin{aligned}
 PI^2 &= PQ^2 + IQ^2 \\
 &= \frac{b^2}{a^2} \times AQ \times QB + IQ^2 \\
 &= \frac{b^2}{a^2} \times (AI + IQ) \times (IB - IQ) + IQ^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{b^2}{a^2} [b^2 + (IB - AI)IQ - IQ^2] + IQ^2 \\
 &= \frac{b^2}{a^2} [b^2 + 2c \times IQ - IQ^2] + IQ^2 \\
 &= \frac{1}{a^2} (b^4 + 2b^2c \times IQ + c^2IQ^2) \\
 &= \frac{1}{a^2} (b^2 + c \times IQ)^2,
 \end{aligned}$$

故得

$$PI = \frac{b^2 + c \times IQ}{a} \quad (7)$$

同理可得

$$PI' = \frac{b^2 + c \times I'Q}{a} \quad (8)$$

由 (7) 和 (8) 可得

$$\begin{aligned}
 PI + PI' &= \frac{2b^2}{a} + \frac{c}{a} (IQ + I'Q) \\
 &= \frac{2b^2}{a} + \frac{2c^2}{a} \\
 &= 2a,
 \end{aligned}$$

类似可得双曲线的焦半径性质。

反过来, 如图 8 所示, 假设点 P' 满足 $P'I + P'I' = 2a$, 则由勾股定理可得

$$P'I^2 - P'I'^2 = QI^2 - QI'^2,$$

即

$$2a(P'I - P'I') = 2c(QI - QI') = 4c \times OQ,$$

于是得

$$P'I - P'I' = \frac{2c}{a} \times OQ,$$

故得

$$P'I = a + \frac{c}{a} \times OQ, \quad P'I' = a - \frac{c}{a} \times OQ,$$

于是有

$$P'Q^2 = P'I^2 - QI^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left(a + \frac{c}{a} \times OQ \right)^2 - (c + OQ)^2 \\
&= b^2 - \frac{b^2}{a^2} OQ^2 \\
&= \frac{b^2}{a^2} (a^2 - OQ^2) \\
&= \frac{b^2}{a^2} (AQ \times QB) 。
\end{aligned}$$

可见，点 P' 位于椭圆上。事实上，可以更简单地证明上述结论。仍如图 8 所示，根据欧几里得《几何原本》第一卷命题 21（如果在三角形的一条边的两个端点作相交于三角形内的两条线段，那么由交点到两端点的线段之和小于三角形其余两边之和），若点 P' 位于椭圆外部，则必有 $P'I + P'I' > PI + PI' = 2a$ ，若点 P'' 位于椭圆内部，则必有 $P''I + P''I' < PI + PI' = 2a$ ，因而满足焦半径性质的点必在椭圆上。

类似可证双曲线的情形。

5 教学启示

虽然阿波罗尼奥斯在《圆锥曲线论》中定义了椭圆和双曲线的焦点，但他并没有发现旦德林球，因而未能呈现焦点的来源，而在抛物线性质的讨论中，焦点则是完全缺失的。焦半径性质似乎也只是偶然发现的结果。可见，焦点并未成为阿波罗尼奥斯关注的“焦点”。有了旦德林球，可以建立关于圆锥曲线的一条完整的逻辑链：首先，从圆锥曲线的截线定义出发，利用通径得到抛物线的基本性质（1），利用通径和长轴长，得到椭圆的基本性质（3），利用通径和实轴长，得到双曲线的基本性质（4）；其次，利用旦德林球，在圆锥曲线的横轴（阿波罗尼奥斯的称谓）上得到一个特殊点，并证明该点满足特殊性质（5）和（6）；再次，将满足该性质的点定义为相应圆锥曲线的焦点；最后，利用焦点的定义和圆锥曲线的基本性质，证明椭圆或双曲线的焦半径性质，并证明满足焦半径性质的点位于椭圆或双曲线上。

圆锥曲线及其焦点的历史蕴含了丰富的信息，为今日教学提供了诸多启示。

其一，追本溯源，深化联系。今日教科书所采用的抛物线定义与椭圆和双曲线的定义并不统一，抛物线的标准方程与另两种曲线也不统一，因而三者的统一性被淡化了。如果统一以圆锥曲线的一个顶点为原点来建系，并以通径为参数，就能再现古希腊数学家关于圆锥曲线本质

的认识。

如图 9-11，分别以抛物线的顶点、椭圆的左顶点和双曲线的右顶点为原点建立坐标系，设通径为 p ，则由（1）、（2）和（4）依次可得三种曲线的方程为¹

$$y^2 = px,$$

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2,$$

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2.$$

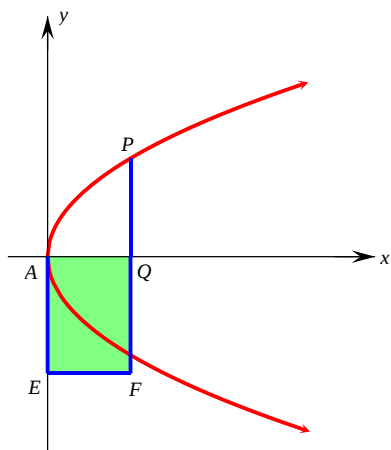


图 9 抛物线的方程

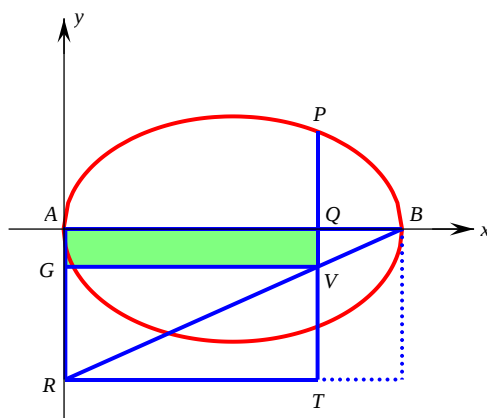


图 10 椭圆的方程

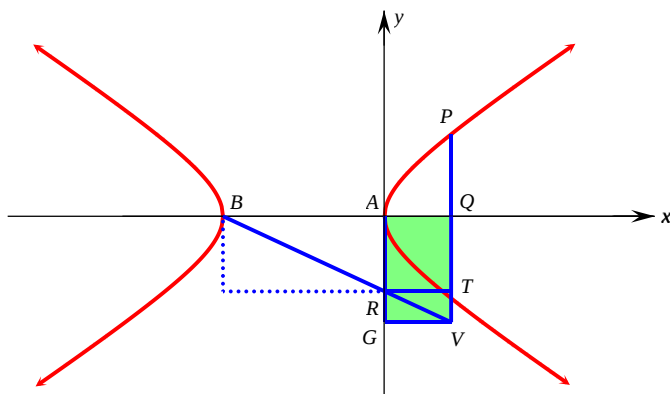


图 11 双曲线的方程

上述方程呈现了三种圆锥曲线的统一性，其中椭圆或双曲线方程中的 $\frac{p}{2a}x^2$ 正是在通径 AR 上贴合面积为 y^2 的矩形时所不足和超出的部分面积。

¹ 具体推导过程详见《上海 HPM 通讯》2021 年第 10 卷第 10 期刊首新语。

其二，以史为源，设计问题。根据圆锥曲线的基本性质，可以设计许多轨迹问题，供学生探究。例如，已知线段 $AB = 2a$ ($a > 0$)， $AC = p$ ($p > 0$)， $AC \perp AB$ 。在线段 AB 上任取一点 M 。

问题 1：如图 12，在 MB 或其延长线上取一点 N ，使得 $MN = AC$ ，以 AN 为直径作圆，交 AB 在点 M 处的垂线于点 P 和 P' ，求点 P 和 P' 的轨迹。

问题 2：如图 13，过点 M 作 AB 的垂线，交 BC 于点 D ，在 MB 上取一点 N ，使得 $MN = MD$ ，以 AN 为直径作圆，交 DM 于点 P 和 P' ，求点 P 和 P' 的轨迹。

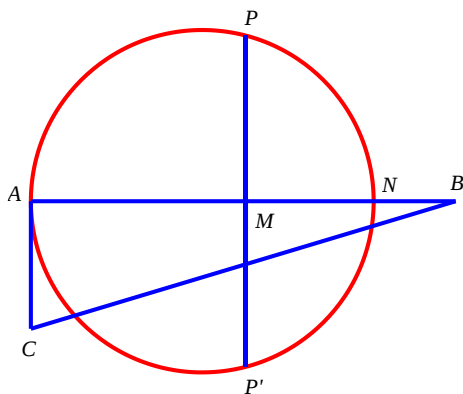


图 12 轨迹问题一

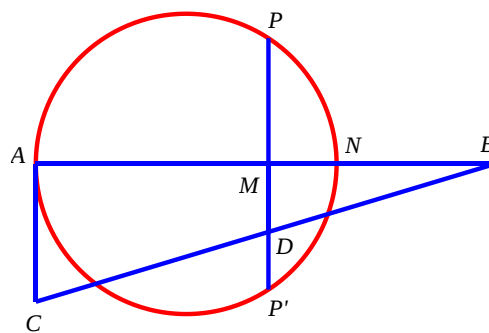


图 13 轨迹问题二

问题 3：如图 14，在线段 AB 或 BA 的延长线上取点 M ，过点 M 作 AB 的垂线，交 BC 的延长线于点 D ，在 AM 延长线上取一点 N ，使得 $MN = MD$ ，以 AN 为直径作圆，交直线 DM 于点 P 和 P' ，求点 P 和 P' 的轨迹。

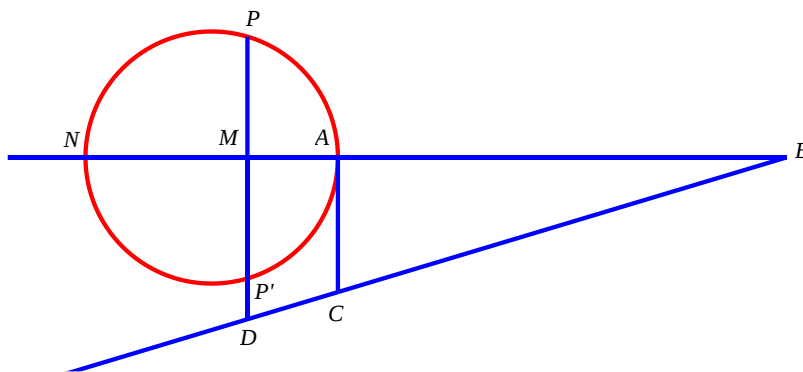


图 14 轨迹问题三

其三，返璞归真，探索焦点。虽然焦点对于圆锥曲线来说十分重要，但人们对于焦点概念的来源却知之甚少。在已有的圆锥曲线 HPM 教学案例中，教师往往沿用旦德林的做法，直接

由焦半径性质推断旦德林双球在截面上的切点为圆锥曲线的焦点，但倘若阿波罗尼奥斯“遇见”旦德林，他又将如何证明旦德林球的切点就是焦点，并进而证明焦半径性质呢？教师可以提出这个问题，让学生从几何的角度加以探究，可以促进他们对圆锥曲线性质的理解。

其四，倾听历史，感悟思想。在古希腊，圆锥曲线属于纯几何知识，而今天，它成了解析几何思想的重要载体：选择圆锥曲线的某种定义，建立平面直角坐标系，根据定义建立其方程，然后通过方程来研究其几何性质。今日教科书所呈现的只是其中一种路径而已，选择不同的定义、不同的参数、不同的坐标系，都不影响解析几何思想的呈现。但是，倘若教师要回答本文开篇所列的一系列问题，他就需要选择以截线定义为出发点的路径，在截线定义和第一定义之间、在几何性质和代数方程之间各架起一座桥梁。

数学的历史并非如人们想象的那样以线性的方式或按今日教科书所呈现的方式发展，这就是为什么人们需要选择“重构式”或“发生式”进行教学的原因。阿波罗尼奥斯和旦德林的“相遇”，为圆锥曲线知识发展路径的重构提供了重要参照。

参考文献

- [1] 陈锋, 王芳. 基于旦德林双球模型的椭圆定义教学. 数学教学, 2012(4): 5-8, 40.
- [2] 张佳淳, 舒适, 秦语真. HPM 视角下的双曲线高三复习课教学研究. 中小学课堂教学研究, 2021(4): 4-9.
- [3] Heath, T. L. *Apollonius of Perga: Treatise on Conic Sections* [M]. Cambridge: The University Press, 1896. 113-114.
- [4] 汪晓勤. 椭圆第一定义是如何诞生的. 中学数学月刊, 2017(6): 28-31.
- [5] Dandelin, G. Memoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique [J]. *Nouveaux Mémoires de L'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*. 1822, 2: 171-202.

美英早期解析几何教科书中关于二元二次方程的讨论

谢宇欣

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

在数学史上, 圆锥曲线是一个十分重要的研究领域。古希腊数学家用平面截圆锥得到三种圆锥曲线, 并发现了它们的许多性质。17 世纪, 法国数学家笛卡儿 (R. Descartes, 1596-1650) 创立解析几何, 圆锥曲线的代数方程应运而生^[1]。圆、椭圆、双曲线和抛物线的方程都是二元二次方程。但反过来, 二元二次方程所表示的曲线是否都是圆锥曲线呢? 要回答这个问题, 就需要对一般二次方程进行讨论, 以了解二次曲线的完整性质。另一方面, 在中学数学教学中, 会遇到诸如 $y = x + \frac{1}{x}$ 之类的函数, 其图像 (教师常常给它取名为“耐克曲线”) 究竟是什么曲线? 要解决这个问题, 也需要二元二次方程的有关结论。

在我国, 对二元二次方程进行分类的要求只出现于早期的课程标准中。1950 年颁布的《数学精简纲要》规定, 高中解析几何“应授教材”的第六章为坐标变换, 要求学生能利用坐标轴的平移和旋转简化二次方程。2000 年后, 坐标变换、参数方程等内容均不见于数学课程, 只有 2004 年的上海课程标准涵盖了二元二次方程的分类与化简。章建跃指出, 关于坐标变换的讨论是非常专业化的数学问题, 经过多年改革, 2017 版全国高中数学课程标准与各版本高中数学教材中已经不见一般二次方程的踪影^[2]。

为完成一般二次方程的化简, 大学解析几何教材大都需要立足于二次曲线的矩阵概念、不变量和特征方程的计算, 这些方法均超出了现有中学生的知识基础。因此, 本文聚焦关于一般二次方程的讨论, 对 19-20 世纪中叶出版的 71 种美英解析几何教科书进行考察, 试图从中梳理出符合今日高中生认知基础的初等方法, 为教学提供参考。早期教科书往往采用斜坐标系, 为便于读者理解, 本文统一采用直角坐标系。

2 求根公式法

1637 年，笛卡儿在其《几何学》一书的第二卷中详细研究了圆锥曲线的性质。他在解决帕普斯四线轨迹问题时，得到一过原点的二次曲线方程

$$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2,$$

将该方程看作关于 y 的一元二次方程，解得（只取算术根）

$$y = \frac{1}{2}a - \frac{b}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{px^2 + qx + a^2},$$

其中 $p = b^2 - 4d$ ， $q = 4c - 2ab$ 。笛卡儿首次对二次方程进行讨论，得出结论：若 $q^2 - 4pa^2 = 0$ ，则轨迹为直线；若 $p = 0$ ，则轨迹为抛物线；若 $p < 0$ ，则轨迹为椭圆（ $b = 0$ ， $d = 1$ 时为圆）；若 $p > 0$ ，则轨迹为双曲线。^[3]

借鉴笛卡儿的方法，Hamilton（1826）、Lardner（1831）等将一般二元二次方程

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

由隐函数转化为显函数，得到

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C} \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2BC)x + (E^2 - 4CF)} \quad (2)$$

在（2）中，令 $R^2 = (B^2 - 4AC)x^2 + 2(BE - 2BC)x + (E^2 - 4CF)$ ， $R^2 = 0$ 的根为 x', x'' 。

情况一： $B^2 - 4AC > 0$

（一）若 x', x'' 是互不相等的实数，则当 $x < x'$ 或 $x > x''$ 时， $R^2 > 0$ ， y 有两个实数值；当 $x = x'$ 或 $x = x''$ 时， $R^2 = 0$ ， y 有且仅有一个实数值。此时，曲线由被 y 轴的两条平行线隔离开、且在相反方向上无限延伸的分支组成，故为左右开口的双曲线^[4]，如图 1 所示。

（二）若 x', x'' 是虚数，则 $R^2 > 0$ 恒成立， y 有两个实数值。此时曲线的一半完全位于直线 $l: y = -\frac{Bx + E}{2C}$ 之上方，另一半完全位于 l 之下方，故为上下开口的双曲线，如图 2 所示。

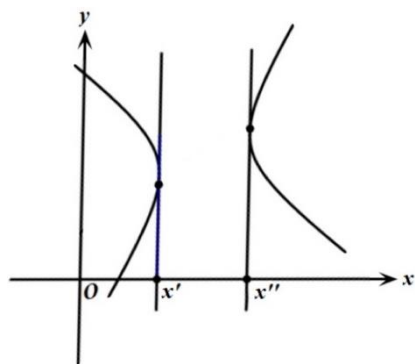


图 1 左右开口的双曲线

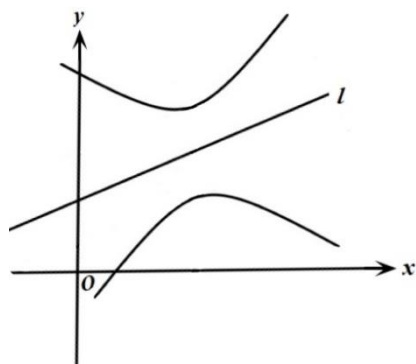


图 2 上下开口的双曲线

(三) 若 x', x'' 是相等的实数, 则在 $x = x' = x''$ 处 $R^2 = 0$, y 有且仅有一个实数值, 其余各点处都有 $R^2 > 0$, y 取得两个实数值, 易知, (2) 所表示的曲线为两条相交直线。

情况二: $B^2 - 4AC < 0$

(一) 若 x', x'' 是互不相等的实数, 则当 $x' < x < x''$ 时, $R^2 > 0$, y 有两个实数值; 当 $x = x'$ 或 $x = x''$ 时, $R^2 = 0$, y 有且仅有一个实数值; 将 (2) 反解重复上述讨论, 易知此时曲线为介于两条平行于 y 轴与两条平行于 x 轴的直线之间的椭圆^[5], 如图 3 所示。

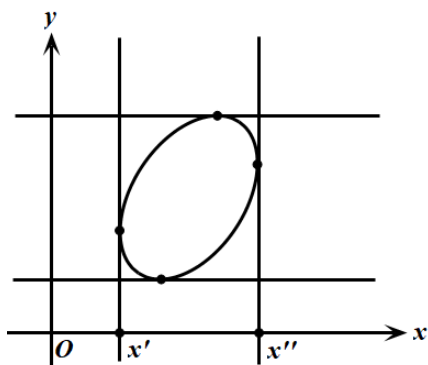


图 3 椭圆

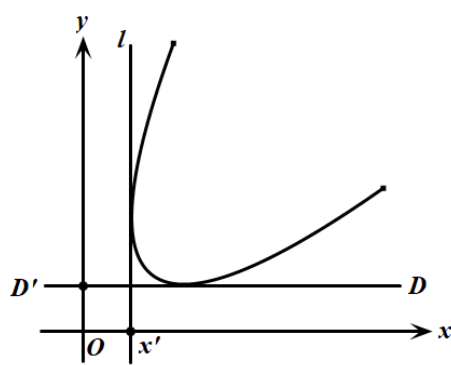


图 4 抛物线

(二) 若 x', x'' 是相等的实数, 则在 $x = x' = x''$ 处 $R^2 = 0$, y 有且仅有一个实数值, 在其余各点处都有 $R^2 < 0$, y 为虚数。此时, (2) 仅表示点 $\left(x', -\frac{Bx' + E}{2C}\right)$ 。

情况三: $B^2 - 4AC = 0$

此时有 $R^2 = 2(BE - 2CD)x + (E^2 - 4CF)$ 。

(一) 若 $BE - 2CD > 0$, 当 $x > x'$ 时 $R^2 > 0$, y 有两个实数值; 当 $x = x'$ 时 $R^2 = 0$, y 有且

仅有一个实数值；此时，曲线在直线 $l: x = x'$ 右侧无限延伸, 且与 l 相切，如图 4 所示。若 $BE - 2CD < 0$ ，曲线在 l 左侧；将 (2) 反解，同理可得：若 $BD - 2AE > 0$ ，曲线在 $l_{DD'}$ 上侧；若 $BD - 2AE < 0$ ，曲线在 $l_{DD'}$ 下侧。以上情况都表示抛物线。

(二) 若 $BE - 2CD = 0$ ，此时 $y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C} \sqrt{(E^2 - 4CF)}$ 。当 $E^2 - 4CF > 0$ 时， y 表示两条平行直线；当 $E^2 - 4CF = 0$ 时， y 表示一条直线^[6]。

此外，Young (1830) 还考虑了 $A = C = 0$ 时的特殊情况。编者还指出，若曲线为抛物线，则 (1) 的前三项构成一个完全平方式^[7]。

Puckle (1870) 在获得 (2) 后，讨论了 R^2 和 $B^2 - 4AC$ 的符号之间的关系，进而得出相同的结论^[8]。

3 坐标变换法

Peirce (1857) 等利用旋转变换 $\begin{cases} x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{cases}$ 将 (1) 化为

$$A_1 x_1^2 + B_1 y_1^2 + D_1 x_1 + E_1 y_1 + F = 0 \quad (3)$$

其中 $\tan 2\theta = \frac{B}{A - C}$ 。由于 A_1, B_1 不能同时为 0，不妨设 $B_1 > 0$ 。

情况一： $A_1 \neq 0$

此时，曲线中心的坐标为 $\left(-\frac{D_1}{2A_1}, -\frac{E_1}{2B_1}\right)$ 。作平移变换 $\begin{cases} x_1 = x_2 - \frac{D_1}{2A_1} \\ y_1 = y_2 - \frac{E_1}{2B_1} \end{cases}$ ，得到

$$A_1 x_2^2 + B_1 y_2^2 + F_1 = 0 \quad (4)$$

(一) 若 $A_1 > 0$ ，则当 $F_1 = 0$ 时，(4) 表示一个点；当 $F_1 < 0$ 时，(4) 表示椭圆。

(二) 若 $A_1 < 0$ ，则当 $F_1 > 0$ 时，(4) 表示焦点在 x 轴上的双曲线；当 $F_1 = 0$ 时，(4) 表示两条相交直线；当 $F_1 < 0$ 时，(4) 表示焦点在 y 轴上的双曲线。

情况二： $A_1 = 0$

此时 (3) 变成

$$B_1 y_1^2 + D_1 x_1 + E_1 y_1 + F = 0 \quad (5)$$

此时曲线的中心在无穷远处。

(一) 当 $D_1 = 0$ 时, $y_1 = \frac{1}{2B_1}(-E_1 \pm \sqrt{E_1^2 - 4B_1 F})$ 。当 $E_1^2 - 4B_1 F > 0$ 时, (5) 表示两条平行直线; 当 $E_1^2 - 4B_1 F = 0$, (5) 表示一条直线。

$$(二) \text{ 当 } D_1 \neq 0 \text{ 时, 对 (5) 实施平移变换 } \begin{cases} x_1 = x_2 + \frac{E_1^2 - 4B_1 F}{4B_1 D_1} \\ y_1 = y_2 - \frac{E_1}{2B_1} \end{cases}, \text{ 得到}$$

$$B_1 y_2^2 + D_1 x_2 = 0 \quad (6)$$

当 $D_1 > 0$ 时, (6) 表示开口向左的抛物线; 当 $D_1 < 0$ 时, (6) 表示开口向右的抛物线^[9]。

Peck (1876)、Loomis (1877) 等也运用了旋转与平移变换, 但选择了不同的表达方式。

在 (3) 中有

$$A_1 = A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta,$$

$$B_1 = A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta,$$

$$\text{由 } \tan 2\theta = \frac{B}{A-C} \text{ 可得 } \cos 2\theta = \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}}, \quad \sin 2\theta = \frac{B}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}}, \text{ 故得}$$

$$A_1 - B_1 = (A-C) \cos 2\theta + B \sin 2\theta = \sqrt{B^2 + (A-C)^2},$$

又 $A_1 + B_1 = A + C$, 于是得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2} [A + C \pm \sqrt{B^2 + (A-C)^2}] \\ B_1 = \frac{1}{2} [A + C \mp \sqrt{B^2 + (A-C)^2}] \end{cases},$$

故得 $A_1 B_1 = \frac{1}{4}(4AC - B^2)$ 。当 $B^2 - 4AC > 0$ 时, A_1, B_1 异号, (3) 表示为双曲线; 当

$B^2 - 4AC < 0$ 时, A_1, B_1 同号, (3) 表示椭圆; 当 $B^2 - 4AC = 0$ 时, A_1, B_1 中有一个为 0 时, (3) 表示抛物线^[10-11]。

Riggs (1911) 采用平移加旋转的变换方式^[12]; Davies (1836) 则对二次方程进行了更细致的分类^[13]。

4 无穷远点法

Smith (1886) 指出：“在处理二次曲线的许多方法中，最自然的也是最好的方法就是讨论轨迹与直线的关系。”如图 5，设 $P(x_0, y_0)$ 是直角坐标系 xOy 上任一点，过点 P 作倾斜角为 θ 的直线 l 交 (1) 的曲线于点 $P'(x', y')$ ，点 P 与 P' 之间的距离为 δ 。令 $q = \cos \beta$ ， $q' = \cos \alpha$ ，则 $x' = x_0 + q\delta$ ， $y' = y_0 + q'\delta$ 。设 l 的斜率为 k ，则

$$k = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{q'}{q}。$$

将 $P'(x', y')$ 的坐标代入 (1) 得

$$\begin{aligned} & (Aq^2 + Bqq' + Cq'^2)\delta^2 + [(2Ax_0 + By_0 + D)q + (Bx_0 + 2Cy_0 + E)q']\delta \\ & + Ax_0^2 + Bx_0y_0 + Cy_0^2 + Dx_0 + Ey_0 + F = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 是一个关于 δ 的一元二次方程，方程的两个根 δ_1, δ_2 分别表示点 P 到直线 l 与 (1) 的曲线的两个交点的距离。当 (7) 中的二次项系数为 0，即 $Aq^2 + Bqq' + Cq'^2 = 0$ ，也即

$$A + Bk + Ck^2 = 0 \quad (8)$$

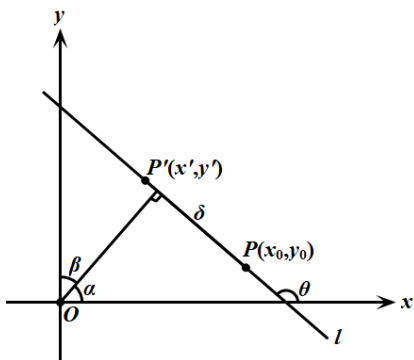


图 5 Smith (1886) 的模型

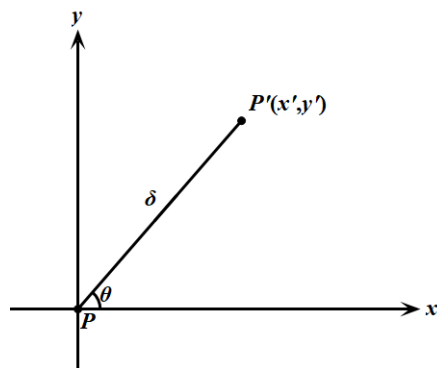


图 6 Schmall (1921) 对 Smith (1886) 模型的简化

时，方程至少有一个根为 $\delta_1 = \infty$ 。² 也就是说，当直线 l 的斜率 k 满足 (8) 时，从点 P 到 l 与 (1) 的两个交点的距离至少有一个是无穷的，即直线 l 与 (1) 在无穷远处有交点。换句话说，

² 《范式大代数》一书中有这样一个结论：对于实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，若 $a \rightarrow 0$ 而 $b \neq 0$ ，则方程有 1 个无穷大根；若 $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$ 而 $c \neq 0$ ，则方程有 2 个无穷大根。

就是 (1) 在直线 l 的方向上无限延伸。当 $B^2 - 4AC > 0$ 时, (8) 有两个实根, 与 (1) 在无穷远处相交的直线有 2 条, 此时 (1) 为双曲线, 且这两条直线平行于双曲线的渐近线; 当 $B^2 - 4AC = 0$ 时, (8) 有一个实根, 与 (1) 在无穷远处相交的直线有 1 条, 此时 (1) 为抛物线, 且这条直线平行于抛物线的对称轴; 当 $B^2 - 4AC < 0$ 时, (8) 无实根, 与 (1) 在无穷远处相交的直线有 0 条, 此时 (1) 为椭圆。^[14]

Schmall (1921) 令 Smith (1886) 中的点 P 为原点, 如图 6 所示。过原点且倾斜角为 θ 的直线 l 与曲线 (1) 的交点 $P'(x', y')$ 的坐标为 $x' = q\delta = \delta \cos \theta$, $y' = q'\delta = \delta \sin \theta$, 其中 δ 为 P' 到原点的距离。这样, 就把曲线上的点转化成了学生熟悉的极坐标形式。于是, 在 (1) 中令 $x = \delta \cos \theta$, $y = \delta \sin \theta$, 可得相同结论。^[15]

5 相交直线法

其实, 在 Smith (1886) 之前, Johnson (1869) 已通过曲线与直线的关系来判断曲线的类型。但他不是从“与曲线在无穷远处相交的直线条数”, 而是从“与曲线交于一点的直线条数”这一角度进行讨论。值得注意的是, 和中学生认知中的“有且仅有一个交点”不同, Johnson (1869) 所指的“直线与 (1) 交于一点”的更加准确的说法是: 直线 $y = kx + b$ 与 (1) 交于两点, 其中一点为 Q , 另一点在无穷远处, 即直线方程与 (1) 联立得到的关于 x 的一元二次

$$(A + Bk + Ck^2)x^2 + (Bb + 2Ckb + Ek + D)x + (Cb^2 + Eb + F) = 0 \quad (9)$$

方程的二次项系数为 0。因此, 与 (1) 交于一点的直线将不包含曲线的切线, 因为过 Q 点的切线与曲线的两个交点重合于点 Q , 且此时 (9) 为一个完全平方式, 其二次项系数不为 0。因方程 $A + Bk + Ck^2 = 0$ 的根的个数即为与曲线交于一点的直线条数, 故可根据 $B^2 - 4AC$ 来判断这样的直线有 2 条、1 条还是 0 条。如图 7, 通过与曲线交于一点的直线条数来判断曲线是双曲线、抛物线还是椭圆。^[16]

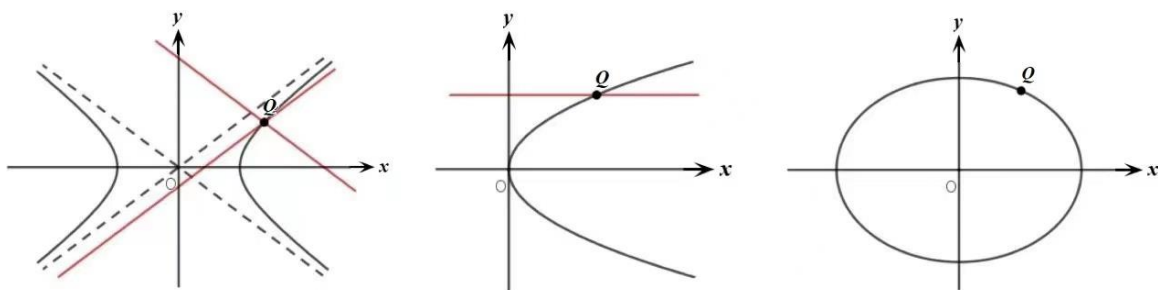


图 7 与圆锥曲线相交于一点的直线

6 第二定义法

Bauer (1903) 利用判别式 $B^2 - 4AC$ 与离心率之间的关系对二元二次方程进行讨论。如图 8, 设圆锥曲线焦点 F 的坐标为 (m, n) , 离心率为 e , 准线 DD' 到原点 O 的距离为 d , 圆锥曲线的轴与 x 轴的夹角为 α , 则准线方程为 $x \cos \alpha + y \sin \alpha = d$ 。根据圆锥曲线的焦点-准线定义, 有 $\frac{PF}{PD} = e$, 即 $\overline{PF}^2 = e^2 \cdot \overline{PD}^2$ 。设曲线上任意一点 P 的坐标为 (x', y') , 则 $PF = \sqrt{(x' - m)^2 + (y' - n)^2}$, $PD = |x' \cos \alpha + y' \sin \alpha - d|$, 代入定义式并整理得到

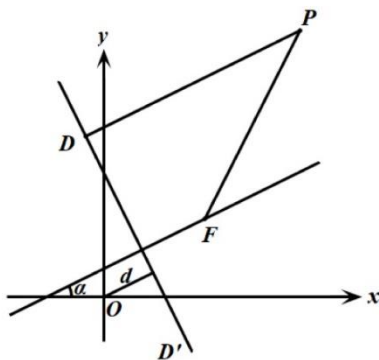


图 8 Bauer (1903) 对二次方程系数的推导

$$\begin{aligned} & (1 - e^2 \cos^2 \alpha) x'^2 - 2e^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot x' y' + (1 - e^2 \sin^2 \alpha) y'^2 \\ & + 2(e^2 d \cos \alpha - m) x' + 2(e^2 d \sin \alpha - n) y' + m^2 + n^2 - e^2 d^2 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

这是一个根据二次曲线的焦点坐标、离心率、原点到准线的距离以及曲线的轴与 x 轴的倾角所求出的一般方程。将 (10) 中项的系数与方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 中项的系数一一对应可以得到

$$A = 1 - e^2 \cos^2 \alpha, \quad B = -2e^2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad C = 1 - e^2 \sin^2 \alpha,$$

计算并化简后有

$$B^2 - 4AC = 4(e^2 - 1),$$

当 $B^2 - 4AC > 0$ 时, $e > 1$, (10) 表示双曲线; 当 $B^2 - 4AC < 0$ 时, $e < 1$, (10) 表示椭圆; 当 $B^2 - 4AC = 0$ 时, $e = 1$, (10) 表示抛物线。^[17]

7 因式分解法

若 (1) 的等式左边可以被分解为两个一次因式的乘积, 则称该方程是可约的, 否则称该方程是不可约的。Phillips (1915) 将一般二元二次方程分为这两类。对于可约方程, 若分解后得到两个一次实系数因式, 则方程表示两条直线; 若分解后得到两个一次因式存在虚系数, 则方程表示一点。对于不可约方程, 其轨迹为椭圆、双曲线、抛物线或虚轨迹。若二次项部分分解得到含虚系数的因式, 则方程表示椭圆; 若二次项部分分解得到两个不同的实系数因式, 则方程表示双曲线; 若二次项部分为一个完全平方式, 则方程表示为抛物线。下面是推导过程

(一) 以直线 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 为轴的椭圆的方程为

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right)^2 = 1,$$

该方程的二次项部分为 $\frac{(A_1x + B_1y)^2}{a^2(A_1^2 + B_1^2)} + \frac{(A_2x + B_2y)^2}{b^2(A_2^2 + B_2^2)}$, 这是一个平方和, 所以分解会得到含虚系数的因式。

(二) 以直线 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 为渐近线的双曲线的方程为

$$\left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right) \left(\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) = c,$$

这个方程的二次项部分为 $\left(\frac{A_1x + B_1y}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right) \left(\frac{A_2x + B_2y}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right)$, 这是两个一次实系数因式的乘积。

(三) 以直线 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 为轴, 通过曲线顶点垂直于轴的直线为 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 的抛物线的方程为

$$\left(\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right)^2 = a \left(\frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right),$$

这个方程的二次项部分为 $\frac{(A_1 x + B_1 y)^2}{A_1^2 + B_1^2}$ ，这是一个完全平方式[18]。^[18]

8 不同方法的分布

图 9 给出了不同方法的时间分布情况。由图可知，1857 年以前，大多数教科书利用求根公式来讨论二元二次方程，再运用数形结合的方法推导方程的根的几何解释，只在计算根的方法和步骤上略有不同。通过求二次方程的根来解决问题是一种古老的数学方法，最早可以追溯到古希腊时期。然而，文艺复兴时期笛卡尔的解析几何为代数和几何之间的联系提供了新的视角，此后的教科书在讨论二次方程时也受到了笛卡尔几何的启发。1857 年以后，线性代数的发展和矩阵理论的兴起为坐标变换提供了更严格的数学框架，教科书普遍开始使用坐标变换法将一般二次方程化为标准形式，以此判断二次曲线的类型。另外，不同时代的数学家不断提出新的方法和概念以解决问题和简化数学理论，教科书编者倾向于将这些新的数学思想与学生的认知基础结合，为学生提供最新的数学知识。因此，不同时期的教科书讨论一般二次方程的角度都有不同程度的创新，如基于曲线与直线关系（Smith, 1886）、判别式与离心率（Bauer, 1903）、因式分解（Phillips, 1915）等。总的来说，教科书关于二次方程讨论的演变是数学史、教学方法和数学家创新精神的综合体现，其中蕴含的不同方法和角度反映了数学的多样性和不断发展变化的性质。

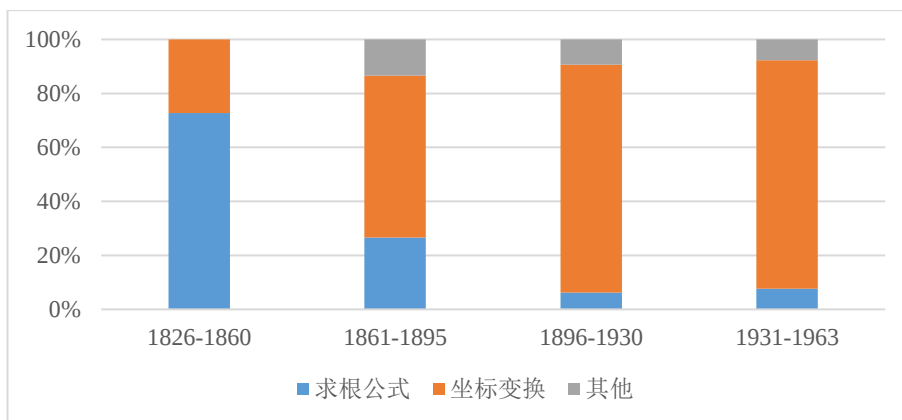


图 9 不同时期教科书对一般二次方程的讨论方法统计

9 结论和启示

在所考察的解析几何文献中，共发现了讨论一般二次方程的 6 类方法——求根公式法、坐标变换法、无穷远点法、相交直线法、第二定义法和因式分解法，并得出如下结论：二元二次方程除了表示圆锥曲线，还可以表示一点、一条直线、两条相交直线和两条平行直线。通过对有关教科书的比较发现，历史上数学家对于一般二次方程的研究不仅仅停留在代数层面，他们通过几何的直观图像和解析的方法探索了二次曲线的多样性和复杂性，这也为中学生理解和学习一般二次方程的讨论提供了思路。

在教学中，教师可以基于学生已有认知结构中的数学知识，先使用求根公式分别得出二次方程中 y 关于 x 的解和 x 关于 y 的解，再对方程的解进行讨论，通过分析曲线在各个方向是无限延伸还是被限制来分析方程的几何形状；也可以根据二次曲线的焦点坐标、离心率、原点到准线的距离以及曲线的轴与 x 轴的倾角求出的二次曲线的一般方程，再根据离心率判别不同的圆锥曲线；还可以使用极坐标代换，通过极径与极角判断曲线在几个方向上无限延伸来判断曲线的类型；抑或是效仿 Phillips (1915) 基于因式分解的讨论，根据二次项部分因式的系数是实数还是虚数来进行讨论。6 类方法中，“相交直线法”是最易为高中生所理解的方法。教师在实施教学时可以先使用直观的图形语言，让学生观察，过三种不同圆锥曲线上一点作直线，与该圆锥曲线只有一个交点的直线（除切线外）分别有几条，随后引导学生使用代数语言进行求解。即直线与二次曲线方程联立后二次项系数为 0 时，满足条件的直线斜率分别有几个。

对于学生难以理解和接受的部分，教师也可以通过教学设计，利用初等数学的知识引导学生理解。例如，讲授基于坐标变换的讨论时，由于之前的函数基础，学生对于平移变换易于理解，但对于旋转变换的公式
$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$
 却感到陌生。这时我们可以作如下分析：显然必须以对称轴所在直线作为新坐标系的坐标轴，一般方程才可能化简成标准方程的形式。在新坐标系下，不妨假设原 x 轴的斜率为 k (k 存在且不为零，否则只需经过恰当的坐标平移即可完成方程化简)。因此，可设原 x 轴所在直线方程为 $-kx' + y' + m_1 = 0$ ，原 y 轴所在直线方程为 $x' + ky' + m_2 = 0$ ，那么点 $P(x', y')$ 到原 y 轴的距离等于 P 在原坐标系下横坐标的绝对值 $|x|$ ，点

$P(x', y')$ 到原 x 轴的距离等于 P 在原坐标系下纵坐标的绝对值 $|y|$ ，即 $|x| = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} |x' + ky' + m_2|$ ，

$|y| = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} |-kx' + y' + m_1|$ 。通过分析易知，去掉绝对值依然成立。而这个变换表示的就是一

个旋转加平移变换，其中的旋转部分为：

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(x' + ky') = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}(-kx' + y') = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases},$$

这样一来，利用初等数学知识，可以实现学生对旋转变换的理解。

尽管现行教材已不再涉及一般二次方程，但认知结构中对“一般”的缺失可能会限制学生的视野，其中具有代表性的例子就是学生通常无法将函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 与双曲线联系起来。对一般二元二次方程的探究完善了学生对二次曲线的认知，实现了知识之谐；而推导过程中的多种方法以及其中涵盖的数形结合、不变量等思想更是达成了方法之美与能力之助，帮助学生拓宽了解析几何的视野。

参考文献

- [1] Bussi, M. G. B. The Meaning of Conics: Historical and Didactical Dimensions [J]. *Mathematics Education Library*, 2005, 37: 39-60.
- [2] 章建跃. 我国中学数学解析几何教材的沿革——“中学数学中的解析几何”之二[J]. *中学数学教学参考*, 2007(15): 1-4.
- [3] Descartes, R., Latham, M. L., & Smith, D. E. *The geometry of René Descartes* [M]. Chicago: The Open Court Pub. Co., 1637: 60-80.
- [4] Hamilton, H. P. *The Principles of Analytical Geometry* [M]. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1826: 171-183.
- [5] Biot, J. B. *An elementary treatise on analytical geometry* [M]. Philadelphia: C. Desilver, 1840: 176-188.
- [6] Lardner, D. *A Treatise on Algebraic Geometry* [M]. London: Whittaker, Treacher & Arnot, 1831: 37-48.
- [7] Young, J. R. *The Elements of Analytical Geometry* [M]. London: John Souter, 1830: 184-192.

- [8] Puckle, G. H. *An Elementary Treatise on Conic Sections and Algebraic Geometry* [M]. London: Macmillan, 1870: 100-109.
- [9] Peirce, J. M. *A Text-book of Analytic Geometry* [M]. Cambridge: J. Bartlett, 1857: 193-201.
- [10] Peck, W. G. *A Treatise on Analytical Geometry* [M]. New York: A. S. Barnes & Company, 1876: 152-160.
- [11] Loomis, E. *The Elements of Analytical Geometry* [M]. New York: Harper & Brothers, 1877: 170-182.
- [12] Riggs, N. C. *Analytic Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1911: 86-96.
- [13] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry* [M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Co, 1836: 203-212.
- [14] Smith, W. B. *Elementary Co-ordinate Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1886: 113-124.
- [15] Schmall, C. N. *A First Course in Analytic Geometry, Plane and Solid* [M]. New York: D. van Nostrand Company, 1921: 230-236.
- [16] Johnson, W. W. *An elementary Treatise on Analytical Geometry* [M]. Philadelphia: J. B. Lippincott & Co., 1869: 207-215.
- [17] Bauer, G. N. *The Simpler Elements of Analytical Geometry* [M]. Minneapolis: H. W. Wilson Company, 1903: 55-63.
- [18] Phillips, H. B. *Analytic Geometry* [M]. London: Chapman & Hall, 1915: 83-87.

教学实践

HPM 视角下线面平行判定定理的教学

唐望贺¹, 刘梦哲², 杨舒捷²

(1. 华东师范大学澄迈实验中学, 海南 571924;

2. 华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

线面平行的判定是研究直线与平面的位置关系的起始课, 同时也为后续研究其他位置关系奠定了基础, 是研究空间位置关系的典范。其中, 直线与平面平行的判定定理是研究空间位置的一种基本方法, 它可将线面的平行关系(空间问题)转化为线线的平行关系(平面问题), 蕴含着化归思想, 是三大平行判定(线线平行、线面平行、面面平行)的核心^[1]。

已有教学中, 有的教师关注知识从“直观感知-操作确认-思辩论证”的形成过程, 借助直角梯形泡沫板转动的实例, 让学生归纳、辨析、应用线面平行判定定理^[2]; 有的教师借助教室的实例, 设计出层层递进的问题串, 让学生在判定命题真假的过程中, 自然地抽象、归纳出线面平行判定定理^[3]; 还有教师让学生拿出两支铅笔进行实践操作, 观察静止不动的铅笔与另一支移动的铅笔所形成的平面间的位置关系, 由此猜想出线面平行判定定理, 并借助几何画板和反证法完成证明^[4]。可见, 由于课程标准对线面平行判定定理的证明不做要求, 大多教师关注到了线面平行在现实生活中的应用, 以此降低学生对抽象概念的理解难度, 但在立体几何教学愈加凸显公理化的今天, 关注线面平行判定定理的逻辑证明同样不可或缺, 而上述教学恰恰缺乏演绎几何的支持。

HPM 视角下的教学实践表明, 数学史有着多方面的教育价值, 可以构建“知识之谐”、彰显“方法之美”、营造“探究之乐”、实现“能力之助”、展示“文化之魅”、达成“德育之效”^[5]。翻开历史的画卷, 数学家给出了线面平行判定定理的多种表述以及证明方法, 将该内容融入本节课的教学, 不仅为学生探寻知识本源提供机会, 还有助于学生数学素养的提升。鉴于此, 本节课从 HPM 的视角重构“线面平行判定定理”的教学, 并付诸实施。通过追本溯源、聚焦

素养、力求创新，为创造学生学习动机，促进知识理解。本节课的教学目标如下：

- (1) 通过现实情境的直观感知和操作确认，发现线面平行的判定定理。
- (2) 探究线面平行判定定理的证明，发展直观想象和逻辑推理素养。
- (3) 通过古今联系，认识和体验数学的文化价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的自信心。

2 历史材料

通过阅读美英早期几何教科书，研究者搜集到与线面平行判定定理有关的历史素材，包括线面平行判定定理的五种表述，以及线面平行判定定理的两种证明方法。表 1 给出了线面平行判定定理的多种表述。

表 1 线面平行判定定理的表述

具体描述	教科书
如果一条直线与一个平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行。 ^[6]	Thomson, David & Legendre (1844)
如果平面外的一条直线与此平面内的一条直线平行，那么该直线与此平面平行。 ^[7]	Hackley (1847)
如果一条直线与平面内的一条直线平行，那么该直线要么与此平面平行，要么位于此平面内。 ^[8]	Wilson (1880)
两条平行直线中的一条直线平行于包含另一条直线的任一个平面。 ^[9]	Olney (1877)
如果一个平面包含且仅包含两条平行直线中的一条，那么该平面与另一条直线平行。 ^[10]	Newcomb (1884)

如图 1，已知平面 α 外的直线 AB 与平面 α 内的直线 CD 平行，可证 $AB \parallel \alpha$ 。

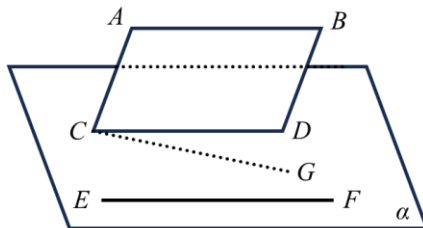


图 1 线面平行判定定理的证明

表 2 给出了线面平行判定定理的多种证明方法。

表 2 线面平行判定定理的证明

证明方法	教科书
假设直线 AB 与平面 α 不平行, 根据定义可知, AB 与平面 α 有公共点, 而 AB 不在平面 α 内, 故二者相交。又因为 AB 在平面 AD 内, 且 CD 是平面 α 和平面 AD 的交线, 所以 AB 与平面 α 相交于直线 CD 上的某一点。这与 $AB \parallel CD$ 矛盾, 故假设错误, 所以直线 $AB \parallel$ 平面 α 。 ^[7]	Hackley (1847)
作包含平行线 AB 和 CD 的平面 $ABCD$, 如果这一平面与平面 α 重合, 那么直线 AB 在平面 α 内; 如果不重合, 那么平面 $ABCD$ 与平面 α 交于直线 CD , 因为 $AB \parallel CD$, 所以 AB 与 CD 无公共点, 从而 AB 与平面 α 无公共点, 所以 $AB \parallel$ 平面 α 。 ^[8]	Wilson (1880)
假设直线 AB 与平面 α 不平行, 那么经过直线 AB 的任意平面 AD 与平面 α 的交线 CD 都不与 AB 平行, 即 CD 与 AB 不平行, 而 $AB \parallel EF$, 则 CD 与 EF 不平行。过点 C 在平面 α 内作 $CG \parallel EF$, 则 $CG \parallel AB$, 从而 CG 与 AB 共面, 又由 CD 与 AB 共面, 所以平面 $ABDC$ 和平面 $ABGC$ 有三个不共线的公共点 A 、 B 、 C , 但这是不可能的, 因此假设错误, 直线 $AB \parallel$ 平面 α 。 ^[11]	Bush (1909)

本节课, 教师尝试将上述史料用于让学生归纳和证明线面平行判定定理两个教学环节。首先, 学生通过直观感知和操作确认, 猜想线面平行的判定定理; 随后, 基于对立体几何思维的严密性的追求, 引导学生对错误的猜想进行修正和完善; 最后, 学生完成判定定理的论证。在此过程中, 教师将学生的与数学家的表述和方法进行古今对照, 学生仿佛穿越时空, 与历史上的数学家进行了一场深度的交流。

3 教学设计与实施

(一) 情境引入

首先, 教师给出田径赛场上跳高运动健儿飞跃横杆瞬间 (图 1)。



图 1 跳高运动健儿飞跃横杆瞬间

师：图 1 中是否有线面平行关系？

生：有，横杆与地面（或跳高垫）平行。

师：如果横杆不与地面平行会怎样？

生：比赛不公平（或无法准确判断实际跳高的高度）。

师：由此可见，保持横杆与地面平行太重要了！那么，你觉得可以提出一个什么问题？

生：如何确保横杆（直线）与地面（平面）平行。

【设计意图】将生活中的例子与线面平行相结合，引导学生通过对现实问题的思考和抽象，发现值得研究的数学问题，激发学生的学习动机。

问题 1：如何判定直线与平面平行？

生：根据定义，若直线与平面没有公共点则该直线与此平面平行。

请学生观察如图 2 的直线 a 、 b 与平面是否平行。

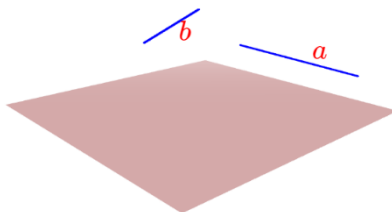


图 2 两条直线与平面的示意图之一

生：直线 b 与平面相交，直线 a 与平面平行。

旋转图 2 中的视图得到图 3，再向学生提出相同的问题，此时得到与之前相反的结论。

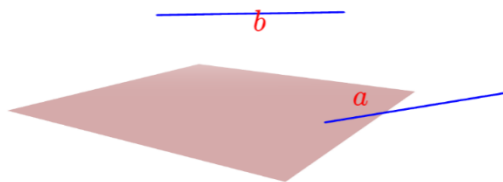


图 3 两条直线与平面的示意图之二

问题 2：如何判定线面平行？直观感觉可靠吗？定义可行吗？

【设计意图】抛出问题，让学生明确可以用定义来判定线面平行，但在具体的操作中难以实现，直观感知不可靠，定义不可行，使学生明白引入线面平行判定定理的必要性。

（二）定理探究

教师在“课前学习单”中提出以下问题。

问题 3: 如图 4，将一块直角梯形硬纸板 $ABCD$ 平放在桌面上，把这块纸板绕边 BC 转动，在转动的过程中（ AD 离开桌面）， BC 的对边 AD 与桌面有公共点吗？边 AD 与桌面平行吗？绕边 DC 转动呢？由此你能猜想线面平行的判定方法吗？



图 4 直角梯形硬纸板转动

学生观察实例，得出结论：若绕边 BC 转动，无公共点，平行；若绕边 DC 转动，有公共点，不平行。此外，学生写下了各自的猜想，教师分析学生的猜想，并发现这些猜想中有严谨、合理的判定方法，也有缺乏严谨性的判定方法，且学生提出的与数学家给出的判定方法高度相似。课堂上，教师选取了部分猜想进行展示。

生 1：平面外的直线与平面内的一条直线不相交，则直线与平面平行。

随后另一位学生提出这个猜想是不严谨的，并利用纸笔代替线面给大家演示了反例，即两条直线异面时，平面外的直线可能与该平面是相交的位置关系。

生 2：直线与平面内的一条直线平行，则直线与平面平行。

同样地，也有学生指出这个猜想是不严谨的，因为这条直线有可能在平面内。

最后师生共同总结出**直线与平面平行的判定定理**，即平面外的一条直线与平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行。

得出定理后，教师播放课前制作的微视频（图 5），介绍判定定理的相关数学史内容。起初数学家也提出过类似的猜想，此时判定定理的表述是不严谨的，但数学作为一门严谨的学科，后来不断有数学家对判定定理的表述进行修正、完善，才有了现今严谨的判定定理。

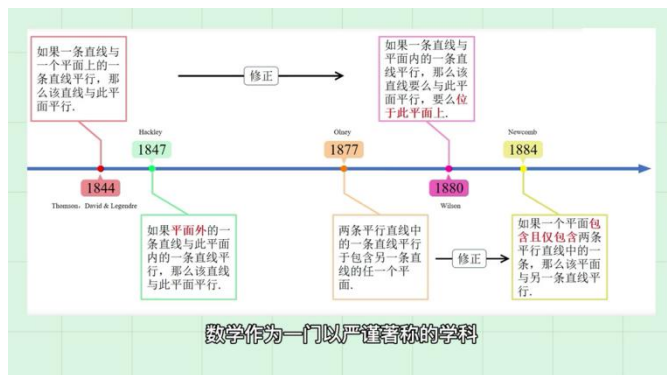


图 5 “线面平行判定定理的表述”微视频

【设计意图】 学生通过观察实例得出猜想，并对猜想进行修正、完善、归纳和提炼，最终得到线面平行的判定定理，不仅可以提高分析问题、解决问题的能力，而且能切身领略到数学是一门不断发展的学科，目前呈现在教科书中的各种概念、公式、定理、符号，都经过了上百年乃至更长时间的洗礼。同时，让学生经历数学家的困难、挫折和失败，不仅可以让学生获得真知灼见，还可以获得研究难题、不因失败而气馁的勇气。

问题 4： 请用图形语言和符号语言叙述线面平行判定定理。

学生独立思考，完成后进行展示，师生共同点评、总结。

图形语言： 如图 6。

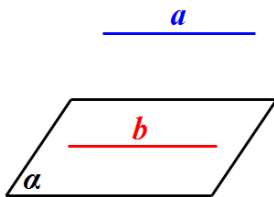


图 6 线面平行判定定理的图形语言

$$\text{符号语言: } \left. \begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a // b \end{array} \right\} \Rightarrow a // \alpha .$$

【设计意图】 通过数学中三种语言的相互转化，培养学生的抽象概括能力，让学生明白三种语言在立体几何研究中的重要性，并为接下来严密的数学推理和证明打下基础。

师：运用线面平行判定定理，我们就可以对一条直线与一个平面是否平行做出判断，其实就是将直线与平面平行的问题转化成什么问题？

生：直线与直线平行的问题。

师：也就是说，如果我们想证明一条直线与一个平面平行，只需？

生：在平面内找到一条与该直线平行的直线。

【设计意图】引导学生说出线面平行判定定理的实质就是将“线面平行”转化为“线线平行”的问题。

（三）定理证明

虽然新课标对线面平行判定定理的证明已不作要求，但若没有严格的证明，则很难保证立体几何的严密性，很难让学生更好地理解立体几何的重要定理，故而在本节课中，教师首先让学生独立思考，然后进行小组讨论，尝试证明线面平行判定定理。

在教师的引导下，学生共探讨出三种不同的证明方法。

如图 6，已知平面 α 外的直线 a 与平面 α 内的直线 b 平行，求证： $a \parallel \alpha$ 。

小组 1：假设 a 与 α 相交，则 a 与 b 确定平面 β ，所以 a 在 β 内，又因为 b 为 α 与 β 的交线，所以 a 与 α 的交点在 b 上，这与 $a \parallel b$ 矛盾，所以 $a \parallel \alpha$ 。

小组 2：假设 a 与 α 相交于点 B ，若 $B \in b$ ，则 a 与 b 相交；若 $B \notin b$ ，则 a 与 b 异面，与 $a \parallel b$ 矛盾，故假设不成立，所以 $a \parallel \alpha$ 。

小组 3：假设 a 与 α 相交于点 P ，那么 b 与 P 确定 α ， b 与 a 确定平面 β ，因此 α 与 β 重合，因此 a 在 α 内，与已知矛盾，则 $a \parallel \alpha$ 。

学生小组依次上台展示证明过程，最后，教师继续播放微视频，介绍历史上数学家的三种证明方法，并与学生给出的证明方法进行古今对照，小组 1 的证明方法与哈克利的证明方法完全一致，小组 3 的证明方法与威尔逊的证明方法高度相似。

【设计意图】学生经历富有探索精神、为真理而斗争、跌宕起伏的旅行，有助于拓宽学生的思维，让学生领略到立体几何证明中的巧妙。同时，学生在课上自主探求定理的证明方法，能让学生感受到数学家在证明线面平行判定定理时所经历的困难，体会到数学家为寻求更加简洁的证明方法而不断创新的精神。

（四）巩固应用

为学生及时巩固直线与平面平行的判定定理，教师选取了两道例题和一道思考题。

例 1：求证：空间四边形相邻两边中点的连线，平行于经过另外两边的平面。

例 2: 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 DD_1 的中点, 判断 BD_1 与平面 AEC 的位置关系, 并说明理由。

思考: 实际上, 在跳高运动中, 我们只需把横杆的两点架在跳高架的同一高度, 就能保证横杆与地面平行, 你能说说为什么吗?³

生: 这两点各自到地面的竖直连线平行且相等, 所以横杆与地面内两个支点的连线构成了一个平行四边形 (矩形), 因此根据直线与平面平行的判定定理, 横杆与地面内两个支点的连线平行。

【设计意图】 回顾情境引入中的问题, 利用线面平行判定定理解决生活中的现实问题, 加深学生对定理的理解, 并体会到实际问题可以借助数学推理论证解决。

(五) 课堂小结

师: 本节课大家有何收获, 或有何疑问?

生 1: 是否还有别的方法判定直线与平面平行?

生 2: 本节课我学习了直线与平面平行的判定定理, 同时, 我还明白数学是一门严谨的学科, 因为如果要证明线面平行, 三个条件必不可少。

生 3: 为了保证体育运动中的公平, 要保证横杆与地面平行, 因此我感受到数学在生活中的重要性。

【设计意图】 教师引导学生分享本节课的收获和问题, 充分挖掘本节课的教育价值。

4 结语

综上所述, 本节课可以总结为如下三个方面。一个定理——学习了线面平行判定定理; 两条主线——明线即知识发生、思维发展、认知建构, 暗线为数学史在两个探究活动中的运用, 最终两条主线汇聚指向学生的人格形成; 三种素养——一是学生通过观察生活情境, 提出猜想, 即用数学的眼光观察世界, 二是对定理的证明, 即用数学的思维思考世界, 三是运用符号语言描述定理, 即用数学的语言表达世界。据此, 我们得到如下教学启示。

³ 由于学生还未学习点到平面的距离以及直线与平面垂直的性质定理, 因此在本节课中, 本题只要求学生从直观上感受、理解即可, 无需严格证明。

4.1 历史为主线

历史上几何概念的发展经历了三个阶段，即“直观感知”阶段、“实验操作”阶段和“演绎几何”阶段。本节课，教师借鉴几何概念的发展阶段，重构了线面平行判定定理的教学。首先，教师从跳高横杆的实例引入教学，让学生观察横杆与地面的位置关系以及不同视角下两条直线与平面的位置关系，属于“直观感知”阶段；其次，教师借助直角梯形硬纸板旋转的实例，学生可以猜想出判定定理，并利用纸和笔对猜想进行辨析，属于“实验操作”阶段；最后，学生小组用 3 种方法证明了判定定理，属于“演绎几何”阶段。

可以说，通过借鉴或重构知识的发生、发展历史，以发生的方法引入数学概念、公式或定理，有助于把握学生的认知基础，促进学生对知识的理解。

4.2 留白促创新

本节课，教师基于“留白创造式”的理念设计教学^[12]，主要为学生留出“发现之白”“方法之白”和“论证之白”，并给予学生“补白”的空间，促使不同层次的学生都能参与到数学活动中来。

课前，通过思考直角梯形硬纸板的实例，每位学生在课前学习单中都给出了线面平行判定定理的猜想，留下“发现之白”。通过梳理学生的猜想发现，部分学生的猜想与历史上数学家的表述相一致。于是，教师在课上展示了部分学生的猜想，对于两位学生不严谨的猜想，其他学生利用纸和笔举出了反例，正是在学生提出猜想和批判质疑的过程中，最终归纳出完善的判定定理。

教师还让小组探究判定定理的不同证明方法，留下“方法之白”；对于学生的不同证明方法，教师让学生分别上台叙述证明过程，留下“论证之白”。其中，教师鼓励学生小组探究判定定理的不同证明方法，学生不仅给出了与历史上数学家相似的方法，还有我们未见于早期教科书中的方法，这无疑拓宽学生的思维，也促使班级气氛活跃，结果精彩纷呈。当然，虽然教师在这里充分留白，但是由于证明的难度和抽象性，以致部分学生未能很好地参与探究活动中，在未来的教学中，教师还需要继续思考如何搭建脚手架。

可见，当教师留白，学生能像数学家一样经历数学创造的过程，并出色地完成补白的过程。

未来,教师可以有意识地基于不同的数学史料,设计不同的探究活动,为学生留出更多的白。

4.3 对话激兴趣

本节课中,教师在学生分享线面平行判定定理的不同猜想和证明方法后,均采用微视频的形式,即运用“古今联系”的策略对学生进行了评价。无论是定理的猜想、归纳,还是证明,学生的做法都与数学家高度相似甚至完全一致,通过将学生的与古代数学家的方法作比较,学生仿佛穿越时空与数学家对话,让学生感受到自己也能得出与数学家一样的研究成果。可以说,在 HPM 视角下的数学教学中充分利用“古今对照”的评价策略,能够有效提高学生学习数学的兴趣和自信心。

参考文献

- [1] 章建跃,等. 普通高中教科书 教师教学用书 数学 必修 第二册[M]. 北京:人民教育出版社, 2019: 180.
- [2] 黄浩. 直观感知 操作确认 思辩论证——以“直线与平面平行的判定”教学为例[J]. 高中数学教与学, 2023(6): 24-26, 29.
- [3] 樊彦朝. 数学规则课型教学探究——以“直线与平面平行的判定”为例[J]. 中学数学教学参考, 2023(1): 29-31.
- [4] 郭培华. 基于“直观想象素养”培养的高中数学教学研究——以“直线与平面平行的判定”的教学为例[J]. 数学教学通讯, 2023(15): 42-44.
- [5] 汪晓勤,沈中宇. 数学史与高中数学教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 19.
- [6] Thomson, J. B., David, B. & Legendre, A. M. *Elements of Geometry* [M]. New Haven: Durrie and Peck, 1844: 154.
- [7] Hackley, C. W. *Elementary Course of Geometry* [M]. New York: Harper & brothers, 1847: 8-9.
- [8] Wilson, J. M. *Solid Geometry and Conic Sections* [M]. London: Macmillian, 1880: 10.

- [9] Olney, E. *A Treatise on Special or Elementary Geometry* [M]. New York: Sheldon & company, 1879: 170.
- [10] Newcomb, S. *Elements of Geometry* [M]. New York: H. Holt & Company, 1884: 289.
- [11] Bush, W. N. *The Elements of Geometry* [M]. New York: Silver, Burdett and company, 1909: 246.
- [12] 汪晓勤, 邹佳晨, 王华. 数学史与留白创造式教学[J]. 数学通报, 2023, 62(3): 1-6.

时空隧道

对数的前世今生

谢宇欣

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

你是否曾想过, 如果没有计算器或电脑, 我们该如何进行复杂的数学计算? 在过去, 科学家、工程师和数学家们就面临着这一巨大挑战。然而, 数学家们的努力和创新为解决这一难题铺平了道路。其中, 对数的发明和发展在数学史上扮演了重要的角色。在苏教版高中数学必修一第四章“指数与对数”的章前语中有这样一句话:

对数的发明“以其节省劳力而延长了天文学家的寿命”。——拉普拉斯

该章先引入了指数的概念, 对数的概念则是由“反解”方程 $a^b = N$ 中的幂指数得到。然而, 在历史上, 对数的概念远早于指数。那么, 为什么课本编排的顺序和历史发展的顺序不同呢? 对数概念中的 N 为什么被称为真数? 有没有“假数”呢? 对数的名称又是从何而来?

带着种种疑问, 我们将踏上一段时间旅行, 探索对数的历史, 了解它是如何诞生, 如何发展, 以及如何对现代数学和科学产生深远影响。

1 天文数字

今天, 我们用“天文数字”形容一个非常大的数, 这一形容有着历史根源。天文学与数学自古以来便有着密切的联系, 天文学的需要推动数学发展, 数学的进步为天文学提供工具。在天文学中, 许多计算都涉及球面三角学, 尤其是计算天体位置和行星轨道等。这些计算涉及大量的乘法、除法和乘方运算。由于当时常用数学工具的局限性, 天文学家们不得不花费很大的精力去计算那些繁杂的“天文数字”, 有的浪费了若干年甚至毕生的宝贵时间。

16 世纪中后期, 哥白尼的“日心说”开始流行, 它引起了人们对宇宙结构和运行机制的新的思考。在这样的时代背景下, 苏格兰业余数学家纳皮尔 (J. Napier, 1550-1617) 致力于寻

找一种简化“天文数字”计算的方法，其思想源泉之一是“双数列”间的对应（“双数列”指等差数列⁴和等比数列⁵），最早为古希腊数学家阿基米德（Archimedes, 前 287-前 212）所发现，后为法国数学家许凯（N. Chuquet, 1445-1488）、德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487-1567）等所用。两个数列究竟是如何对应起来的呢？要回答这个问题，同学们不妨先试着完成下面这个小任务。

问题 1：利用表 1，你能快速回答出 2048×4096 等于多少吗？

表 1 2 的正整数次幂（部分）

x	1	2	3	4	5	6	7	8
2 ^x	2	4	8	16	32	64	128	256
x	9	10	11	12	13	14	15	16
2 ^x	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536
x	17	18	19	20	21	22	23	24
2 ^x	131072	262144	524288	1048576	2097152	4194304	8388608	16777216

相信这对同学们来说并非难事。我们发现 2048 是 11 个 2 相乘，4096 是 12 个 2 相乘。要求二者的积，其实就是先将 2 的个数做一个加法 $11+12=23$ ，然后找到 23 对应的数 8388608，这就是最终的结果。看到这里，想必你已经对对数之名的由来了然于心，而真数和假数的谜底也藏在“双数列”中。

问题 2：根据问题 1，思考什么是真数，什么是假数？说出你的理由。

当时的天文学家需要面对的真实数据可能如上图中的 8388608 一样庞大，这种数被称为“真数”；而对数的发明使得真数在计算中可以被一个很小的“人造数”23 替代，这样的“人造数”便是“假数”，也称“对数”。

虽然斯蒂菲尔创造性地提出了利用“双数列”简化计算的思想，但其适用范围有限，在面对像 117×463 、 $1025 \div 33$ 等情况就束手无策了。纳皮尔在前人的基础上大胆创新，他没有重复研究离散的情形，而是由物理学中匀速与变速运动的概念来引入连续的对数。如图 1，设 $AB = 10^7$ ， DE 是从 D 点出发的射线。现有两点 C, F 以相同的初速度同时出发，质点 C 从 A 向 B 变

⁴ 从第二项起，每一项与它的前一项之差都等于一个常数的数列，如 1, 3, 5, 7, ...。

⁵ 从第二项起，每一项与它的前一项的比值都等于一个常数的数列，如 1, 2, 4, 8, ...。

速运动，其速度与线段 CB 的长成正比（比例系数是 1），质点 F 从 D 出发匀速运动。纳皮尔称同一时刻的 DF 长为 CB 长的对数，即 x 为 y 的对数。

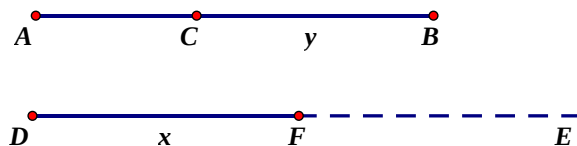


图 1 纳皮尔对数模型

问题 3: 用符号表示纳皮尔对数模型中 x 与 y 的关系，有 $y = 10^7 \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{x}{10^7}}$ ，其中 e 为自然对数的底。质点 C 和 F 的初速度是多少？

在纳皮尔对数模型中，点 C 的速度值等于线段 CB 的长度 y 。当点 F 从点 D 以初速度 v 出发时， $x = 0$ ，同时点 C 从点 A 以初速度 v 出发，此时 $v = y = 10^7 \left(\frac{1}{e} \right)^0 = 10^7$ 。

问题 4: 当点 C 恰好运动到线段 AB 的中点时，用掉了多少时间？

由 $y = 10^7 \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{x}{10^7}}$ ，有 $x = 10^7 \ln \frac{10^7}{y}$ 。当点 C 恰好运动到线段 AB 的中点时，点 F 距点 D 的距离 $x = 10^7 \ln 2$ 。由于点 F 以初速度 $v = 10^7$ 匀速运动，故所求时间 $t = \frac{x}{v} = \ln 2$ 。

早在 1594 年，纳皮尔就在“双数列”对应思想的启发下构造出了对数模型，不过，此后他却花了整整二十年时间计算对数。1614 年出版的专著《奇妙的对数表说明书》中公布了纳皮尔编制的间隔为 1 的 7 位正弦对数表。以 10^7 作为首项， $1 - 10^{-7}$ 作为公比，得到等比数列 $10^7, 10^7(1 - 10^{-7}), 10^7(1 - 10^{-7})^2, 10^7(1 - 10^{-7})^3, \dots, 10^7(1 - 10^{-7})^n, \dots$ 这个数列中的项近似为 $10000000, 9999999, 9999998, 9999997, \dots, 10000000 - n, \dots$ 相邻两项的差不超过 1。因而对于 1 千万以内的任意正整数，将它们作为真数，可在纳皮尔对数表中找到其对数。纳皮尔制作的正弦对数表，向世人提供了大量在天文计算中会使用到的正弦、切线和割线的对数。天文学家通过查表和简单计算，可以快速得到天体的位置和轨道等相关数据，从而节省了大量的时间和精力。

2 志同道合

在纳皮尔的《奇妙的对数表说明书》还没有翻译成英文时，远在伦敦的数学家布里格斯（H. Briggs, 1561-1630）就已经对其爱不释手。1615 年，在写给朋友的一封信中，他说：“纳皮尔，这位莫契斯顿的主人，他的对数使我佩服得五体投地，我真希望能在这个夏天见到他。感谢上帝，我从没有见过这样一部书，让我这样的感兴趣，太令人神往了。”

布里格斯真的去见纳皮尔了。他骑马经过 4 天长途跋涉来到苏格兰的莫契斯顿。1615 年 7 月 2 日两人见了面，这次相见成为对数发展的关键一天。原始对数表中，1 的对数是无穷小，而 10 的对数是 1。布里格斯指出了其在使用上存在的一些不便之处，并与纳皮尔商量对它进行改进。他提议将 1 的对数定义为 0，将 10 的对数定义为 1。两位数学家一拍即合，于是以 10 为底的常用对数系统诞生了！由于数学计算中的常用数制是十进制，这种以 10 为底的常用对数在数值计算上具有很大的优势。

两位数学家先建立了以 10 为底的幂与其指数的“双数列”对应关系，再通过等比数列相邻两项间插入等比中项⁶，得到相应的对数。例如，求 2 的常用对数（精确到 7 位小数）时，首先在 1 和 10 之间插入等比中项 $10^{\frac{1}{2}} \approx 3.1622777$ ，其对数为 0.5；接着在 1 和 3.1622777 之间插入等比中项 1.7782794，其对数为 0.2500000；然后在 1.7782794 和 3.1622777 之间插入等比中项 2.3713737，其对数为 0.3750000……以此类推，在第 25 步时得到 2，其常用对数为 0.3010302，见表 2。

⁶ 若等比数列中分别有两项 a, b ，插入一个数 G 使 a, G, b 成等比数列，则 G 叫做 a, b 的等比中项。

表 2.2 的常用对数计算过程（精确到 7 位小数）

步骤	M	N	$\sqrt{MN}$	$\lg M$	$\lg N$	$\lg \sqrt{MN} = \frac{\lg M + \lg N}{2}$
1	1	10	3.1622777	0	1.0000000	0.5000000
2	1	3.1622777	1.7782794	0	0.5000000	0.2500000
3	1.7782794	3.1622777	2.3713737	0.2500000	0.5000000	0.3750000
4	1.7782794	2.3713737	2.0535250	0.2500000	0.3750000	0.3125000
5	1.7782794	2.0535250	1.9109530	0.2500000	0.3125000	0.2812500
...	...	...	...	...	...	...
23	1.9999989	2.0000017	2.0000003	0.3010299	0.3010305	0.3010302
24	1.9999989	2.0000003	1.9999996	0.3010299	0.3010302	0.3010301
25	1.9999996	2.0000003	2.0000000	0.3010301	0.3010302	0.3010302

1624 年，布里格斯出版了《对数算术》，公布了以 10 为底，包含 1-20000 及 90000-100000 的 14 位常用对数表（即精确到小数点后 14 位）。常用对数表的出版是对数发展史上的又一个里程碑，使得对数的应用不仅限于天文学，在科学、工程和其他学科领域中也发挥着越来越重要的作用。

3 概念演变

在今天的课本中，我们已经看不到真数与假数之间的对应关系，这与对数概念的演变有关。

前面提到“双数列”的对应，早在古希腊时期，阿基米德就发现 10 的连乘积与 10 的个数两个数列间存在一种对应关系，利用后者的加减关系可以代替前者的乘除关系。两千余年后，斯蒂菲尔重新研究了阿基米德的发现，不仅将两个特殊数列推广到一般的等差数列与等比数列，并且提出了“双数列”运算的两个新法则，即等差数列中的乘法和除法分别对应于等比数列中的乘方和开方。

在前人的基础上，纳皮尔将离散的“双数列”发展到连续的情形。在图 1 中，点 F 以初速度 v 作匀速运动，运动距离 x 均匀递增；点 C 以初速度 v 作变速运动，点 C 距终点 B 的距离 y （也即点 C 的运动速度）成比例递减。若以 10^{-7} 为单位时间，记录下不同时刻 x 和 y 的值，可以发现一系列 x 的值构成等差数列 1, 2, 3,, 与之对应的一系列 y 的值构成等比数列

$10^7(1-10^{-7})$, $10^7(1-10^{-7})^2$, $10^7(1-10^{-7})^3$,⁷。正是利用这样的双数列, 纳皮尔很自然地构建出了他的运动模型。用今天的眼光来看, 纳皮尔定义的对数实际上是以 $\frac{1}{e}$ 为底的对数, 但彼时纳皮尔并没有“底”的概念。这是因为对数概念的建立先于指数, 而纳皮尔所在的时期并没有明确的指数的概念, 更遑论“底”的概念了。

直至 18 世纪, 人们开始用指数来定义对数。英国数学家加迪涅 (W. Gardiner, ?-1752) 在《对数表》中给出定义: “一个数的常用对数是使得以 10 为底的幂等于该数的幂指数的值”, 英国数学家斯通 (E. Stone, 1690-1768) 在《新数学辞典》中定义: “对数是某个给定数的幂指数”。1748 年, 瑞士数学家欧拉 (L. Euler, 1707-1783) 在《无穷分析引论》中将对数与指数定义为互逆运算, 并证明了指数和指数之间的互逆性质, 即 $a^{\log_a x} = x$ 和 $\log_a a^y = y$ 。在欧拉之后, 这种以幂指数定义对数的方式在数学中被广泛接受, 影响深远, 现行教科书正是从指数到对数的顺序, 并且使用幂指数来定义对数。

4 科学之助

对数的发展是数学史上一次重要的数学革命, 其影响之深远, 不仅改变了数学计算方式, 还推动了科学研究的发展。

17 世纪德国天文学家开普勒 (J. Kepler, 1571-1630) 在研究行星运动规律时, 数学上的直觉让他认为行星绕太阳的公转周期 T 和其运行轨道的半长轴 R 之间一定存在着某种关系。当开普勒沉浸在无穷无尽的大数之海中苦算无果时, 纳皮尔的对数思想为他提供了新的思路。1619 年, 著名的开普勒第三定律问世; 1620 年, 开普勒在《星历表》中再版了这一定律并将此书献给了纳皮尔 (于 1617 年去世)。下面我们将用一张以地球为测量基点的行星基本数据表 (表 3) 来演示如何发现开普勒第三定律。参考表 3 的数据, 以公转周期的常用对数 $\lg T$ 为纵坐标、轨道半长轴的常用对数 $\lg R$ 为横坐标进行描点, 利用 Excel 绘制一条最佳拟合直线, 得到该直

⁷ 由于每次经过的单位时间很短, 点 C 的减速运动可以近似为每一段单位距离上匀速运动的合成, 且每一段上的速度逐渐减小。

线的斜率为 1.5，于是得 $\lg T : \lg R = 3:2$ ，即 $T^2 = R^3$ 。

表 3 行星轨道数据（精确到 3 位小数）

	T	R	$\lg T$	$\lg R$
水星	0.241	0.387	-0.618	-0.412
金星	0.615	0.723	-0.211	-0.141
地球	1	1	0	0
火星	1.881	1.523	0.274	0.183
木星	11.862	5.205	1.070	0.716
土星	29.457	9.586	1.470	0.982
天王星	84.000	19.200	1.920	1.280
海王星	165.000	30.050	2.220	1.480
冥王星	248.000	39.240	2.390	1.590

此后，开普勒继续利用对数思想致力于《鲁道夫星表》的研究，其中的 8 位对数表准确地预知了未来几十年里恒星与行星位置的变化，加强了“日心说”的说服力。

就在同一时期，基于对数极其数学定律的发明改进了作为航海工具之一的计算尺。1622 年，英国数学家奥特雷德（W. Oughtred, 1574-1660）设计了第一款对数计算尺。他用了两个带有对数标记刻度的滑尺，在一个滑尺上滑动另一个，就可以进行乘法和除法运算。即便在今天，许多水手仍把计算尺这样一种不需要电力支撑的机械装置作为海上导航的备用工具。从人类建造帝国大厦到登陆月球，这些工作的背后都少不了计算尺的支持。

此外，对数还简化了部分物理量的表示，从而催生了一些新的物理量，与我们的生活紧密相连。课本的“探究·拓展”栏目在介绍表示声波的物理量声强（ I ）时提到：由于声强的变化范围非常大，数量级可以相差很多，因此常采用对数标度，使用声强级 $L = \lg \frac{I}{I_0}$ 作为“假数”

来替代表示。但由于上述声强级表达式的单位太大，后来通常规定声强级的表达式为

$L = 10 \times \lg \frac{I}{I_0}$ ，其单位就是我们熟悉的分贝。无独有偶，在 2023 全国 I 卷第 10 题中，题干定

义了声压级 $L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}$ 来度量声音的强弱，以噪音污染问题为背景，考察了对数的计算在

实际生活中的应用。

作为数学领域的重要概念，对数的历史贯穿了数个世纪，从古至今不断发展演变。对我们而言，对数不仅仅是一种数学工具，更是一种数学思想的象征。它展示了数学中转化与求简的思想，引发了我们对简约和优化的追求，从而将复杂的问题转化为更简单、更可控的形式。此外，我们应该向在对数发展过程中作出贡献的数学家们表示敬意。以数学家纳皮尔为例，他二十年如一日地投入对数学的研究与探索，这种专注与毅力在任何领域都备受推崇。我们应当珍视历史留给我们的科学与人文价值，从中不断学习，探索和创造更美好的未来。

小试牛刀

课本在“问题和探究”栏目中讲述了一个“秘诀在对数”的小故事，阅读该故事，说说“速算专家”究竟是如何利用对数速算的，并通过查询表 4，尝试解决一个类似的问题：

一个 80 位整数（记为 M ）的 88 次方根仍是一个整数（记为 a ），求整数 a 的值。

表 4 常用对数表部分展示（精确到小数点后 3 位）

真数	常用对数
2	0.301
3	0.477
4	0.602
5	0.699
6	0.778
7	0.845
8	0.903
9	0.954

【解析】由题可知， $\sqrt[88]{M} = a$ ，等式两边同时取对数得 $\frac{1}{88}\lg M = \lg a$ 。因为 M 是一个 80 位整数，所以 $\lg M \in [79, 80)$ ，则 $\lg a \in (0.898, 0.909)$ 。查询表 4，发现在这个范围内的对数有且仅有一个，其对应的真数为 8，故 $a = 8$ 。

他山之石

选择全班讨论策略的框架

陈雨晴

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

在全班讨论中, 教师和学生聚焦于特定的内容进行探讨, 讨论的目的是围绕设定的教学目标构建集体的知识和能力, 同时为学生提供听、说和解释的机会。在问题解决的课堂中, 学生通常会参与丰富的数学任务, 教师则会选择学生解决问题的部分策略用于全班讨论。研究表明, 全班讨论是高质量教学的关键组成部分, Stein 及其团队为组织富有成效的数学讨论开发了“5 个原则”, 涉及到预测策略、监测策略、选择策略、排序策略和联系策略这五个维度。学生的策略是进行课堂数学对话的基础, 也是课堂讨论的中心内容, 故而有目的地选择策略具有重要的意义。目前, 虽有文献阐述了“选择策略”的重要性, 但是其对于教师在进行选择时应该考虑哪些方面缺乏深入的指导, 已有的指南也缺乏连贯的结构, 呈现的形式是一套没有联系的条目清单, 而这并未对教师在选择学生策略时提供充足的帮助, 因此, 本研究将深入讨论上述“5 个原则”中的“选择策略”(即教师决定学生解决问题的哪些策略用于全班讨论)。本研究是基于教师专业发展项目展开的, 此项目希望教师实施回应学生数学思维的教学, 而“关注学生想法的实质”“识别出学生想法中的重要数学联系”和“接受并追求学生想法”是这种教学的三个特征, 同时也与“选择策略”有所联系, 因此, 本研究将深入探讨在实施回应学生数学思维的教学, 教师选择学生策略的标准。

本研究的研究问题是: 以分数背景的问题为例, 在回应学生数学思维的教学, 小学数学教师如何为全班性的讨论选择学生策略?

2 研究设计

2.1 理论框架

本研究的研究基础是 Smith & Stein 提出的有效组织数学讨论的 5 个原则。教师首先需要预测学生在完成任务时可能使用的策略，并在布置任务之后监测学生在问题解决中的策略，然后从中选择一个或多个用于全班展示和讨论，教师同样需要确定这些策略的展示顺序，并且在全班讨论中，将不同的策略联系起来（可以通过阐述策略的关键数学思想；比较不同策略的相似性、准确性和有效性等）。5 种为了组织有效数学讨论的原则是协调一致和相互影响的，就“选择策略”和其他原则的关系而言，“预测策略”可以加强教师对策略的选择，因为它使教师了解到学生可能产生的策略的范围；“监测策略”可以提高选择的质量，因为它使教师有机会倾听学生的推理过程，而不只是局限于呈现在纸面上的内容，这能帮助教师更好地理解在课堂中呈现的策略；“排序策略”和“选择策略”直接关联，因为教师所选择的策略必须按照一定的顺序呈现；“联系策略”则能够突出在课堂讨论中呈现的数学思想方法的关联性。

对于“选择策略”的研究，有研究者认为有目的地选择策略包含四个标准：其一，教师选择的策略可能包含正确答案和错误答案，因为错误的答案也可能成为学习的机会；其二，教师可以选择展示与预先确定的课程目标相关的数学策略；其三，教师选择的策略中可以包含常见的错误理解，然后这些错误理解可以用于课堂讨论；其四，教师选择策略时应该确保所有学生定期都有机会与全班同学分享他们的想法。然而，作为一套标准，它们缺乏结构和深度，这对教师的使用造成了挑战。此外，关于这些标准的实证研究不足，因此，本文基于实证研究，增加了对“选择策略”的结构和深度的探讨。

2.2 研究背景

本研究依托于项目“小学数学回应式教学”（Responsive Teaching in Elementary Mathematics (RTEM)）而进行，这个项目关注于小学高年级的分数教学。在这个项目中，一共有 92 名 3-5 年级的教师参与了长达 3 年的专业发展，专业发展的目的是提高教师在回应学生思维方面的专业知识水平。

2.3 数据收集

● 数据集 1：教师案例

本研究从最近刚完成 3 年专业发展的教师群体中选出 3 名女性教师，她们都展现出一定程度的回应学生思维的教学专长，这 3 位教师分别来自 3-5 年级，且具有丰富的教学经验。笔者在每个教师案例中进行了 4 次访谈和 3 次课堂观察，第一次访谈发生在 3 次观察之前，是一个一般性的访谈，主要讨论教师们对课堂讨论的想法以及她们通常选择策略的方式；其余三次访谈均在课堂观察后进行的，教师们可以阐述她们选择某些学生策略的理由。

● 数据集 2：专业发展中的交流

本研究从正在参与 RTEM PD 的教师中选取了部分教师，这些教师都展示出回应学生数学思维的教学专长。笔者调查了教师在 RTEM PD 工作坊中的谈话，并重点关注了一些 PD 活动。在这些活动中，教师需要回顾学生的策略，并且合作选择出他们认为可以在课堂讨论中呈现的策略。一共有 30 名教师参与了一次或多次数数据集 2 中的重点专业发展活动，这些教师均具有丰富的教学经验，其平均教龄是 11 年。

在数据集 1 中，研究者收集了为期一天或两天教学情境的数据。在一天的教学情境中，教师在一节课上提出了一个分数背景的问题，学生在这节课中解决这个问题并且在同一节课进行课堂讨论，教师在学生解决问题时会巡视，然后选择某些学生的策略。在课后的反思访谈中，笔者了解了教师做出决策的原因以及自身对所做决策的反思。在两天的教学情境中，教师在一节课上提出了一个分数背景的问题，学生在同一节课进行问题解决，师生在第二天的课堂中对这个问题进行讨论，教师选择策略的时间是在课后（两天的课堂之间），这样教师就有更多的时间来回顾和选择这些策略。在第二天的课后，同样会有一个反思访谈，访谈的目的和内容与一天教学情境相似。具体的流程如图 1 所示。

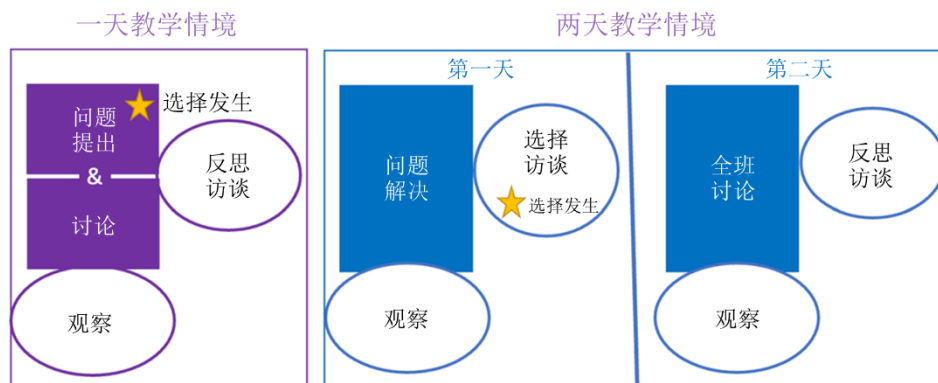


图 1 两种教学情境下的问题解决与策略选择

在数据集 2 中，笔者调查了 4 个 PD 活动，包含了 17 个视频记录的教师小组之间的谈话，笔者选择这 4 个 PD 活动的原因是这 4 个活动明确要求教师讨论了“为全班讨论选择策略”这部分内容，其中的每一项 PD 活动都关注了以分数为背景的问题，笔者能够通过观察教师自然参与的小组交流来了解教师们合作选择用于全班讨论的策略的理由。此外，与数据集 1 中的访谈不同，在数据集 2 中，教师没有明确被要求在小组交流中陈述其做出选择的原因。

2.4 数据分析

首先，笔者关注了在数据集 1 中两天教学情境下，教师做出选择后的访谈部分，因为这部分访谈内容能够即时捕捉到教师选择策略的标准，同时，笔者也可以在这部分访谈中提出更多有关选择的问题。延长选择时间可以让教师对所做决策形成更多反思，并且思考其做出选择的标准。为了列出选择标准的清单，笔者使用了描述性编码，这样便能够捕捉到教师在做选择时给出的主要理由，这些编码是基于前文提到的文献中所给的四个标准而确定的。

接着，笔者将数据集 1 中的其他访谈和数据集 2 中所收集的数据也纳入到分析之中，笔者频繁地在两类数据集切换，因此，分析得到的结果是有目的地反复迭代和整合的。需要注意的是，为排除标准的特殊性，被列入清单的标准必须被一位教师提及多次或者被多名教师提及。

然后，笔者基于上述分析整理了一个全面的选择标准的清单，由此构建了一个为全班讨论选择策略的框架。为生成该框架，笔者对教师给出的标准进行分组，从而获得一个清晰的标准结构，并保证标准结构的每个维度所涵盖的内容在概念上是一致的。在设计这个框架时，笔者特别关注框架的维度划分和指标确定，因为这些维度和指标对于研究者而言必须是准确的，对

于教师而言也必须是可用的。构建这个框架的目的是确定教师在进行回应学生数学思维的教学过程中，选择策略的方法的结构与范围。

最后，笔者对数据集 1 中的每个教师案例进行了成员核查访谈。总体而言，笔者构建的选择策略的框架中所描述的标准与教师之间产生了共鸣，这些标准也为教师们提供了参考。为全班讨论选择策略的框架和标准如图 2 所示。

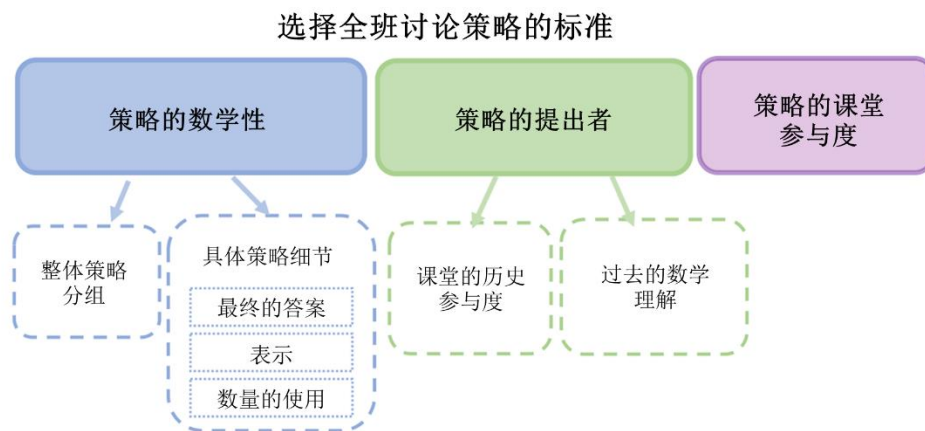


图 2 为全班讨论选择策略的标准

在这个二级框架中，教师可以根据框架的一级维度或子维度对学生策略进行选择，这个框架只是为教师选择策略提供了依据，但并不意味教师需要考虑该框架的所有维度。框架的一级指标分别是策略的数学性、策略的提出者和策略的课堂参与度。其中，策略的数学性是指教师对策略的数学特征的考虑，有时教师会考虑所呈现的策略对整个班级的数学内容的理解，有时教师会关注到策略中特殊的数学细节，而这些细节正好是教师想要强调的内容；策略的提出者是指教师对策略的提出者的考虑，教师会思考选择某个学生的策略是否提升了该生的参与感和理解水平；策略的课堂参与度是指教师会考虑通过所选择的策略，是否会让班级的其他学生参与与到数学学习中，并且学生能够从所选择的策略中有所收获。

本文主要呈现 Henry 的教学案例，并利用构建的选择策略的框架，说明教师在具体实践中的情况。

3 研究发现

3.1 策略的数学性

对这个维度的考量将从全班性的数学理解和特殊的数学细节两个方面展开。

3.1.1 全班性的数学理解

教师首先会考虑策略所体现的全班同学的理解情况，然后再考虑策略中的具体数学细节。Henry 在两种类型的课中做出的选择都体现了全班同学的普遍理解情况（也就是大部分学生采取的策略）。教师会基于课前准备的预期指南对全班同学的策略进行分组，指南将策略分成了三类，分别为非预期性直接模型策略、协调预期性直接模型策略和预期性策略。在非预期性直接模型策略中，学生最初不确定怎么分配物品，他们通过反复试错来完成分配任务；在协调预期性直接模型策略中，学生在最初会按照人数或者人数的因数来分配物品；在预期性策略中，学生会根据自身对物品数和人数之间的数字关系来分配物品，他们明白每个人获得的物品数量可以通过物品的总数除以总人数来得到。

Henry 在一天的教学情境中，巡视了 16 名学生（共 22 名学生）的做法，发现其中有 15 种做法属于协调预期性直接模型策略，1 种做法属于非预期性直接模型策略，因此她选择了协调预期性直接模型策略中的 4 种不同方法。有时，Henry 会更细致地将策略进行分类，如，在两天的教学情境中，由于教师对策略的选择发生在课后，Henry 可以考虑班级所有学生的策略，而不局限于她在课堂巡视时看到的方法。她再一次利用预期指南对 17 名学生的策略进行整体分组（共 22 名学生，其中 5 名学生未上课），在分组之初，Henry 预期课堂会出现 3 种协调预期性直接模型策略，而实际结果却是将学生策略分成了 5 组，其中，前 4 组均属于协调预期性直接模型策略，而还有 1 组则能找到正确解法的学生们的策略。Henry 选择了第 1 组（包含 10 个有效策略）的 2 个策略，第 2 组（包含 3 个有效策略）和第 3 组（包含 2 个有效策略）的各 1 个策略，因此，她的选择体现了她任课班级所呈现的策略范围。

3.1.2 特殊的数学细节

Henry 会参考策略中特别的片段或细节，这些细节在数学上是非常重要的，可能有助于整节课的讨论。教师在选择策略时会考虑三类主要的数学细节，分别为最终的答案、策略的表征以及数量的使用。

3.2 策略的提出者

对这个维度的考量将从学生的历史参与度和学生在过去的数学理解两个方面展开。

从学生的历史参与度看，Henry 在做选择时会考虑学生在过去参与讨论的情况，她想确保每一位学生定期都有分享的机会，这样做可以促进教育公平。此外，Henry 在考虑学生的历史参与度时，并不局限在数学课堂讨论中，她还会关注到学生其他科目的课堂讨论中的表现。

从学生在过去的数学理解看，Henry 会结合学生在之前课堂中对数学内容理解的表现，选择出体现提出者在数学理解上有进步的策略，为这些学生提供阐述想法的机会将提升他们的学习信心。

3.3 策略的课堂参与度

教师在做出选择时会考虑到策略的课堂参与度，策略体现的数学关系能不能够被清晰地看到也是很重要的。

4 结语

虽然本研究所选择的课例内容均以分数教学为背景，但是研究所构建的框架在小学数学的内容领域是通用的。本研究所构建的“为全班讨论选择策略”的框架和标准对已有文献中涵盖的标准进行了深度和广度的拓展，然而，如何协调框架的各个维度以及各维度中每个指标的选择关系是有待于未来的进一步研究，此外，课堂目标和策略选择可能相互影响，因此选择策略的标准如何融入课堂目标也是人们需要进一步探讨的话题。

参考文献

- [1] Dunning, A. A framework for selecting strategies for whole-class discussions [J]. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2023, 26(4): 433-454.

活动讯息

东西协作携手共进，共话小学数学教育

——曲靖师范学院汪晓勤教授专家工作站第二次学术活动隆重举行

刘倩雯，韩 粟，刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

根据曲靖师范学院汪晓勤教授专家工作站建设计划，结合教研基地课例推进情况，发挥专家工作站和教研基地的学术和实践优势，专家工作站于 2023 年 8 月 16-18 日举行第二次学术活动，本次活动由曲靖师范学院教师教育学院、曲靖市第一小学、宣威市来宾街道第一小学共同组织。

【2023 年 8 月 16 日 学术讨论班】

2023 年 8 月 16 日，曲靖师范学院教师教育学院主办开展了一场学术讨论班（图 1）。莅临本场讨论班的有华东师范大学教师教育学院副院长汪晓勤教授，曲靖师范学院科技处处长李正彪教授，曲靖师范学院教师教育学院院长丁晓东教授，云南师范大学初等教育学院小学教育系系主任吴骏教授，杭州师范大学经亨颐教育学院岳增成副教授，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师，曲靖师范学院教师教育学院朱彪老师。同时，华东师范大学教师教育学院部分研究生与来自昆明、曲靖和景洪的一线数学教师也参与了本次活动。



图 1 曲靖师范学院汪晓勤教授专家工作站第二次学术活动

上午的活动内容包括专家讲座与主题研讨，由邹佳晨老师主持。

首先，李正彪处长进行致辞（图 2）。李老师通过五个“一”来阐述曲靖师范学院汪晓勤专家工作站的目标定位，即建设一个平台、带动一支队伍、产出一批成果、形成一个示例与培养一批人才。而后，李老师就专家工作站的经费保障、目前存在的问题如平台建设与任务具体落实进行说明。李老师还表示希望能够进一步加强合作。



图 2 李正彪老师致辞



图 3 丁晓东院长致辞

丁晓东院长介绍学院的相关情况与文化特色，并向汪晓勤专家团队表示由衷感谢（图 3）。

而后，吴骏老师以“数学文化视角下的课程思政”为题做讲座（图 4）。吴老师首先介绍了数学文化的定义与义务教育标准中对文化的相关要求，而后阐述了小学数学课程思政的缘起、内涵、梳理以及与德育间的关系。最后，吴老师分享了部分已开发的小学数学课程思政案例。对于吴老师的讲座，李正彪老师评价吴老师的学风扎实、科研深入且反哺教学。



图 4 吴骏老师作报告

专家讲座后，老师们就数学教育课题的申报方向与主题进行了热烈的讨论（图 5）。岳增成老师首先分享了课题的申报经验，他建议关注选题级别、选题内容与文本撰写。具体而言，岳老师表示课题申报可以围绕大课题设立分课题；选题内容需新颖，可以结合热点话题如学科

德育；申报时需凝练文字以及图文并茂。邹佳晨老师也表示，课题申报可以聚焦大项目设立若干个子项目，此外，还可以按照现有的学院研究特色、力量、基础与平台资源开展课题研究。



图 5 课题申报方向与主题交流

下午的活动是以“课例研究的实施与评价”为题的读书报告会，由岳增成老师主持。华东师范大学教师教育学院硕士生刘梦哲（图 6）、博士生韩粟（图 7）分别作报告“课例研究的评价框架及其应用：以异面直线间的距离为例”以及“国际视野下的课堂评价研究：基于 SSCI 期刊载文的分析”。



图 6 刘梦哲同学作报告



图 7 韩粟同学作报告

刘梦哲主要介绍了“基于 TRU 的课例研究（TRU-LS）框架”和“学科能力框架（SCF）”两个聚焦学生学习的课例研究评价框架。其中，TRU-LS 框架包括“数学内容”“认知需求”“学习机会”“学生表现”和“过程评价”五个维度，SCF 包括“学科核心知识”“认知模式”“研究对象和问题语境”和“任务和活动”四个维度。于是，刘梦哲利用 TRU-LS 框架，具体分析“异面直线间的距离”一课的课例研究在计划、实施和反思阶段的成效。研究发现，本次课例研究取得了一定的成效，且 TRU-LS 框架为评价课例研究提供了新视角和新范式。

韩粟首先介绍了国际 SSCI 期刊的相关情况，然后从不同角度尝试厘清“课堂评价”的概念及其源流。接下来，韩粟从理论框架、文献综述、研究设计及国际画像四个方面详尽地分享了近年来 SSCI 期刊上发表的与课堂评价相关的研究成果。最后，韩粟基于以上文献的分析，和与会人员热烈讨论了未来可深入研究的课堂评价议题。



图 8 学术讨论班合影

【2023 年 8 月 17 日 教研基地校研修活动】

2023 年 8 月 17 日，以“数学史融入小学数学教学”为主题的研修活动在曲靖市第一小学顺利举行（图 9）。

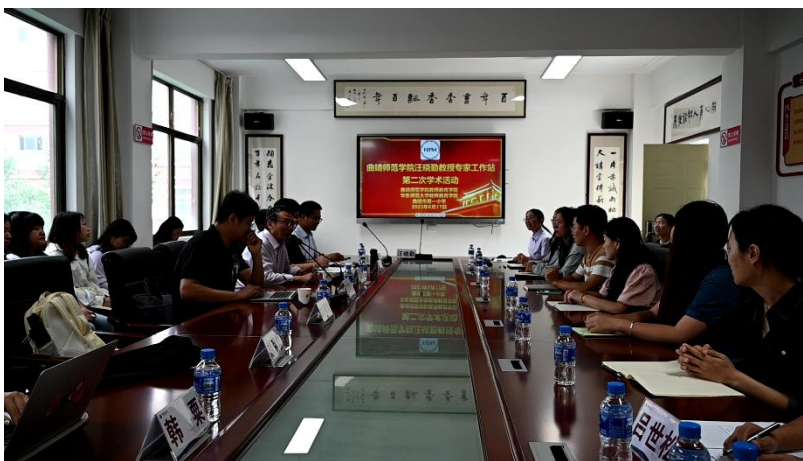


图 9 主题研修活动

上午的活动为两场专家报告，由吴骏老师主持。来自曲靖市第一小学、曲靖师范学院附属小学、曲靖市第二小学等教研基地校的五十余位教师参与。

曲靖市第一小学教研室主任潘粉娥老师致欢迎辞（图 10）。潘老师首先代表学校领导和师

生向曲靖师范学院汪晓勤专家工作站的成员表示了热烈欢迎，然后通过“六个一”的形式介绍了曲靖市第一小学的百年校史。最后，潘老师从文化育人的角度，呈现了近年来曲靖市第一小学在教研文化，课堂文化和课程文化三方面的戮力探索和卓越成果。



图 10 潘粉城老师致辞

汪晓勤老师作题为“数学史融入小学数学教学的实践与价值”的专家报告（图 11）。首先，汪老师介绍了“数学史与数学教育（HPM）”这一研究领域的学术背景，指出 HPM 领域具有理论探讨、历史研究、实证研究、教学实践、专业发展、教材研究等广阔的研究天地。紧接着，以数学史的六大教育价值为引领，汪老师用简明扼要的名言、丰富翔实的案例和风趣幽默的语言，为在场教师剖析了知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅和德育之效的深刻内涵。最后，汪老师从落实“立德树人”教育根本目标、进行有效数学教师专业发展和展望 HPM 研究前景三方面，鼓励在场教师努力探索数学史融入小学数学教学的实践。



图 11 汪晓勤老师作报告

岳增成老师作题为“基于数学史的小学数学新课改理念的落实”的专家报告（图 12）。岳老师从“我们如何更高效地落实新课改的理念”设问切入，以中华优秀传统文化进课程为例，指出 HPM 是教育变革下的不变路径。岳老师基于多年的小学 HPM 教研经验，为各位老师带来了精彩纷呈的高质量案例，并分别从学生前测、前测/后测、后测和表现性评价的视角，分析了基于数学史的学教现实。最后，岳老师以“一件事、一群人、持续推进、共同成长”为结语，为与会人员描绘了小学 HPM 的美好蓝天。



图 12 岳增成老师作报告

下午的活动为 HPM 教学设计工作坊，由邹佳晨老师主持。参与研修的教师被分为四组，合作进行 HPM 教学设计。各组的课题分别为“三位数乘两位数”“分数乘法”“分数除法”和“比”，汪晓勤老师、邹佳晨老师、吴骏老师、岳增成老师和朱彪老师入驻各组进行点对点指导。本次工作坊活动分为三轮，首先，各组就“这节课的学习重点是什么”“您是如何教这节课的”和“教学中是否存在困惑”三个问题开展讨论。然后，各组老师在驻组专家的指导下，阅读相关数学史料，研讨并完成初步教学设计。最后，各组请一位教师代表，汇报本组的 HPM 教学设计。

曲靖市第一小学任思雄老师代表第一组分享了“分数乘法”的 HPM 教学设计（图 13）。任老师从刘徽在注解《九章算术》时提出的“卖马”问题引出本节课的教学内容，并复习整数乘分数的内容。然后，让学生以小组为单位，在 $\frac{1}{2}$ 中折出 $\frac{1}{5}$ 得到 $\frac{1}{10}$ ，由此归纳出分数乘法的算法、算理。最后，让学生分组编制一道有关于分数乘法的应用题并完成。



图 13 任思雄老师分享教学设计



图 14 方通达老师分享教学设计

曲靖市经开区翠峰小学方通达老师代表第二组分享了“分数除法”的 HPM 教学设计（图 14）。方老师首先明确本节课宜采用单元统整的教学方法，在史料的选择和应用上，其所在组尝试将“通分法”“化 1 法”和“同乘法”融入教学中，并设计了“古今对照”的评价方式，这将有助于学生在理解算理的同时掌握算法，实现算理和算法的融会贯通。

曲靖市第二小学刘平老师代表第三组分享了“比”的 HPM 教学设计（图 15）。刘老师所在组撰写了清晰的教学目标，设计以历史文物“春秋越王勾践剑”中的铜和锡的比例作为情境引入，结合生活中各种各样的比及其分类，理解比的意义，探索比、分数和除法三者之间的关系。最后，刘老师所在组别出心裁地构思了关于比的微视频，并在小结环节有意识地为学生留下了陈述之白和超越之白。



图 15 刘平老师分享教学设计



图 16 刘珊珊老师分享教学设计

曲靖市第一小学刘珊珊老师代表第四组分享了“三位数乘两位数”的 HPM 教学设计（图 16）。刘老师借助教材情境中的问题“ $145 \times 12 = ?$ ”引入，充分预设了学生可能出现的对位错误和进位遗漏等情况。据此，刘老师引进古人发明的“格子算”（又称“铺地锦”），设计让学生进行数学阅读，感悟古人的智慧。此外，张金燕老师还借助信息技术展示乘法的面积模型，

尝试回答“为什么用‘格子算’？”这一问题。

随后，驻组专家就各组教学设计进行评价。

吴骏老师认为，来源于历史的“格子算”有可能减少学生在竖式运算中容易出现的错误，并建议通过对比实验来说明这一历史方法的有效性（图 17）。



图 17 吴骏老师点评

朱彪老师表示，“比”这一课的难点在于讲清同类比与不同类比，同时建议各位老师继续思考如将勾践宝剑这一历史情境贯穿始终等数学史融入教学的细节问题（图 18）。



图 18 朱彪老师点评

岳增成老师就“分数除法”一课回答了“为什么要单元统整”的问题，并结合已有的小学 HPM 课例研究经验对其他三节课的教学设计给出了细致入微的修改建议（图 19）。



图 19 岳增成老师点评

汪晓勤老师首先以“分数乘法”一课中涉及的《九章算术》刘徽注中“卖马问题”为例，说明了将中华优秀传统文化融入小学数学教学的挑战性。随后，汪老师基于上午报告中的数学史六大教育价值，逐一分析了各组教学设计的亮点，并以“格子算”和竖式算法的相关课例研究结果为例，呈现学生视角下的“算法多样性”。汪老师还从“留白创造式教学”中的“问题之白”切入，鼓励各位教师以数学史为抓手，勇于在课堂留下不同形式的白（图 20）。



图 20 汪晓勤老师点评

最后，邹佳晨老师用“从史料到设计”精辟地总结了本次活动，勉励在场的各位小学教师能够继续努力，争取“从设计到实施”“从课堂到课例”“从课例到发表”（图 21）。



图 21 邹佳晨老师点评



图 22 教研基地校研修活动合影

【2023 年 8 月 18 日 HPM 教研基地揭牌仪式及课例观摩与研讨】

2023 年 8 月 18 日，专家工作站团队来到宣威市来宾街道第一小学开展 HPM 教研基地揭牌仪式及课例观摩与研讨活动（图 23）。

研能力，同时，曲靖师院还会给予建设工作站的经费支持，并确定工作站的目标。



图 25 李正彪处长致辞

随后，汪晓勤老师和来宾市办事处主任徐其楠共同为 HPM 工作室教研基地揭牌（图 26）。



图 26 HPM 工作室教研基地揭牌

接下来，来自宣威市小学数学滕德荣名师工作室刘媛媛老师（图 27）和曲靖市第一小学赵昌英老师（图 28）分别带来三位数乘两位数和格子算法的教学。

刘老师首先让学生口算或竖式计算 45×12 ，并以一道“李叔叔去北京的路程”的应用题引出 145×12 ，即如何计算三位数乘两位数。然后，刘老师让学生尝试口算和竖式计算出 145×12 ，并邀请做对的学生分享计算思路，或让学生分析另一学生的错误，最终归纳出三位数乘两位数的算法。最后，刘老师让学生计算两道三位数乘两位数的题目，判断三位数乘两位数计算的正误，并提出“希望小学开学典礼支出清单”的问题，引出下节课所要学习的四位数乘两位数的内容。



图 27 刘媛媛老师的观摩展示课

赵老师首先让学生口算或竖式计算 14×12 ，并说明口算与竖式计算间的联系，以及其中所用到的乘法口诀表，引出本节课的内容。其次，以历史上的石子计数，赵老师让学生将 14×12 用石子摆出来。通过对石子分块，学生先想到将石子分为 14×10 和 14×2 ，再由所用到的乘法口诀表，学生自然想到将石子分为 10×10 、 4×10 、 10×2 和 4×2 四块。再次，赵老师通过隐去石子的图象和数位，逐步抽象出格子算法，但学生在 34×15 的计算上遇到了进位的困难，于是，赵老师引导学生思考进位数字的摆放位置，进而完成计算。最后，赵老师让学生给这种算法起名字，并分享本节课的收获和疑惑。



图 28 赵昌英老师的观摩展示课

下午的活动为课例研讨，由朱彪老师主持。首先，刘媛媛老师和赵昌英老师分享了教学实施的感受，然后，教师们开展了热烈的讨论，最后，汪晓勤老师、吴俊老师、邹佳晨老师对本节课给予点评（图 29）。



图 29 教学研讨



图 30 课例观摩与研讨活动合影

在这 3 天的活动中，不同地区、不同学校、不同教龄的小学数学教师与高校研究者共聚一堂，共同探讨小学数学教学的理论与实践，期待曲靖小学数学教育取得进步、小学数学教师专业素养得到发展，本次活动圆满结束。