



上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2023 年第 12 卷第 04 期



清代郑燮《竹石图》

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：刘梦哲

编委（按姓氏字母序）：

韩 粟 胡永强 孔雯晴 栗小妮 刘倩雯 刘思璐 秦语真 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 岳增成 邹佳晨

刊首新语

中华优秀传统文化数学文化与留白创造式教学

汪晓勤，邹佳晨

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

自 2021 年教育部颁布《中华优秀传统文化进中小学课程教材指南》以来，如何将中华优秀传统文化融入学科教学，成了学术界和一线教师十分关注的课题。就数学学科而言，中算史（中国传统数学的历史）是中华优秀传统文化最重要的组成部分，要让中华优秀传统文化进数学课程和教学，教师首先需要充分利用中算史的资源。中算有着悠久的历史、辉煌的成就和丰富的内容，中算史既是数学教学的目标，同时也是数学教学的工具，其潜在的教育价值有待于人们去挖掘。如果仅仅将中算史视为数学教学的目标，那么教师可能仅仅会采用附加式，如介绍中国古代数学成就、数学家及其数学著作；但如果同时将中算史视为数学教学的工具，那么教师就需要采用更多的方式去运用有关素材，包括概念、问题、命题、法则、思想方法等，具体方式有复制式、顺应式甚至重构式。

今天，培养拔尖创新人才乃是时代对基础教育的呼唤。数学史告诉我们，前人留白，后人创新，留白是创新的必要条件。类似地，在数学课堂上，教师只有留白，方能引发学生的创新，这正是“留白创造式教学”的要义。由于古今数学表达方式、思想方法迥然不同，原原本本运用中算史料必然是远远不够、甚至是没有必要的。在留白创造式教学中，教师需要以中算史料为出发点，设计问题，为学生提供广阔的思维空间和足够的探究机会，以培养创新能力，落实学科德育，从而充分发挥中算史的多元教育价值。

本文以汉代数学典籍《九章算术》中的若干主题为例，从“数学教学的工具”的角度来讨论中算史在高中数学留白创造式教学中的潜在应用。

2 等差数列问题

(一)《九章算术》中的等差数列问题

《九章算术》均输章设有以下两个等差数列问题。

问题 1：今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等。问：各得几何？

用今天的符号语言来表达就是：在等差数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ($a_i > 0$) 中，已知 $S_5 = 5$ ， $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5$ ，求 a_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)。《九章算术》是从配分比例的视角来解决这个问题的。考虑从 1 开始的正整数列 1, 2, 3, 4, 5，该数列前 3 项之和为 6，后 2 项之和为 9，不满足所求数列所满足的条件——前 3 项之和与后 2 项之和相等。在每项上加一个数 p ，得到数列

$$1+p, 2+p, 3+p, 4+p, 5+p,$$

使得

$$(1+p)+(2+p)+(3+p)=(4+p)+(5+p),$$

即

$$p = \frac{9-6}{3-2} = 3,$$

于是得到一个满足条件“前 3 项之和与后 2 项之和相等”的数列 4, 5, 6, 7, 8。这就是说，所求数列各项之比为 4:5:6:7:8，因其各项之和为 5，故得各项依次为

$$\frac{4}{30} \times 5, \frac{5}{30} \times 5, \frac{6}{30} \times 5, \frac{7}{30} \times 5, \frac{8}{30} \times 5。$$

问题 2：今有竹九节，下三节容四升，上四节容三升。问：中间二节欲均容，各几何？

用今天的符号语言来表达就是：在等差数列 $a_1, a_2, \dots, a_9$ ($a_i > 0, i = 1, 2, 3, \dots, 9$) 中，已知 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3$ ， $a_7 + a_8 + a_9 = 4$ ，求 a_i ($i = 1, 2, \dots, 9$)。《九章算术》的解法是：先求出公差

$$d = \frac{\frac{a_7 + a_8 + a_9}{3} - \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}}{9 - \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{2}\right)} = \frac{7}{66} \quad (1)$$

再由 $a_7 + a_8 + a_9 = 4$ 求得 $a_8 = \frac{4}{3}$ ，于是可得其余各项。

(二) 任务设计

围绕《九章算术》中的上述两个等差数列问题，教师可以编写阅读材料“《九章算术》中的等差数列问题”，然后设计系列任务，让学生深入思考并加以解决。

任务 1：试用现代方法解《九章算术》中的两个等差数列问题。

设公差为 d ，学生可能会分别建立方程组

$$\begin{cases} 3a_1 + 3d = \frac{5}{2} \\ 2a_1 + 7d = \frac{5}{2} \end{cases} \quad (2)$$

和

$$\begin{cases} 4a_1 + 6d = 3 \\ 3a_1 + 21d = 4 \end{cases} \quad (3)$$

来求解。

任务 2：请用问题 2 的解法来解决问题 1，用问题 1 的解法来解决问题 2。

刘徽在注文中给出了问题 1 的另一种解法：因 $a_1 + a_2 + a_3 = a_4 + a_5 = \frac{5}{2}$ ，故得公差

$$d = \frac{\frac{a_4 + a_5}{2} - \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}{5 - \left(\frac{2}{2} + \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{6},$$

再由 $a_2 = \frac{5}{6}$ ，即可依次求得其余各项。

在没有代数符号的情况下，用配分比例法来解决问题 2 并非易事，因此，刘徽在注文中并未给出这种解法。考虑正整数列 1, 2, 3, ..., 9，前四项之和为 10，后三项之和为 24，两者之比并不等于 3:4。于是，构造新的数列

$$1+p, 2+p, 3+p, \dots, 9+p,$$

使得

$$\frac{(1+p) + (2+p) + (3+p) + (4+p)}{(7+p) + (8+p) + (9+p)} = \frac{3}{4},$$

解得

$$p = \frac{32}{7}。$$

于是得到满足前 4 项之和与后 3 项之和的比为 3:4 的新数列

$$\frac{39}{7}, \frac{46}{7}, \frac{53}{7}, \dots, \frac{95}{7},$$

这就是说，所求数列各项之比为 39:46:53:60:67:74:81:88:95。由于所求数列的前 4 项之和等于 3，故得

$$a_1 = \frac{39}{39+46+53+60} \times 3 = \frac{39}{66},$$

$$a_2 = \frac{46}{39+46+53+60} \times 3 = \frac{46}{66},$$

从中求得公差，依次可求出其余各项。

任务 3：在问题 2 的解法中，古人是如何得出公差的算法（1）的？

今天的推导方法是：在方程组（3）中消去 a_1 ，即得公差 d 。虽然汉代数学家也能解出方程组（3），但他们完全不是以这种方式来思考问题的。实际上，刘徽在注文中解释说：“此上、下节各分所容为率者，各其平率。上下以少减多者，余为中间五节半之凡差，故以为实也。”这就是说， $\frac{a_7+a_8+a_9}{3}$ 是下三节的平均容积， $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$ 是上四节的平均容积，两者之差是中间五节半的总差。其中的 5 节半由 9 节中分别减去梢部 2 节和根部 $\frac{3}{2}$ 节得到的，如图 1 所示，故得等式（1）。

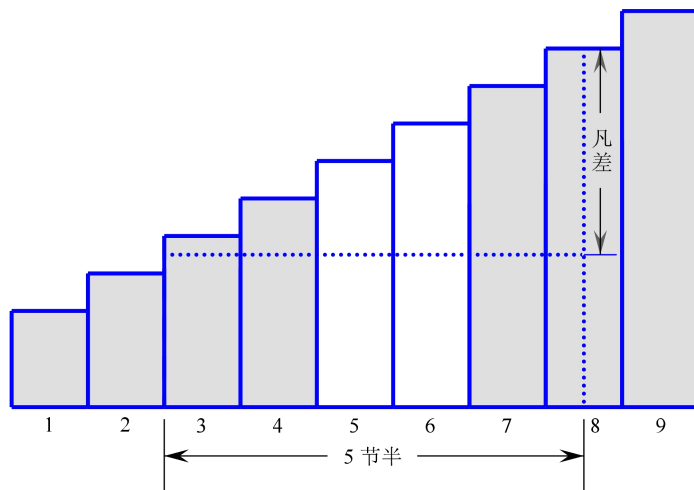


图 1 “竹节均容”问题

任务 4：在《九章算术》均输章的两个等差数列问题中，已知条件均给出数列中的连续 3 项之和，由此很容易求出中间项；若将问题改为：“今有竹九节，下四节容五升，上四节容四升。问：中间一节欲均容，各几何？”你觉得古人能否求出各节的容积？

回答是肯定的。先利用“凡差术”求出公差

$$d = \frac{\frac{a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{4} - \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}}{9 - \frac{4+4}{2}} = \frac{1}{20},$$

再由 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4$ 得 $4a_1 + 6d = 4$ ，即可得 $a_1 = \frac{37}{40}$ ，依次可得其余诸项。

任务 5：在等差数列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中，已知 $a_1 + a_2 + \dots + a_k = A$ ， $a_l + a_{l+1} + \dots + a_n = B$

($1 \leq k < l \leq n$)，求公差 d 。

由已知条件得

$$\begin{cases} ka_1 + \frac{1}{2}k(k-1)d = A \\ (n-l+1)a_1 + \frac{1}{2}(n+l-2)(n-l+1)d = B \end{cases},$$

解得

$$d = \frac{\frac{B}{n-l+1} - \frac{A}{k}}{\frac{n+l-2}{2} - \frac{k-1}{2}} = \frac{\frac{B}{n-l+1} - \frac{A}{k}}{n - \left(\frac{k}{2} + \frac{n-l+1}{2}\right)} \quad (4)$$

用刘徽的方法，因 $\frac{B}{n-l+1} - \frac{A}{k}$ 是中间 $n - \left(\frac{k}{2} + \frac{n-l+1}{2}\right)$ 项的总差，故得公式 (4)，如图 2 所

示。我们将刘徽求公差的方法称为“凡差术”，与现代方法不同，“凡差术”并不需要借助等差数列求和公式。

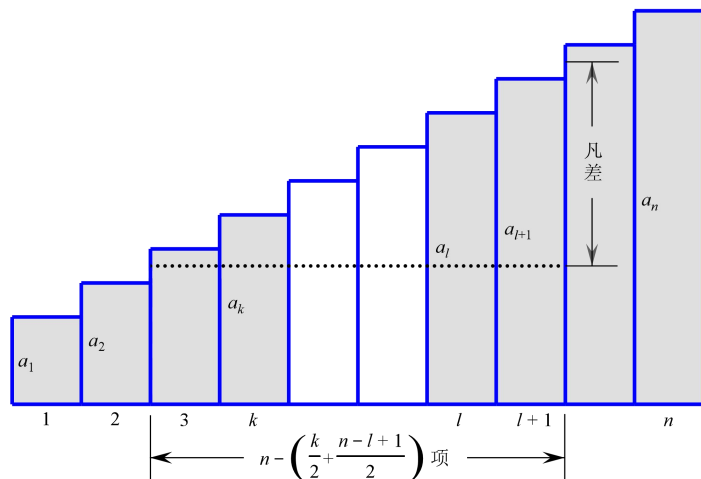


图 2 刘徽的“凡差术”

任务 6: 利用刘徽的“凡差术”，你能推导等差数列的通项公式和前 n 项和公式吗？

事实上，由“凡差术”可得

$$d = \frac{\frac{a_n - a_1}{1} - \frac{1}{1}}{n - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{a_n - a_1}{n - 1},$$

于是得等差数列通项公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad (5)$$

又由“凡差术”可得

$$d = \frac{\frac{a_n - S_{n-1}}{1} - \frac{S_{n-1}}{n-1}}{n - \left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{(n-1)a_n - S_{n-1}}{\frac{1}{2}n(n-1)} = \frac{na_n - S_n}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

或

$$d = \frac{\frac{S_n - a_1}{n-1} - \frac{a_1}{1}}{n - \left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{S_n - na_1}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

于是得

$$S_n = na_n - \frac{1}{2}n(n-1)d \quad (6)$$

或

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d \quad (7)$$

可见，等差数列通项公式和前 n 项和公式都可由“凡差术”推出。

任务 7：你能提出新的“众人分钱”问题和“竹节均容”问题吗？

刘徽在注文中提出了“七人分七钱”问题，条件是上二人与下五人分的钱数相等。明代数学家程大位（1533-1606）在其《算法统宗》中编制了新的问题：

依等算钞歌：“甲乙丙丁戊己庚，七人钱本不均平。甲乙念三七钱钞，念六一钱戊己庚。惟有丙丁钞无数，要依等第数分明。请问先生能算者，细推详算莫差争。”

竹筒容米歌：“家有九节竹一茎，为因盛米不均平。下头三节三升九，上梢四节贮三升。惟有中间二节竹，要将米数次第盛。若是先生能算法，教君只算到天明。”

上述两个问题都是通过改变《九章算术》的题设条件而得到的。学生仿此可以提出各类问题。

任务 8：从古人解决“五人分钱”问题的方法中，你能感悟到什么思想方法？

3 阳马和鳖臑问题

（一）阳马与鳖臑

中国古代有着完备的多面体体积理论，《九章算术》给出了方亭、方锥、堠堵、阳马、鳖臑、羡除、刍甍、刍童等多种立体图形的体积计算方法，这些方法都是正确的。在这些立体图形中，最基本的图形是鳖臑。刘徽在注文中指出：“不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也。”

将长方体沿对角面分割，得到两个同样的堠堵（图 3）；将堠堵沿对角面分割，得到一个阳马和一个鳖臑（图 4）；将阳马沿过垂直于底面的棱的对角面分割，得到两个鳖臑（古人因此也将鳖臑称为“半阳马”，如图 5）。

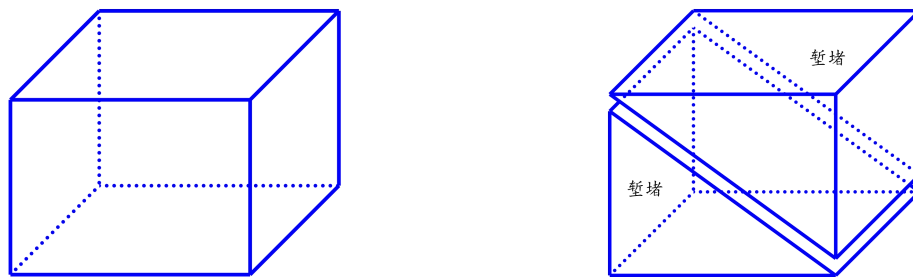


图 3 一个长方体由两个堑堵组成



图 4 一个堑堵由一个阳马和一个鳖臑组成



图 5 一个阳马可以分割成两个鳖臑

关于阳马和鳖臑，刘徽有以下结论：（1）阳马与鳖臑的体积之比为 2:1，今称“刘徽原理”；（2）长方体体积是阳马体积的 3 倍；（3）长方体体积是鳖臑体积的 6 倍。

利用长方体、堑堵、阳马和鳖臑的体积公式，可以推导方亭、方锥、羨除、刍甍、刍童等立体图形的体积，例如：一个方亭（今称正四棱台）可以分割成一个长方体、四个堑堵和四个阳马（图 6），分别计算其体积，即可推导出正四棱台体积公式。



图 6 正四棱台的构成

（二）任务设计

围绕阳马和鳖臑这两种基本立体图形，教师可以编写阅读材料“中国古代立体几何中的阳马与鳖臑”，然后设计系列任务，让学生深入思考并加以解决。

任务 1：请给鳖臑下一个定义。

可以用两种方式来定义鳖臑：

定义 1：鳖臑是底面为直角三角形、有一条棱过底面非直角顶点且垂直于底面的三棱锥；

定义 2：鳖臑是四个面均为直角三角形的四面体。

教师还可以让学生论证两种定义的等价性。

任务 2：如图 7，已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，试分别将其分割成三个阳马和六个鳖臑。

任务 3：有人构造了一个反例，说明“四个面均为直角三角形的四面体不一定是鳖臑”：

如图 8 所示，在三棱锥 $S-ABC$ 的底面和各侧面中， $\angle ABC = \angle SAB = \angle SCB = \angle ASC = 90^\circ$ 。请问这样的三棱锥存在吗？

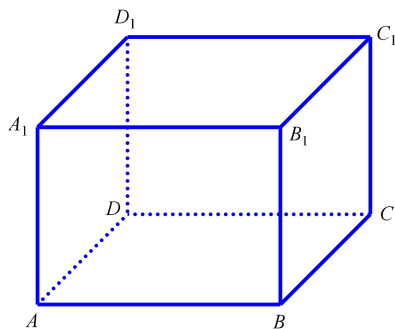


图 7 寻找长方体中的阳马和鳖臑

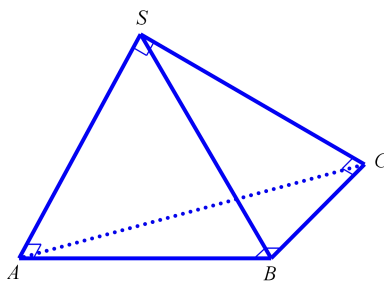


图 8 鳖臑定义的一个“反例”

事实上，这样的三棱锥并不存在，因为异面直线 SA 和 BC 之间不可能同时存在两条不同的公垂线 AB 和 SC 。

任务 4：利用祖暅公理证明：在同一个堑堵中，阳马体积是鳖臑体积的 2 倍。

任务 5：如图 9，在堑堵 AA_1B-DD_1C 中， $AB = BC = AA_1 = 1$ 。（1）试分别求二面角 $A-A_1B-C$ 、 $A-A_1C-D_1$ 、 $A-A_1C-D$ 和 $B-A_1C-D$ 的大小；（2）分别求异面直线 AC 和 A_1B 、 AB 和 A_1C 、 A_1C 和 AD 、 A_1C 和 DD_1 之间的距离。

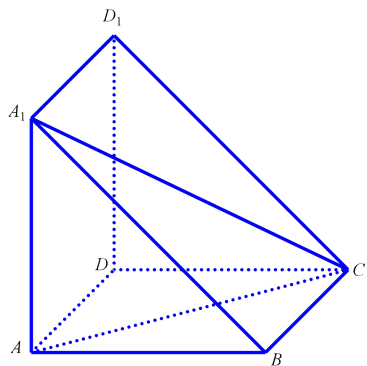


图 9 堑堵中的问题

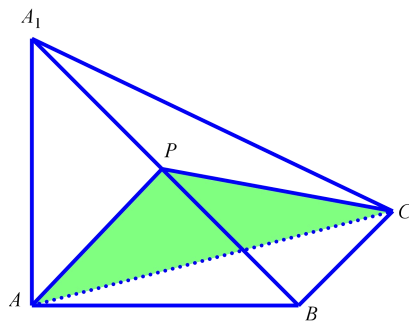


图 10 鳖臑中的问题

任务 6: 如图 10, 在鳖臑 A_1-ABC 中, P 是 A_1B 上一点, 当 P 位于何处时, $\triangle PAC$ 的面积最小?

任务 7: 利用阳马和鳖臑, 你能分别编制一个立体几何问题吗?

任务 8: 从阳马和鳖臑问题中, 你能感悟到什么思想方法?

4 基于中算史料的留白策略

在数学留白创造式教学中, 共有 6 种留白形式, 即陈述之白、发现之白、论证之白、方法之白、问题之白和超越之白。从以上任务设计中可以总结出基于中算史料的若干典型的留白策略。

(一) 古名今辩, 留陈述之白

“古名今辩”指的是用今天的数学语言来定义中算术语, 设置“古名今辩”的任务, 即为学生留了“陈述之白”。中算的许多术语都十分简洁, 如“堑堵”“阳马”和“鳖臑”, 如果用今天的数学语言来描述, 分别是“底面为直角三角形的直三棱柱”、“底面为长方形、有一条棱过底面顶点且垂直于底面的四棱锥”和“底面为直角三角形、有一条棱过底面非直角顶点且垂直于底面的三棱锥”, 对于这三种特殊的立体图形, 现代数学中并没有专门的名称, 因此, 有必要沿用古代的术语, 就像人们沿用“牟合方盖”之名来称谓“两个底面直径相等的直交圆柱体的公共部分”一样。另一方面, 中算术语往往源于现实生活, 十分直观形象, 如“鳖臑”原意是“甲鱼的前肢骨”, “阳马”原意是“四柱屋隅”, 等等。让学生对有关“阳马”和“鳖臑”加以定义 (阳马和鳖臑任务 1), 既可以培养他们用数学语言表达现实世界的能力, 也可以帮助他们在具体几何图形中正确识别相应图形 (阳马和鳖臑任务 2), 还可以增强他们应用“基

本几何体”的意识。

（二）古题今解，留方法之白

“古题今解”指的是用现代方法或古人的其他方法来解中算史上的某个问题，设置“古题今解”的任务，即为学生留了“方法之白”。古人分别用配分比例法和“凡差术”来解“五人分钱”和“竹节均容”问题，与今人的代数解法（等差数列任务 1）迥然不同，也可以互换方法，即用“凡差术”解“五人分钱”问题，用配分比例法来解“竹节均容”问题（等差数列任务 2）。学生在补白过程中，对古今数学方法进行比较，既能感悟现代方法的优越性，也可以建立数列和比例之间的密切联系，还可以学会摒弃自我为中心的思维习惯，走进古人的心灵之中，从而可以站在古人的角度思考：为什么不用配分比例法来解“竹节均容”问题，为什么不用“方程术”来解“五人分钱”问题，等等。

（三）古术今推，留论证之白

“古术今推”指的是用现代方法来推导中算史上的某个公式或证明中算史上的某个命题，设置“古术今推”的任务，即为学生留了“论证之白”。《九章算术》作者对于问题解决过程中涉及的公式、命题、方法的来源均不着一字，为后世留下了论证之白，刘徽在注解此书时作了大量的补白工作。已知等差数列最前面若干项之和与最后面若干项之和，《九章算术》给出了公差的求法，让学生用代数方法得出这个求法（等差数列任务 3），或推测古人推导公式的方法，其实就是将中算史上的论证之白留给学生。类似地，刘徽在注文中指出，在一个堑堵中，阳马体积是鳖臑体积的 2 倍，让学生利用祖暅公理证明该结论（阳马和鳖臑任务 4），采用的是类似的留白形式。学生通过补白，既可发展逻辑推理素养，又可以从古人的角度来思考论证方法，实现跨越时空的思想交流。

（四）古法今用，留发现之白

“古法今用”指的是将中算史上的数学方法用于新情境、新问题，以新知创获为目的，设置“古法今用”的任务，即为学生留了“发现之白”。人们比较熟悉的例子是利用赵爽弦图来发现均值不等式，类似地，利用刘徽的勾股容方图也可以发现均值不等式，利用出入相补原理可以发现两角和与差的正弦公式，等等。“古法今用”的留白策略，颇有点“无心插柳”的意味。刘徽仅利用“凡差术”来求等差数列的公差，并未试图将其用于前 n 项和公式的推导。事实上，等差数列前 n 项和公式见于盈不足章“二马相逢”问题的解法，用今日的代数符号来表

达就是

$$S_n = n \left[a_1 \pm \frac{1}{2}(n-1)d \right] (d > 0)。$$

南宋数学家杨辉通过构造“良马图”和“弩马图”，从几何的角度对公式加以推导。然而，与几何方法截然不同的是，利用“凡差术”也能发现求和公式（等差数列任务 6），在这一全新的方法中，求和公式并非建立在通项公式的基础之上，两者是平行的。可见，站在古人的肩膀上，今人确实能作出创新。

（五）古问今编，留问题之白

“古问今编”指的是从中算史上的数学问题出发编制新的数学问题，一方面，中算史料为教师留下“问题之白”：从中算史料出发，运用不同的问题编制策略，教师可以设计丰富多彩的数学问题，如利用“条件式”策略，改变具体的条件或将条件一般化来编制问题（等差数列任务 4 或 5）；运用“自由式”策略来编制问题（阳马和鳖臑任务 3、5 和 6）。另一方面，教师设置“古问今编”的任务，也为学生留了“问题之白”，如等差数列任务 7 和阳马和鳖臑任务 7。

除了有助于提升学生的问题提出能力外，“古问今编”既可以让学生跨越时空与古人对话，思考古人能否和如何解决新题，又可以拓展古人的解法和思路。例如，在刘徽的“七人分七钱”问题中，已知前 5 人和后 2 人所得钱数相等，则由数列 $1, 2, 3, \dots, 7$ 构造满足条件的新数列

$$1+p, 2+p, 3+p, \dots, 7+p$$

时， $p = -\frac{2}{3}$ ，拓展了“五人分钱”问题中 p 取正数的情形。

（六）古算今思，留超越之白

“古算今思”指的是从中算史上有关数学问题的解法中获取思想的启迪，设置“古算今思”的任务，即为学生留了“超越之白”。等差数列任务 8 与阳马和鳖臑任务 8 都属于这类留白形式。“五人分钱”问题的解法揭示了中算的构造性特征：首先构造一个满足已知条件的数列，然后用配分比例来解决问题。阳马和鳖臑问题则揭示了中算的转化思想——化繁为简，把多面体转化为最基本的立体“鳖臑”和“阳马”。此外，中算问题和术语都揭示了数学与现实生活的密切联系；刘徽的注解则揭示了中算家的理性精神，并雄辩地证明：“中国古代数学没有演

绎推理和证明”这样的观点是完全错误的。

5 结语

中华优秀传统文化博大精深，本文所举，不过沧海一粟；所呈现的任务设计，并不局限于一两节课，也不局限于新授课或复习课。有了古名今辩、古题今解、古术今推、古法今用、古问今编和古算今思这六种策略，中算史进课程、进课堂、进头脑，将不再是理想的空谈，而是有法可依、易于落地的教育工程。在留白创造式教学中，作为教学目标的中算史，可以展示中华优秀传统文化之魅、达成数学学科德育之效；而作为工具的中算史，则有助于培养学生的核心素养和创新能力。另一方面，倘若带着教育的眼光来研读中算文献，我们会深切地感受到：在那些冰冷、尘封的文字背后，竟蕴藏着勃勃生机。

留白创造式教学这一符合时代需求的教学方式，必将让中华优秀传统文化大放光彩！

目 录

刊首新语

中华优秀传统文化数学文化与留白创造式教学汪晓勤, 邹佳晨 I

教材研究

美国中学数学教科书中的数学写作习题研究秦语真, 韩粟 1

专题研究

美英早期几何教科书中的三角形四心定义及相关性质刘梦哲 23

教学实践

信息技术支持下中华优秀传统文化融入高中数学教学的案例研究
.....刘梦哲, 孔雯晴, 舒适 40

他山之石

高中生在几何证明中的图形使用刘倩雯 53

数学写作

初中数学中代数与几何关系之论证陈宇航, 胡永强 60

切线定义的历史陈可欣, 胡永强 63

会议综述

历史见真知, 留白促创新孔雯晴, 刘梦哲 65

活动讯息

分享拓宽视野, 交流孕育智慧刘梦哲, 沈中宇 75

CONTENT

FOREWORD

Chinese Excellent Traditional Mathematics Culture and Teaching Based on Gap Leaving and Creation····· Wang Xiaoqin, Zou Jiachen I

TEXTBOOK RESEARCH

The Study of Mathematical Writing Exercises in American Middle School Mathematics Textbooks····· Qin Yuzhen, Han Su 1

THEMATIC RESEARCH

The Definitions and Properties of the Four Centroids of a Triangle in Early American & British Textbooks on Geometry····· Liu Mengzhe 23

TEACHING PRACTICE

Integrating the History of Chinese Mathematics into Teaching of the Formula for Spherical Volume····· Liu Mengzhe, Kong Wenqing, Shu Shi 40

LITERATURE REVIEW

High School Students' Use of Diagrams in Geometry Proofs····· Liu Qianwen 53

MATHEMATICAL WRITING

Demonstration of the Relationship Between Algebra and Geometry in Junior High School····· Chen Yuhang, Hu Yongqiang 60

The History of the Definition of Tangents····· Chan Kexin, Hu Yongqiang 63

CONFERENCE SUMMARY

The Summary of the 10th Senior Seminar on the History & Pedagogy of Mathematics(HPM) and the First Seminar on Teaching Based on Gap Leaving and Creation····· Kong Wenqing, Liu Mengzhe 65

ACADEMIC INFORMATION

The Seminar of the Research Group on Teaching Based on Gap Leaving and Creation····· Liu Mengzhe, Shen Zhongyu 75

教材研究

美国中学数学教科书中的数学写作习题研究

秦语真，韩 粟

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 问题的提出

前苏联教育心理学家维果茨基（L. S. Vygotsky, 1896-1934）认为语言和思维之间存在辩证关系，并通过表征过程相互转化。^[1]写作作为一种强大的语言表征工具，可以帮助学生强化已知、建立知识联结^[2]及建构新知^[3]，同时可以为学生的反思筑建可视化的窗口^[4]。因此，写作融入课程能够外显学生内隐的思维，提供了一种独特的反馈方式^[5]。

美国最早关注到数学课程中的写作，数学写作（Mathematical Writing）在 20 世纪 80 年代风靡全美的“贯穿于课程的写作（Writing across the Curriculum）”运动中应运而生^[6]。1989 年，全美数学教师协会（National Council of Teacher of Mathematics，简称 NCTM）鼓励教师将写作纳入数学教学，为学生创造数学交流的机会，促进其深入理解数学概念和原理、表达数学感受、改善数学态度^[7]。新世纪伊始，NCTM 进一步将数学写作明确为数学交流的一部分，要求美国中小学生不仅要能用自然语言描述自己的想法，还要能使用数学术语，通过写作等方式进行交流^[8]。

一般认为，数学写作是一种让学生书写数学概念或程序的写作活动，通过纸笔或上机等途径，解释、反思、组织或整合多样化的数学内容^[9-10]。相关实证研究表明，数学写作有助于深化学生对数学概念、命题等的理解^[11]；提升写作技能、学业成就水平和数学素养^[12]；发展批判性思维和创造性思维^[13]。国内最早的数学写作以数学日记的形式出现，数学日记承载着加强师生情感交流、提高学生学习兴趣、养成良好学习习惯等功能^[14]。此后，随着“写中学（Writing to Learn）”理念的进一步传播，有关数学写作的形式、价值、功能等得到进一步拓展^[15-16]。新一轮基础教育数学课程改革中，在“会用数学的语言表达现实世界”这一全学段核心素养统摄下，《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》与《义务教育数学课程标

准（2022 年版）》均提倡撰写小论文或研究报告等^[17-18]，体现了依托数学写作发展学生这一核心素养的可行性。在现行中学教科书中，以人教 A 版高中数学教科书为例，其在部分章节的小结前置有“文献阅读与数学写作”栏目，任务兼具数学小论文与文献综述两种文体，意在让学生了解知识源流、体验写作过程、习得优良的数学表达能力^[19]。然而，该栏目在全系列教科书中仅出现 5 次，主题覆盖不均，且撰写文献综述对中学生而言要求较高，可能造成“增负减效”的消极作用。数学教科书作为重要课程资源之一，肩负着提供更丰富的写作素材和更适切的写作任务的功用，应让数学写作真正走入课堂、走近学生。当前教学实践中，主要由广大一线教师以个体或联盟的形式，面向学生开展饶有趣味的数学写作探索，获取了大量的学生习作，积累了开展数学写作的实践经验和评价经验^[20]。因此，若研究者、教师与教科书编写者能在写作素材遴选、写作任务设计、学生习作评价等方面形成合力，数学写作定将蔚然成风，惠及学生核心素养的培育以及“立德树人”教育根本任务的落实。

鉴于美国数学教育界在数学写作研究与实践中取得的丰硕成果，特别地，美国数学教科书编写团队长期坚持将数学写作以习题的形式融入教科书中，因此，研究美国教科书中的数学写作习题，对更好地融数学写作于我国数学教科书及数学教学中具有重要的借鉴意义。本研究聚焦美国中学数学教科书中数学写作习题的内容主题和写作类型，呈现其在各栏目中的习题数量和分布情况，并分析特定数学内容主题和特定写作类型之间的关联，以期为我国数学写作的纵深推进和繁荣发展提供他山之石。

2 研究方法

2.1 研究对象

2.1.1 教科书选取

选取培生教育集团出版的美国 Prentice Hall 版初中、高中数学教科书共七册（下称 Prentice Hall 版教科书）为研究对象，分别为：“数学课程 1（Mathematics Course 1）”^[21]“数学课程 2（Mathematics Course 2）”^[22]“数学课程 3（Mathematics Course 3）”^[23]“预备代数（Pre-Algebra）”^[24]“代数 1（Algebra 1）”^[25]“几何（Geometry）”^[26]和“代数 2（Algebra 2）”^[27]。

2.1.2 栏目分布

Prentice Hall 版教科书中的数学写作习题分布于“检查你的理解 (Check Your Understanding)”“课后拓展 (Extension)”“作业练习 (Homework Exercise)”“活动实验室 (Activity Lab)”“章末复习 (Chapter Review)”“章末测试 (Chapter Test)”“指导性问题解决 (Guided Problem Solving)”和“问题解决的应用 (Problem Solving Application)”共 8 个栏目, 初中和高中教科书中栏目分布稍有不同。最终, 统计得到七册教科书各栏目中数学写作习题共计 838 道。

2.2 分析框架

2.2.1 数学内容主题分类框架

基于汪晓勤提出的数学“知识源流”分类^[28-29], 结合最新数学课程标准中对知识内容的界定^[16-17]及国际学生评估项目 (Programming for International Student Assessment, 简称 PISA) 中关于数学内容的分类标准^[30], 将数学内容按主题分为“概念与术语”“命题与法则”“思想与方法”和“问题与解决”四类, 具体内涵如表 1 所示。

表 1 数学内容主题分类框架

维度	类别	子类别
数学内容主题	概念与术语	给数学概念下定义
		解释概念的定义
		理解或应用概念
	命题与法则	理解或应用运算法则
		理解、证明或应用数学定理
		理解或应用数学性质
		发现、证明、理解或应用公式
		应用数学公理
	思想与方法	基本数学思想方法, 如简算方法
		一般科学思想方法, 如类比法
		特定数学思想方法, 如数形结合思想
		数学解题方法或技巧, 如因式分解法

	问题与解决	问题提出
		问题解决

2.2.2 数学写作类型分类框架

基于 Casa 等提出的写作类型分类框架，将数学教科书习题中的数学写作分为“解释性数学写作（Explanatory Writing）”“反思性数学写作（Argumentative Writing）”和“创造性数学写作（Creative Writing）”三类^[31-32]。

“解释性数学写作”要求学生通过描述和解释来提供关于数学概念、命题或问题解决过程的信息，“反思性数学写作”要求学生构建论点或论证其推理，而“创造性数学写作”要求学生创造性地思考数学问题，并提出原创性的解决方法^[33]，具体内涵如表 2 所示。

表 2 数学写作类型分类框架

维度	类别	子类别
数学写作类型	解释性数学写作	解释数学概念
		解释问题解决的策略
		解释关于过程与程序的推理
		解释数学上的联系或区别
	反思性数学写作	分析与论证给定答案
		解决问题并分析与论证答案
	创造性数学写作	产生原创性解决方案
		记录原创性想法
		提出原创性问题
		发现数学结论

2.3 编码过程

本研究采用内容分析法。首先，确定分析单元。如图 1 所示，Prentice Hall 版教科书中的数学写作习题分两种情形，一是一道完整的习题，二是一道习题的一问，两种情况均视为一个分析单元。

10. **Writing in Math** Explain how you can use range when planning to draw a line graph.

32. **Patterns** A number pattern begins 6, 12, 18, 24, ...
 a. Write the next four numbers in the pattern.
 b. Which of the eight numbers are divisible by both 2 and 3?
 c. **Writing in Math** Write a rule for divisibility by 6.

图 1 数学写作习题编码示例

全部分析单元的统计数据如表 3 所示。

表 3 数学写作分析单元数统计

栏目	数学	数学	数学	预备 代数	代数 1	几何	代数 2	合计
	课程 1	课程 2	课程 3					
检查你的理解	20	0	0	0	0	0	1	21
课后拓展	2	0	0	2	0	0	3	7
作业练习	64	92	88	104	82	83	104	617
活动实验室	18	6	10	12	11	1	11	69
章末复习	0	0	0	0	7	4	2	13
章末测试	11	11	13	15	11	11	19	91
指导性问题解决	1	2	1	0	0	1	0	5
问题解决的应用	4	4	7	0	0	0	0	15
合计	120	115	119	133	111	100	140	838

随后，由两位数学教育方向的博士生对所有分析单元进行背靠背编码，得到归类一致性系

数 $CA=0.946$ （注： $CA=\frac{2S}{T_1+T_2}$ ，其中 S 为归类一致数， T_1 和 T_2 为两位编码者共同编码的条目

数），编码信度系数 $R=0.972$ （注： $R=\frac{2CA}{1+CA}$ ），说明编码信度较好。对于不一致的条目，两

位编码者通过讨论或寻求第三方参与编码以达成共识。

3 研究结果

3.1 数学主题内容分布

如图 2 所示，Prentice Hall 版教科书中的数学写作习题所涉及的数学内容主题以“命题与法则”和“问题与解决”为主，“概念与术语”和“思想与方法”相对偏少。

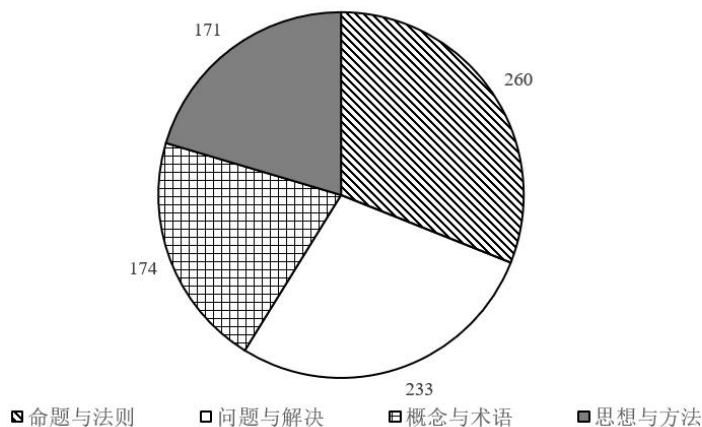


图 2 不同数学内容主题分布

3.1.1 概念与术语

数学概念是对现实世界空间形式和数量关系的概括反映^[34], 是数学逻辑的起点, 是建立数学法则、公式、定理的基础^[35]。数学写作习题中的“概念与术语”内容主要指通过写作考察学生对概念的描述和理解。在 Prentice Hall 版教科书中, 涉及“概念与术语”内容的数学写作习题主要分布于“作业练习”“活动实验室”和“检查你的理解”三个栏目。

由表 4 所示, 从“概念与术语”的不同子类别来看, “理解或应用概念”占比最大, 具体有辨析概念之间的异同(例 1)及应用概念的定义(例 2)两类。其次是“解释概念的定义”, 指解释已学习的数学概念, 包括直接解释概念(例 3)和结合概念术语的前缀、词源或本义进行解释(例 4)。“给概念下定义”较少, 主要为写出尚未学习(例 5)或新情境中的数学概念的定义(例 6)。

表 4 “概念与术语”下不同子类的数学写作习题数量及示例

内容主题	子类别	数量	示例
概念与术语	理解或应用概念	91 (52.3%)	【例 1】 作业练习: 解释相关关系和函数之间的异同? 【例 2】 作业练习: 从箱子中不放回地取出若干球, 这些事件是独立事件还是非独立事件呢? 请解释之。
	解释概念的定义	67 (38.5%)	【例 3】 章末测试: 解释绝对值的定义。 【例 4】 作业练习: 术语 skew 是一个中世纪英语单词, 意思是“逃避”。基于此解释异面直线(skew lines)的含义。

	给概念下定义	16 (9.2%)	【例 5】活动实验室：探索平均数 数轴上有等距的三点 A、B、C。点 B 被定义为点 A 和点 C 的“平均数”，结合已有知识给“平均数”下一个定义。 【例 6】问题解决的应用：你会如何定义火星上的一个月？请说明理由。
--	--------	--------------	--

3.1.2 命题与法则

命题是表示数学对象性质或关系的判断语句^[36]，由概念或一些更简单的命题复合而成^[37]。数学写作习题中的“命题与法则”内容指通过写作考察学生对法则、定理、性质、公式、公理等的发现、证明、理解或应用。在 Prentice Hall 版教科书中，涉及“命题与法则”内容的数学写作习题主要分布于“作业练习”和“章末测试”两个栏目。

由表 5 所示，从“命题与法则”的不同子类别来看，“发现、证明、理解或应用公式”和“理解、应用或证明数学定理”两个子类占比较高。其中，“定理者得由已知命题以证其为真理之命题也。”^[38]即定理是经过证明的命题，通过数学写作考察数学定理的方式有三，其一是定理理解，如辨析定理中的术语表达或限制条件（例 11），或比较两个定理的异同；其二是定理证明（例 12）；其三是定理应用，如应用定理解决具体问题（例 12）。

其次是“理解或应用数学性质”，占比达到 25%。数学性质是数学表现和内在所具有的特征，是其区别于其他事物的属性，性质的理解多指不同性质之间的比较（例 14），性质的应用则指在具体情境下利用某一性质进行推理（例 15）。“理解或应用运算法则”相对较少，涉及法则的写作习题往往指向学生运算能力的提升和对算理的理解（例 16）。

“应用数学公理”的数学写作习题最少，仅 3 道。数学公理是对数学对象性质的约定^[39]，其应用分为在数学内部（例 17）和在数学外部（例 18）。

表 5 “命题与法则”下不同子类的数学写作习题数量及示例

内容主题	子类别	数量	示例
命题与法则	发现、证明、理解或应用公式	91 (35.0%)	【例 7】活动实验室：发现中位线 在平面直角坐标系中，点 W 坐标为 (x_1, y_1)，点 Z 坐标为 (x_2, y_2)，你会如何利用坐标来寻找线段 WZ 的中点坐标公式。

			【例 8】作业练习：作一个梯形并连结其对角线，借助形成的两个三角形的面积和，证明梯形面积公式。 【例 9】章末测试：棱柱和棱锥的体积公式有什么异同？ 【例 10】章末测试：解释如何应用换底公式将 $\log_2 10$ 改写为以 3 为底的对数。
	理解、证明或应用数学定理	78 (30.0%)	【例 11】作业练习：在平面上，两条垂直于同一直线的线平行。解释为什么此定理要强调“在平面上”。 【例 12】作业练习：A 同学说她可以利用三角形全等证明的 ASA（注：角边角）推论证明 AAS（注：角角边）定理，你认可 A 同学的说法吗？ 【例 13】活动实验室：一个三角形三边长为 6cm，10cm，12cm，为什么这个三角形不是直角三角形，并解释之。
	理解或应用数学性质	65 (25.0%)	【例 14】作业练习：等边三角形都是等腰三角形吗？等腰三角形都是等边三角形吗？请解释之。 【例 15】作业练习：当化简 $\frac{c^4}{c^6}$ 时，K 同学说她发现了指数运算中的一个新性质，即 $\frac{c^4}{c^6} = \frac{1}{c^{6-4}} = \frac{1}{c^2}$，请解释 K 同学发现的新性质。
	理解或应用运算法则	23 (8.8%)	【例 16】作业练习：解释为什么 $5^3 \cdot 7^9$ 不能写成 35^{12}。
	应用数学公理	3 (1.2%)	【例 17】作业练习：利用相应的公理来解释以下情况： (1) 木匠知道两堵平面墙的交线是一条直线。 (2) 家具制造商知道三条腿的桌子总是稳定的，但四条腿的桌子有时会摇晃。 【例 18】作业练习：$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的一条边 AB 重合，其中 $AC=AD$，$BC=BD$，请问 $\angle A$ 和 $\angle C$ 相等吗？

3.1.3 思想与方法

数学思想与方法是助力学生形成良好知识结构，提升数学创造力的重要因素^[40]。虽然数学写作习题中的“思想与方法”需要依托于“命题与法则”或“概念与术语”内容，但前者侧重于更上位的方法或技巧，后两者多为按照既定程序解决问题或辨析具体概念。在 Prentice Hall 版教科书中，涉及“思想与方法”的数学写作习题主要分布于“作业练习”“章末复习”和“章末检测”三个栏目。

如表 6 所示，从“思想与方法”的不同子类别来看，四类思想方法的分布相对均匀，“一般科学思想方法”稍微多于其他三类，包含类比、归纳等思想方法等。

表 6 “思想与方法”下不同子类的数学写作习题数量及示例

内容主题	子类别	数量	示例	具体思想方法
思想与方法	一般科学思想方法	56 (32.7%)	【例 19】作业练习：绘制线段平分线和角平分线的过程有什么相似之处？	类比法
	特定数学思想方法	41 (24.0%)	【例 20】活动实验室：应用面积模型计算 $(x+1) \cdot (x+2)$ 。	数形结合法
	基本数学思想方法	39 (22.8%)	【例 21】检查你的理解：用心算法找到 $(25 \cdot 9) \cdot 8$ 的解。	简算方法
	数学解题方法或技巧	35 (20.5%)	【例 22】作业练习：解释如何彻底分解 $3x^2 + 6x - 72$ 。	因式分解法

3.1.4 问题与解决

“问题解决 (Problem Solving)”是指学生在既有原理和法则基础上，在不同条件下使用各种手段，通过多种途径来解决问题^[41]，NCTM 指出问题解决应成为数学课程的核心^[7]，Prentice Hall 版教科书便设有“指导性问题解决”和“问题解决的应用”两个专栏。此外，爱因斯坦 (A. Einstein, 1879-1955) 曾经说过：“提出一个问题往往比解决该问题更重要。解决一个问题，可能只不过是一种数学或实验技能；但要提出新的问题、新的可能性，从新视角看旧问题，需要创造性的想象力，这标志着科学的真正进步。”据此，“问题与解决”内容被分为“问题提出”与“问题解决”两个子类，主要分布于“作业练习”“章末测试”“指导性问题解决”和“问题解决的应用”四个栏目。如表 7 所示，“问题解决”类的数学写作习题数量远超

“问题提出”类。

表 7 “问题与解决”下不同子类的数学写作习题数量及示例

内容主题	子类别	数量	示例
问题与解决	问题解决	192 (82.4%)	【例 23】问题解决的应用：假如你想知道一页纸的厚度，你会如何测量？
	问题提出	41 (17.6%)	【例 24】章末测试：提出一个可以用不等式 $x + 0.5x \leq 60$ 解决的问题。

3.2 数学写作类型分布

如图 3 所示，Prentice Hall 版教科书中数学写作习题的写作类型以“解释性数学写作”为主，其次是“反思性数学写作”，“创造性数学写作”最少。

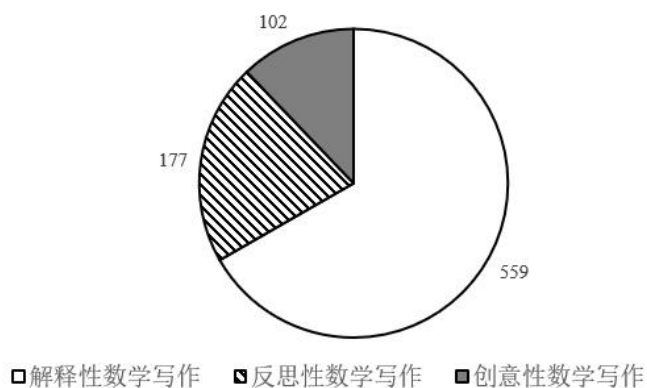


图 3 不同数学写作类型的分布

3.2.1 解释性数学写作

“解释性数学写作”指解释或描述数学写作习题涉及的知识点或解决方法，在 Prentice Hall 版教科书中主要分布于“作业练习”“检查你的理解”和“章末测试”三个栏目。如表 8 所示，从“解释性数学写作”的不同子类别来看，“解释问题解决的策略”类最多，占比过半，而“解释数学概念”类最少，占比不到 10%。

表 8 “解释性数学写作”中不同子类的数学写作习题数量及示例

写作类型	子类型	数量	示例
解释性数学写作	解释问题解决的策略	298 (53.3%)	【例 25】作业练习：A 同学在一本古董书里发现了一张泛黄的羊皮纸，上面写着：我将珍宝埋葬于岛屿，在与珍宝距离相等的三个地点各种下一颗挪威松的幼苗。在寻找宝藏五年之后，A 同学找到了一个长着三棵高大的挪威松的岛屿。A 同学怎么能找到埋葬珍宝的地方？请解释之。
	解释关于过程与程序的推理	134 (24.0%)	【例 26】作业练习：写一篇文章说明若一个圆锥的母线长为 10 英寸，底面半径为 8 英寸，如何找到圆锥的表面积。
	解释数学上的联系或区别	77 (13.8%)	【例 27】作业练习：简述菱形和筝形的区别。 【例 28】作业练习：找到生活中三个相似的物体，并说明它们为什么是相似的。
	解释数学概念	50 (8.9%)	【例 29】作业练习：函数 $f(x) = 500 \cdot 1^x$ 的定义域为 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，分析 $f(x)$ 的值域，并说明为什么指数函数 $y = a^x$ 的定义中要求 $a \neq 1$ 。

3.2.2 反思性数学写作

波利亚 (G. Pólya, 1887-1985) 曾言：“如果没有了反思，那么就错过了解题的重要而有益的方面”。由此可见，反思在数学学习中尤为关键。“反思性数学写作”指在写作中构建论点或批判推理，在 Prentice Hall 版教科书中主要分布于“问题解决的应用”和“作业练习”两个栏目。如表 9 所示，“分析与论证给定答案”类的写作数量接近“解决问题并分析与论证答案”类的两倍。

表 9 “反思性数学写作”中不同子类的数学写作习题数量及示例

写作类型	子类型	数量	示例
反思性数学写作	分析与论证给定答案	113 (63.8%)	【例 30】章末测试：已知 $\sin(x) = \cos(90^\circ - x)$ ，请结合图像进行解释。
			【例 31】章末复习：解释为什么水平线（注：平行于 x 轴的直线）斜率均为 0。

	解决问题并 分析与论证 答案	64 (36.2%)	【例 32】作业练习：四本书价格为 37 元，不计算，直接估计一本书的价格。思考你的答案是高于还是低于实际书本的价格，并解释之。
			【例 33】作业练习：你认为除法有交换律吗？解释为什么有或为什么没有？请给出实例予以说明。

3.2.3 创造性数学写作

创造力是人的各种能力的综合和最高形式。荷兰数学家、数学教育家弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905-1990）曾指出数学是一个“再创造”的过程。因此，数学课程有助于激发学生的创新意识，培养创造力。“创造性数学写作”指在写作中创造性地思考数学并记录，在 Prentice Hall 版教科书中多以开放式或半开放式问题的形式出现在习题中，主要分布于“问题解决的应用”“指导性问题解决”和“作业练习”三个栏目。

如表 10 所示，从“创造性数学写作”的不同子类别来看，“提出原创性问题”类与“产生原创性解决方案”类占比较高，其次是“发现数学结论”，而“记录原初性想法”类仅有 3 道。

表 10 “创造性数学写作”中不同子类的数学写作习题数量及示例

写作类型	子类型	数量	示例
创造性数学 写作	提出原创性问题	41 (40.2%)	【例 34】作业练习：提出一个能用计数原理解决的问题，并解之。
	产生原创性解决方案	36 (35.3%)	【例 35】作业练习：假如你的五次数学成绩分别为 96, 88, 96, 85, 30, 你认为老师应该用平均数、中位数还是众数来评判你的成绩？请写信向老师说明。 【例 36】章末测试：描述一个长度和高度都难以测量的物体，解释你会如何利用相似三角形来进行测量。
	发现数学结论	22 (21.5%)	【例 37】作业练习：写出可以被 6 整除的数的特征。
	记录原初性想法	3 (3.0%)	【例 38】活动实验室：利用所学知识定义“平均数”。

3.3 不同数学内容主题中的数学写作类型分布

由卡方检验 ($\chi^2=88.459$, $p<0.01$) 可知, Prentice Hall 版教科书中数学写作习题的内容主题与写作类型具有统计学意义上的差异性。如图 4 所示,“解释性数学写作”在所有数学内容主题中均达到最大占比,体现出 Prentice Hall 版教科书对数学基础知识与基本技能的重视。“反思性数学写作”在“概念与术语”和“命题与法则”两个内容主题中的占比高于“创造性数学写作”,说明 Prentice Hall 版教科书更强调对数学概念和运算法则的深度反思,但后者在“思想与方法”和“问题与解决”两个内容主题中多于前者,说明 Prentice Hall 版教科书没有忽视在掌握数学思想方法、学会提出问题和解决问题的基础上培养学生的创新意识,锻炼其创造力。

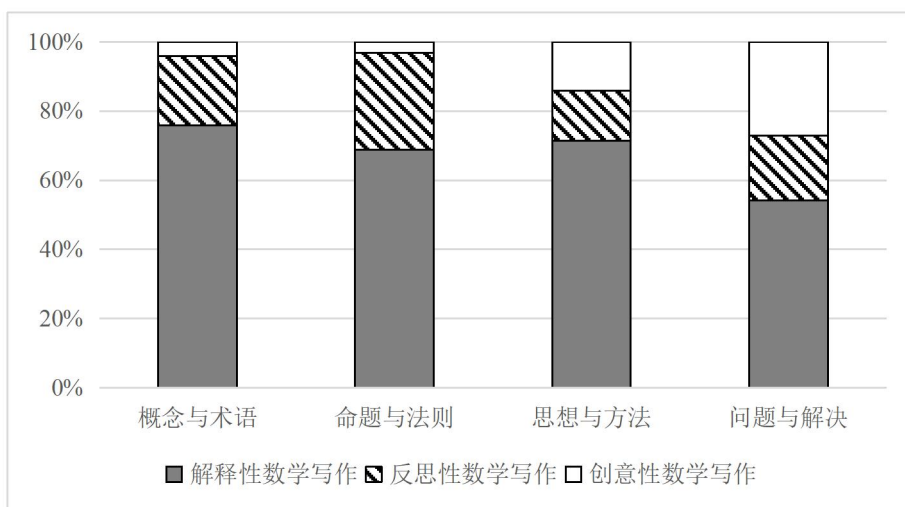


图 4 不同数学内容主题中的数学写作类型分布

4 讨论

美国在全球范围内首倡数学写作, NCTM 于 1989 年发布的《学校课程与评价标准》中鼓励将写作纳入数学教学^[7], 并在之后发布的《学校数学的原则与标准》^[8]和《课程焦点》^[42-43]等课程文件中进一步强调数学写作的重要性, 且大量扎根于美国本土的实证研究, 说明数学写作有助于学生的数学理解和学习^[11-13]。相关政策文件和实证研究成果支持和反哺美国数学教科书的编写, 编写者高度重视数学写作, 并长期坚持将数学写作以习题形式纳入到数学教科书的诸多栏目中, 以促进学生的数学交流和数学学习。藉由分析 Prentice Hall 版教科书中的数学写作习题, 本研究得到关于美国中学教科书中的数学写作在内容主题、写作类型及编排设计三方

面的发现，以下将对这些发现进行讨论。

4.1 内容主题：重视基础，强化应用

“新数运动”时期，美国教科书重视引进数学的前沿知识，忽视了基础知识、基本技能和基本思想方法，尤其造成了学生数学学习和日常生活的割裂^[44]。自“回到基础”运动开始后，美国数学教科书逐渐纠正了“新数运动”期间遗留下的“偏理论，轻应用”的不当倾向^[45]，这不仅体现在教科书中，更体现在教科书中的数学写作习题中，美国教科书中的数学写作习题极其重视基础知识、基本技能、基本思想方法以及问题解决的应用。

以 Prentice Hall 版教科书中数学写作习题涉及的内容主题为切入点，在基础知识和基本技能方面，大量的与“命题与法则”有关的写作体现了教科书对于数学中“琳琅满目”的公理、公式、定理、法则及性质的重视与行动，与“概念与术语”有关的写作则反映出革新后的美国教科书在促进学生数学学习中最为基础的概念理解和应用上的反思与着力。在基本思想方法方面，从“思想与方法”主题下四类思想方法的均匀分布可见，教科书希冀通过数学写作关切学生数学思维形成的方方面面，使学生能够真正有方法、有思想、有逻辑地学习和思考数学，于日常中重视基本思想方法的熏陶。总体而言，美国中学数学教科书中“概念与术语”“命题与法则”和“思想与方法”三个内容主题的数学写作习题数量基本相当，体现了其对基础知识、基本技能和基本思想方法的关注和着力。

此外，数学不是一门纯粹独立的学科，而是与现实世界紧密相连。20 世纪中期，美国数学教育界开始意识到数学中问题解决的重要性^[46]，并在 20 世纪 80 年代初展开了以“问题解决”为核心的数学教育改革运动^[47]，且尤为关注情境中的问题解决^[48-49]。这一特点同样体现于数学写作习题中，与“问题与解决”有关的写作多涉及生活中实际问题的解决，以期让学生认识到数学广泛的应用性。同时，基于对“问题解决”的反思，20 世纪 80 年代末“问题提出”受到了广泛的关注^[46]，且 NCTM 指出要在课堂中增加“问题提出”相关活动^[7]。因此，作为数学教育研究成果之一的“问题提出”也出现于数学写作习题中，让学生基于现实情境提出问题，于细微处培养学生的创新能力和创造精神。

4.2 写作类型：各有侧重，相辅相成

日志 (logs) 作为数学写作的起源，曾风靡一时，尔后却因其繁琐性逐渐消弭在教科书中^[50]，“解释性数学写作”异军突起^[10]。在 Prentice Hall 版教科书中，“解释性数学写作”拔得头筹反映了 20 世纪初数学写作相关研究对于该类写作的重视^[51-52]，可能的原因有二：其一，题干短小精悍、简单易懂，少有冗长的阅读材料，可以在一定程度上帮助学生规避因阅读障碍而产生对数学写作的焦虑情绪或抗拒心理^[53]；其二，精准指向程序性知识和概念性知识的温习、强化元认知发展，不会加重学生学业负担，同时有助于学生数学兴趣的提升。

从美国“21 世纪技能联盟 (P21 Framework Definitions)”颁布的《21 世纪技能框架》来看，“批判性思维 (critical thinking)”和“创新能力和创造能力 (creativity and innovation)”作为“学习和创新技能 (learning and innovation skills)”的组成部分^[54]，同样也体现在美国教科书的数学写作习题中，“反思性数学性写作”让学生书写自己的推断或反驳，将批判性思维的培养落在实处；“创造性数学写作”依托的习题形式通常为半开放式或开放式问题，题干的背景信息相对更为丰富^[55]，促进学生去创造性地思考问题。这两类数学写作均能够充分调动学生去查找资料、应用资料分析问题、提出并反思解决方案，让学生在“做中学”中不断接近“做数学”这一最高境界。特别地，在“反思性数学写作”中，部分习题以“反向提问”的形式出现，即直接给出答案，要求分析答案得出的过程或进行有理有据地反驳 (counterargument)^[56]，故这一部分数学写作习题不仅满足于让学生“知其然”，更要“知其所以然”。

4.3 编排设计：难度递进，螺旋上升

在数学写作习题的编排设计上，Prentice Hall 版教科书中的写作习题体现出章节内难度递进和学段上螺旋上升两大特点，切合美国数学教科书中习题设计的层次性特征^[57-58]。

从章节内来看，载有数学写作习题的 8 个栏目中，每章前的“检查你的理解”栏目中的数学写作习题主要考察学生已有的认知基础，章内各节后的“作业练习”栏目主要考察新知的理解和应用，章末的诸如“指导性问题解决”和“问题解决的应用”栏目则更注重提升学生认知上的分析、综合乃至创造水平，习题难度合理有序地递进，让学生既能扎牢基础，又能提升问题解决能力。

从不同学段课程来看，限定同一知识主线后，可以发现 Prentice Hall 版教科书中的数学写作习题在不同学段间螺旋上升。以“概率与统计”主线初中教科书为例，“数学课程 1”中的相关数学写作习题多为解释或辨析平均数、中位数等基本概念，“数学课程 2”中的写作侧重于发现生活中的随机事件以及解决简单概率问题，“数学课程 3”中的写作则多涉及数据表格、自然语言、数学语言等不同表征的相互转化以及复杂数据的处理与认识。总之，具备层次性的数学写作有助于学生及时更新认知结构，并于有迹可循的书面数学交流中“沉淀”关于数学的情感、态度与价值观，最终达成较为全面的学习进阶。

5 结论与启示

综上所述，分析美国 Prentice Hall 版教科书，发现美国中学数学教科书中的数学写作习题所涉数学内容主题丰富，主要类属于“命题与法则”和“问题与解决”两大主题；数学写作类型多元，以“解释性数学写作”为主，“反思性数学写作”和“创造性数学写作”为辅；教科书中数学写作的特定内容主题和特定写作类型间存在差异，如“反思性数学写作”多应用于“概念与术语”和“命题与法则”两个主题，“创造性数学写作”则多呈现于“思想与方法”和“问题与解决”中。

从数学内容主题来看，美国教科书重视以数学写作巩固数学法则应用，发展问题解决能力，同时不忽视概念性理解和数学思想方法的领会，让学生于写作中夯实基础知识、辨析概念异同、亲历问题解决、强化数学交流，最终实现类比、归纳、演绎、反驳等多种类数学思维的显化与提升。从问题设计的角度，美国教科书中的数学写作习题情境简而不陋，习题难度稳定适中，不仅能一探学生数学阅读能力的究竟，更能有效勘察学生在真实情境中应用数学知识解决实际问题的能力，颇具亮点的问题提出类写作更是强烈关切了所学数学知识的生活化与问题化两大面向，让学生真正学会用数学的眼光看待现实世界。

从数学写作类型来看，“解释性数学写作”在美国教科书中一以贯之，占据主流，是学生以写叙题、以写叙解，开展书面数学交流的最重要途径，在特定内容主题下搭配“反思性数学写作”或“创造性数学写作”，更能推进学生的各类数学思维趋于完善，直至能够以写叙理、以写叙数，即树立理性精神，实现数学的再创造。

透视美国教科书中的数学写作习题，对课程改革下我国数学教科书的修订与编写具有以下

三方面的借鉴意义。

5.1 增加写作习题，丰富内容主题

目前我国中学数学教科书中涉及数学写作的习题较少，主题覆盖不均，因此，可以从“量”和“质”两方面入手，以丰富我国现行教科书中的数学写作，让有效的数学写作充盈在数学课程中，进而有力地支持学生的日常数学学习。从“量”的角度，鉴于美国教科书在习题中提供了大量的数学写作素材和任务，可以遴选部分习题，根据我国数学教学实际和特有文化情境予以重组、改编乃至创新。同时，从“质”的角度，无需将数学写作的内容局限于以诠释知识源流为主的“概念与术语”主题，可以在教科书的不同章节中均匀合理地设置与“概念与术语”“命题与法则”“思想与方法”及“问题与解决”等不同内容主题相关的数学写作习题，提供学生感受方法之美、体悟能力之助等多元学习机会。

5.2 联系现实世界，拓展写作类型

我国教科书中的数学写作主要为与特定概念的演进史有关的小论文或文献综述的形式，要求学生根据选题查找历史资料，体现了教科书对数学发展史的重视，但与此同时也折射出数学写作与学生面对的现实世界的“割裂”。参考美国教科书藉由不同类型的数学写作来弥合数学世界和现实世界，我国教科书可以通过拓展写作类型，打通数学与生活的壁垒。譬如，依托“解释性数学写作”解释生活中的数学现象，依托“反思性数学写作”反思生活中的数学应用，依托“创造性数学写作”创造针对生活中实际问题的数学方案，在 21 世纪素养观下促进学生达成实现自我发展和社会参与所必需的数学素养和理性思维。

5.3 分层设置栏目，启智深度学习

我国教科书中与数学写作相关的栏目设置较为单一，如人教 A 版高中数学教科书中仅有“文献阅读与数学写作”栏目，其中的写作任务难度较高，与一般习题间的跨度较大，且位于章末，极易被教师和学生忽视。反观美国教科书中的数学写作，其栏目设置丰富，难度循序渐进，且有专门的标注。因此，我国教科书可在章节前后穿插设置有关数学写作的“微栏目”或“微任务”，以将数学写作真正落到实处。具体而言，章前的数学写作可借力章首语，难度不

宜过大，重在衔接旧知与新知，激起学生学习兴趣；各节中的数学写作可嵌于边注或旁白中，紧密联系正文内容，注重帮助学生达成概念性理解，同时为课堂教学提供脚手架；各节后的数学写作可辟出专栏，着眼于加强学生对新授知识和习得技能的应用与反思，导向积极的数学情感与态度；章末的数学写作可兼具挑战性和创新性，在尊重学生认知规律的基础上，引导学生主动地调用高阶思维进行信息加工，完成高水平认知需求的写作任务。此外，在 Chat-GPT 等生成式人工智能盛行的今天，一切已有的知识和现成的方案都变得唾手可得，有理由相信，未来数学写作或将在数学教育中发挥更关键的功用，如促进学生的深度学习，发展其数学创造力，最终助力开启个性化数学教育的新时代。

参考文献

- [1] Vygotsky, L. S. *Thought and Language*[M]. MIT Press, Cambridge, 1962: 1-11.
- [2] Kuzle, A. Promoting Writing in Mathematics: Prospective Teachers' Experiences and Perspectives on the Process of Writing When Doing Mathematics as Problem Solving[J]. *Center for Educational Policy Studies Journal*, 2013, 3(4): 41-59.
- [3] Ray, A. B., Graham, S., et al. Teachers Use of Writing to Support Students' Learning in Middle School: A National Survey in the United States[J]. *Reading and Writing*, 2016, 29(5): 1039-1068.
- [4] Hacker, D. J., Keener, M. C. & Kircher, J. C. *Handbook of Metacognition in Education*[M]. New York: Routledge, 2009: 191.
- [5] Emig, J. Writing as a Mode of Learning[J]. *College Composition and Communication*, 1977, 28(2): 965-969.
- [6] Pugalee, D. K. Connecting Writing to the Mathematics Curriculum[J]. *Mathematics Teacher*, 1997, 90(4): 308-310.
- [7] National Council of Teacher of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*[M]. Reston, Va: NCTM, 1989: 3-5.
- [8] National Council of Teacher of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics*[M]. Reston, Va: NCTM, 2000: 3.

- [9] Sarah, R. P., Michael, A. H. & Elizabeth, M. H. How Educators Use Mathematics Writing in the Classroom: A National Survey of Mathematics Educators[J]. *Reading and Writing*, 2021, 34(2): 417-447.
- [10] 汪晓勤, 柳笛. 数学写作在美国[J]. 数学教育学报, 2007, 16(3): 75-78.
- [11] Santos, L. & Semana, S. Developing Mathematics Written Communication Through Expository Writing Supported by Assessment Strategies[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2015, 88(4): 65-87.
- [12] Powell, S. R. & Hebert, M. A. Influence of Writing Ability and Computation Skill on Mathematics Writing[J]. *The Elementary School Journal*, 2016, 117(2): 310-335.
- [13] Hughes, E. M., Markelz, A. M. & Cozad, L. E. Evaluating Various Undergraduate Perspectives of Elementary-Level Mathematical Writing[J]. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2019, 17(2): 1031-1048.
- [14] 刘艳云. 数学日记的反思[J]. 数学教育学报, 1999, 8(1): 57-60.
- [15] 胡耀华. 数学写作的价值及若干教学建议[J]. 数学教育学报, 2007, 16(3): 60-62.
- [16] 张俊. 数学写作的尝试与思考[J]. 上海教育科研, 2008, 28(9): 85-86.
- [17] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [18] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [19] 邵光华, 张妍. 人教A版高中数学新教科书特色分析及使用建议[J]. 课程.教材.教法, 2019, 39(12): 109-114.
- [20] 仓万林, 李红. 基于教师个体引领的“数学写作”实践研究[J]. 中学数学月刊, 2020, 43(3): 64-66.
- [21] Bellman, A. E., Bragg, S. C., et al. *Prentice Hall Mathematics, Mathematics Course 1*[M]. Pearson Education, Inc, 2009.
- [22] Bellman, A. E., Bragg, S. C., et al. *Prentice Hall Mathematics, Mathematics Course 2*[M]. Pearson Education, Inc, 2009.

- [23] Bellman, A. E., Bragg, S. C., et al. *Prentice Hall Mathematics, Mathematics Course 3*[M]. Pearson Education, Inc, 2009.
- [24] Bellman, A. E., Bragg, S. C., et al. *Prentice Hall Mathematics, Pre-Algebra*[M]. Pearson Education, Inc, 2009.
- [25] Bellman, A. E., Bragg, S. C., et al. *Prentice Hall Mathematics, Algebra 1*[M]. Pearson Education, Inc, 2009.
- [26] Bellman, A. E., Bragg, S. C., et al. *Prentice Hall Mathematics, Geometry*[M]. Pearson Education, Inc, 2009.
- [27] Bellman, A. E., Bragg, S. C., et al. *Prentice Hall Mathematics, Algebra 2*[M]. Pearson Education, Inc, 2009.
- [28] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 15
- [29] 李卓忱, 汪晓勤. 法国初中数学教科书习题中的数学文化研究[J]. 比较教育学报, 2022, 41(2): 160-175.
- [30] OECD. *PISA 2018: Insights and Interpretations*[EB/OL]. Paris: Organisation for Economic Cooperation and Development. [2023-4-6]. <https://doi.org/10.1787/b25efab8-en>.
- [31] Rogers, L. A. & Graham, S. A Meta-analysis of Single Subject Design Writing Intervention Research[J]. *Journal of Educational Psychology*, 2008, 100(4): 879-906.
- [32] Casa, T. M., Firmender, J. M., et al. *Types of and Purposes for Elementary Mathematical Writing: Task Force Recommendations*[EB/OL]. [2023/4/6]. <https://mathwriting.education.uconn.edu>.
- [33] Craig, T. The Role of Expository Writing in Mathematical Problem Solving[J]. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 2016(20): 1-10.
- [34] 邵光华, 章建跃. 数学概念的分类、特征及其教学探讨[J]. 课程.教材.教法, 2009, 29(7): 47-51.
- [35] 李善良. 数学概念学习研究综述[J]. 数学教育学报, 2001, 10(3): 18-22.
- [36] 喻平. 论数学命题学习[J]. 数学教育学报, 1999, 8(4): 2-6, 19.
- [37] 徐章韬, 陈林. 数学命题的认识及其课堂教学设计[J]. 课程.教材.教法, 2014, 34(11): 81-85.
- [38] 薛德炯, 吴载耀, 译. 几何辞典[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1981: 1.
- [39] 张景中. 公理是什么[J]. 中学生数理化, 2016, 36(5): 4.

- [40] 张奠宙, 郑振初. “四基”数学模块教学的构建——兼谈数学思想方法的教学[J]. 数学教育学报, 2011, 20(5): 16-19.
- [41] 赵小云, 沈陆娟. 美国数学教育中的问题解决及其评价[J]. 比较教育研究, 2003, 39(10): 35-39.
- [42] National Council of Teachers of Mathematics(NCTM). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten to Grade 8 Mathematics: A Quest for Conference*[M]. Reston, Va: NCTM, 2006.
- [43] National Council of Teachers of Mathematics(NCTM). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making*[M]. Reston, Va: NCTM, 2006.
- [44] 章建跃. 三次国际数学教育改革运动及其启示[J]. 数学通报, 2002, 67(8): 6-8.
- [45] 童莉, 黄翔. 寻求课程的一致性——对美国数学课程焦点的分析与思考[J]. 数学教育学报, 2007, 16(3): 79-82.
- [46] G·波利亚. 怎样解题[M]. 阎育苏, 译. 北京: 科学出版社, 1982.
- [47] 夏小刚. 国内外数学问题提出教学研究的回顾与反思[J]. 数学教育学报, 2005, 14(3): 17-20.
- [48] Schoenfeld, A. Problem Solving from Cradle to Grave[J]. *Annales de Didactique et de Science Cognitive*, 2006, 19(11): 41-73
- [49] 郑毓信. “问题解决”与数学教育(2008)[J]. 数学教育学报, 2009, 18(1): 1-4.
- [50] Leavy, A. & Hourigan, M. Balancing competing demands: Enhancing the mathematical problem posing skills of prospective teachers through a mathematical letter writing initiative[J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2022, 25(3): 293-320.
- [51] Bywater, J. P., Lilly, S. & Chiu, J. L. Examining technology-supported teacher responding and students' written mathematical explanations[J/OL]. *Journal of Mathematics Teacher Education*, (2022-7-2) [2023-4-6]. <https://doi.org/10.1007/s10857-022-09546-3>
- [52] Porter, M.K., Masingila, J. O. Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2000, 73(42): 165-177.
- [53] Bangert-Drowns, R. L., Hurley, M. M. & Wilkinson, B. The effects of school-based writing-to-learn interventions on academic achievement: meta-analysis[J]. *Review of Educational Research*, 2004, 74(1): 29-58.

- [54] Partnership for 21st Century Skills. *The MILE Guide —Milestones for Improving Learning& Education*[EB/OL]. (2009-12-9) [2023/4/6], http://www.21stcenturyskills.org/documents/MILE_Guide_091101.pdf.
- [55] California State Board of Education. *The Draft Mathematics Framework* [EB/OL]. (2021-5-15) [2023/4/6]. <https://www.cde.ca.gov/ci/ma/cf/index.asp>.
- [56] Lin, T. J., Nagpal, M., et al. Instructional patterns for the teaching and learning of argumentative writing in high school English language arts classrooms[J]. *Read and Writing*, 2020, 33(5):2549-2575.
- [57] 吴立宝, 王建波, 曹一鸣. 初中数学教科书习题国际比较研究[J]. *课程.教材.教法*, 2014, 34(2): 112-117.
- [58] Zhu, Y. & Fan, L. Focus on the Representation of Problem Types in Intended Curriculum: A Comparison of Selected Mathematics Textbooks from Mainland China and the United States[J]. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2006, 4(4): 609-626.

专题研究

美英早期几何教科书中的三角形四心定义及相关性质

刘梦哲

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

三角形的四心是指内心、外心、垂心和重心, 其对于三角形的研究起到了举足轻重的作用, 在中学阶段数学学习中, 也常见于许多几何问题之中。《义务教育数学课程标准》(2022 年版) 指出, 要求学生了解三角形重心的概念、三角形的内心和外心, 会利用基本作图完成: 过不在同一直线上的三点作圆; 作三角形的外接圆、内切圆^[1]。

数学史告诉我们, 任何数学概念、公式、定理、思想都不是从天上掉下来的, 都有其自然发生发展过程, 同时, 数学公式和定理背后所蕴含的思想方法更是我们的教学目标之一^[2]。在倡导数学文化进课堂的今天, 融入数学史的教学, 努力让学生在学习数学的过程中真正感受到文化感染, 引起文化共鸣, 提升数学的文化品位显得尤为重要。

古希腊时期, 阿基米德 (Archimedes, 前 287-前 212) 在《平面图形的平衡或其重心》一书中提出了重心的概念, 并利用反证法证明三角形重心必须在中线上。公元前 3 世纪, 欧几里得 (Euclid, 约前 325-约前 265) 在《几何原本》第 IV 卷中, 利用尺规作出了三角形的内切圆和外接圆, 并给出三角形内心和外心的相关性质, 但此时还没有内心和外心这一名词^[3]。在中国古代《歌词古体算题》这一著作中记载了一道在数学史上名扬中外的“勾股容圆”名题, 其中就蕴含了三角形内切圆半径与三角形面积之间的关系。

19-20 世纪美英早期几何教科书中所呈现的三角形四心的定义及其性质是新课改背景下开展数学文化教学的一片沃土, 其必将在历史与现实之间架起一座桥梁, 而迄今为止我们对此知之甚少。本文拟聚焦三角形四心的定义及其性质, 对美英早期几何教科书进行考察, 以期为今日教学提供思想养料。

2 早期教科书的选取

本文选取 1829-1948 年间出版的 81 种美英早期几何教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

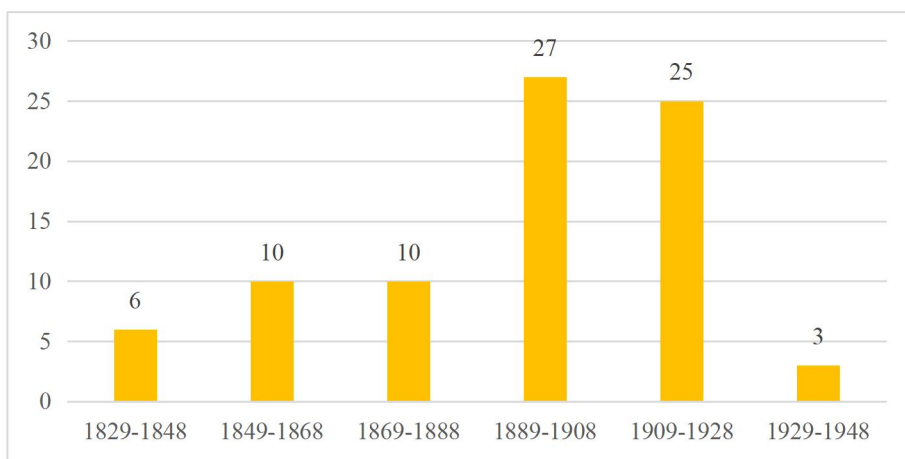


图 1 81 种美英早期几何教科书的出版时间分布

三角形四心的概念和性质大多出现在“直线形”“多边形和圆”“线、角和多边形”“命题”和“直线和直线形”等章节中，与三角形内心和外心有关的尺规作图问题主要归于“圆”一章、面积问题主要归于“正多边形和圆”一章中。在早期教科书中，通常先给出外心和内心的内容，然后再给出垂心和重心的内容，最后运用给出的性质完成作图和面积问题。

3 三角形的“内心”

3.1 内心的概念

在 20 种给出三角形内心定义的教科书中，内心的定义可以分为交点定义和圆心定义两类，表 1 给出了三角形内心定义的分类。在交点定义中，教科书编写者多用三角形的角平分线的交点来定义三角形的内心，但我们也看到有一种教科书特别强调是“内角平分线”，这可以很好地与三角形旁心的定义区分开来。圆心定义则充分考虑了三角形内心在几何上的意义，于是将三角形内切圆圆心定义为它的内心。与此同时，部分定义在表述过程中还会加入内心的性质，这使得内心定义的表述更加完整。

表 1 三角形内心定义的分类

类别	描述	教科书	数量
交点定义	三角形角平分线的交点叫做三角形的内心。 ^[4]	Newell & Harper (1918)	8
	三角形角平分线交于一点且到三边距离相等，此点叫做三角形的内心。 ^[5]	Failor (1906)	3
	三角形内角平分线的交点叫做三角形的内心。 ^[6]	Beman & Smith (1900)	2
	三角形角平分线是相交（并发）的，交点（并发点）位于三角形两边的特殊位置，即内心。 ^[7]	Willis (1922)	1
圆心定义	三角形三条角平分线是相交（并发）的，交点（并发点）是三角形内切圆的圆心。三角形内切圆的圆心叫做三角形的内心。 ^[8]	Bowser (1890)	5
	点 O 是一个圆心且该圆与三角形的边相切，这个点被称为三角形的内心。 ^[9]	Strader & Rhoads (1927)	1

图 2 给出了三角形内心定义的时间分布情况。从折线图可以看出，早在 19 世纪中叶以前，内心的定义并没有出现在教科书中。相比于三角形其它“三心”的定义，内心定义则是最晚出现，直至 1890 年才有教科书出现“incenter”一词，即内心，随后有越来越多的教科书会给出三角形内心的定义。从柱状图可以看出，20 世纪以前，圆心定义和交点定义平分秋色，而此后交点定义逐渐成为教科书中的主流。我们知道，三角形三个内角平分线的交点可以确定其内切圆的圆心，因此交点定义是源，而圆心定义是流，用（内）角平分线的交点来定义三角形内心显得水到渠成。

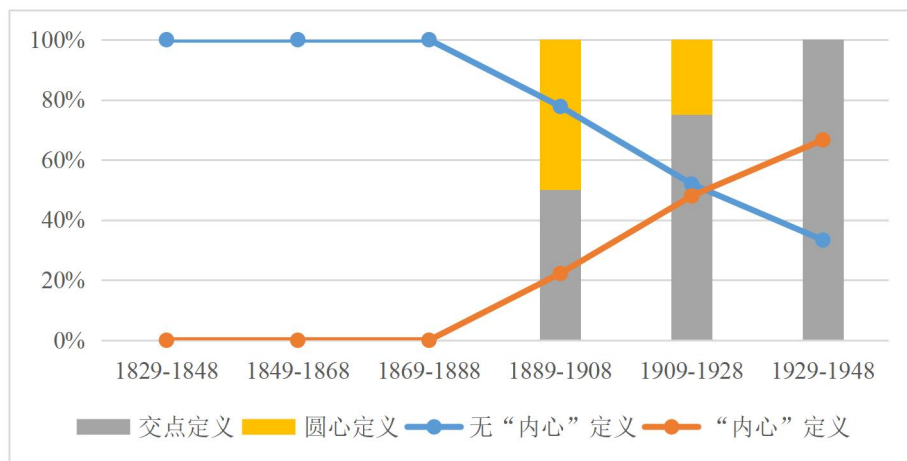


图 2 三角形内心定义的时间分布

3.2 内心的性质

在 81 种教科书中，80% 的教科书给出了三角形内心与其三边的距离关系。Schuyler 将其概述为“三角形三条角分线交于一点，且该点（内心）到三角形三边的距离相等”。^[10]

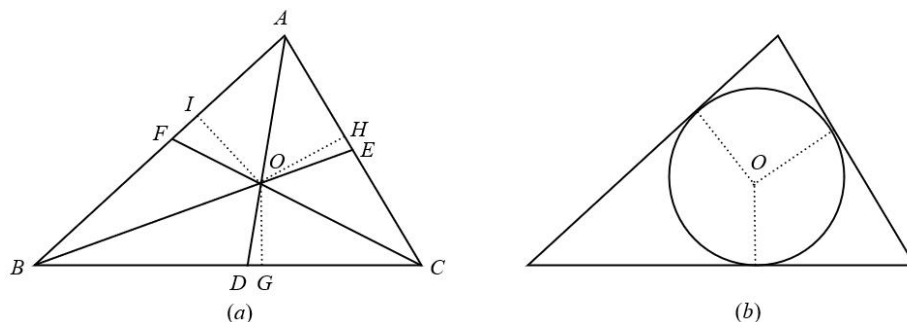


图 3 三角形内心到三边的距离

在 $\triangle ABC$ 中，作 $\angle A$ 、 $\angle B$ 的平分线 AD 、 BE 交于点 O ，过点 O 分别作 $\triangle ABC$ 三边的垂线，垂足分别为 G 、 H 、 I 。连结 CO ， CO 的延长线交 AB 于点 F （图 3(a)）。由角平分线性定理知， $OH=OI$ 、 $OG=OI$ ，于是 $OH=OG$ 。又由角平分线逆定理，所以 CF 是 $\angle C$ 的平分线，同时也可以得到 $OH=OG=OI$ ，即内心 O 到 $\triangle ABC$ 三边的距离相等。在尺规作图问题中，有 62 种教科书运用三角形内心的这一性质去构造三角形的内切圆^[4]（图 3(b)）。

1862 年法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）在《几何与三角基础》中给出了三角形面积的另一公式^[11]。在图 3(a) 中，因为点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心，所以 $OH=OG=OI$ ，又因为 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC}$ ，所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{OG}{2}(AB + AB + BC)$ ，即三角形的面积等于三角形

周长与其内切圆半径的乘积的一半。以此类推，同样可以构造正多边形的内切圆，共有 44 种教科书给出了正多边形的面积公式^[6]。

Newell & Harper 指出直角三角形的斜边与其内切圆直径之和等于三角形两直角边之和^[4]。在图 4 中，因为 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，容易知道 $AF=AE$ 、 $BF=BD$ ，于是 $AB=AF+BF=BD+AE$ ，两边同时加上 OE 和 OD ，即加上内切圆的直径，得 $AB+2r=AC+BC$ 。

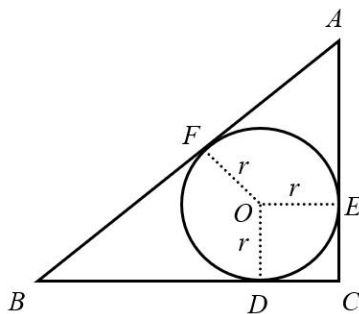


图 4 三角形的内切圆与面积的关系

4 三角形的“外心”

4.1 外心的概念

类似于三角形内心的定义，三角形外心的定义也可以分为交点定义和圆心定义两类，表 2 给出了三角形外心定义的分类。

表 2 三角形外心定义的分类

类别	描述	教科书	数量
交点定义	三角形各边的垂直平分线的交点（并发点）叫做三角形的外心。 ^[4]	Newell & Harper (1918)	11
	三角形各边的垂直平分线交于一点且该点到三角形三个顶点的距离相等，此点叫做三角形的外心。 ^[5]	Failor (1906)	3
	三角形各边的垂直平分线是相交（并发）的，交点（并发点）位于三角形顶点的特殊位置，即外心。 ^[7]	Willis (1922)	1

圆心定义	三角形各边的垂直平分线是相交（并发）的，交点（并发点）是三角形外接圆的圆心。三角形外接圆的圆心叫做三角形的外心。 ^[8]	Bowser (1890)	6
------	---	---------------	---

图 5 给出了三角形外心定义的时间分布情况。三角形的内心和外心都与三角形中常见的尺规作图问题息息相关，因而两者在定义的时间分布情况上也大体相近。从折线图看，外心定义出现的时间早于内心定义，19 世纪中叶以后，越来越多的教科书给出三角形外心（circumcenter）的定义。从柱状图看，总体上使用圆心定义的教科书逐渐减少，而使用交点定义的教科书逐渐增多，其实外心的圆心定义和交点定义也隐含着源和流的关系。

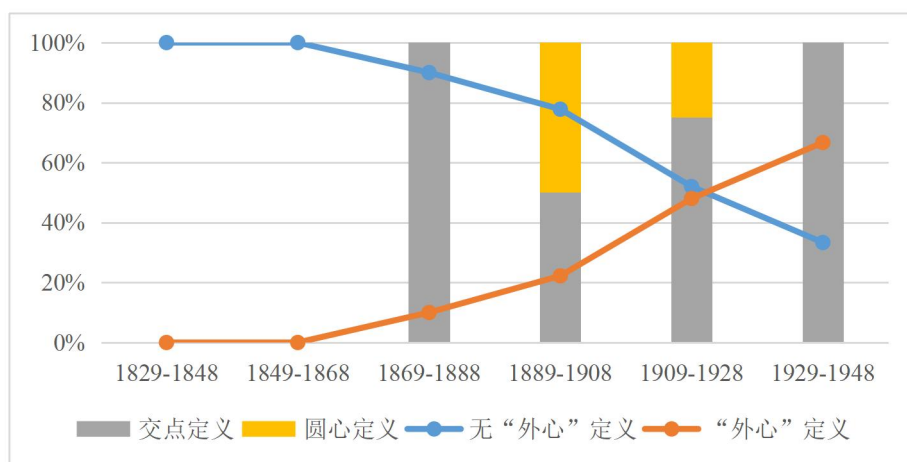


图 5 三角形外心定义的时间分布

4.2 外心的性质

有 65 种教科书给出了三角形的外心与其顶点的距离关系，即三角形三边的垂直平分线交于一点，且该点（外心）到三角形三个顶点的距离相等^[10]。

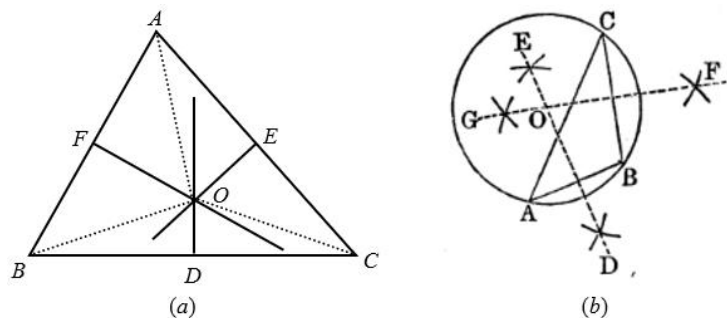


图 6 三角形外心到三角形三个顶点的距离

在 $\triangle ABC$ 中, 作 AB 、 AC 的垂直平分线 FO 、 EO , 交于点 O , 连结 AO 、 BO 、 CO (图 6(a)). 于是 $AO=BO$ 、 $AO=CO$, 所以 $BO=CO$, 故点 O 在线段 BC 的垂直平分线上, 因此三角形三边的中垂线交于一点且 $AO=BO=CO$, 即外心 O 到三角形三个顶点的距离相等。由这一性质出发同样可以提出三类尺规作图问题, 即“寻找给定圆(弧)的圆心”“过不在一条直线上的三点作圆”及“作三角形的外接圆”^[12] (图 6(b))。

对于不同的三角形, 其外心的位置也会有所差异^[13]。如图 7, 在锐角三角形中, 外心 O 在三角形的内部; 在直角三角形中, 外心 O 则是三角形斜边上的中点; 在钝角三角形中, 外心 O 会在三角形的外部。

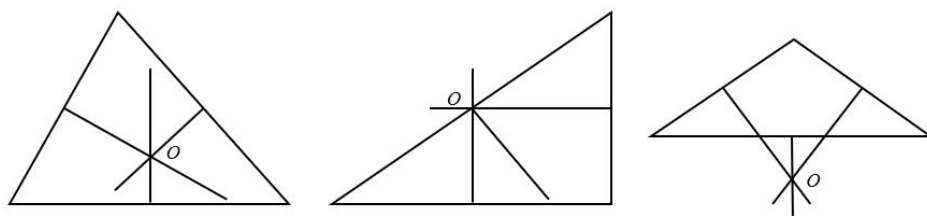


图 7 三角形外心的位置

Perkins 用三角形三边的长度及其外接圆的半径来计算三角形的面积^[13]。在图 8 中, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AD 为直径。连结 BD , 作 $AE \perp BC$, 垂足为 E 。因为 $\angle C$ 和 $\angle D$ 都是 $\widehat{AB}$ 所对的圆周角, 故 $\angle C = \angle D$, 又因为 $\angle AEC = \angle ABD = 90^\circ$, 所以 $\triangle AEC \sim \triangle ABD$, 于是 $\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB}$, 即 $AE = \frac{AC \cdot AB}{AD}$ 。综上所述, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC = \frac{AC \cdot AB \cdot BC}{2AD}$ 。

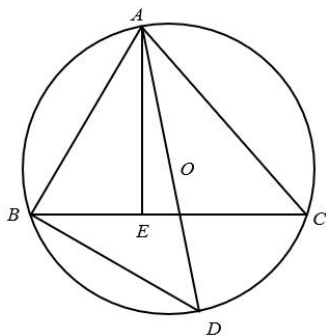


图 8 三角形的外接圆与面积的关系

5 三角形的“垂心”

5.1 垂心的概念

在 81 种教科书中，只有 17 种教科书给出了三角形垂心的定义，表 3 给出了三角形垂心定义的分类。定义 2 相比定义 1 只是对于三角形的高线有着更加完整的表述，实际上这 17 种教科书均将三角形三条高线的交点定义为三角形的垂心。

表 3 三角形垂心定义的分类

类别	描述	教科书	数量
定义 1	三角形的高的交点（并发点）叫做三角形的垂心。 [4]	Newell & Harper (1918)	11
定义 2	从三角形顶点到对边的垂线相交于一点，该点叫做三角形的垂心。[6]	Beman & Smith (1900)	6

图 9 给出了三角形垂心定义的时间分布情况。可以看出，三角形垂心（orthocenter）的定义会随着时代的发展，随着教科书的不断完善而完善。越来越多教科书不仅会给出垂心的定义，与此同时，还会定义中省去对三角形高线的解释，一方面使得定义的表述更加简洁，另一方面，定义 1 在表述上也是精准和严谨的。我们认为，数学中的概念、性质、法则、定理都应该严谨而简明，给学生一种简洁美，便于学生的记忆和理解。

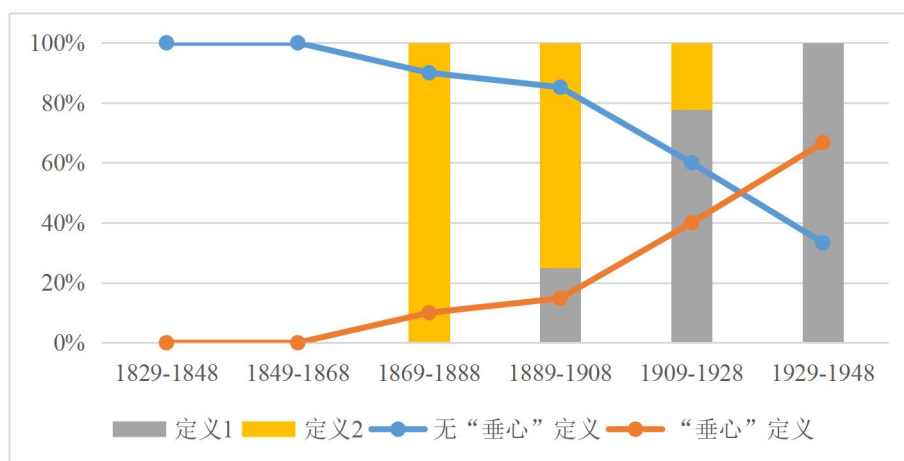


图 9 三角形垂心定义的时间分布

5.2 垂心的性质

三角形的三条高交于一点，这一点即为垂心，这是教科书中最常见的一条定理，而在证明方法上，50 种教科书均在原三角形的基础上构造了一个新的三角形，再利用三角形外心的性质完成证明。其中有 37 种教科书用到了平行四边形的性质，有 2 种教科书利用全等三角形，还有 11 种教科书只给出构造方法而没有证明过程。

AD 、 BE 、 CF 分别是 $\triangle ABC$ 的三条高，过点 A 、 B 、 C 分别作 $IH \parallel BC$ 、 $IG \parallel AC$ 、 $GH \parallel AB$ (图 10)，易知四边形 $IACB$ 、 $AHCB$ 、 $ACGB$ 是平行四边形，所以 $IA=BC=AH$ ，即点 A 是 IH 的中点，同理，点 B 是 IG 的中点，点 C 是 GH 的中点。因此， AD 、 BE 、 CF 分别是 $\triangle GHI$ 三边的垂直平分线，因此这三条直线交于一点 O 。^[8]当然也可以通过证明 $\triangle GHI$ 中的四个小三角形两两全等，从而得到点 A 、 B 、 C 分别是 IH 、 IG 、 GH 的中点，进而完成证明^[14]。

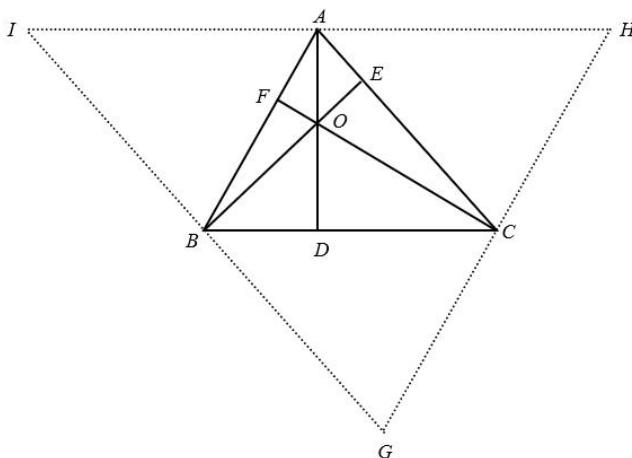


图 10 三角形三条高交于垂心

三角形垂心的位置也会随三角形形状的不同而不同^[13]。如图 11，在锐角三角形中，垂心 O 在三角形内；在直角三角形中，垂心 O 与三角形直角的顶点重合；在钝角三角形中，垂心 O 在三角形外。

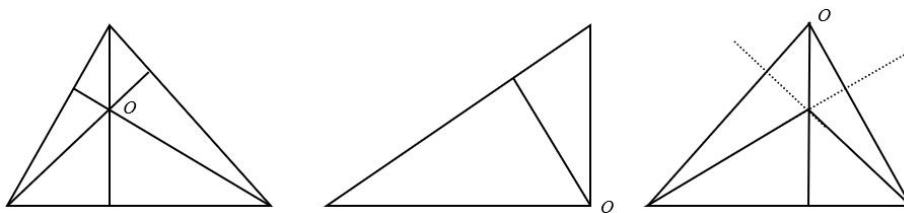


图 11 三角形垂心的位置

6 三角形的“重心”

6.1 重心的概念

有 24 种教科书将三角形重心的定义分为交点定义、位置定义和交点&位置定义三类，表 4 给出了三角形重心定义的分类。用三角形中线的交点来定义重心是大部分教科书所采用的方式，与此同时，还有教科书会在定义的表述中加入重心在中线上的位置。

表 4 三角形重心定义的分类

类别	描述	教科书	数量
交点定义	三角形三条中线的交点（并发点）叫做三角形的重心（质心）。 ^[4]	Newell & Harper (1918)	15
	三条从三角形顶点到顶点所对边的中点的直线交于一点，此点叫做三角形的重心（质心）。 ^[15]	Bradbury (1877)	1
位置定义	从三角形任何一个顶点画一条中线，从顶点到这条直线的 $\frac{2}{3}$ 处可以找到三角形的重心（质心）。 ^[16]	Perkins (1850)	1
交点&位置定义	三角形的中线相交（并发）于一点，此点叫做重心（质心），该点位于从三角形顶点开始的每一条的中线的 $\frac{2}{3}$ 处。 ^[17]	Betz & Webb (1916)	6
	三角形的中线在三等分点相交，此交点叫做三角形的重心（质心）。 ^[5]	Failor (1906)	1
	三角形的中线是相交（并发）的，交点（并发点）在每条中线上的位置，即质心。 ^[7]	Willis (1922)	1

图 12 给出了三角形重心和质心一词的时间分布情况。重心与质心是物理学中两个重要概念，它们有着不同的内涵与外延，是两个截然不同的力学概念，但在数学上所说的质心就是重心。由图 12 可知，20 世纪以前的教科书往往只有质心（centroid）或重心（center of gravity），而从 20 世纪上半叶以来，这两个名词往往同时出现在教科书中，教科书编写者会先给出质心后给出重心，这也源于历史上许多数学家本身也是物理学家，物理上质心的概念本身会比重心的概念更具有普遍的意义，因此先将其命名为质心也是名副其实。

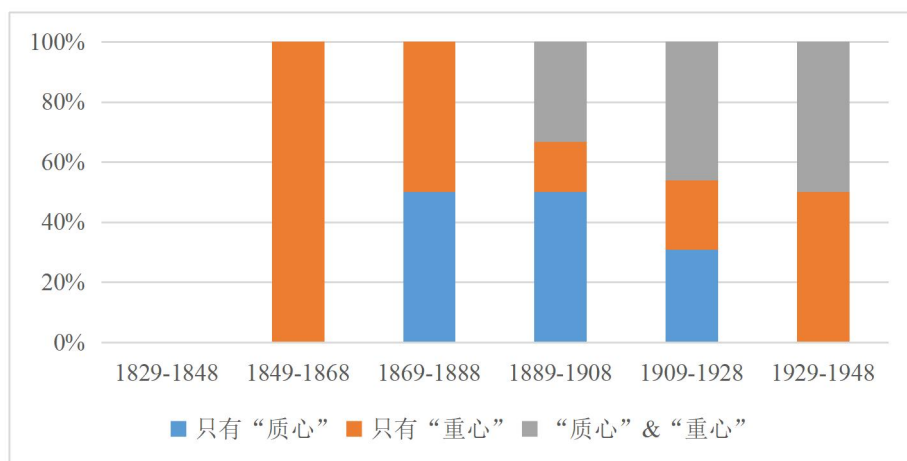


图 12 三角形重心和质心一词的时间分布

图 13 给出了三角形重心定义的时间分布情况。从时间上看，早在 1850 年，重心这一名词就出现在教科书中，这也源于重心本身在生产生活中有更多的实用价值，到了 1909 年以后，超过 50% 的教科书会给出重心的定义。由柱状图可以看出，超过五成的教科书依然会采用交点定义，同时，交点&位置定义在表述上更加完整，其蕴含了重心的一个重要性质，因此在 1889-1928 年这一个时间段中也有四成左右的教科书会使用。

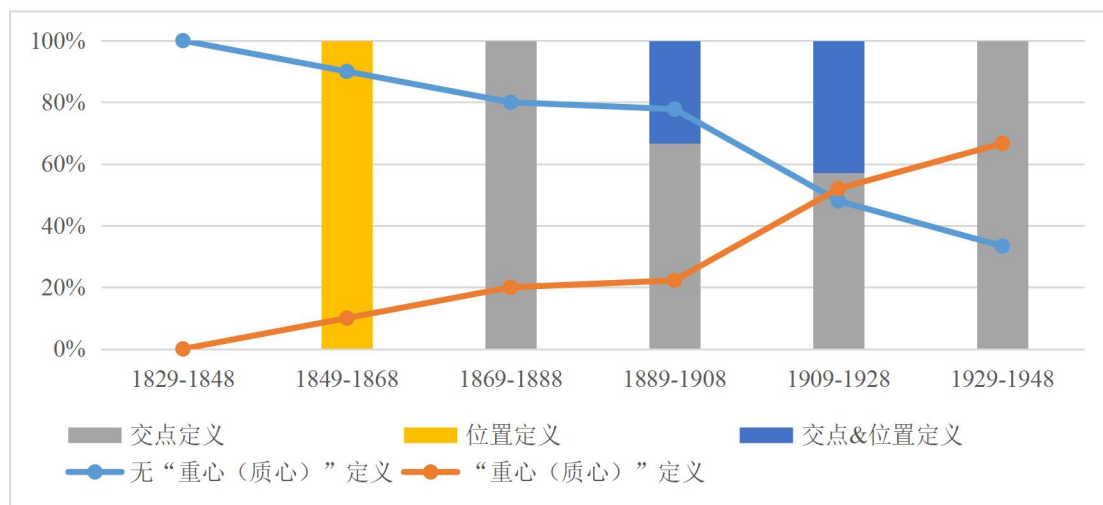


图 13 三角形重心定义的时间分布

6.2 重心的性质

6.2.1 关于距离

在 81 种教科书中，有 53 种教科书给出了重心在距离上的性质，即重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 2:1。其证明方法可以分为比例线段法、平行四边形法和全等法三类。

(1) 比例线段法

Perkins 通过连结三角形三边上的中点得到中位线，随后利用比例线段的性质完成证明^[16]。

有 3 种教科书采用了这一方法。在图 14(a)中，因为 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $EF \parallel BC$ 且

$$EF = \frac{1}{2}BC, \text{ 于是 } \frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}.$$

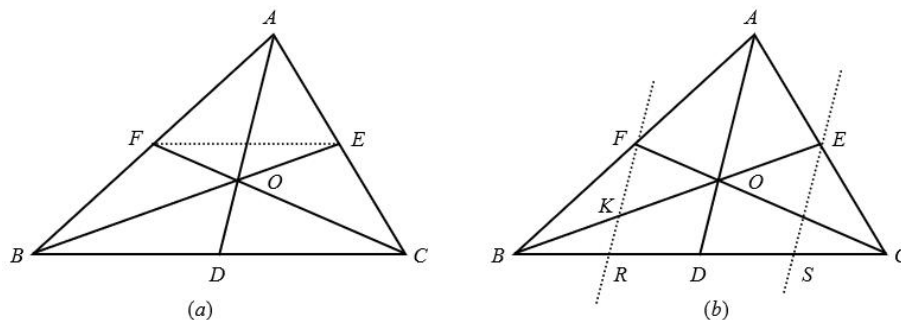


图 14 平行线法证明三角形重心在距离上的性质

Newell & Harper 则是过三角形边上的两个中点作第三条中线的平行线，再利用比例线段完成证明^[4]。在图 14(b)中，作 $FR \parallel AD$ ，分别交 BE 、 BC 于点 K 、 R ，作 $ES \parallel AD$ ，交 BC 于点 S 。因为 F 是 AB 的中点且 $FR \parallel AD$ ，所以 R 是 BD 的中点，同理 S 是 DC 的中点，由 $BD=DC$ ，故 $BR=RD=DS=SC$ ，于是在 $\triangle BES$ 中，有 $\frac{OE}{BO} = \frac{DS}{BD} = \frac{1}{2}$ 。

(2) 平行四边形法

平行四边形法是教科书编写者所采用的主流证明方法，有 37 种教科书以三角形中线为对角线构造平行四边形，而有 9 种教科书以三角形中线为邻边构造平行四边形。

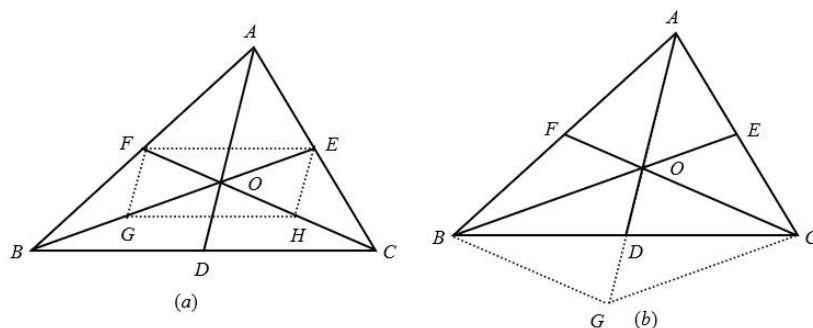


图 15 平行四边形法证明三角形重心在距离上的性质

在图 15(a)中, 取 OB 、 OC 的中点 G 、 H , 连结 FG 、 GH 、 HE 、 EF , 因为 FE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 故 FE 平行且等于 BC 的一半, GH 是 $\triangle OBC$ 的中位线, 故 GH 平行且等于 BC 的一半, 于是 $FE \parallel GH$ 且 $FE=GH$ 。由四边形 $FGHE$ 是平行四边形, 故 $OG=OE$, 于是 $BG=OG=OE$, 即 $\frac{OE}{OB} = \frac{1}{2}$ 。[10]

Beman & Smith 延长 AD 至点 G , 使得 $OD=DG$, 连结 GB 、 GC (图 15(b))。因为 OG 、 BC 相互平分, 所以四边形 $OBGC$ 是平行四边形, 于是 $FC \parallel BG$, 又因为点 F 是 AB 的中点, 所以点 O 是 AG 的中点, 则 $AO=OG$, 由 $OD=DG=\frac{1}{2}OG$, 得到 $\frac{OD}{OA} = \frac{1}{2}$ 。[6]

(3) 全等法

只有 4 种教科书采用全等法。Schultze 取 OB 、 OC 的中点 G 、 H , 连结 FE 、 GH (图 16)。易知 $FE \parallel GH$ 且 $FE=GH$, 因为 $\angle EFH = \angle FGH$ 、 $\angle FEG = \angle EGH$, 所以 $\triangle OEF \cong \triangle OGH$, 则 $OE=OG$ 、 $OF=OH$, 又因为 $OG=GB$ 、 $OH=HC$, 所以 $\frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OC} = \frac{1}{2}$ 。[18]

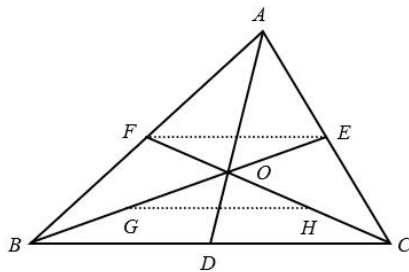


图 16 全等法证明三角形重心在距离上的性质

与此同时, 在 Schultze 所撰写的《平面与立体几何》(1908) 一书中还能看见多种构造方法 (图 17), 这些方法都可以用来证明重心在距离上的性质, 这里不再赘述[18]。

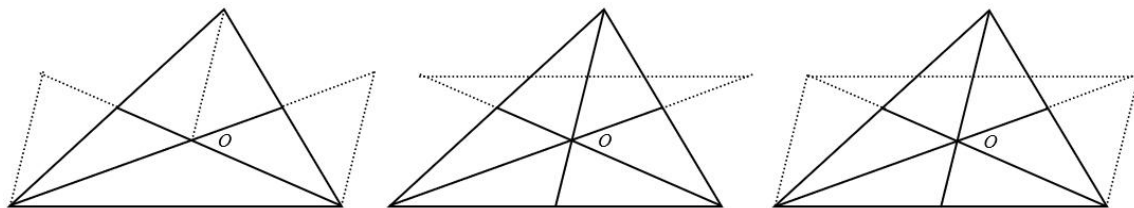


图 17 证明三角形重心在距离上的性质

6.2.2 关于位置

Failor 提出了关于三角形重心在位置上的两大性质^[5]。在图 18 中，点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，连结 $\triangle ABC$ 三边上的中点，于是可以得到 $\triangle DEF$ ，此时点 O 也是 $\triangle DEF$ 的重心，以此类推，我们还可以取 $\triangle DEF$ 三边上的中点连结得到 $\triangle HIJ$ ，点 O 又是 $\triangle HIJ$ 的重心。利用中位线定理很容易证明 $\triangle ABC$ 的三条中线也是 $\triangle DEF$ 与 $\triangle HIJ$ 三边上的中线，因此点 O 同时是这三个三角形的重心。

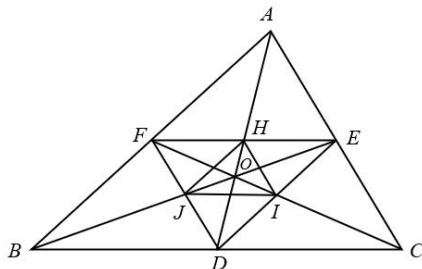


图 18 证明三角形重心在位置上的性质

与此同时，对于等边三角形，其内角平分线、三边垂直平分线、高线以及中线都是重合的，因此等边三角形的“四心”合一。这一性质也出现在了 6 种教科书的练习题中。

7 结论与启示

以上我们看到，虽然三角形四心的定义在美英早期几何教科书中出现的时间较晚，但是我们依然还是能够从有限的定义表述中看到不同。相反，关于三角形四心的性质及其相关的作图问题却早早出现，这些教科书为我们提供了证明这些性质的多种证明方法，上述内容均为今日三角形四心的定义及其性质的教学提供了诸多启示。

其一，通过问题情境，引发学生思考。古希腊人较重视尺规作图，在数学中训练人的逻辑

思维能力，发展智力。因此在引入三角形四心的定义时，教师可以先利用《几何原本》中的经典作图问题，即作三角形的内切圆和外接圆，并引导学生回忆在什么直线上的点到一个角的两边或到线段两端的距离相等，于是很自然地给出三角形内心和外心的定义，同时，学生也会发现内心和外心分别是三角形内切圆和外接圆的圆心，这也让内心和外心这两个名词易于学生的理解。在此基础上，教师进一步向学生提问：三角形的三条高和重心是否交于一点，交点又叫什么，于是可以引出三角形垂心和重心的定义。在重心的理解上，教师可以运用生活上触手可得实物辅助学生理解抽象的数学定义，例如让学生在三角形纸片上找到重心的位置，并将笔尖垂直放在这一点上，此时三角形保持平衡，这一过程有助于构建知识之谐。

其二，组织小组探究，培养学生兴趣。三角形四心的定义有着多种表述方式，四心也有着诸多不同的性质，若在课堂中以绝对的教师主导去讲授这些概念、定理，这将使数学课堂变得索然无味。因此，在概念、定理教学中，当学生对数学概念有了初步的理解之后，可以让学生尝试对数学概念下定义并探究其中所蕴含的性质。通过小组合作学习，学生由被动变为主动，更能突出学生的主体地位，培养主动参与的意识，激发学生的创造潜能，与此同时，在讨论的过程中学生获得了满足感，提高了学习数学的兴趣，有助于营造探究之乐。

其三，挖掘数学思想，提升学生素养。无论是三角形四心性质的各种证明方法，还是四心与其它知识的结合，其背后都蕴含着精彩的思想方法。例如，运用内切圆，从三角形面积公式到正多边形面积公式，体现类比思想；运用平面向量，将三角形四心的几何问题转化为代数计算，体现数形结合思想；运用辅助线，实现几何证明化繁为简，体现化归思想。数学知识、数学思想、数学方法是一个有机整体，数学思想既是数学的灵魂，又是数学方法的理论基础。因此，教师应该把数学方法、数学思想的培养贯穿于日常教学的始终，这对于培养学生的数学学科核心素养起到了至关重要的作用，也有助于彰显方法之美、实现能力之助。

其四，展示文化差异，造就理性精神。借助微视频，可以呈现不同时空的数学家对三角形四心的定义以及对四心性质的不同证明的研究，反映了数学文化的多元性，因而展示了文化之魅。与此同时，数学家们对于数学真理的不断追求与探索，有助于激发学生学习数学的热情，培养学生动态的数学观，让学生收获别样的自信心和成就感，最终达成德育之效。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 66-67.
- [2] 汪晓勤, 栗小妮. 数学史与初中数学教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2019: 21, 25.
- [3] 欧几里得. 几何原本[M]. 兰纪正, 朱恩宽, 译. 南京: 译林出版社, 2014: 97-99.
- [4] Newell, M. J. & Harper, G. A. *Plane and Solid Geometry*[M]. Chicago: Row, Peterson & Company, 1918: 70-125.
- [5] Faylor, I. N. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: The Century Company, 1906: 65-66.
- [6] Beman, W. W. & Smith, D. E. *New Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1900: 84-89, 214.
- [7] Willis, C. A. *Plane geometry*[M]. Philadelphia: B. Blakiston's Son & Co, 1922: 58-59.
- [8] Bowser, E. A. *The Elements of Plane and Solid Geometry*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1890: 60-63.
- [9] Strader, W. W. & Rhoads, L. D. *Plane geometry*[M]. Philadelphia: The John C. Winston company, 1927: 106-111.
- [10] Schuyler, A. *Elements of Geometry*[M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Company, 1876: 74-76.
- [11] Legendre, A. M. *Elements of Geometry and Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1862: 89-101.
- [12] Olney, E. *Elementary geometry: including plane, solid and spherical geometry: with practical exercises*[M]. New York: Sheldon and Company, 1886: 77-126.
- [13] Perkins, G. R. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: D. Appleton & Company, 1855: 37-94.
- [14] Stewart, S. T. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1891: 92-99.
- [15] Bradbury, W. F. *An elementary geometry*[M]. Boston: Thompson, Brown, 1877: 23-119.
- [16] Perkins, G. R. *Elements of Geometry*[M]. New York: D. Appleton & Company, 1850: 79-120.

- [17] Betz, W. & Webb, H. E. *Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1916: 136-156.
- [18] Schultze, A. *Plane and Solid Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1908: 59-66.

教学实践

信息技术支持下中华优秀传统文化融入高中数学教学的案例研究

——以球体积公式为例

刘梦哲¹, 孔雯晴¹, 舒适^{1,2}

(1. 华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2. 市北中学, 上海 200070)

1 引言

在“互联网+”的时代背景下, 信息技术已经渗透到各行各业, 教育也不例外。《中国教育现代化 2035》指出, 发展中国特色世界先进水平优质教育, 需科学规划中小学课程, 充分利用现代信息技术, 丰富并创新课程形式^[1]。就数学学科而言, 同样重视课程中信息技术的运用。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(以下简称《课标》)指出, 应注重信息技术与数学课程的深度融合, 提高教学的实效性^[2]。

中华优秀传统文化作为中华文明的重要组成部分, 其蕴含着丰富且深刻的文化底蕴和内涵。近年来, 中华优秀传统文化不仅走入了数学课堂, 以其为背景的试题也逐渐成为数学考试命题的新亮点、新趋势^[3]。为此, 已有教师将刘徽、祖暅等中国古代数学家对球体积的研究成果融入球体积公式的教学^[4-5], 但静态的教学方式不免使学生认为该方法的术语过多、不易掌握^[6]。若将信息技术与融入中华优秀传统文化的教学深度融合, 必将推动数学课堂大放异彩。

鉴于此, 本研究以球体积公式为例, 通过设计并实施一节信息技术支持下中华优秀传统文化融入球体积公式的教学, 对其中信息技术的价值进行初步探讨, 以期对融入中华优秀传统文化的高中数学教学提供参考。

2 教学设计与实施

2.1 教学目标

本节课拟定的教学目标如下。

(1) 掌握球体积公式，能够初步运用球体积公式解决实际问题；理解祖暅原理，能够在推导球体积公式的过程中利用祖暅原理。

(2) 经历球体积公式探究和论证的过程，掌握其中所蕴含的类比、转化等数学思想。

(3) 体会数学的理性精神，感受数学方法之美，并领略中国在数学发展史上做出的杰出贡献，增强民族自信。

2.2 教学过程

一、新知引入

课程伊始，教师首先播放微视频 1，介绍《九章算术》和刘徽对球体积的相关贡献。

汉代《九章算术》“少广章”开立圆术给出了错误的球体积公式，但其推导方法不得而知^[7]。此后，刘徽推测出前人计算球体积的方法：由 $V_{\text{圆柱}}:V_{\text{正方体}}=3:4, V_{\text{球}}:V_{\text{圆柱}}=3:4$ ，从而 $V_{\text{球}}:V_{\text{正方体}}=9:16$ ，并分析其中错误的两大原因，一者是将圆周率视为 3，二者是将球与外切圆柱体在同高处的截面面积之比视为 $\pi:4$ ，为解决这两种偏差，刘徽发明了牟合方盖^[8-9]。

教师从《九章算术》中错误的球体积公式出发，分析刘徽给出的导致公式错误的两种偏差。

师：为此，刘徽希望构造一个几何体，使得球与该几何体在同高处截面面积之比恒为 $\pi:4$ ，于是，他发明了牟合方盖，他用两个相等的圆柱正交，其公共部分称作牟合方盖。

师：如图 1，请大家思考，在任意等高处，是否满足球与外切牟合方盖的截面面积之比恒为 $\pi:4$ ？

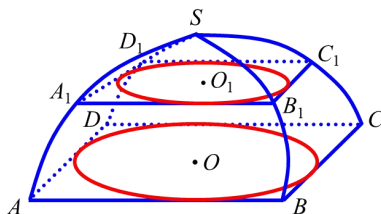


图 1 球与外切牟合方盖在同高处的截面面积

如图 1，设球的半径为 r 、截面高度为 h ，因为球与外切牟合方盖在同高处的截面均为圆和

正方形，故 $\frac{S_{\odot O_1}}{S_{\odot O}} = \frac{(r-h)^2}{r^2} = \frac{S_{\square A_1 B_1 C_1 D_1}}{S_{\square ABCD}}$ ，则 $\frac{S_{\odot O_1}}{S_{\square A_1 B_1 C_1 D_1}} = \frac{S_{\odot O}}{S_{\square ABCD}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$ 。

师：由球与外切牟合方盖在同高处截面面积之比恒为 $\pi:4$ ，能否得到 $V_{\text{球}}:V_{\text{牟合方盖}} = \pi:4$ ？

学生能够将该问题与先前学习的祖暅原理联系起来。

问题 1：如何帮助刘徽计算牟合方盖的体积？

师：由 $V_{\text{球}}:V_{\text{牟合方盖}} = \pi:4$ ，现在只要求出球的体积，就能得到牟合方盖的体积，我们应该如何计算球的体积呢？

【设计意图】以《九章算术》和刘徽对球体积的相关研究引入本节课的内容，为合盖法推导球体积公式做铺垫，同时，刘徽这种勇于质疑的精神，无疑感染着学生，有助于增强学生的理性精神，激发探究的兴趣。

二、公式推导

请学生回忆柱体和锥体的体积公式分别是什么？在推导柱体和锥体体积公式的过程中用了什么方法？祖暅原理是什么？

师：为什么得到三棱锥的体积，就能得到所有锥体的体积？

$$\text{生：} \frac{S_{\text{截}}}{S_{\text{底}}} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2。$$

师：对于两个同高的柱体或锥体，无论其底面是 n 边形还是圆形，只要底面面积相等，那么它们在同高处的截面面积也相等，再由祖暅原理，则它们的体积对应相等。

【设计意图】复习柱体、锥体的体积公式和祖暅原理，为利用公理法推导球体积公式做铺垫，同时，通过回顾“等底等高等体积”的知识，暗示学生在构造辅助几何体的过程中想到 n

棱柱（锥）和圆柱（锥）。

问题 2：如何利用祖暅原理计算球的体积？

此时，有学生提出质疑，历史上数学家创造牟合方盖是为了计算球的体积，这与教师所述“用球体积去计算牟合方盖的体积”相反，对此，教师表示会在稍后解答学生的困惑。

小组讨论：如何利用祖暅原理计算球的体积。（在此过程中，教师提示学生构造与球在任意等高处具有相同截面面积的辅助几何体。）

师：如图 2 左，对于半径为 R 的半球，我们先用平行于底面、高为 h 的平面截半球，但为什么是求半个球的体积呢？

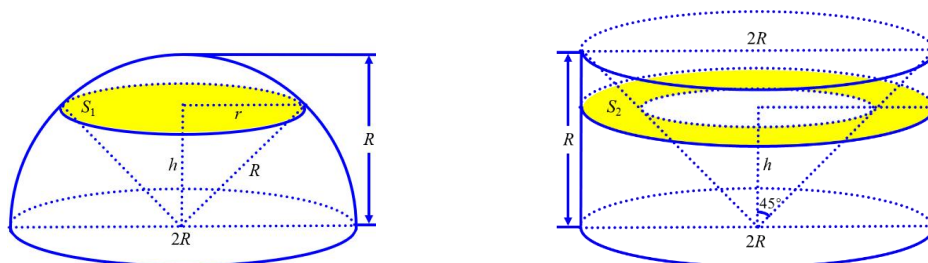


图 2 公理法推导球体积公式

小组 1：比较方便。

师：我们知道，球是关于球心对称的几何体，因此想到计算半球的体积具有合理性。

小组 1：我们首先算出半球的截面面积是 πr^2 ，因此我们构造出了辅助几何体。

但是，小组 1 的学生不能对如何想到构造辅助几何体的过程进行解释，于是，教师邀请小组 2 的学生继续分享。

小组 2：如果要计算球的体积，我们首先想到利用祖暅原理，所以要去寻找一个易于计算其体积、且与半球等高的几何体，再由截面面积为 $S_1 = \pi(R^2 - h^2)$ ，我们想到了一个圆环，由此创造出圆柱减圆锥的辅助几何体。

如图 2 右，师生共同证明该辅助几何体在高为 h 处的截面面积为 $S_2 = \pi R^2 - \pi h^2$ ，而圆柱的体积减去圆锥的体积为 $\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$ ，由此得到球体积公式 $V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ 。

师：我们还可以从极限的角度来思考问题，当截面高度为 R 时，半球的截面面积为 0，此时想到圆柱的底面积减去与之有相等底面积的几何体，当截面高度为 0 时，半球的截面面积为

πR^2 ，说明应该是 $\pi R^2 - 0$ ，所以会想到一个倒置的圆锥。

教师运用 GeoGebra 让学生感受在任意等高处半球的截面面积与辅助几何体的截面面积相等（图 3）。

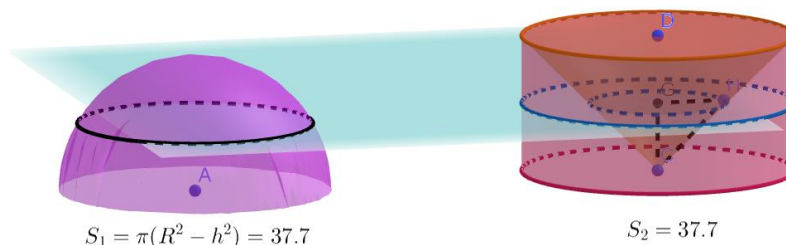


图 3 运用 GeoGebra 展示半球与辅助几何体

【设计意图】学生运用公理法探究球体积公式，一方面，在教师的引导下，学生能够想出圆柱减圆锥的辅助几何体，还有可能构造出棱柱减棱锥等更多几何体，培养学生的直观想象素养与发散思维，同时，也为接下来利用祖暅原理推导牟合方盖的体积做铺垫。

三、巩固应用

例：《九章算术》少广章中给出如下问题。

第 23 题：“今有积四千五百尺。问为立圆径几何？”

第 24 题：“又有积一万六千四百四十八亿六千六百四十三万七千五百尺。问为立圆径几何？”

【设计意图】以《九章算术》中的问题为例题，一方面让学生初步运用球体积公式解决问题，同时渗透中华优秀传统文化。

四、殊途同归

师：实际上，刘徽是为了推导球的体积公式，而创造了牟合方盖，其实刚刚有同学说的是正确的，但本节课我们将其倒置，帮了刘徽一把忙。

师：假如我们就是当年的刘徽，那么又该如何利用祖暅原理，计算牟合方盖的体积？

师：刘徽当年正是因为未能求得牟合方盖的体积，而与球体积公式失之交臂。此后，祖暅利用祖暅原理和刘徽的牟合方盖，得出了球体积公式。现在，让我们再次利用祖暅原理计算牟合方盖的体积。

如图 4，给定八分之一牟合方盖 D_1-ABCD ，令圆柱的半径为 r ，即 $DA=DQ=DS=r$ ，截面高度 $DP=h$ ，其截面为正方形，且截面面积等于 r^2-h^2 。于是，让学生构造在任意等高处截面面积等于 r^2-h^2 的辅助几何体。

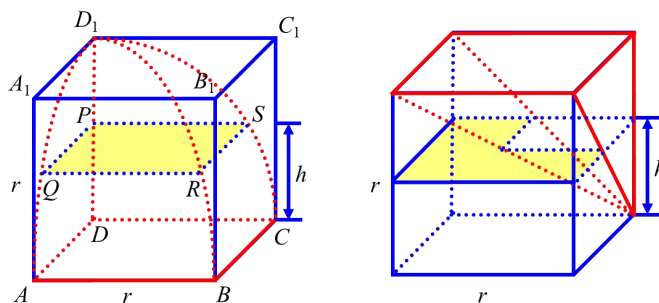


图 4 合盖法推导球体积公式

由截面面积等于 r^2-h^2 ，半数学生能够想到这是两个正方形面积之差，并构造出棱柱减棱锥的辅助几何体。图 5 给出了部分学生的作品。



图 5 学生构造与八分之一牟合方盖具有相同截面面积的辅助几何体

教师运用网络画板让学生感受在任意等高处八分之一牟合方盖的截面面积与辅助几何体的截面面积相等（图 6）。

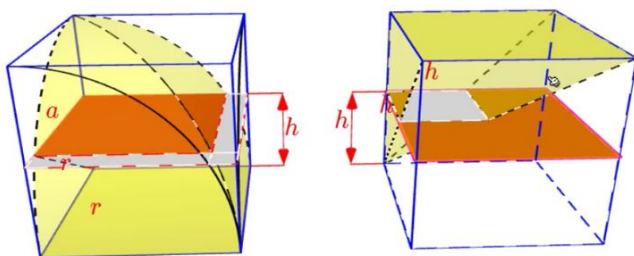


图 6 运用网络画板展示八分之一牟合方盖与辅助几何体

师：今天，如果我们对公式 $\frac{S_{\text{截}}}{S_{\text{底}}} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2$ 有很好的理解，就能突破我们原有的认知。如图 6，

对于辅助几何体中棱锥的顶点，实际上可以在棱柱底面的任意位置。

由此，八分之一牟合方盖的体积可以转化为棱柱的体积减去棱锥的体积，得到

$$\frac{1}{8}V_{\text{牟合方盖}} = r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3, \text{ 则球体积为 } V_{\text{球}} = \frac{\pi}{4}V_{\text{牟合方盖}} = \frac{4}{3}\pi r^3。$$

【设计意图】本节课选择公理法和合盖法推导球体积公式，这两种方法都用到了祖暅原理，方法间具有较好的承接性。同时，运用信息技术，教师可以将牟合方盖这一抽象的几何体呈现于课堂，学生可以更加直观地观察不同几何体的截面，为教师突破教学重难点，为学生构造辅助几何体提供契机。此外，运用上述史料还有助于渗透中华优秀传统文化。

接着，教师播放**微视频 2**，介绍祖冲之父子对球体积的研究。

《缀术》是祖冲之、祖暅父子在数学方面的辉煌成就，该书虽已失传，但幸有李淳风等征引，才使得其对球体积的研究流传至今，其中，祖冲之父子基于刘徽给出的牟合方盖，并运用祖暅原理推导出球体积，今天，学生运用了和数学家一样的方法。此外，《缀术》中很可能提出了“幂势既同，则积不容异”的原则，而在一千一百余年后，意大利数学家卡瓦利里才提出了与祖暅原理相仿的原理。^[9]

五、课堂小结

师：本节课大家有什么收获？

生：本节课我们学习了两种推导球体积的方法，第一种是站在现代的角度，我们在已经掌握相关方法的情况下，先用圆柱和圆锥来求球的体积，帮助刘徽完成未继的工作，进一步，我们用相似的方法，以刘徽的视角，用合盖法求得了牟合方盖的体积。两种方法实际上一种是从前往后，一种是从后往前，体现了时间的统一性和数学思想的一致性。

【设计意图】在教师的引导下，学生从数学知识、思想方法和情感态度三个层面总结本节课的收获，充分挖掘本节课的教育价值。

3 案例评析

3.1 促进知识理解

理解无疑是学生数学学习的中心环节，我们可以从横向（教学目标）和纵向（理解水平）两个维度分析学生对知识的掌握情况。

从横向看，课后，教师让学生直接写出球体积公式，97.1%的学生给出了正确的公式。然后，教师布置了两道应用球体积公式的问题，73.5%的学生能够简单运用公式正确计算出直径为 2 的球的体积，94.1%的学生能够正确计算出球与外切圆柱体的体积之比，而其余学生因公式记忆或题目理解错误而给出了错误的解答。最后，教师让学生再次叙述推导球体积公式的过程，42.9%的学生能够运用文字语言、符号语言或图形语言给出公理法，14.3%的学生仅表示在推导过程中会用到祖暅原理，其余学生多没有给出回答。由此可见，大多学生能够掌握球体积公式，并初步运用球体积公式解决实际问题；半数学生能够借助类比、转化等数学思想，并利用祖暅原理推导球体积公式，本节课无疑达成了教学目标（1）（2）。

从纵向看，英国数学教育家斯根普（R. Skemp）提出工具性理解和关系性理解两种模式^[10]，英国学者皮瑞（Pirie）和加拿大学者基伦（Kieren）提出“超回归”数学理解模型^[11]，基于此，任伟芳等提出数学理解的三个层次，即工具性理解、关系性理解和创新性理解^[12]。由课后问卷可知，大多学生能够记住球体积公式，则属于工具性理解。于是，教师运用网络画板，一者动态展示刘徽对牟合方盖的描述，促使学生对牟合方盖有了清晰的认识，二者动态展示、分析八分之一牟合方盖与辅助几何体在同高处的截面面积相等，由此，师生共同构造出辅助几何体，并计算出牟合方盖的体积，从而达到关系性理解。当然，学生还可以运用 GeoGebra、网络画板等动态几何软件（Dynamic Geometry Software, 简称 DGS）构造出 n 棱柱（锥）、圆柱（锥）等更多辅助几何体，这一过程为学生的创新性理解创造了条件。

可见，本节课促使每一位学生都能学有所获，掌握并理解不同层次的数学（史）知识和思想方法。

3.2 培养核心素养

《课标》指出，学科核心素养是育人价值的集中体现，是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观、必备品格和关键能力^[2]。数学学科核心素养包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析。已有研究表明，信息技术在培养和提高学生的数学核心素养上可以发挥独特的优势和价值^[13]。

本节课学生首先运用网络画板直观观察牟合方盖的空间形象和内部结构，以“形”辅“数”，从而计算出八分之一牟合方盖的截面面积。然后，学生继续思考“截面面积可以转化成什么几何体”，这是将“数”转化为“形”的关键。最后，学生再次运用网络画板，将原本不熟悉的几何体转化为熟悉的几何体，构造出四棱柱减四棱锥的辅助几何体，并计算出球体积。

据此，运用 DGS 中的绘图功能，一者让思维可视化，帮助学生解决认识图形、作图上的困难，促使学生对中华优秀传统文化中的几何图形有更直观的认识和理解，同时，依据几何图形中的数量关系对问题进行转化，进一步提高学生的直观想象素养。二者让思维条理化，学生可以在作图的过程中不断思考，例如，“给定几何体与新构造的辅助几何体在同高处的截面面积是否相等”“除了圆柱减圆锥，能否构造出其它辅助几何体”等，以如此类比推理的方式思考问题，也在无形中培养了学生的逻辑推理素养。

可见，本节课促进了学生直观想象和逻辑推理素养的提升。当然，运用信息技术还有助于发展学生多方面的素养，这一点有待教师继续挖掘。

3.3 支持数学探究

数学活动教学是新一轮数学课程改革的核心理念。在教学过程中，教师应重视让学生经历数学探究的过程，或让学生观察实验，或让学生动手操作，或让学生自己探究等^[14]，总之，有必要让学习者经历感受、体验和思考的过程。

事实上，在推导球体积公式的两种方法中，学生可以构造的辅助几何体还有很多。以公理法为例，对于截面面积 πR^2 和 πh^2 ，我们最先联想到其是圆的面积，但其还可以看做是 n 边形的面积。于是，学生可以运用 GeoGebra 绘制正四棱柱减正四棱锥、正六棱柱减正六棱锥等辅助几何体（图 7），并运用 GeoGebra 中计算“面积”的工具，验证所构造的辅助几何体的正确

性。

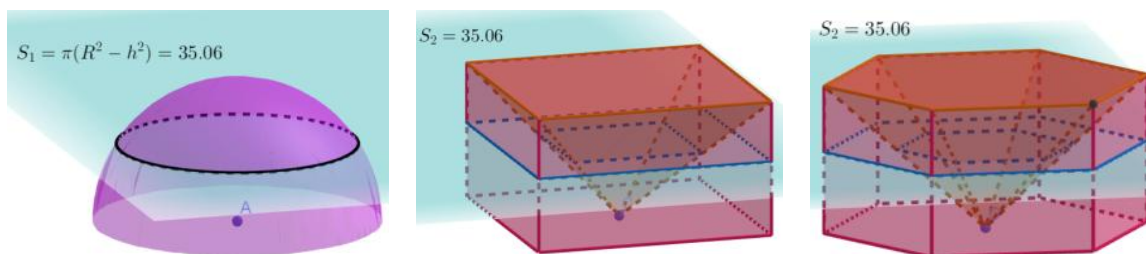


图 7 运用 GeoGebra 绘制更多辅助几何体

当然，从棱（圆）柱中挖去的几何体并不一定是正棱（圆）锥。在课堂中，教师提及“棱锥的顶点可以在棱柱底面的任意位置”，于是，学生可以运用 GeoGebra 继续探究 n 棱柱减去斜 n 棱锥的辅助几何体。

可见，在信息技术的支持下，学生可以根据要求绘制出不同的几何体，并运用软件中自带的计算“面积”“体积”等工具，探究几何体中的数量关系，为进一步通过逻辑推理的方式验证结论奠定基础，这无疑给予了学生充分探究、创新中国古代数学家的方法的机会。

3.4 开阔学生视野

近年来，在 HPM 视角下的数学教学中，越来越多的教师会制作微视频来重现历史、介绍思想、展示方法或解答题目^[15]。研究发现，将数学史制作成 HPM 微视频或微课，可以开阔学生的视野，使学生对数学文化有一定的了解，并培养学生的意志力和勇于探索的精神^[16]。

在融入中华优秀传统文化的教学中，教师同样制作了 HPM 微视频集中展示中国古代数学家的相关研究成果，以开阔学生的视野。例如，教师借助微视频介绍《九章算术》、刘徽以及祖冲之父子对球体积的相关贡献，时间跨越了从汉代到南北朝时期的百余年，反映了数学文化的多元性，有助于展示文化之魅，让学生对本课题的内容有更多的了解。课后，有学生对课上的数学史元素印象深刻，认为其可以拓宽视野、加深理解，有学生对牟合方盖印象深刻，认为其蕴含着古人的智慧。可见，信息技术为开阔学生的视野、启发学生的思考提供有力支持。

3.5 落实学科德育

“才者，德之资也；德者，才之帅也。”习近平总书记指出，人才培养是育人和育才相统一的过程，而育人是本。立德树人不仅是新时代教育的根本任务，更是数学教育研究的重要课

题。实践表明，在数学教学中，数学史在形成理性思维、激发积极情感、树立正确信念、培养优秀品质等方面都起着独特的作用^[17]。

首先，基于中国古代数学家构造辅助几何体的思想与方法，并借助 DGS 中计算“面积”的工具辅助验证截面面积，学生可以构造出若干不同的几何体，这种对知识不懈追求和探索的精神，无疑能提升学生的创新意识与能力，体会数学的理性精神。其次，运用 DGS 中计算“体积”的工具，学生容易发现《九章算术》中给出了错误的球体积公式，由此学生可以体会到，即使是数学史上屈指可数的传世名作也可能存在错误，而后续数学家对这一主题的不断探索，则有助于培养学生动态的数学观。再次，借助 HPM 微视频使学生置身于刘徽的视角，让学生帮助其计算球的体积，有助于激发学生学习数学的自信心，而在微视频中提及“卡瓦利里在一千一百余年后才提出与祖暅原理相仿的原理”，又有助于增强学生的文化自信。最后，教师可以让学生小组共同操作 DGS 探究辅助几何体，这一过程有助于培养学生交流、倾听、合作的意识与能力。可见，信息技术也为学生的理性、信念、情感和品质的培养添砖加瓦。

4 结论与启示

综上所述，在融入中华优秀传统文化的球体积公式的教学中，信息技术发挥了促进知识理解、培养核心素养、支持数学探究、开阔学生视野、落实学科德育的价值，其对应于数学史的六大教育价值（图 8）。据此，我们得到以下启示。

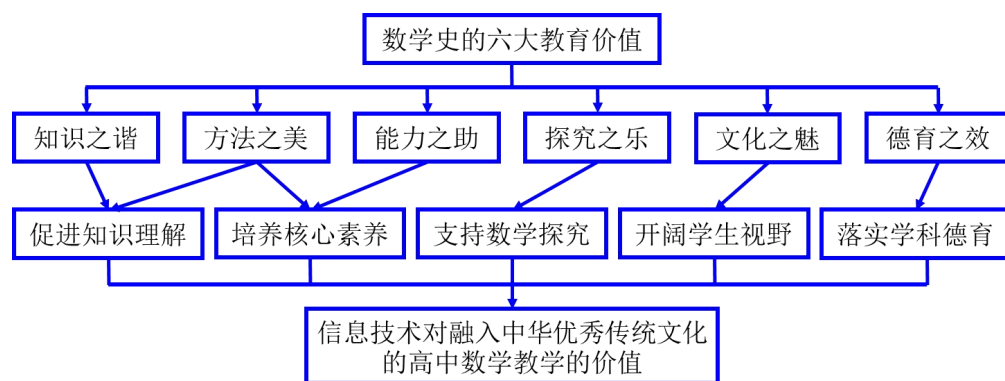


图 8 信息技术与数学史的价值对应关系

其一，重视学生体验，促进认知发展。教学中运用信息技术有两种方式，一是演示式，二是交互式，而这两种方式并没有孰优孰劣之分。对于中华优秀传统文化中一些晦涩难懂的图形，

教师可以将其直接呈现给学生，以助力学生的认识和理解，但对于构造辅助几何体等需要学生经历思考过程的内容，学生的操作切不可被教师的演示直接代替，以促进数学思维的发展。总之，在融入中华优秀传统文化的高中数学教学中要树立“以生为本”的理念，借助信息技术让学生去理解、去经历、去体验，最终让学习真正发生。

其二，准确选择技术，发挥多元价值。一方面，信息技术具有多元性，教师需要根据所选取的中华优秀传统文化，选择适恰的教育技术，另一方面，信息技术的定位是教师教学的工具和载体，运用信息技术的最终目的是希望学生掌握知识、发展能力，因此，教师切不可在融入中华优秀传统文化的教学中“为了用信息技术而用信息技术”，同时，教师还应尽可能多的发挥信息技术在不同方面的价值。

其三，搭建共享平台，营造教学生态。中华优秀传统文化中存在一些“只可意会、不可言传”的内容，若仅靠口头讲解或板书，教师难以将其表达清楚，但在信息技术的支持下，中国古代数学家的思想方法将以全新的姿态展现在学生的眼前。然而，现实中有很多中小学教师的信息技术能力相对较弱，这正是阻碍其将中华优秀传统文化融入教学的原因之一。因此，我们可以尝试在有条件的地区或学校搭建资源共享的平台，互相交流、分享、优化已制作课件，帮助教师更加从容地在高中数学教学中融入中华优秀传统文化。

参考文献

- [1] 孙彬博, 郭衍, 曹一鸣. 信息技术与数学教学“深度融合”:理想与现实[J]. 教育研究与实验, 2019(5): 45-50.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 3-6.
- [3] 汪晓勤. 中华优秀传统文化融入高中数学教学的若干路径[J]. 教育研究与评论(中学教育教学版), 2022(9): 27-34.
- [4] 张乐瑛. HPM 视角下球体积公式推导的教学设计[J]. 中学数学, 2019(13): 7-9.
- [5] 沈志强. HPM 视角下“祖暅原理与球体的体积”教学[J]. 理科爱好者(教育教学), 2021(1): 43-45.
- [6] 任明骏. 关于球体积公式教学各异的调查与分析[J]. 数学教学, 2005(4): 9-11.

- [7] 张苍, 等. 九章算术[M]. 曾海龙, 译解. 江苏: 江苏人民出版社, 2011: 98-99.
- [8] 齐丹丹. HPM 视角下球体积公式的教学[D]. 上海: 华东师范大学, 2018.
- [9] 钱宝琮. 中国数学史[M]. 北京: 商务印书馆, 2019: 84-85, 105-106.
- [10] 马复. 试论数学理解的两种类型——从 R.斯根普的工作谈起[J]. 数学教育学报, 2001, 10(3): 50-53.
- [11] 李淑文, 张同君. “超回归”数学理解模型及其启示[J]. 数学教育学报, 2002, 11(1): 21-23.
- [12] 任伟芳, 等. “工具性理解”“关系性理解”和“创新性理解”[J]. 数学教育学报, 2014, 23(4): 69-73.
- [13] 刘运科. 利用 GeoGebra 培养高中学生数学核心素养的探索[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2022(5): 27-30.
- [14] 蔡道平. 立足教材开展数学探究的途径与思考[J]. 数学通报, 2015, 54(9): 14-17, 31.
- [15] 韩嘉业, 汪晓勤. 高中 HPM 课例中的微视频研究[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2020(11): 10-15.
- [16] 李琳. HPM 微课融入高中数学教学的研究[D]. 辽宁: 辽宁师范大学, 2021.
- [17] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. 数学通报, 2020, 59(3): 7-12, 19.

他山之石

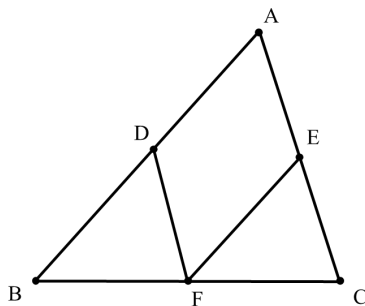
高中生在几何证明中的图形使用

刘倩雯

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

学生能够证明定理并将定理应用于几何题是高中几何的教学目标之一。在大多数几何证明中，图形承担着重要的角色，它不仅能够直观地呈现证明，还是命题推理与交流的有效工具。为进一步推进关于几何图形的研究，原文基于访谈法调查高中生在证明几何命题时如何分析并使用图形。具体而言，原文主要关注学生在证明几何命题时对与图形相关的数学符号（symbols）、视图（visuals）与手势（gestures）——手与手臂的移动（hand and arm movements）这三种可视化的符号资源（semiotic resources）的使用。

为了更具体地研究学生在证明几何命题时的图形的作用，原文引用 Herbst 等人于 2016 年发表的“高中数学教师对典型的附图类几何题的认识（High school mathematics teachers’ recognition of the diagrammatic register in proof problems）”一文中定义的“典型附图（diagrammatic register, DR）”概念，该概念指的是一种典型的附图的证明题模式，下文简称 DR。DR 证明任务需满足以下 5 个条件：证明问题附图；题目准确叙述已知条件与待证命题；题目通过叙述点的名称与图对应；证明中必要的点已标记在图中；图中呈现的共线、相交等自然的性质不在题目中赘述。图 1 满足上述 5 个条件，即为一个 DR 几何证明任务。



已知：在三角形ABC中，D，E，F分别为边AB，BC，CA的中点
证明：三角形BDF全等于三角形FEC（ $\triangle BDF \cong \triangle FEC$ ）

图 1 DR 几何证明任务

1 研究问题

原文主要围绕以下两个问题展开：

(1) 当高中生尝试证明几何命题时，他们会使用图形中的哪些符号资源？

(2) 符号资源是如何辅助学生进行推理以及它们在学生的几何证明中如何产生交互作用？

为了更好地回答研究问题，原文设置不同种类的证明任务。一方面，设置 DR 任务与非 DR 任务，以此来研究学生如何利用符号资源以及符号资源与学生推理质量的关系。另一方面，设置待证命题明确与待证命题不明确的证明问题，以此来探究哪些符号资源能够在学生确定结论时发挥作用。

该研究的第一作者 Ruveyda Karaman Dundar 是土耳其巴丁大学教育学院数学与科学教育系（Department of Mathematics and Science Education, Bartın University, Bartın, Turkey）的学者，第二作者 Samuel Otten 来自美国密苏里大学（University of Missouri, Columbin, MO, USA）。

2 研究方法

该研究选取美国中西部同区的两所不同高中的 9 名学生（4 名为女生）作为研究对象。研究对象的选择标准为：自愿参与且之前已学过几何课程。

该研究首先基于美国共同核心标准（Common Core State Standards）确定了 5 个几何证明任务，5 个任务均需要学生多步骤解决并要求学生呈现证明过程。证明任务如图 2 所示，其具

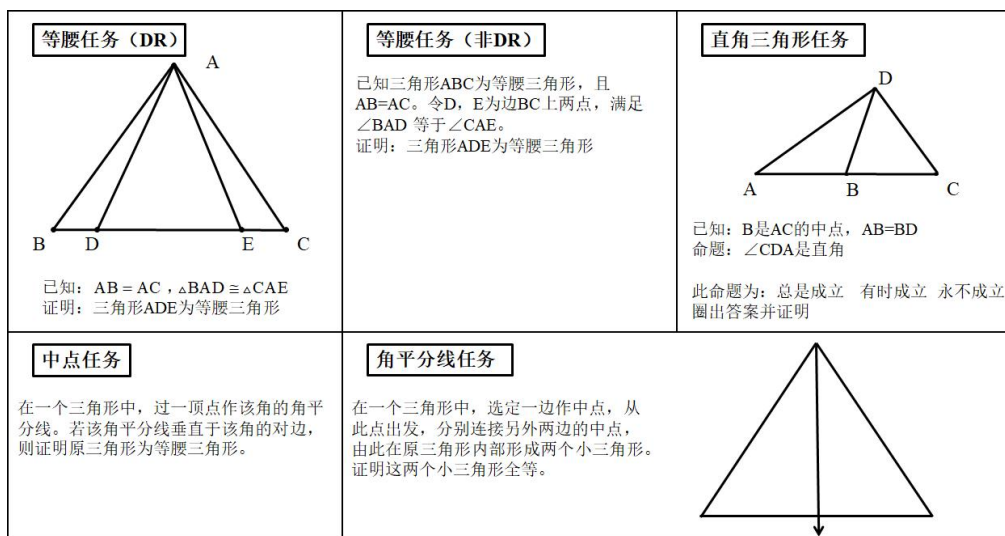


图 2 五个几何证明任务

体特征如表 1 所示。其中，9 名同学完成直角三角形任务及等腰三角形任务（有图/无图任选其一）；8 名同学完成中点或角平分线任务。

表 1 五个证明任务的特征

证明任务的名称	所属几何主题	命题是否已知	是否符合 DR	是否配图
等腰任务 (DR)	等腰三角形	是	是	是
等腰任务 (非标准 DR)	等腰三角形	是	是 ¹	否
直角三角形任务	直角三角形	否	是	是
中点任务	三角形中点	是	否	否
角平分线任务	等腰三角形	是	否	是

在学生完成证明任务后，研究者基于任务对学生进行客观访谈，访谈使用录像录音记录学生的解释并将其转录为文字。而后，研究者基于学生的书写过程与视频转录的文字进行两阶段的编码。在第一阶段，研究者寻找符号资源进行编码，具体类别代码如表 2 所示。在第二阶段，研究者识别学生在证明过程中的证明行为并对其编码。通过分析学生的证明行为与学生推理的有效性，检验图形的使用是否有助于或阻碍了他们的推理。原文调整了 Otten 等人于 2017 年开发的编码框架，如表 3 所示。若一些证明行为涉及推理“错误”或存在“局限”，则这些行为的代码分别以 W 或 L 结尾；若学生在提出论点时还会使用视图、数学符号或手势资源，则分别在证明行为代码的末尾添加 V、S 或 G 字母与证明行为共同进行编码。

¹ 除了未配图，其余的 DR 条件均满足，称为非标准 DR 任务。

表 2 关于视图、数学符号与手势的编码

视图	符号	手势
VF-作一幅新图	SF-标记图	GF-指向图
VS-作线段/边	SS-标记边/线段	GS-指向线段/边
VL-作直线	SL-标记线	GL-指向直线
VP-作点	SP-标记点	GP-指向点
VA-标记角	SA-标记角	GA-指向角
VAC-标记等角	SV-标记顶点	GV-指向顶点
VH-绘制阴影/刻度线	SE-写下等式	GC-指向计算过程
VY-作射线	SSE-解方程	GM-表示运动过程
VR-重新作图	SG-使用几何符号	GT-翻折纸
VSC-作等边/线段	SAS-使用代数符号	GPA-展示证明垂直
		GG-指向已知条件
		GW-指向过程

表 3 关于证明行为的编码（改编自 Otten 等人于 2017 年开发的编码框架）

证明行为		
CLAIM-陈述要证明或反驳的命题	INVEST-猜想或探究问题的真值	REFINE-对命题进行修改或重新定义
STRUC-识别证明的结构	END-陈述证明的结束	ACCEP-陈述已知定义或先前的结果
SUM-总结所有或部分证明	STEP-在证明中提供步骤	JUST-证明论证中的步骤的合理性
ABOUT-对证明做总体陈述		
证明互动		
CLAR-阐明命题	SAS-推翻命题	CONF-证实命题

最后，研究者综合分析编码结果，探究学生在证明过程中符号资源的使用与推理之间的联系。

3 研究结果

基于 26 例几何证明任务的分析结果，发现学生绘制和使用几何图形的情况随任务的不同而不同。总体而言，可以得到以下三条结论。

(1) 相较于 DR 任务，学生绘制新图形的行为在非 DR 任务以及结论未知的非标准 DR 任务中更普遍。

(2) 在 DR 任务中，学生会更广泛地使用符号资源。

(3) 相较于只使用视图、手势资源的学生，同时还使用数学符号资源的学生表现出了更高的证明有效性。

下文将从学生的符号资源使用情况、学生的证明行为以及符号资源与几何证明的关系这三个方面更详细地阐述研究结果。

3.1 几何任务中的符号资源使用情况

关于视图资源，研究者观察到，在 DR 任务中，所有学生都在已给图形中绘制新内容；而在非 DR 任务中，该行为的频率相对减少。由于视图资源不仅出现在给定图中，还会出现在学生自己绘制的图中，因此研究者还关注了学生绘制新图形的行为。分析发现在结论未知或非 DR 的任务中，学生更容易绘制新图形。

在三类资源中，学生使用数学符号的频率最低。学生主要的使用情况为：使用字母、记号或者标记来表示数学关系或进行替代说明。特别地，9 名学生中共有 8 名在等腰三角形任务中使用数学符号资源，在所有任务中使用该资源的频率最高。

总体而言，手势最常出现在学生的证明活动中，相较于 DR 任务，手势更常出现在结论未知及非 DR 任务中。在解释证明过程中，学生常会结合手势与语言进行陈述，其中，最常见的手势行为是指向特定的角或边。此外，学生还常用手势表明图形的运动或可能产生的变化。

3.2 几何任务中的证明行为

由表 4 可知，相较于 DR 任务，证明行为与证明互动更常出现在结论未知及非 DR 任务中。分析其背后的原因，或许是由于 DR 任务中的图形已展现部分证明过程。一般证明行为

INVEST（猜想或探究问题的真值）和 ABOUT（对证明做总体陈述）主要是为了探究命题的真假。其中，ABOUT 证明行为最常出现在非 DR 的中点任务中，学生在此任务的证明过程中总体描述问题，也对如何完成推理证明表示出不确定与困惑，如“我不太确定是否能证明”“不知道如何开展证明”。关于证明互动，质疑、评论或证明论点的行为在 DR 任务中相对罕见。

表 4 学生在证明任务中的证明行为频率

证明行为与互动	DR 任务（等腰任务）中的频率	非 DR 任务（中点、角平分线任务）中的频率	结论未知的任务（直角三角形任务）中的频率
证明互动（CONF-STEP, CLAR-ABOUT, ect.）	1.4	3.5	1.9
一般的证明行为（STRUC, ABOUT, INVEST）	1.2	4.1	4
特别的证明行为（STEP, JUST, STEP-L, STEP-W, JUST-L, JUST-W）	18.5	30.6	20.8

3.3 符号资源如何促进几何证明

如表 5 所示，所有充分证明都包括 3 种符号资源，50%的不充分证明包含 3 种符号资源。由此推断，使用多种符号资源可能有助于几何证明，或者说，多种符号资源可能是几何证明成功的必要因素。当然，学生的知识、推理能力等其余因素也需要考虑。

表 5 在不同证明结果中的三种符号资源

证明结果	证明的总数	证明中包含三种符号资源的证明数
充分证明	10	10（100%）
不充分证明	16	8（50%）
证明总和	26	18

4 讨论

原文的目标是描述学生在不同特征（是否 DR，结论是否已知）的几何证明任务中如何使用图形。研究发现，对于性质不同的几何任务，学生的作图情况也会相应不同。具体而言，结论未知及非 DR 的任务可以促进学生产生多样的图形，从而为学生提供更全面的证明机会。同时，任务的性质会影响学生对符号资源的利用。在非 DR 及结论未知任务中，学生对视图资源的使用较为明显；而在 DR 任务中，学生更多使用数学符号资源。此外，原文进一步证实手势在学生推理证明中的重要作用。

关于学生的证明行为与实际证明有效性，原文发现，学生在 DR 任务中更容易证明成功，这与学生对 DR 任务较为熟悉的研究背景一致。且所有有效证明的共同点为学生融合使用了三种符号资源。此外，学生在面对更广泛的任务类型时更有可能产生充分的证明。

然而，该研究也存在推广性不强的局限。其一，研究对象来自特定的区域，拥有较相似的文化背景。其二，原文中参与者的任务并未控制相同。因此，不同任务中符号资源的使用差异可能是由于学生个体差异，如动机、自我效能和年龄等。对此，需要进一步的研究来证实原文中的“小规模”的发现以及探究是什么促使学生在证明中使用符号资源。

参考文献

- [1] Dundar, R.K. & Otten, S. High School Students' Use of Diagrams in Geometry Proofs[J]. *Int J of Sci and Math Educ*, 2023, 21(3): 737-759.

数学写作

初中数学中代数与几何关系之论证

陈宇航，胡永强

(苏州市阳山实验初级中学校，江苏 215151)

在初中数学的学习生涯中，很多学生往往会把代数和几何这两个分支分得很开，将它们看作毫无关联的两个部分，但事实是这样吗？我们根据一道题来研究它们之间的关系。

如图 1， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AB 的延长线与过点 C 的切线 JC 交于点 D ，在 $\odot O$ 上取点 E ，使得 $CE=CB$ ，连结 BE ， BE 与 AC 交于点 F ，求证： $CB^2 - CF^2 = BF \cdot FE$ 。

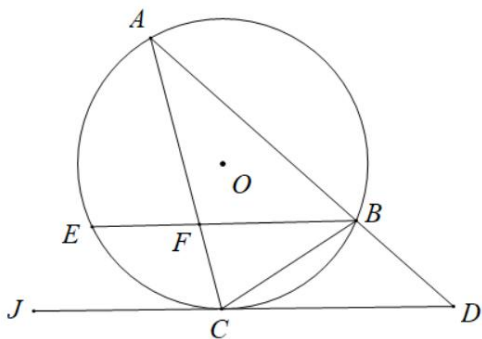


图 1 几何问题的证法之一

首先，我们来观察一下这个图，有一条与圆的切线，但是与这条切线相互垂直的半径并没有画出来，这需要我们先连结 OC ，根据等弦对等弧我们可以知道 $\widehat{EC}$ 等于 $\widehat{BC}$ ，这时候回到要证明的等式上，很显然这是一道几何中圆的题目，但是要证明的等式却都是线段的平方以及线段相乘，这会让很多人不禁犯了难，以至于分不清这是几何还是代数。接着，我们根据条件以及需要证明的等式分析一下这道题，见到线段的相乘以及平方，我们会首先联想到相似的比例式的交叉相乘，可以从相似这方面入手，这便是几何的初步思路；或者，我们见到线段的平方可以想到勾股定理，从而证明等式，这便是利用代数的勾股来证明的思路，如果这两种方法都可行的话，那么我们将会发现关于几何与代数间关系的不同寻常的一面。接下来便是对此的证明。

证法 1: 如图 1, 因为 $\angle CAB$ 和 $\angle CEB$ 为同弧所对的圆周角, 所以 $\angle CAB = \angle CEB$, 因为 $EC = BC$, 所以 $\angle EBC = \angle CEB$, 故 $\angle CAB = \angle EBC$ 。在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BFC$ 中, 由 $\angle CAB = \angle EBC$ 、 $\angle ACB = \angle ACB$, 所以 $\triangle ABC \sim \triangle BFC$, 故 $\frac{CB}{CF} = \frac{CA}{CB}$, 即 $CB^2 = CF \cdot CA$, 又由 $CA = CF + AF$, 则 $CB^2 = CF^2 + CF \cdot AF$ 。由相交弦定理可知, $CF \cdot AF = EF \cdot FB$, 所以 $CB^2 = CF^2 + EF \cdot FB$, 即 $CB^2 - CF^2 = EF \cdot FB$ 。

证法 1 主要是依靠相似与转化来达到证明的目的, 这便是利用几何的证明方法, 事实证明利用几何思想来解决这道题是行得通的, 那么接下来我们对代数思想来进行思考。

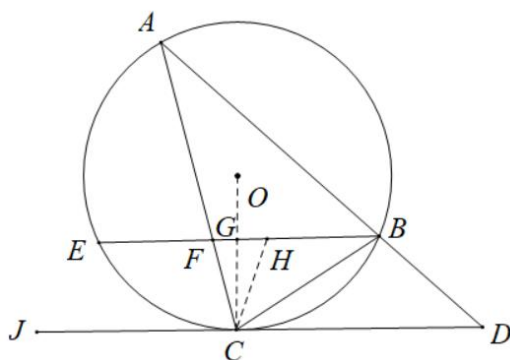


图 2 几何问题的证法之二

证法 2: 如图 2, 连结 OC , 在 EB 上截取点 H 点使得 $FC = CH$, OC 交 BE 于点 G 。因为 $EC = BC$, 所以 $\widehat{EC} = \widehat{BC}$, 所以 OC 平分 $\widehat{EB}$, 易证 $\angle ECO = \angle BCO$ 。又因为 $EC = BC$ 、 $CG = CG$, 所以 $\triangle ECG \cong \triangle BCG$, 则 $CO \perp BE$ 。由勾股定理得, $CB^2 = CE^2 = CG^2 + EG^2$, 同理, 得 $CF^2 = CG^2 + GF^2$, 故 $CE^2 - CF^2 = EG^2 - GF^2$ 。又由平方差公式可得,

$$EG^2 - GF^2 = (EG + GF)(EG - GF) = (EG + GF) \cdot EF。$$

在 $\text{Rt}\triangle FGC$ 和 $\text{Rt}\triangle HGC$ 中, $CG = CG$ 、 $CF = CH$, 所以 $\text{Rt}\triangle FGC \cong \text{Rt}\triangle HGC$, 则 $FG = HG$ 。又因为 $EG = BG$ 、 $HG = FG$, 所以 $EG + HG = BG + FG$, 即 $EH = BF$, 则 $EG + GF = EH = GF$, 故 $CB^2 - CF^2 = EF \cdot FB$ 。

那么到这里, 通过代数思想的证明也被我们证明出来了, 代数的证明主要是依靠勾股定理, 以及部分全等, 整体以代数为主, 所以同一道题目, 我们使用代数以及几何两种方式成功解答出来。

所以，我们由一道例题进行深入思考：代数与几何究竟是何种关系。我们不难发现，代数与几何形成了两种分支，某些情况下，尤其是综合性特别强的题目，能够使用几何方法解题也可以使用代数方法，所以说代数与几何是相通的，能够进行一定程度上的转换，数形结合就是其中的一个例子，在探寻它们之间关系的路上也就是探寻多种解题方法的道路。总而言之，代数与几何之间存在联系，代数是分析几何问题的工具，解析几何就是它们之间联系的产物。

切线定义的历史

陈可欣，胡永强

（苏州市阳山实验初级中学校，江苏 215151）

在初中的数学学习中，我们经常会遇到“切线题”，多是通过垂直证明切线或使用切线这一条件解决问题，这使得我对切线有十分深刻的印象。

在圆中有切线和割线，圆的割线必须与圆交于两点，切线与圆有且仅有一个交点，九年级上册的教科书中对于圆的切线的定义是：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线。当然，切线并不仅存于圆中，因此我和很多人一样，对于切线的理解仅存于“只交一点”这个条件。于是，有人根据这种理解提出一种关于切线的定义：一条与曲线接触但不切割曲线的直线。这是许多定义中流传最广的一条。

关于切线的一种定义一直被广泛接受，直到 1828 年不断有人提出：一条切线应该只与曲线上的一个点关联，而不必管它是否在别的位置切割曲线。如果按这种说法，图 1 中的红线应该也是切线。

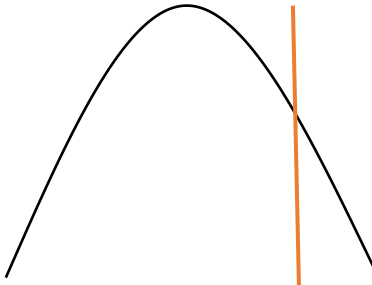


图 1 曲线与直线有且只有一个交点

1828 年以后，以上频繁出现在各种词典中的切线定义被正式宣布废弃。之后，词典里对切线给出的定义是：切线指的是一条刚好触碰到曲线上某一点的直线。“切线”一词的英文是“tangent”，源自于拉丁语“to touch”，表示接触的意思。

在历史上，古希腊数学家欧几里得和阿基米德，比牛顿稍早的法国数学家费马以及牛顿等，都对切线做过研究。其中，令我印象最深刻的定义，也是现代被广泛接受的切线定义，源于德国伟大的数学家哥特弗雷德·威廉·莱布尼兹。他给出的定义是：切线就是曲线上的割线在两个交点无限接近时所对应的那条直线。所以切线就是割线的交点无限靠近时的极限。

由此看来，切线的定义并非一帆风顺，数学中的定义大多都是这样，不断研究，探索，定义，推翻，再探究，这也体现了数学的严谨。此外，定义往往不是唯一的，所表达的意思都是一样的，但数学总是追求精简，所以越是精炼的定义越能被广为流传。我们在学习数学时只有秉承严谨、精简这两种精神，才能使我们的数学素养更上一层楼。这些都使我对数学的学习更加有兴趣。

会议综述

历史见真知，留白促创新

——第十届 HPM 高级研修班暨首届“留白创造式”数学教学研讨会综述

孔雯晴，刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

“留白创造式教学”指的是以学生为中心，立足育人目标，为学生学习留下充分的思维空间与探究机会，让学生在已有知识的基础上，主动学习、解决问题、创获新知、陶熔品行的教学方式^[1]。HPM 视角下的数学教学倡导通过数学史料的运用或以数学史为参照，让学生在探究过程中经历知识创获的过程，这与“留白创造式教学”的理念是完全一致的，一节融入数学史的好课，必然也属于留白创造式教学。因此，第十届数学史与数学教育（HPM）高级研修班以留白创造式教学为主题，同时，留白创造式教学课题组为了进一步推广留白的理念，决定召开首届研讨会，并与“第十届 HPM 高级研修班”合并。

第十届 HPM 高级研修班暨首届留白创造式教学研讨会于 2023 年 3 月 22 日至 23 日召开，研讨会致力于完善数学“留白创造式教学”的理论，探索 HPM 视角下的“留白创造式”教学研究与实践案例，交流研究热点，为数学教育研究者、中小学一线数学教师搭建学术交流平台。来自上海、江苏、浙江、湖北、福建、贵州、安徽、甘肃和澳门等地区的 120 余家单位，共计 254 位高校学者、研究生、教研员和一线中小学教师参加会议。

本次研讨会聚焦数学教学中的留白与创造、HPM 与留白创造式教学、留白创造式教学与数学教师专业发展以及 HPM 领域的其他研究主题，共设置 8 个大会报告，16 个分组报告，另外还安排了 4 节展示课。从理论研究到实践教学，数学教育研究者和中小学一线教师汇聚一堂，交流学术、分享研究、创新思维。本文对会议内容进行综述，并对 HPM 与留白创造式教学的研究特点进行分析。

1 报告内容

1.1 数学史与留白创造式教学之关系

华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授作了题为“留白创造式教学：从历史到课堂”的大会报告，报告从数学史的视角阐述为什么留白（why）、留什么白（what）以及如何留白（how）。数学的历史本质上就是留白与创造的历史，教师可以从数学家创新的过程中找“白”，为学生发现新知留出“发现之白”，为论证命题留出“论证之白”，为运用新法留出“方法之白”，为提出问题留出“问题之白”。此外，报告以 16 世纪德国著名数学家克拉维斯《几何原本》注中的部分内容为例，总结数学家发现新命题、新方法、新课题时所运用的策略，包括“否定属性”“更换步骤”和“倾听质疑”^[2]。其中，“否定属性”策略是指将一个命题或问题分解为若干个属性，否定其中的某个属性，将其替换成新的属性后形成新的命题或问题；“更换步骤”策略是指将从条件到结论分成若干个步骤，更换其中的某个步骤后形成新的方法；“倾听质疑”策略是指倾听、质疑和探究历史上的定义、命题等。总之，数学的历史并不随时代的变迁而改变，留白创造式教学能够从数学的历史中获得丰富的思想养料。留白是创造的必要条件，类似地，教师留白也是学生创新的必要条件。

华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师的大会报告从留白创造式教学的定义出发，阐释陈述之白、发现之白、论证之白、方法之白、问题之白和超越之白六种留白形式的内涵，并结合多个 HPM 课例详细地介绍数学史与留白创造式教学的五维度框架：了解主题历史，树立留白意识；提炼关键步骤，确定认知现状；选取历史资源，设计合理情境；建立古今联系，开展过程评价；走进先哲心灵，实现思想升华^[3]。报告指出，教师在实施“留白创造式教学”时，应该充分了解、运用或借鉴数学史，设计符合学生认知基础和课堂教学目标的“留白”活动。同时，HPM 视角下的数学教学应该遵循“留白创造式教学”的理念，充分发挥数学文化的育人价值。一个成功的 HPM 课例，其教学方式本质上就是“留白创造式”。

在 5 个分组报告中，一线教师分享了数学史与留白理念融入教学、形成学校特色的案例。上海中医药大学附属闵行晶城中学张静老师以“实数的概念”和“分数和小数互化”为例，阐述如何借助数学史料廓清问题与盲点和厘清知识模块，以及基于问题解决的留白创造式课堂教学的思路与方法。浙江省桐乡市凤鸣高级中学沈金兴老师结合 HPM 视角下的数学教学案例，

具体介绍在情景引入、讲解和巩固等环节和课前课后进行留白的方式，提出“显性留白”“隐性留白”和“综合留白”三种留白形式，并基于留白教学的实践经验总结出适用性、整合性、最近发展区和探究挖掘四条原则。上海市市北中学舒适老师分享了基于课堂留白的 HPM 视角下“异面直线间的距离”的教学案例的设计思路，并通过两个教学片段直观呈现“问题之白”环节中中学生编制的数学问题。江苏省苏州市阳山实验初级中学校胡永强老师介绍本校 HPM 教研基地的成立和发展，并以“正切”和“函数”两个课例生动展示通过数学史和留白创造式教学渗透学科德育的教学实践。上海市华东模范中学刘文伟老师介绍了本校在教研制度、数学教学实践和导师制下的资优生数学教学中融入“留白”理念，并将数学史渗透进学案集、校本作业集和新题创生行动等实践，形成“人文素养厚实”与“工具驾驭见长”的特色。

1.2 数学教学中的留白与创造

上海市晋元高级中学特级教师、正高级教师王华老师作了题为“海风起新潮，悬帆向远航——中小学数学留白创造式教学缘起与发展”的大会报告。报告从上海数学基础教育改革、中国传统文化的影响、学科文化与历史的影响三方面谈及留白创造式教学的缘起，并介绍了留白创造式教学的理念和实践的阶段性成果。留白创造式教学的内涵是以学生为中心，立足育人目标，为学生留下充分的思维空间和探究活动机会，学生在已有知识基础上，在主动学习和问题解决过程中，经历新知创获，其设计原则包括最佳动机原则、主动学习原则、阶段序进原则和目标导向原则^[1]。留白创造式教学对于教师信念的确立、理念的树立和教学观念的变革具有重要意义。报告还从目标明确、留白设计、主动学习和成效反馈四个方面阐述留白创造式教学的评价指标，进一步辨析留白与创新、留白学习与探究学习、以及留白与补白的关系。目前，留白创造式教学仍处于起步阶段，在理论探索、实证研究、教师培训、教学内容的选择和对学生的影响等方面仍待进一步探究。

江苏省南通市教育科学研究院符永平老师的大会报告分享了创造式教学“五神金字塔”20年实操与实践探索的成果，“五神”是指神秘、神奇、神妙、神圣和神话，分别对应激发好奇、持续探索、感受美好、体验责任和实现突破。报告指出，留白是为了创造力的培育，结合不同的课例阐述关于留白的三点策略：一是时间留白，让学生带着神秘与神奇不断探究；二是空间留白，让更多学生带着美好向神圣攀登；三是问题留白，让学生充满想象力，努力“再创新”。

上海市闵行区教育学院杨家政老师的大会报告聚焦数学留白创造式教学中的问题设计展开讨论。报告指出，留白创造式问题设计包括实际生活问题、启发性和挑战性问题等类型。为实现从留白到探究，再到创造的过程，报告通过不同的例子介绍问题设计的策略：一是问题设计的起点是激发数学学习的动机；二是问题设计指向留白与创造；三是不同学段问题设计有层次差异；四是不同课型的问题设计有不同特点。报告还提出问题设计的注意点和五项原则。

有 3 个分组报告聚焦数学教学中的留白与创造。上海市普陀区管弄新村小学陆莉莉校长分享了关于课堂教学与云端教学之间的变与不变的思考，以“文字计算题”和“圆的初步认识”两个教学案例为例呈现数字化转型背景下的留白创造式教学，并总结一年多来数字化转型实践取得的成效。上海市静安区万航渡路小学数学教研组在学业质量绿色指标、课程标准等的指导下，构建基于真实情境的思维课堂，关注“留白”面积，从学习空间、探究时间、真实情境和内省思维四个方面把握“留白”路径，同时开展基于关键环节的专题研究，以提升教师教学胜任力。浙江省嘉兴市秀洲区教育研究与培训中心周太平老师通过留白创造式教学的实践，总结出兴趣激发、主动学习和问题导向的三个教学原则，提出教师补白应该关注学生的思考、活动、表达、发现、方法和评价等方面，并阐述留白对提升学生数学思维的作用。

1.3 留白创造式教学与数学教师专业发展

上海市静安区教育学院任升录老师的大会报告围绕提升教师留白创造式教学胜任力的学习活动设计要素展开，留白创造式学习活动包括新知创获、问题探究和专题实践三个类型，应以学科核心素养为宗旨，基于史料文献和教材情境设计学习活动，使学生通过学习活动经历“内化”的过程，以此提升学业质量水平和学科素养水平。报告还从单元的整体布局与分配、学情分析、资源储备及个性表现与全体推进四个方面提出提升教师留白创造式教学胜任力的建议。

上海市嘉定区教育学院曹君老师带领的团队围绕留白创造式教学与教师专业成长作了工作坊报告。首先，曹君老师从书画中的“留白”引出数学教学中的“留白”。接着，薛蓓老师回顾了“ ∞ 工作室”的起源，工作室以留白创造式教学为研究方向，遵循导师引领、同伴互助、教研结合、不断创新的原则，提升教师可持续的专业发展能力。曹艳侠老师和朱文彬老师分享了团队第一次研究实践课“圆的面积”的教学感受与反思成长。管怡淳老师以“梯形中位线”为例，讲述在线实施留白创造式教学的经验、困难及克服方法。司晓育老师表示留白创造式教

学能够发挥学生主体意识，激发学生求知欲。宋春磊老师讲述了加入该团队的原因以及实践中的体会和成长。龚佳青老师表示留白创造式教学为学生提供展示自我的平台，学生在质疑、探讨和创造的过程中获得成长。赵燕萍老师指出，在不断的实践探索中，教师的留白意识在增强、方法在成熟、研究在继续。最后，王晟喆老师介绍了团队对“留白创造式”教学的研究与实践，通过“无边界”教研模式合力迎接留白课堂的挑战，探索出一条可复制、可推广和可延伸的教师专业发展路径。

1.4 数学史融入数学教学的实践

杭州师范大学经亨颐教育学院岳增成老师的大会报告首先从课程改革、学教现实和小学 HPM 发展三个方面分析小学 HPM 共同体开展专题研究的必要性。然后，报告介绍了 HPM 视角下“专题”课例开发流程和初步构建的基于数学史的专题研究模式，并通过“比的意义”和“圆的单元教学”等教学案例展示专题研修的教学成效：一是更精准地了解学情；二是更全面、深刻地把握历史；三是更好地突破教学难点、实现教学重构、促进深度学习；四是教师更自觉地追求专业成长。

近年来，各地区教师积极开展 HPM 视角下的数学教学实践，共有 4 个报告关注该主题。杭州市萧山区夹灶小学李建良老师分享了“圆”单元中“圆的认识”“圆的周长”和“圆的面积”三课时相关的史料，并从学生视角下的教学难点和数学史视角下的核心问题“方与圆的转化”出发，详细介绍“圆”单元中数学史素材的选取依据和四个课时的主要教学活动设计。杭州师范大学附属文正小学毕宏辉老师介绍了整数乘法竖式教学的单元主线，结合已开发的“多位数乘一位数”“两位数乘两位数”“三位数乘两位数”和“除数是一位数除法”课例，从数学学科的视角、学生理解的视角和数学史的视角对整数乘法的内容进行分析。上海大学附属宝山外国语学校张洁老师围绕教材处理、问题提出、设计思考和教学设计四个方面分享了“漫谈出入相补原理”教学的实践与思考，并挖掘“出入相补原理”背后的育人价值，该教学案例为实施基于数学阅读材料的教学提供借鉴。上海市普陀区教育学院陈兴义老师介绍了普陀区高中学段四个名师工作室基于 HPM 问题提出的阶段性研究进展，名师工作室遵循情境简述、火花闪现、问题提出、解答呈现、评价导向和参考文献六个步骤进行研究，并将研究成果应用于教学实践。

1.5 留白创造式教学与其他研究主题

上海市虹口区教育学院胡军老师作了题为“促进数学高阶思维发展的学生问题提出：来自课例研究的启示”的大会报告。报告指出，促进高阶思维发展的教学与留白创造式教学是一脉相承的，在课堂上培养高阶思维是落实学生核心素养的有效途径之一。胡老师所带领的团队通过扎根理论和德尔菲法构建面向初中课堂的高阶思维内涵框架，进一步制定指向高阶思维的“问题提出”任务的分析框架，为教师设计和实施“学生问题提出”任务提供参考。

有 3 个分组报告分别探讨了留白创造式教学与“开架式教学”“数学学习力”和“数学创造力”等主题之关系。上海市普陀区武宁路小学钱文涟老师首先介绍了“开架式”教学的背景和意义，其与留白创造式教学相辅相成，然后从课前准备、课堂教学和课后练习三个方面，结合“平方数”课例详解“开架”与“留白”的融合策略。华东师范大学教师教育学院博士生刘思璐指出数学学习力是留白创造式教学的主要目标之一，并介绍高中生数学学习力的现状和其在性别、年级和学校三方面的差异，最后从教育理念、教学方式和教学评价三个角度提出培养建议。苏州大学数学科学学院沈中字老师指出数学创造力的思维形式、教学活动、教学过程与留白创造式的基本形式、表现形式、实施流程相呼应，并提出通过数学创造力来研究留白创造式教学的测量评价、教学环境和其对教师教育的启示。

2 教学展示

教学展示是本次研讨会的重要部分，也是一线中学教师关注的重点之一。本次会议共安排了 4 节精彩的展示课，内容涵盖小学、初中和高中三个学段。

上海市黄浦区北京东路小学林雁平老师带来一节“形数探秘”的观摩展示课。林老师首先让学生表达对形数的看法，并通过毕达哥拉斯学派用小石子研究几何图形的故事帮助学生理解。接着，学生小组用 15 个小圆片尽可能摆出不同的形数，通过交流分享，进一步感悟形数的特征。然后，林老师聚焦长方形数，引导学生发现 15 个小圆片只能摆出 1×15 和 3×5 两种情况，而后再让学生小组用 2-9 个小圆片摆出形数，并带领学生对摆出的形数进行分类并为其命名。最后，林老师结合阅读材料向学生简单介绍质数和合数，并鼓励学生分享收获和想要继续探究的问题。

上海市晋元高级中学附属学校薛平老师带来一节“同位角、内错角、同旁内角”的观摩展示课。薛老师首先从学生熟悉的校园周边道路抽象出三线八角图，借助表格，让学生小组探究三线八角图中角的对数、对顶角和邻补角以及剩余两角之间的关系，学生归纳得出六种关系，其中前三种关系对应今天的课题，由此归纳出同位角、内错角、同旁内角的共同特征。然后，薛老师以一道例题，让学生总结正确找出这三种角的方法，并基于三线九角和三线十二角让学生提出问题。最后，薛老师从数学知识、思想方法、情感态度等方面总结本节课的内容。

上海市民办嘉宜初级中学龚佳青老师带来一节“圆的周长”的观摩展示课。龚老师以学生对圆的认识引入，借助微视频介绍刘徽发现“周三径一”的故事。接着，学生通过观察公园步道图中圆与内接六边形和外切正方形的周长关系发现圆周长是直径的 3~4 倍，再借助实验测量发现圆周长和直径的比值是一个定值，感受化曲为直的测量思想。然后，龚老师用微视频展示古代数学家探索圆周率的漫长过程，并通过几何画板直观地展示比值是定值并引出圆周率。最后，龚老师从知识、思想和德育层面对本节课进行总结，并留下车轮悖论的悬念。

上海市晋元高级中学缪寿红老师带来一节“余弦定理再探”的观摩展示课。缪老师首先带领学生回顾余弦定理及其推导方法，引出建系法和作高法。接着，缪老师展示《几何原本》中利用三角形和矩形的面积证明勾股定理的方法，类比该方法，学生通过小组合作探究证明余弦定理的方法。然后，缪老师呈现用弦图证明勾股定理的方法，学生进一步探究用弦图构造余弦定理的证法。最后，缪老师引导学生思考正弦定理、余弦定理之间的区别与联系，并且从知识和方法两个维度进行课堂小结。

现场观摩后的研讨环节中，评课专家指出，林老师以“一个很大的悬念，两个大的探究活动，三则阅读材料，四种留白形式”设计教学，教学中的探究活动是“从放到收”的过程，明确具体的任务，并进行合理的衔接，达到了更好的课堂效果。薛老师通过表格让学生探索各种角的关系，可以为后续枚举法的学习做铺垫，同时，学生经历对角的分类和命名的过程，感受到自己是知识的发现者、研究者，提升研究数学的兴趣；龚老师突破传统讲练结合模式，大胆创新，一者创设有效情境，体现学习必要性，二者基于任务导向渗透数学思想，体现方法关联性，三者古今对话，体现思维连贯性；缪老师在问题链的设计上相互关联、层层递进，由勾股定理的证明方法为学生留白，通过引导学生讨论和思考，营造了认知的挑战性、探究性和自主性的学习氛围，渗透了类比、推广、转化、构造的数学思想。

3 若干特点

本次研讨会展现了全国各地的高校学者和一线教师在 HPM 和留白创造式教学上的研究成果，开辟了数学教学研究的新思路，总括起来，有以下特点。

（1）凸显 HPM 教学理念，明确课堂探究策略

基于数学历史的再创造是 HPM 教学的基本理念和关键特征。本次研讨会通过留白创造式教学的理论探讨和实践运用，凸显了 HPM 视角下数学教学的理念，为探究活动的设计提供了重要参照：借鉴主题的历史发展过程，留发现之白和论证之白；参照历史上的思想方法，留方法之白；运用历史上的数学问题或其他史料，留问题之白；依据历史上的概念定义，留陈述之白。融入数学史的探究过程，即为学生补白的过程。HPM 视角下的数学教学与留白创造式教学的结合，丰富了 HPM 的理论，同时，也拓宽了 HPM 领域的研究视角。

（2）汲取历史思想养料，夯实留白教学理论

留白创造式教学是一种新的教学方式，实施这种教学方式，是时代的呼唤，是创新人才培养的需要，但要让人们普遍接受它，研究者尚需不断夯实相关的理论基础。数学的历史就是前人留白、后人创新的历史。历史是最好的教科书，本次会议从数学史的视角来探讨留白创造式教学的必要性、科学性和可行性，充分揭示了“数学教学无法割裂数学历史”的事实。未来，人们既可以就“数学史上的留白与创新”这一主题进一步开展深入研究，还可以从艺术史、教育史、教育心理学等多个角度进一步夯实留白创造式教学的理论。

（3）践行知行合一哲理，注重理论实践互动

歌德曾经说过，不能产生行动的思想是一种疾病。我们这个时代并不缺乏教育理念和教育理论，所缺少的是真正落实理念或理论的教学案例。倘若“留白创造式教学”只停留在理念层面，它对数学教育的意义并不大。在课题组前期研究成果的基础上，本次会议进一步展示了小学、初中和高中三个学段的观摩课，让与会教师目睹和体会课堂上教师留什么白、如何留白以及留白所引发的创新，充分感受到这种教学方式的魅力，从而实现了理论和实践的精彩互动。

（4）完善不同教学经验，丰富留白教学形式

本次会议不仅关注 HPM 与留白创造式教学之关系，还探讨了留白创造式教学与“问题教学”“开架式教学”“指向高阶思维的教学”等主题之关系。问题是数学教学的核心，问题设计

也是留白创造式教学的重要环节，问题教学的关键是为学生留下足够的思维空间和再创造机会^[4]。“开架式教学”中的“开架”实际上提供了“留白”的途径，涉及发现之白、论证之白和方法之白。在指向高阶思维的教学中，教师实际上通过设置方法之白、论证之白和问题之白，来培养学生的高阶思维。因此，许多有特色的教学方式，都可以用“留白创造式教学”加以审视，其优点可以为“留白创造式教学”所吸收，其不足可以借助“留白创造式教学”来改进。

4 结语

留白创造式教学的研究和实践目前还处于起步阶段，而“HPM 视角下的数学教学”更是首次携手“留白创造式教学”出现在大众眼前。数学史为留白教学提供依据，留白为数学史融入教学提供路径，留白创造式教学让看似冷冰的历史焕发出新的生命力，两者相辅相成，未来有很多相关的课题值得探讨与研究。

近年来，教师专业发展的研究主体正逐步转向由专家学者和教师等多元主体参加的合作共同体^[5]。在本次会议中，我们看到了由高校研究者与一线教师构成的学术共同体的价值，高校研究者和一线教师有必要建立更加紧密的联系。通过开展“跨界”课例研究，一方面，高校研究者能够更好地为基础教育实践服务；另一方面，一线教师能够在课例研究的过程中促进自身专业发展，这种合作更有助于建立和推广基于数学史的留白创造式教学的理论与实践。

在新时代建设教育强国的背景下，留白创造式教学是时代的呼唤，更是培养拔尖创新型人才的需要。留白是创新的必要条件，而数学史为留白提供了基本遵循。我们相信，基于数学史的留白创造式教学，未来可期，大有可为。

参考文献

- [1] 王华, 汪晓勤. 中小学数学“留白创造式教学”——理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023: 25, 65.
- [2] 汪晓勤. 从克拉维斯的《几何原本》注看数学家的创新[J]. 数学通报, 2023, 62(6): 1-6, 30.
- [3] 汪晓勤, 邹佳晨, 王华. 数学史与“留白创造式教学”[J]. 数学通报, 2023, 62(3): 1-6.

- [4] 王嵘, 蔡金法. 问题提出: 从课程设计到课堂实践[J]. 课程·教材·教法, 2020, 40(1): 90-96.
- [5] 段志贵, 秦虹, 宁连华. 从外延到内涵: 数学教师专业发展研究走向——近年来数学教师专业发展研究述评[J]. 数学教育学报, 2017, 26(6): 72-79.

活动讯息

分享拓宽视野，交流孕育智慧

——“留白创造式”教学课题组双城学术交流会隆重举行

刘梦哲¹，沈中字²

(1. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2. 苏州大学数学科学学院，苏州 215000)

2023 年 4 月 23 日下午，“留白创造式”教学课题组双城学术交流会在苏州大学数学科学学院隆重举行（图 1）。参与本次活动的有“留白创造式”课题组成员代表与苏州大学数学科学学院学院师生代表，参与人数共计 30 余人。本次活动由华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师与苏州大学数学科学学院沈中字老师共同主持。



图 1 “留白创造式”教学课题组双城学术交流会

首先，来自华东师范大学和苏州大学的六位师生分别带来学术微报告。

沈中字老师作了题为“从《九章算术》的留白到刘徽的创新”的报告（图 2）。党的二十大报告和《义务教育数学课程标准（2022 年版）》中明确提出要培养创新人才，而留白式教学为学生创新意识的培养创造了条件。为此，沈老师探讨了《九章算术》中留白的形式，以及刘徽通过补白获得的创新的数学成果。例如，从《九章算术》少广章中的开方问题和开方术，到刘徽提出的微数，属于发现之白；从《九章算术》方田章中的三角形面积问题和公式，到刘徽对三角形面积公式的证明，属于论证之白；从《九章算术》方程章中的线性方程组问题和解法，

到刘徽“新术”，属于方法之白；从《九章算术》方田章中的合分术、盈不足章中的盈不足术和方程章中的方程术，到刘徽提出的齐同术，其中蕴含化归思想，属于超越之白。由此启示我们可以在教学中，通过留白的方式，引出新的数学概念、探索新的数学证明、发现新的数学方法和获取新的数学思想，从而培养学生的创新意识。



图 2 沈中字老师作报告

华东师范大学教师教育学院博士研究生秦语真作了题为“美国中学数学教科书中的数学写作习题研究”的报告（图 3）。秦同学从思维和写作的关系、美国对数学写作的重视、我国数学写作的现状三方面谈起，研究了美国初高中七册数学教科书各栏目中共计 838 道数学写作习题。研究发现，教科书中的数学写作习题涉及的数学内容主题以“命题与法则”和“问题与解决”为主，“概念与术语”和“思想与方法”相对偏少；写作类型以“解释性数学写作”为主，其次是“反思性数学写作”，“创造性数学写作”最少。最后，秦同学对更好地融数学写作于我国数学教科书和数学教学提出三点建议，一者增加写作习题、丰富内容主题，二者联系现实世界、拓展写作类型，三者分层设置栏目、启智深度学习。

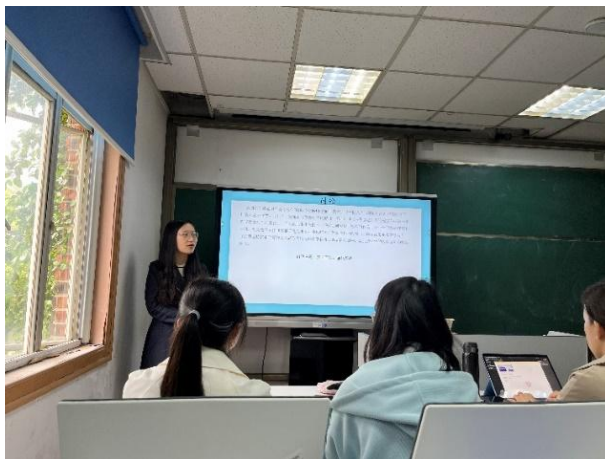


图 3 秦语真同学作报告

华东师范大学教师教育学院博士研究生韩粟作了题为“数学教科书中的‘旁白’与‘留白’关系初探——基于人教 A 版高中数学教科书的分析”的报告（图 4）。韩同学表示，教科书中的“旁白”对数学的教与学具有“旁指曲谕”的重要意义，而“留白创造式”教学又可以促进师生的发展，为此我们有必要研究“旁白”中“白”的类型。研究发现，人教 A 版高中数学教科书旁白中的“旁白”类型以“陈述之白”和“发现之白”为主，“方法之白”与“论证之白”其次，“超越之白”最少，其中，韩同学还详细分析了六白中实例的特点。于是，韩同学认为，未来可以继续研究为何以及如何设计“旁白”等问题。



图 4 韩粟同学作报告

华东师范大学教师教育学院硕士研究生刘梦哲作了题为“失去光环的 ChatGPT——HPM 视角下椭圆及其标准方程的教学设计刍议”的报告（图 5）。ChatGPT 作为时下最热门的生成式人工智能，诸多学者看到其在教育中的应用价值，而越来越多的教师亦对 HPM 视角下的数

学教学抱有浓厚的兴趣，为此，刘同学从“why”“what”“how”三方面分析了它们两者间的关系。研究发现，ChatGPT 在 HPM 视角下的数学教学中具有较大的局限性，无论是为什么要用数学史，还是有哪些数学史，又或是如何运用数学史的问题，其几乎都不能给出回答，这也意味着 ChatGPT 可能会为常规的数学教学带来些许帮助，但其在 HPM 视角下的数学教学中是无效的。由此，刘同学认为，在人工智能时代开展 HPM 视角下的数学教学的关键在于创新。



图 5 刘梦哲同学作报告

华东师范大学教师教育学院硕士研究生刘倩雯作了题为“无字证明在高中数学教学中的应用”的报告（图 6）。刘同学首先解释了无字证明的含义，并从其在教学中的作用以及融入高中数学教学的意义两方面说明研究无字证明的必要性。由于现有无字证明的素材并非适用于所有的教学，于是，刘同学借鉴已有学者提出的无字证明的五项设计原则，包括中心思想的可发现性、条件已知与未知的可区分性、构造的可视性、图形性质的内隐性以及包含人为痕迹，逐一分析如何重新设计无字证明。基于此，刘同学为课堂中开展基于无字证明的教学提出三点建议，一者分组研讨、组内补白，二者小组展示、分享论证，三者教师点拨、二次补白。



图 6 刘倩雯同学作报告

苏州大学数学科学学院本科生朱轶萱作了题为“什么是三角学？——美英早期三角学教科书中的陈述之白初探”的报告（图 7）。朱同学以 18 世纪初至 20 世纪中叶的美英三角学教科书为研究对象，探究其中三角学的定义及其演变。研究发现，三角学的发展可以划分为三个阶段，即隶属几何分支的追本溯源阶段，包括解三角形定义和线段关系定义，融入代数、微积分工具的与时俱进阶段，包括基于几何的发展性定义和超越几何的定义，以及走向分析时代的焕然一新阶段，包括走向分析的定义。由此，朱同学为今日三角学的教学提出三点建议，一者以史重构教学、构建三角网络，二者建立知识联系、彰显方法之美，三者尊重思维顺序、以史促进理解。



图 7 朱轶萱同学作报告

在六场学术微报告结束后，与会师生展开热烈讨论（图 8）。来自苏州大学数学科学学院的王金才老师、严亚强老师、张梦圆同学、戴阳同学，和来自上海市晋元高级中学王华老师、

黄浦区北京东路小学的林雁平老师、上海市复旦中学的师前老师、嘉定区教育学院曹君老师分别作交流发言。



图 8 部分参会师生研讨交流

春暖四月，相聚苏大，本次学术交流会促进了上海和苏州两地、华东师范大学与苏州大学两校师生的深度合作与共同成长，激发了教师们对数学史融入课堂与留白创造式教学的进一步思考，相信参与本次活动的师生皆有所获。



图 9 合影