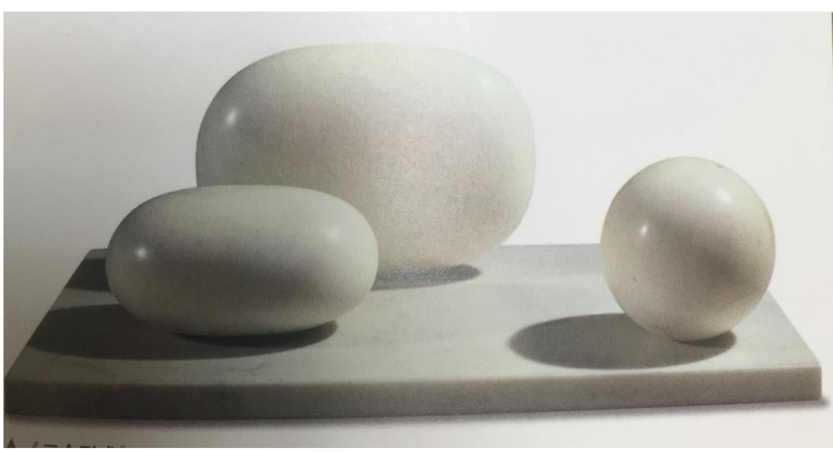
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2021 年第 10 卷第 11 期



赫普沃斯（B. Hepworth, 1903-1975）雕塑作品：三个形式

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首新语

HPM 与职前教师专业发展

韩 粟

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

教育大计，教师为本。在当前全面建设高素质专业化创新型教师队伍的政策背景下，教师教育质量被提升到教育改革的关键位置，而职前教师培养又是教师教育体系中的关键一环。2019 年，新华社发文指出：职前教师培养与在职教师发展间应具有连贯性，以促进教师专业能力在不同职业阶段获得提升。以全日制教育硕士项目为例，攻读教育硕士学位的职前教师不仅要在修读教育学基础课程及所属学科的专业理论课程，还将修读微格教学等专业实践课程，到第二学年便进入中小学完成教育实习。显然，实践课程（含教育实习）是促使职前教师向职初教师转变的重要因素，由此不禁发问：学科教师教育者殚精竭虑、精心设计的理论课程，在职前教师的专业发展及身份认同中扮演着何种角色呢？

以笔者读研期间亲历的一次教学比赛为引例。在比赛结束后的点评环节，许多评委指出："将数学史融入数学课堂，业已成为华东师范大学数学教育专业研究生的教学特色。"本次比赛中，有同学古今对照，数形并用，揭示均值不等式的几何面貌；有同学基于历史序、教材序与学生心理序，玩转条件概率新教学；等等。而数学史与数学教育以及现代数学与中学数学两门学科史类课程，正是含笔者在内的数学教育研究生的必修课。可见，指向学科知识源流，从而反哺学科教学的"学科史+学科教育"课程在职前教师培养中大有裨益。

仍以数学学科为例，21 世纪以来，国内渐兴"为教育而历史"的数学史研究之风，HPM（History and Pedagogy of Mathematics, 数学史与数学教育）这一领域随之进入学者及大众视野。已有研究证实了数学史课程对职前教师数学教学知识及数学观发展的影响作用，但研究过程中很少涉及职前教师的教育实践环节，尤其是实地实践。职前教师修读的 HPM 课程在其教育实习中发挥着何种作用？以 HPM 为研究方向的高校研究者兼职前教师，在教育实习中如何诠释自己的双重身份？在进行 HPM 实践时遇到了哪些困境？针对上述问题，学界还鲜有讨论。鉴于此，笔者基于自身及同伴的实践经历，拟从三方面展开初步论述。

1 教学设计与实施

相比于入职之后才与 HPM 相识的教师而言，系统地学习过 HPM 课程的职前教师，往往能更游刃有余地基于数学史进行教学设计。在 HPM 课程中，高校 HPM 专家会提纲挈领地讲解不同课型下（概念课、命题课、复习课等）不同主题的史料，部分还配有典型 HPM 课例，课后则会布置关于课上某个主题的教学设计任务。职前教师一般以小组合作的形式，在课堂已有史料的基础上，再度搜集史料并深入研读，然后讨论教学设计思路，分工完成教学设计及课件制作，最后选取代表面向全班进行说课。各组说课结束后，授课教师一般从数学史素材选取、运用层次及教育价值等方面作点评与指导。整个课程中，诸如此类的教学设计任务一般会布置三次，如笔者所在年级的任务主题分别为点到直线距离公式、分数指数幂及正弦定理。除此之外，授课教师还会布置 HPM 教学设计作为期末作业，而职前教师还会在“数学教学设计及实施”等课程中完成具有浓厚 HPM 特色的起始课教学设计等作业，如前文所述，在各级教学比赛中也会优先考虑以数学史的融入作为其比赛亮点。

由上可见，职前教师在 HPM 课程中汲取了思想养料，接受了充分的教学设计训练，HPM 教学设计能力得以大幅提升。注意，HPM 课程非纯粹数学史课程，如笔者本科时修读过“初等数学研究”课程，课上亦涉及古代四大文明的数学史，近代数学的兴起等，但彼时属于为历史而历史，鲜少树立起为教育而历史的意识。

但对比完整的 HPM 课例研究过程来看，职前教师在 HPM 课程中只经历了“选题与准备”与“研讨与设计”的部分过程（图 1），一般为文献研究、素材搜集、初步设计与交流研讨，最关键的教学实施环节被替换为说课或模拟授课（“无生课堂”），没有真实的学生反馈等。这便导致职前教师在面对实习学校的“有生课堂”，意图将 HPM 教学设计付诸实施时会遇到种种问题，而多数问题就与学习机会、学生表现等息息相关。

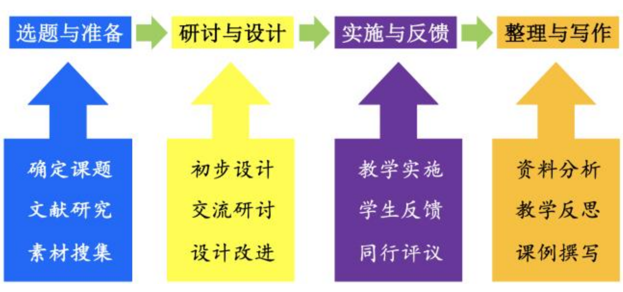


图 1 HPM 课例研究过程

以笔者执教的“平面解析几何序言课”为例。尽管笔者在课前做了大量准备，包括阅读文献，制作几何画板，录制视频等，但对学生的预设还远远不够。比如阿波罗尼奥斯圆，若在课堂中引导学生回忆平面几何中的三角形内角平分线定理和外角平分线定理，并多留给学生一点思考时间，以该校学生的学力水平，可能就会有学生当堂想到用上述定理的逆定理得出动点轨迹是圆。此外，由于该班级数学课的氛围一直倾向于沉默不语，笔者在面对众多观摩人员时也比较紧张，不敢放开，所以课堂中师生互动交流较少，最终导致了教师“一言堂”的现象，课堂进度也被迫加快。

虽然上述问题中不少都是职前教师的“通病”，但仍旧反映出与 HPM 教学设计能力相比，职前教师的 HPM 教学实施能力还亟待加强。当然，若教师在入职后仍能葆有 HPM 的信念，在日常教学中不忘适时地融入数学史，则在细水长流的真实课堂实践中，教师的 HPM 教学设计与实施能力都必将有增无已。

2 学科智育与德育

基于数学史的数学学科德育理论探讨与案例开发，是近年来 HPM 领域的热点议题。当心系学科德育的高校 HPM 研究者以职前教师身份进入实习学校这一片教育田野，不免希冀于以数学史融入课堂为契机，在数学知识传授和数学理性、品质培养间搭建一座桥梁，沟通数学学科智育与德育。

当笔者初进入实习学校时，便发现该校开设了“古今数学思想”选修课，班级内也有学生选修这门课。因此，在平面解析几何序言课的尾声，笔者呈现了《古今数学思想》第一册的封面（图 2），让学生认一认课堂中出现过其画像的数学家，即欧几里得、阿波罗尼奥斯、笛卡儿及费马，他们都在数学史上“青史留名”，笛卡儿及费马还同享“解析几何创始人”之誉，而课堂中未曾出现其画像的数学家，如韦达、牛顿及莱布尼茨等，亦都是赫赫有名的数学大家，同前面所提的数学家一起，在解析几何发展史上呈现出“前人肇始，后继不衰”的关系。由此，学生更加能感悟解析几何缘起、诞生与发展的波澜壮阔，真切地认识到数学是一门不断演进的学科。

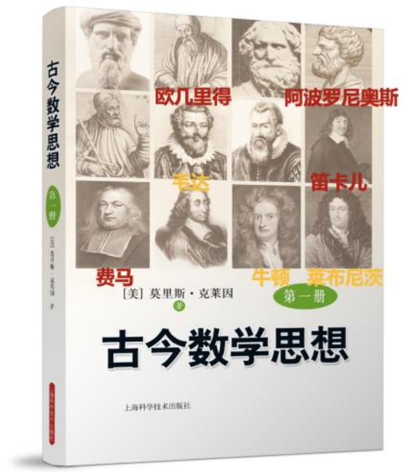


图 2 《古今数学思想·第 1 册》封面

令人感到遗憾的是，尽管笔者满心期待地在课堂中布置了阅读《古今数学思想》第 15 章，围绕解析几何的产生与发展等主题进行数学写作的作业，但该课后任务并没有得到带教老师实质性地执行。前几日，在由 HPM 网络研修班成员，亦为同门师姐所执教的“古典概型”一课中，教师同样布置了数学写作任务，但所在校的教研组长表示数学写作属于“锦上添花”的附加作业，学生还是应首先完成数学组统一安排的常规作业。实习期间，每每目睹学生日复一日地刷试卷、写精编、考测试，且耳闻有学生为完成 9 道立体几何题，奋战至凌晨三点时，总不禁感慨：应试压力犹然在，教育理想何处寻？

诚然，作为 HPM 高校研究者兼职前教师，从书斋到课堂，必然会经历从理想到实际的落差，也可能会就此人云亦云，对学科德育乃至立德树人的目标和追求不置可否。但当我们真正走入学生的心灵之中，给予学生表达的机会，倾听学生的思考，会陡然发现：德育的点滴渗透，一定会在学生学习与成长的过程中起到默会之用。仔细想来，实习中有不少场景可以“实证”上述观点：课上，学生们在看完纪录片后，虽然都揶揄自己不是“被数学选中的人”，但也有学生课下悄悄来问大学的数学专业选择；课后，一位学生前来辩驳，阿波罗尼奥斯圆的纯几何方法比代数方法简单；学习单中，一位学生提出“代数依靠严谨的抽象，而远胜人类看似显然的直觉。而分析源于代数，分析是最美好的！”的深刻观点；等等。尽管这些只是个案，但仍然真实地显现了 HPM“德育之效”的价值。在 HPM 引领之下，职前教师完全可以在数学智育与德育间建立一种平衡的智慧，不仅要做传授学科知识的教师，更要做培养学生理性精神与卓越品质的教师，从而怀揣着立德树人的坚定信念踏入教师生涯。

3 理论传播与践行

经过 HPM 研究者及 HPM 专业共同体若干年的努力耕耘，HPM 已经成为国内数学教育领域的重要研究方向，具有丰硕的研究成果。但对于广大的在职数学教师而言，多数还属于“自身知道一点数学史”及“课堂偶尔融入数学史”的阶段，从未系统地了解 HPM 理论，也未将数学史融入数学教学视作一种可持续甚至终身运用的教学模式。而熟悉 HPM 的职前教师，与实习校带教老师及数学教研组的老师相比，虽然教学经验不如后者丰富，但在理论研究上或许更为前沿，所以应当不忘研究者身份，主动地传播和践行 HPM 理论。

笔者的同学之一，在进入实习校后，发现该校的数学老师，尤其是年龄偏长的经验型教师，基本都不做教科研。在数次和老师们交流后，发现他们不甚了解数学史，而由于不做教科研，也很难意识到数学史融入教学的教育价值。虽然这样的现状非她意料之中，但是她并未因此就避而不谈自己在硕士期间的 HPM 课程中的学习成果，而是适时地、大方地向老师们介绍了 HPM 理论。除了向不熟悉 HPM 的在职教师传播之外，笔者自身还尝试向所在班级的学生介绍过自己的专业和研究方向，包括为什么会从数学与应用数学到数学史与数学教育等。这些看似微小、不起眼的工作，或许只会在极少数听者的心中激起涟漪，或许一阵涟漪后也将归于平静无澜，但对在大学校园内投入了一年、两年甚至更多时间全身心地研究 HPM 的研究者来说，预备或正式进入教师职业生涯后却将 HPM 束之高阁、抛却脑后的原因，仅可能是“不为也，非不能也”，所以，将 HPM 研究与日常教学割裂来的做法是不可取的，教师应当有意识地运用 HPM，用行动去普及 HPM，甚至可以在教学实践过程中对曾经熟悉的 HPM 理论进行主动地、批判性地思考，让 HPM 成为自己迈向卓越研究型教师的“助推器”。

当然，并非所有学校都是一片匮乏 HPM 的教育田野。笔者的另外一位同学，在实习过程中便和同为校友且同样修读过“数学史与数学教育”课程的带教老师产生了强烈共鸣。在上“点到直线的距离公式”一课时，其带教老师采取了探究性教学方法，即让学生自主探究公式推导。课后，带教表示，因为从前在“数学史与数学教育”课上，听老师介绍过该公式的多种推导方法，确认公式背后具有可供探究的丰富史料，才敢大胆放手，将课堂交予学生。虽然这位在职老师目前不是任何一个 HPM 专业共同体的成员，但若干年前学习过的 HPM 课程在他心中仍有余音。尔后，这位同学又发现，该校数学教研组中许多老师都或多或少地了解 HPM，与他们的学术交流亦增进了对自身 HPM 研究者的身份认同。在她实习期间，虽然不是每节课都呈现出

HPM 特色，但她表示在备课时，一定会阅读相关史料，尽力做到对知识背后的发生发展心中有数，这样才有足够底气站在讲台上，不怕经不起学生和带教的打破沙锅问到底。在这所非 HPM 工作室教学基地，HPM 实践氛围也不算浓厚的学校，仍然有人“可为”且“有为”，若后继有更多的职前青年教师，入职后尝试践行 HPM，即使他们没有被贴上“专业共同体成员”的标签，也成为了真正意义上的 HPM 实践者。

4 结语

以上，笔者基于自己与同伴为期三个月的教育实习经历，从教学设计与实施、学科智育与德育、理论传播与践行三个方面，初步论述了 HPM 与职前教师专业发展的关系。随着一批又一批职前教师走上三尺讲台，从高校 HPM 研究者转换为中小学“HPM 实践者+研究者”，HPM 的影响力将进一步延伸到各地一线教师群体中，带来 HPM 理论的落地生花；同时，来自广大教师的 HPM 实践成果也将反哺高校的 HPM 学术研究，扩宽 HPM 与教师专业发展的研究边界，为 HPM 注入可持续发展的强大动力。未来，以数学学科为样板，各基础教育学科或都将如火如荼地打造“HP+”课程、形成各自学科背景下的“HP+”理论，为中国学科名师的队伍建设添砖加瓦、持续加力。

目　录

刊首新语

历史研究

教学实践

活动讯息

CONTENT

历史研究

20 世纪初美国代数教科书中的数学史

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海，200241）

1 引 言

我们在 19 世纪以前的数学教科书中很少见到数学史的影子。事实上，以蒙蒂克拉（J. E. Montucla, 1725-1799）、康托（M. Cantor, 1829-1920）等为代表的早期数学史家，并非为了教育而去研究数学史，数学史的教育价值远未受到人们的普遍关注，即使是在今天，数学史研究者大多也仍不关注自己所研究主题的教育价值。另一方面，绝大多数教科书编写者对相关领域的历史不甚了了，且数学教育领域与数学史领域的学者之间很少有思想交流，导致大多数数学教科书与数学史之间存在很深的鸿沟。

然而，在 19 世纪末，以史密斯（D. E. Smith, 1860-1944）和卡约黎（F. Cajori, 1859-1930）为代表的美国数学史家改变了数学史被教科书冷遇的现状。史密斯和卡约黎既是数学史家，也是数学教育家，对于数学史的教育价值有着深刻的认识。史密斯是国际数学教育委员会的创始人，曾先后担任该委员会的副主席（1908-1920）和主席（1928-1932），卡约黎则先后担任了全美教育协会“十人委员会”成员（1892）、美国几何大纲“十五人委员会”成员（1910-1913）。与前辈蒙蒂克拉和康托不同，他们撰写数学史的主要目的是为数学教育服务。他们利用自己在数学史方面的学术优势，在各自参编的数学教科书中较多地运用了数学史素材。史密斯和卡约黎对同时代的其他教科书编者产生了较大的影响。

我们选择 20 世纪前 20 年间在美国出版的 11 种代数教科书（Beman & Smith, 1900；Young & Jackson, 1908a； Young & Jackson, 1908b；Durell, 1912；Young & Jackson, 1913；Cajori & Odell, 1915；Slaught & Lennes, 1915；Cajori & Odell, 1916；Hallett & Anderson, 1917；Wentworth, Smith & Brown, 1917；Schultze, 1918），对其中的数学史材料进行考察，试图回答以下问题：11 种代数教科书运用了哪些数学史料？有何特点？它们又是如何运用这些史料的？

2 教科书中的数学史材料

2.1 名人名言

Slaught & Lennes (1915)在扉页中引用培根（R. Bacon, 1214-1294）的话来强调数学的价值。

- “一切科学最终都依赖于数学。”
- “数学应被看做一切哲学的基础。”
- “只有神圣的数学，能够净化人的心智，使学生得以获取一切知识。”

不过，在其他教科书中很少见到名人名言。

2.2 数学词源

Beman & Smith (1900)在附录中，给出了全书涉及的数学术语的词源分析表，帮助学生更好地理解这些术语。表 1 给出了其中一些重要术语的词源分析。

表 1 Beman & Smith(1900)中的部分数学术语词源

术语	词源	分析	中文译名
algebra	阿拉伯语	al：定冠词；jabr：还原，合并。出自花拉子米代数学著作的书名《还原与方程的科学》。	代数学
arithmetic	希腊语	arithmos：数	算术
eliminate	拉丁语	e：往外；limen：门槛。把……赶出门外。	消除
evolution	拉丁语	e：往外；volvere：卷。打开根。	开方
fraction	拉丁语	frangere：打碎；fractus：破碎的	分数
function	拉丁语	functus：完成的	函数
integer	拉丁语	in：否定的；tangere：接触。未接触的，完整的	整数
involution	拉丁语	in：往内；volvere：卷。把根卷成幂。	乘方
logarithm	希腊语	logos：比；arithmos：数。比数。	对数
problem	希腊语	pro：向前；ballein：掷。向前抛出。problema：提出供人解决的问题	问题
symmetry	希腊语	syn：一起；metron：度量。一起度量。	对称
symbol	希腊语	syn：一起；ballein：放置。放到一起	符号
theorem	希腊语	theorema：所思考的一个原理	定理

在数学教科书中补充数学名词的词源分析，这是编写者贝曼（W. W. Beman, 1850-1922）和史密斯的一项创举。

2.3 数学人物

Beman & Smith (1900)在附录中，在扼要介绍代数学的历史之后，收录了书中出现的 43 位数学家的生卒年和简介。Cajori & Odell (1915，1916)使用了韦达（F. Viète, 1540-1603）、笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）、沃利斯（J. Wallis, 1616-1703）、牛顿（I. Newton, 1643-1727）、欧拉（L. Euler, 1707-1776）和德摩根（A. De Morgan, 1806-1872）的画像，画像之下配有简要的文字介绍（图 1）。


牛顿


欧拉


韦达


笛卡儿


沃利斯

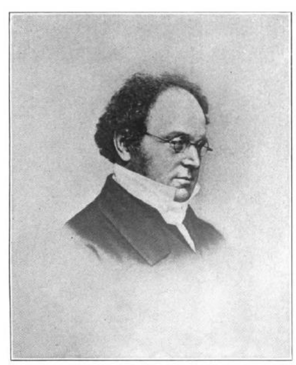

德摩根

图 1　Cajori & Odell (1915; 1916) 中的数学家画像

Slaught & Lennes (1915)使用了魏德曼（J. Widmann, 1462-1498）、韦达、哈密尔顿（R. Hamilton, 1805-1865）、牛顿、毕达哥拉斯、沃利斯、笛卡儿、高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）和帕斯卡（B. Pascal, 1623-1662）的画像（图 2）。画像之下附有简单的生平介绍。

Hallett & Anderson (1917)使用了毕达哥拉斯、欧几里得、韦达、帕斯卡、笛卡儿、牛顿、高斯的画像，画像之下配有简单的生平介绍。

毕达哥拉斯

魏德曼

帕斯卡

哈密尔顿

高斯

图 2　Slaught & Lennes (1915)中的数学家画像

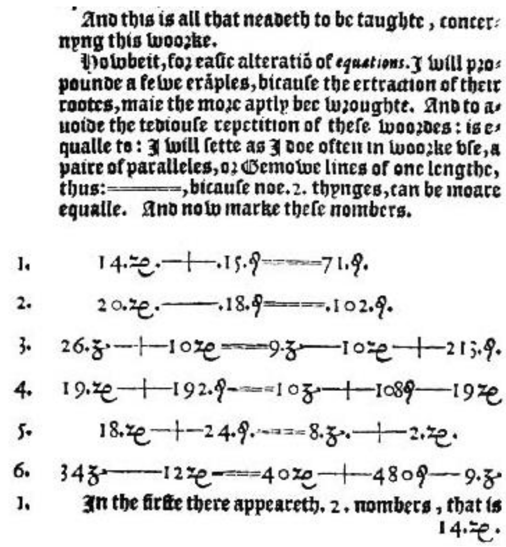
2.4 图片资料

图片资料指的是历史上数学书籍（包括手稿）的书影、历史上天文学家和数学家所使用的测量工具图片、反映数学主题的绘画作品等。

Wentworth, Smith & Brown (1917)代数部分给出雷科德《砺智石》中出现“等号”的一页书影（图 3）、魏德曼算术书中的加减号（图 4）、16 世纪数学书中代数式的写法（图 5）、花拉子米《代数学》拉丁文译文的手抄本书影（图 6）等。

在与史密斯合作之前，美国数学家温特沃斯（G. A. Wentworth, 1835-1906）在其独立编写的各种数学教科书中，未曾使用过任何数学史料。而作为著名的数学史家，史密斯无论是在课堂教学中还是在编写教科书时，都十分重视有关数学历史文献的图片，由于他拥有丰富的藏书，

因而可以自由地使用相关的图片。



And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.
Howbeit, for easie alteratiō of equations. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe. 2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

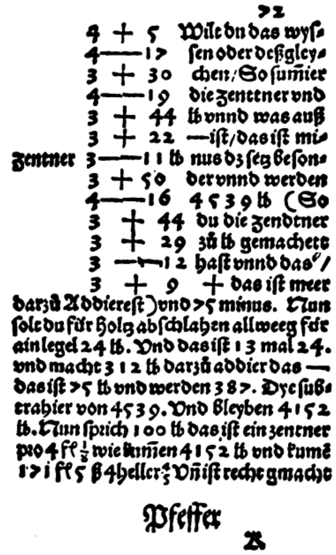


图 3 等号的创用（《砺智石》，1557） 图 4 加减号的创用（魏德曼算术，1489）

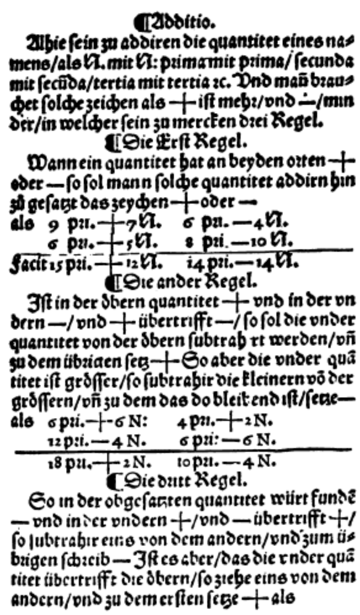


图 5 一次多项式的加法（格兰迈特乌斯，1518） 图 6 花拉子米《代数学》抄本（1456）

2.5 数学问题

数学的历史为教科书提供了取之不尽、用之不竭的问题。Beman & Smith（1900）在“一元一次方程”一章，呈现了数学史上的 10 个问题，具体见表 2。

表 2　Beman & Smith（1900）中的历史问题

题次	问 题	提出者或出处	时间
1	若 9 个搬运工 8 天饮 12 桶酒，则 24 个搬运工 30 天饮多少桶酒？	塔塔格里亚	16 世纪
2	德谟查雷尔（Democharers）的$\frac{1}{4}$为童年，$\frac{1}{5}$为青年，$\frac{1}{3}$为壮年，最后，又度过了 13 年的老年生活。问：他当时几岁了？	米特若多鲁斯（Metrodorus）	4 世纪
3	有 4 根水管，用第一根水管注水，1 天满池；用第二根水管注水，2 天满池；用第三根管子注水，3 天满池；用第四根水管注水，4 天满池。问：四根水管同时注水，即日满池？	海伦	1 世纪
4	今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问：水深、葭长各几何？	《九章算术》	1 世纪[1]
5	马、驴驮麦，同行于道。马谓驴曰：“若你给我一袋，则我所驮是你的两倍；若我给你一袋，则我俩所驮相同。”最博学的几何学大师，请告诉我它们各负多少。	欧几里得	公元前 3 世纪
6	一堆，它的全部和它的$\frac{1}{7}$之和为 19。（求这堆）	莱因得纸草书	公元前 17 世纪
7	一个数的 1/3 与 1 的和乘以这个数的 1/4 与 2 的和，乘积等于 13。	花拉子米	9 世纪
8	池中生莲，出水半尺，风吹莲动，恰没于水，距直立处二尺。问：水深几何？	婆什迦罗	12 世纪
9	二隐士居于高为 h 之山崖之巅，崖底距邑 mh。一隐士下崖至底，步行赴邑，另一隐士升高 x，直飞赴邑，二者行程相等。试求 x。	婆罗摩笈多	7 世纪
10	古问称：提图斯与凯乌斯同坐用餐。凯乌斯吃了 7 份，提图斯吃了 8 份。此时，辛普洛涅斯加了进来，三人各吃相同份数。辛普洛涅斯取出 30 第纳尔，说：“你们分这些钱，用来付我的餐费。”问：提图斯与凯乌斯各得多少钱？	不详	不详

[1] Beman 和 Smith 误为公元前 2600 年。

Young & Jackson (1908a)采用了 14 世纪数学手稿以及 17-18 世纪法国数学家奥泽南（J. Ozanam, 1640-1718）、英国数学家桑德森（N. Sanderson, 1682-1739）、辛普森（T. Simpson, 1710-1761）和 19 世纪英国数学家布兰德（M. Bland, 1786-1868）有关著作中的数学问题，如：

- 今有 3 个酒桶，总容积为 79 加仑。第二个酒桶比第一个酒桶的一半多了 3 加仑，第三个酒桶比第二个酒桶少 7 加仑。问：每个酒桶的容积各为多少加仑？（14 世纪数学手稿）
- 甲对乙说："若你给我 3 个硬币，则我的硬币和你一样多。"乙回答说："若你给我 3 个硬币，则我的硬币是你的两倍。"求甲、乙各有硬币数。（奥泽南《代数基础》，1702）
- 若干人在酒馆付账。他们发现，若增加 3 人，则每人各少付 1 先令；若减少两人，则每人需多付 1 先令。求原来的人数和账款。（桑德森《代数基础》，1740）
- 7 年前，某人的年龄是其儿子的 4 倍；7 年过去了，他的年龄变成儿子年龄的 2 倍。求父子的年龄。（辛普森《代数专论》，1767）
- 一辆长途汽车从剑桥出发开往伦敦，车厢外所载旅客比车厢内多了 4 人，7 位车厢外旅客的车费比 4 位车厢内旅客便宜 2 先令；全部旅客的车费为 180 先令。汽车行驶半程后，又新载了 1 位车厢内旅客和 3 位车厢外旅客，他们的车费是原来旅客的 $\frac{2}{15}$ 。求旅客总数以及各人的车费。（布兰德《代数问题》，1816）

Young & Jackson (1908b)采用了法国数学家奥泽南、克莱罗（A. Clairaut, 1713-1765）和英国数学家牛顿（I. Newton, 1643-1727）等的数学问题，如：

- 信使从巴黎出发去格勒诺布尔，两地相距 120 里，共用了 4 天时间。从第二天开始，每一天比前一天少走 2 里。问：每天各走几里？（奥泽南《代数基础》，1702）
- 甲单独完成 a 单位工作量，需 b 单位时间；乙单独完成 c 单位工作量，需要 d 单位时间；丙单独完成 e 单位工作量，需要 f 单位时间。问；三人一起完成 g 单位工作量，需要多长时间？（克莱罗《代数》，1746）
- 甲、乙两地相距 59 英里。A 和 B 各从甲地和乙地出发，相向而行。B 比 A 迟 1 小时出发。A2 小时走 7 英里， B3 小时走 8 英里。问：A 与 B 相遇时，A 走了多远？（牛顿《广义算术》，1707）

Young & Jackson (1913) 采用了 18 世纪英国数学家桑德森、瑞士数学家欧拉和法国数学家波素（C. Bossut, 1730-1814）的数学问题：

• 甲、乙、丙各欠某人若干镑。已知甲、乙共欠 60 镑，甲、丙共欠 80 镑，乙、丙共欠 92 镑。问：甲、乙、丙各欠多少镑？（桑德森《代数基础》，1740）

• 一座房子值钱 100 元。若 A 除了自己的钱外，还拥有 B 的钱的一半，B 除了自己的钱外还拥有 C 的钱的三分之一，C 除了自己的钱外还拥有 A 的钱的四分之一，他们各自就能买得起这座房子。问：A、B、C 各有多少钱？（欧拉《代数基础》，1770）

• 一个装满水的容器共有 A、B、C 三个排水孔。若三孔同开，则 6 小时排空；仅用 B 孔排空容器所需时间是仅用 A 孔所需时间的 3/4 倍；仅用 C 孔排空容器所需时间是仅用 B 孔所需时间的两倍。问：各排水孔单独排空容器，各需多长时间？（波素《代数基础》，1773）

Schultze (1918) 在全书最后给出 1012 道复习题，其中有三题源于数学史：

• 根据开普勒定律，行星到太阳的距离的立方之比，等于它们的公转周期的平方之比。已知地球与木星到太阳的距离之比为 1:5.2，地球的公转周期为 $365\frac{1}{4}$，求木星的公转周期。

• 完满数指的是与所有真因数之和相等的数。若数列 2^0，2^1，2^2，……，2^n 的和为素数，则该数乘以数列的最后一项，结果为完满数。（欧几里得）试求出 4 个完满数。

• 一则阿拉伯传说指出，象棋是由一位名叫赛萨的人为娱乐印度国王希兰而发明的。这位国王承诺奖赏发明者：在棋盘的第一格放 1 粒麦子，在第二格放 2 粒，在第三格放 4 粒等等，后一格的麦粒数是前一格的两倍。试求赛萨将要获得的麦粒数。

2.6 专题历史

数学专题的历史通常以注解的形式出现，主要追溯某个主题（公式、定理）的起源、发现者或简史。

Slaught & Lennes (1915)在全书的 18 个主题之后加了历史注解：印度-阿拉伯数码的起源、运算符号的起源、括号（包括大、中、小括号）的起源、乘除法分配律的起源、“代数”一词的起源、用字母表示未知数、负数概念的发展、加法的结合律与交换律、乘法的结合律与交换律、指数、毕达哥拉斯定理、分数的书写方法、比与比例、字母系数方程与求根公式、用图形表示方程、根式、二次方程与虚根、二项式定理。

Young & Jackson (1913) 则在每一章的末尾给出历史注解，见表 3。

与其他教科书不同，Cajori & Odell (1915; 1916)将有关数学史内容以整节的篇幅写

表 3　Young & Jackson (1913)中的历史注解

章 名	专题	具体内容
字母符号及其用途	字母符号的历史	丢番图墓志铭；丢番图最早使用字母符号。
基本术语的定义	数学符号的历史	丢番图表达二次多项式的方法；加、减、乘、除、根号、等号的发明。
正负数	负数的历史	印度人最早使用负数并将其解释为“欠债”；婆什迦罗、笛卡儿、卡丹等人的工作。
方程	一次方程的历史	阿莫斯纸草书上的一元一次方程 $x+\frac{1}{7}x=19$ 及其解法。
除法	“代数”一词的起源	花拉子米的代数学著作。
方程	因式分解法的历史	哈利奥特最早运用因式分解法解方程。
一次方程的图像	解析几何的历史	笛卡儿与解析几何。
乘方与开方	二项式定理的历史	印度、阿拉伯数学家以及韦达、帕斯卡和牛顿的有关工作。
二次方程	一元二次方程的历史	印度数学家以及花拉子米、斯蒂菲尔、斯蒂文的有关工作。
二次方程组	二次方程组的历史	丢番图、热尔贝和西尔维斯特的有关工作。
复习与拓展	运算律的历史	哈密尔顿与结合律、交换律和分配律。
指数与根	指数的历史	韦达表达幂的方法；沃利斯的生平；沃利斯 最早创用负整数指数。
对数	对数的历史	纳皮尔发明对数；布里格斯将对数改进为常用对数；对数的意义。
虚数与复数	复数的历史	维塞尔和高斯用几何方法表示虚数；“数学王子”高斯的生平。
二次方程	方程求解的历史	塔塔格里亚、卡丹与三次方程的解法；费拉里与四次方程的解法；阿贝尔的结论。
数列	数列的历史	巴比伦泥版上的各种数列；16 世纪教科书上的等比数列问题；婆什迦罗与等差、等比数列通项、求和公式。

入正文之中（但用了小号字），而非放在全书或某一章最后的附录之中。如“代数学的肇始”、“一元二次方程的历史”、“分数的历史”、运算律的历史、对数的发明等等。

关于代数学的早期历史（图 7），Cajori & Odell 介绍了古埃及人表达方程的方法，丢番图（Diophantus, 3 世纪）、韦达、努内茨（P. Nunes, 1502-1578）表达幂的方法，雷科德等号“=”的发明。

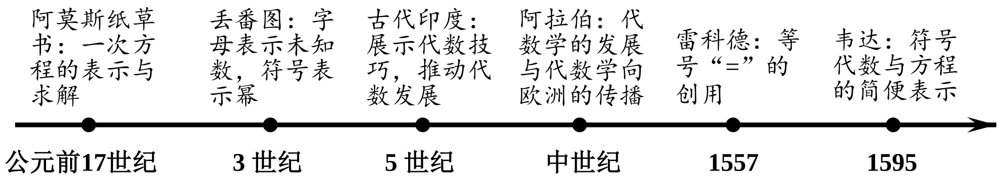


图 7　Cajori & Odell (1915, 1916)所介绍的代数学早期历史

关于运算律，Cajori & Odell 告诉读者，尽管代数学的历史可以上溯到公元前 2000 年，但在 19 世纪以前，人们只是默认交换律、结合律和分配律是正确的，无人给出证明，19 世纪法国、德国、美国有关数学家的工作才使代数学臻于完善。法国数学家赛尔瓦（F. J. Servois, 1768-1847）最早给出“交换律”和“分配律”之名 ；英国数学家哈密尔顿最早给出“结合律”之名。

关于对数的历史，Cajori & Odell 介绍了苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）在发明对数之前的一段经历：纳皮尔曾长期住在恩德里克河畔一座风景秀丽的城堡里。城堡对岸有一家棉绒厂，厂里发出的噪音常常打断纳皮尔的思路，纳皮尔曾希望厂主关掉工厂。

2.7 数学概念

如果一个知识点发生发展的逻辑序和历史序有差异，那么教科书在编排该知识点时就需要在参照学生心理序的基础上，在两者之间作出适当的选择。Beman & Smith(1900)借鉴历史序来呈现数系扩充的过程，如图 8 所示。编者将零的引入安排在负数之后，也符合历史序。

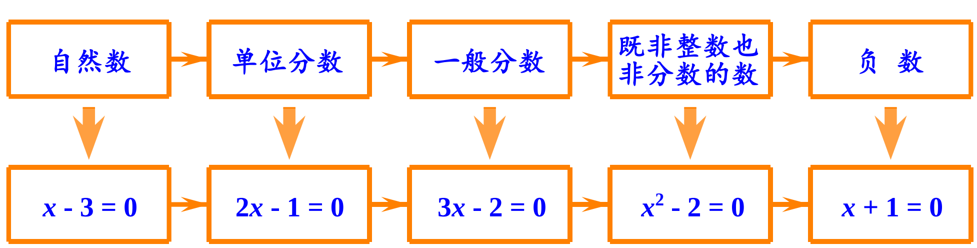


图 8　负数的引入

2.8 思想方法

Slaught & Lennes (1915)在一元二次方程的解法中，除了通常的配方法，还采用了“印度配方法”：在方程 $ax^2+bx+c=0$ 两边乘以二次项系数 4a，得

$$4a^2x^2+4abx=-4ac$$

两边加上 b^2，得

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$$

即

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

这种配方法最早由 11 世纪印度数学家斯律陀罗（Siridara）给出，其优点是避开了分数的使用。

3 讨论

3.1 数学史的运用方式

数学教科书运用数学史的方式可分为点缀式、附加式、复制式、顺应式和重构式五种（汪晓勤，2012）。

点缀式是以“装饰”、“美化”、“人性化”为目的的运用方式。数学家的画像、古代数学书籍、数学符号、测量或作图工具的图片、反映数学主题的艺术作品等都属于点缀式素材。所考察的 11 种代数教科书中，出现最多的点缀式素材是数学家的画像。但点缀式素材并非仅仅为点缀而点缀，而是以图辅文、图文相配。如，Cajori & Odell (1915，1916)在介绍代数学历史时，介绍了韦达和笛卡儿表达方程的方式，故在不同章的末尾配上两位数学家画像，并在画像的下方给出各自的方程表达方式。一般地说，教科书使用的都是对所涉及学科或主题作出重大贡献的数学家的画像。

附加式是以“追溯历史起源、补充历史知识、提供辅助材料”为目的的运用方式，附加式素材通常以附录、注解的形式出现，可与正文内容分离。11 种代数教科书中，名人名言、词源分析、数学家生平介绍、数学专题的历史注解均属于附加式素材。

复制式是指原原本本采用历史上的数学问题、问题解法、定理证法等，或直接在正文中介绍有关主题的历史。复制式数学史素材是教科书正文不可分割的一部分，其功能是提供数学问题、再现古人智慧、促进数学学习。在 11 种教科书中，采自数学史文献的问题和方法都属于复制式素材。

所谓顺应式，是指根据历史材料来编制问题，或将历史上的数学问题进行改编，使之更适合于今日的教学，或将历史上的思想方法进行改进、简化，使之顺应时代。顺应式数学史素材也是教科书不可分割的一部分，其功能是提供数学问题、增加探究机会、展示数学思想、激发学习兴趣。尽管 11 种教科书采用了较多的数学史问题，但只有 Schultze (1918)的开普勒行星定律的应用问题和完满数问题属于顺应式。

重构式是指借鉴知识的发生、发展历史，以发生法来呈现知识。重构并非原原本本的重复，而是在借鉴历史的基础上，结合知识的逻辑序和学生的心理序，自然而然地呈现一个主题，其功能是把握认知基础、激发学习动机、促进数学理解。Beman & Smith (1900)引入负数概念的方式即属于重构式。然而，这种方式在早期教科书中用得很少。

图 9 给出了 11 种教科书中的数学史素材类别与五种运用方式之间的对应关系。

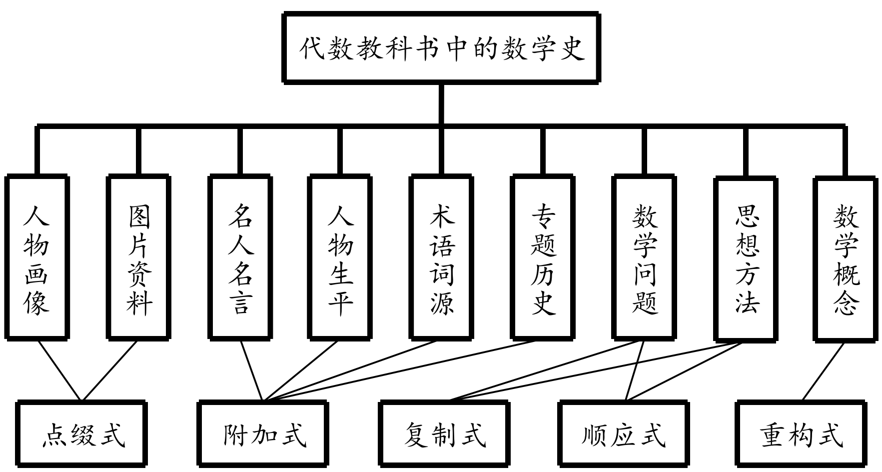


图 9 各类数学史素材在代数教科书中的不同运用方式

3.2 数学史素材的若干特点

早期代数教科书对数学史素材的运用，呈现出以下特点。

其一，不同教科书运用数学史的情况千差万别。

11 种代数教科书或多或少都运用了数学史，但运用数学史的数量和方式不尽相同，并没有什么标准。若进一步考察同时代更多的代数教科书，则会发现：在很多教科书中几乎见不到任何数学史素材。显然，数学教科书中是否运用数学史、运用多少、如何运用，都取决于编写者对数学史的了解以及对数学史教育价值的认识。Beman & Smith（1900）、Young & Jackson（1913）、Cajori & Odell（1915）、Slaught & Lennes（1915）等运用数学史，成了那个时代的典范。

其二，数学教科书运用数学史的情况与同时代数学史学术研究状况密切相关。

史密斯、卡约黎都是专业数学史家，而贝曼、杨格（J. W. A. Young, 1865-1948）、斯劳特（H. E. Slaught, 1861-1937）等数学家对数学史也都有浓厚的兴趣，贝曼曾与史密斯合作翻译德国学者芬克（K. Fink, 1851-1898）的《初等数学史》（1899）和《数学简史》（1900），杨格在数学史方面也有著述。尽管如此，他们所掌握的数学史知识明显有着时代的局限性。例如，他们在教科书中只字未提中国古代数学家对负数的运用以及在二项式定理、一元高次方程、高次方程组、等差数列等方面的具有世界意义的工作。实际上，在英国著名科学史家李约瑟（J. Needham, 1900-1995）出版《中国的科学与文明》之前，西方学者对于中国古代数学成就知之甚少；甚至连 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）这样学问宏博的数学史家也完全忽略中国古代数学的成就。

其三，数学课程改革对数学史在教科书中的运用产生重要影响。

20 世纪初，培利运动如火如荼，科学人文主义运动方兴未艾，数学课程处在变革之中。由美国数学协会（史密斯、斯劳特先后担任过会长）成立、杨格担任会长的“全国数学需求委员会”试图对美国的数学课程进行重构，该委员会在报告建议，为了激发学生对数学的兴趣，揭示该学科的意义，必须在教学中广泛使用数学历史和传记材料（The National Committee of Mathematical Requirements, 1922）。在这样的背景下，作为课程改革的引领者，斯劳特、杨格、史密斯等在教科书中注重数学史素材的运用，也就成为自然而然的事了。

4 结语

20 世纪初的 11 种美国代数教科书使用了较为丰富的数学史素材，涉及名人名言、数学人物、数学名词、文献资料、数学问题、数学概念、思想方法、专题历史等，其中使用最多的是数学问题和专题历史；运用数学史的方式有点缀式、附加式、复制式、顺应式和重构式，但顺

应式和重构式很少出现；教科书运用数学史的情况与同时代数学史研究、编写者的数学史素养以及当时的数学课程改革大背景息息相关。

数学史融入数学教科书，在今天仍是一个颇受关注的主题，早期教科书所用数学史素材的类别较为丰富，为我们带来了很多思想启迪。

其一，让数学人性化、富有趣味性和吸引力，是教科书运用数学史材料的重要目的之一，教师或教科书在介绍数学家生平时，可以按照“一个人物、一个故事、一个主题和一种思想”来展开；

其二，名人名言、数学术语的词源、专题的历史等附加式素材在今日教科书中并不多见，而这些素材都有助于学生对相关主题的学习，完全可用于今日教科书或课堂教学之中；

其三，历史上的数学问题或基于数学史编制的数学问题是最重要的复制式或顺应式素材，尽管近年来中考或高考试卷上出现了一些数学文化问题，但问题来源相对单一，基于数学史的问题编制理应成为未来数学教师重要的研究课题；

其四，兼顾历史序、逻辑序和心理序，是概念呈现或概念教学的指导思想，是否遵循这一指导思想，决定数学史运用水平的高下。

将数学史融入数学教科书是一项系统工程。编写者不仅需要对数学学科的育人价值以及数学史独特的教育价值有深刻的认识，而且需要掌握丰富的数学史素材和对数学史料进行裁剪和加工的策略。在 20 世纪之初浩如烟海的西方代数教科书中，只有极少数运用数学史，这一事实充分证明：对于教科书编写者而言，数学史的运用并非易事，而要做到历史序、逻辑序和心理序的统一，则更为艰难。我们有理由相信，教科书如何运用数学史素材、用什么数学史素材，是一个需要数学教育研究者和数学史研究者交流合作、长期研究的课题。

参考文献

[1] Beman, W. W., Smith, D. E. (1900). *Elements of Algebra.* Boston: Ginn & Company.

[2] Cajori, F., Odell, L. R. (1915). *Elementary Algebra: First Year Course*. New York: The Macmillan Company.

[3] Cajori, F., Odell, L. R. (1916). *Elementary Algebra: Second Year Course*. New York: The Macmillan Company.

[4] Durell, F. (1912). *Introductory Algebra*. New York: Charles E. Merrills Co.

[5] Hallett, G. H., Anderson, R. F. (1917). *Elementary Algebra*. Boston: Silver, Burdett & Company.

[6] The National Committee of Mathematical Requirements (1922). *The Reorganization of Mathematics in Secondary Education*. Washington: The Mathematical Association of America.

[7] Slaught, H. E., Lennes, N. J. (1915). *Elementary Algebra*. Boston: Allyn & Bacon.

[8] Wentworth, G. A., Smith, D. E. & Brown, J. C. (1917). *Junior High School Mathematics*, Boston: Ginn and Company.

[9] Young, J. W. A., Jackson, L. L. (1908a). *Elementary Algebra*. New York: D. Appleton & Company.

[10] Young, J. W. A., Jackson, L. L. (1908b). *A First Course in Elementary Algebra*. New York: D. Appleton & Company.

[11] Young, J. W. A., Jackson, L. L. (1913). *A High School Algebra*. New York: D. Appleton & Company.

[12] Schultze, A. (1918). *Elements of Algebra*. New York: The Macmillan Company.

[13] 汪晓勤(2012). 法国初中教科书中的数学史. 数学通报, 51(3): 16-20; 23.

美英早期几何教科书中的二面角应用问题

刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

《普通高中数学课程标准》(2017 年版）指出：“数学是自然科学的重要基础，并且在社会科学中发挥越来越大的作用，数学的应用已渗透到现代社会及人们日常生活的各个方面。在学习数学和应用数学的过程中，学生能发展数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算、数据分析等数学学科核心素养。”[1]随着素质教育的观念日渐深入人心，在教学中加强理论与实际相结合、注重培养学生的数学应用意识及能力是新课改背景下数学教育工作者的普遍共识，数学应用能力屹然成为了基础教育阶段数学教学的重要内容和目的。

二面角是立体几何中的一个重要内容，它是空间图形中突出的量化指标，是空间图形位置关系的具体体现[2]。二面角及其平面角之间的一一对应关系架起了平面几何与立体几何之间的桥梁，其对于学生后续探索柱、锥、台等基本立体图形的面面关系起到了十分重要的作用。事实上，二面角在数学内部及外部都有着极为广泛的应用，在数学内部中，二面角及其平面角的定义不仅用于证明点、线、面之间的关系，还使得平面角中的诸多性质在二面角中同样适用，而在现实生活中，二面角常被应用于工程、建筑及测量等领域，为人们的生产生活带来了极大的便利。

已有的教学设计中，有的教师通过设置折纸问题，让学生应用二面角的知识计算两点间的距离[3]。有的教师让学生在几何体中利用二面角的平面角的定义寻找平面角，从而计算二面角的大小[4]。数学应用不等于数学解题，更重要的是将其与日常生活中的许多问题建立起联系。鉴于此，本文对 19-20 世纪美英几何教科书进行考察，试图在其中寻找有关二面角应用的素材，为今日教师教学提供有益参考。

2 早期教科书的选取

本文选取 1819-1958 年间出版的 85 种美英早期几何教科书作为研究对象，以 20 年为一个

时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

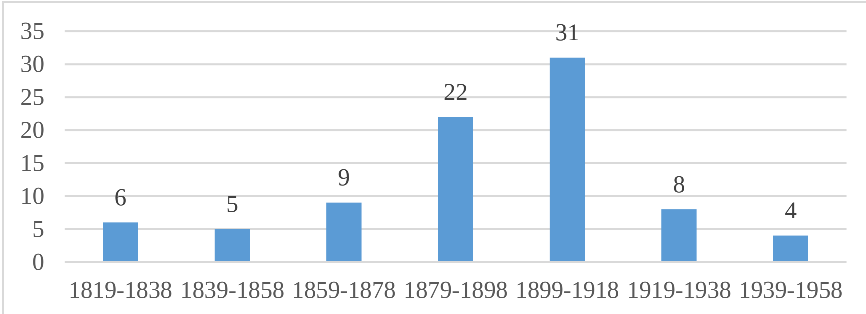


图 1 85 种美英早期几何教科书的出版时间分布

关于二面角应用的内容大多直接出现在二面角及其平面角的定义之后，早期教科书中涉及数学上的应用多是以命题的方式进行呈现，而涉及实际生活中的应用多来自“空间中的直线和平面”“平面角和多面角”等章节的练习题中。

3 数学上的应用

二面角及其平面角的定义不仅使得空间中面面关系的证明和计算得以简化，同时也能将平面角的相关性质进一步推广延伸到二面角中。美英早期几何教科书中关于二面角在数学上的应用问题可以分为面面垂直问题、距离问题、性质类问题和其它问题四类。

3.1 面面垂直问题

例 1：证明命题“如果一条直线垂直于一个平面，则任意一个过这条直线的平面都垂直于另一平面。”[5]在图 2 中，已知直线 AB 垂直于平面 MN，则任意一个过直线 AB 的平面都垂直于平面 MN。

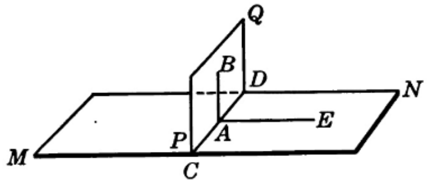


图 2 例 1 图

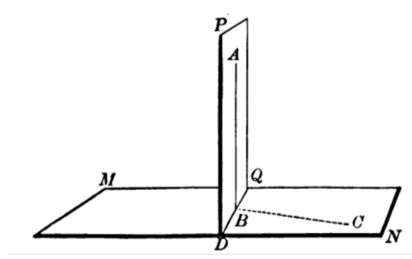


图 3 例 2 图

设平面 PQ 过直线 AB，且与平面 MN 交于直线 CD。在面 MN 中作 $AE\perp CD$，又因为 $AB\perp$

CD，所以$\angle BAE$是二面角 $N\text{-}CD\text{-}Q$ 的平面角。又因为 $AB\perp AE$，所以面 $PQ\perp$面 MN。

例 2：证明命题“如果两平面互相垂直，一条直线位于一个平面中且垂直于两平面的交线，则这条直线与另一个平面垂直。”[6]在图 3 中，若面 $PQ\perp$面 MN 且两平面交于直线 DQ，直线 $AB\subseteq$面 PQ 内且 $AB\perp DQ$，则 $AB\perp$面 MN。

过点 B 在平面 MN 内作 $BC\perp DQ$，因为 $AB\perp DQ$，所以$\angle ABC$是二面角 $P\text{-}DQ\text{-}N$ 的平面角，因为面 $PQ\perp$面 MN，于是$\angle ABC=90°$。由 $AB\perp DQ$ 及 $AB\perp BC$，则 $AB\perp$面 MN。

3.2 距离问题

例 3：证明命题“二面角平分面上任意一点到两平面的距离相等。”[7]在图 4 中，假设点 P 是二面角 $C\text{-}AB\text{-}D$ 的平分面 AM 上一点，则点 P 到平面 AC、BD 的距离相等。

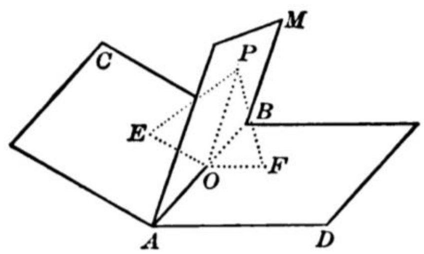


图 4 例 3 图

过点 P 作 $PE\perp$面 AC、$PF\perp$面 BD，垂足为 E、F。通过 PE 和 PF 作一平面交面 AC 于直线 OE、交面 BD 于直线 OF，于是 $AB\perp$面 PEF。因为 $AB\perp OE$、$AB\perp OP$ 及 $AB\perp OF$，则$\angle EOP$、$\angle POF$分别为二面角 $C\text{-}AB\text{-}M$、$M\text{-}AB\text{-}D$ 的平面角。又因为$\angle EOP=\angle POF$、$\angle PEO=\angle PFO=90°$及 OP 为公共边，所以$\Delta PEO\cong\Delta PFO$，则 $PE=PF$。

例 4：在例 3 的基础上，如果 $PF=EF$，则二面角 $C\text{-}AB\text{-}D$ 的度数是多少；如果 $PF=OF$，则二面角 $C\text{-}AB\text{-}D$ 的度数又是多少。[8]

如图 4，因为 $PF=EF$，则 $PF=PE=EF$，由ΔPEF是等边三角形，于是$\angle EPF=60°$，则$\angle EOF=120°$，即二面角 $C\text{-}AB\text{-}D$ 的度数是 120°。因为 $PF=OF$，则ΔPFO是等腰直角三角形，故$\angle POF=45°$，于是$\angle EOF=2\angle POF=90°$, 即二面角 $C\text{-}AB\text{-}D$ 的度数是 90°。

3.3 性质类问题

我们知道，二面角的度数等于其平面角的度数，于是许多平面上角的性质对于二面角同样

适用。表 1 给出了二面角的许多性质。对于表 1 中二面角的性质，将二面角转化为二面角的平面角即可完成证明，由此也出现了一系列的计算问题。

表 1 二面角的性质

编号	性质	教科书
1	若两平面相交，则对顶二面角相等。[6]	Wentworth
2	若一平面与两平行面相交，同位二面角相等，内错二面角相等，割平面同侧的两个内二面角互补。[6]	（1880）
3	当两平面被第三个平面所截，若同位二面角相等或内错二面角相等或割平面同侧的两个内二面角互补，则这两个平面平行。[6]	
4	如果两个二面角的面分别对应平行，两组对应面均位于棱的同侧或异侧，则两个二面角相等。[6]	
5	如果两个二面角的面分别对应平行，其中一组对应面位于棱的同侧，另一组对应面分别位于棱的两侧，则两个二面角互补。[6]	
6	若两平面相交，则在同一边上的两个二面角度数相加等于两个直角。[9]	Davies（1841）
7	若几个二面角度数相加等于两个直角，则相加后二面角的外表面会形成一个平面。[10]	Tappan（1864）
8	所有的直二面角都相等。[10]	

例 5：两个平行平面 MN 和 PQ 被第三个平面 RS 所截，使得其中一个二面角的度数为 27°15′30″，请寻找其它二面角的度数。[11]

例 6：指出图 5 中的相邻二面角、对顶二面角以及两个互补的二面角。[12]

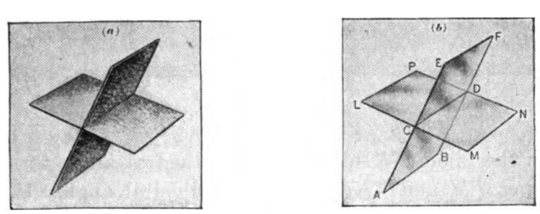


图 5 例 6 图

3.4 其他问题

例 7：是否存在一条直线 KL，使得 KL 垂直于二面角 $O\text{-}AM\text{-}N$ 的两平面。[13]

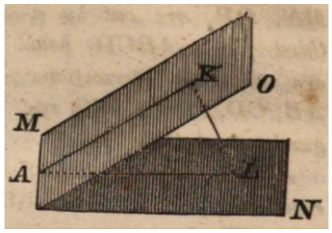


图 6 例 7 图

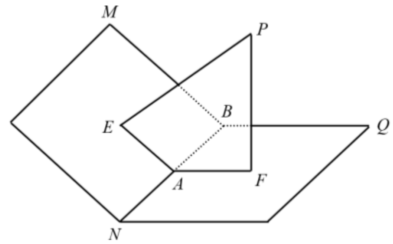


图 7 例 8 图

如图 6，过点 K 在平面 OM 中作 $KA\perp AM$，过点 L 在平面 MN 中作 $LA\perp AM$，于是$\angle KAL$ 是二面角 $O\text{-}AM\text{-}N$ 的平面角。如果 $KL\perp$面 MN、$KL\perp$面 MO，则在ΔAKL 中有两个直角，这显然与事实不符，所以不存在一条直线同时垂直于二面角的两平面。

例 8：证明命题“从二面角内任何一点作两平面的垂线，两条垂线所夹的角等于这个二面角的补角。”[14]过二面角 $M\text{-}NB\text{-}Q$ 内一点 P，作 $PE\perp$面 MN、$PF\perp$面 NQ，垂足分别为 E、F（图 7）。由例 3 中的证明可知 $AE\perp NB$、$AF\perp NB$，则$\angle EAF$ 为二面角 $M\text{-}NB\text{-}Q$ 的平面角。在四边形 $PEAF$ 中，因为$\angle PEA=\angle PFA=90°$，而四边形内角和为 360°，所以$\angle EAF+\angle EPF=180°$。

4 生活中的应用

二面角的概念在实际生活中有诸多的应用，其不仅能与日常生活中许多常见的事物建立起联系，还在工程、建筑等领域有着即为广泛的应用。在 85 种几何教科书中，涉及二面角在现实生活中的应用问题包括定义类问题、建筑问题、工程问题、操作问题四类。

4.1 定义类问题

套上实际生活的外衣，本质上依然运用二面角及其平面角的定义，可以在许多二面角的实物中找到其平面角。

例 9：表明打开书页之间的二面角是通过两页上相对文字线之间的平面角进行测量。[12]

例 10：说明一扇门打开时，所经过的二面角是通过门底边缘运动时所经过的平面角来测量的。[12]

例 11：如图 8，在旋转门中找出①直二面角、②邻接二面角、③互补二面角、④垂直于两

相交平面的第三个平面、⑤三个平面的公共点，其中每个平面都与另外两个平面相交。[15]

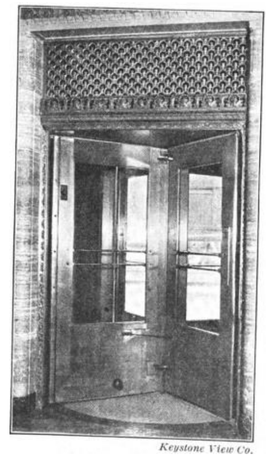


图 8 例 11 图

4.2 建筑问题

例 12：屋顶长为 60 英寸、宽为 40 英寸且与水平方向成 45°角，如果太阳直射屋顶，找出屋顶阴影在地面上的区域。[5]

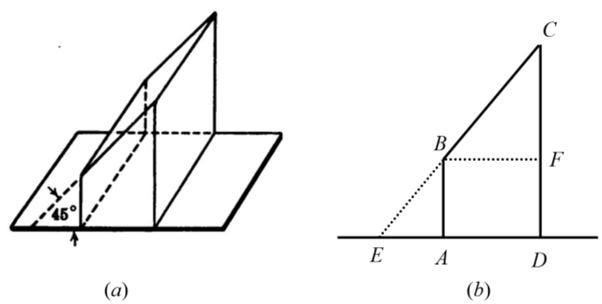


图 9 例 12 图

在图 9(a)中，因为太阳直射屋顶，所以屋顶阴影的长与屋顶相同，仍然是 60 英寸。对于屋顶阴影的宽，图 9(b)是屋顶的横截面，延长 CB 交 DA 的延长线于点 E，过点 B 作 $BF\,//\,ED$，交 CD 于点 F。因为$\angle CED=\angle CBF=45°$及 $CB=40$，所以 $BF=AD=20\sqrt{2}$，于是屋顶阴影在地面上的区域是一个长为 60 英寸，宽为$20\sqrt{2}$英寸的矩形。

例 13：凸窗的相邻两面所夹二面角的度数是多少，凸窗由三个相等的直立平面部分组成，它们的底部包含一个正八边形的三个边。[12]因为凸窗的横截面是一个包含三条边的正八边形，而正八边形的每一个内角均为 135°，因此凸窗相邻两面的二面角度数是 135°。

4.3 工程问题

例 14：如果给一根铅垂线和木工方尺，如何确定地板水平？如果给一个水平尺或水平仪，又如何确定地板水平。[16-17]使用铅垂线可以用来检验平面与水平面垂直，当墙壁与水平面垂直后，运用木工方尺的一边紧贴墙壁，其直角紧贴墙壁和地板的棱，若木工方尺的另一边能紧贴地板，由例 1 的结论可知地板水平。若利用水平尺或水平仪，观察水平仪两次则可以确定地板是否水平，此时水平仪摆放的位置不平行。

例 15：木匠如何通过斜角规和量角器来确定房间相邻两面墙的度数。[18]利用二面角的平面角的定义用铁丝贴紧墙面，铁丝折成的角度等于房间相邻两面墙的度数。

4.4 操作问题

例 16：将一张厚纸或硬纸板按图中所示的方式切割和折叠，制作一个测量二面角的仪器（图 10）。[19]

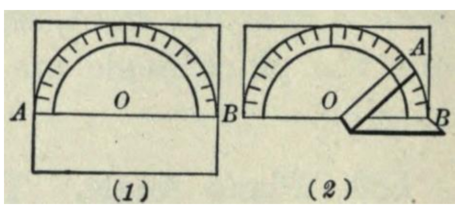


图 10 例 16 图

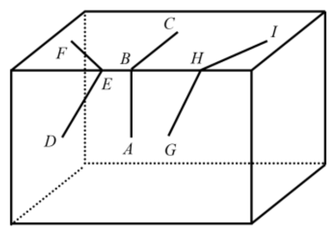


图 11 例 17 图

例 17：有一个长方体铁块（图 11），如果将铁丝像 ABC 那样绕长方体的棱弯曲，使得$\angle ABC=90°$，则会以何种方式弯曲铁丝；如果绕边缘倾斜地弯曲一根铁丝，例如 DEF，可以将它弯曲到什么角度；如果将铁丝倾斜弯曲，就像 GHI，可以将它弯曲到什么角度。[20]

与之相类似的问题还包括：如果过二面角棱上任意一点在两平面内作直线，则两直线所成平面角的度数可以从 0 到两个直角，请使用房间墙壁的角落或盒子的棱予以解释。[21]

5 二面角应用的演变

以 20 年为一个时间段，图 12 给出了二面角应用问题的时间段分布情况。由图看出，二面角在数学上的应用一直被教科书编者所青睐，在 1819 年开始的 140 年中，超过半数的教科书均有所涉及。只有二面角及其平面角的定义、而没有二面角应用的教科书逐渐减少，与此同时，

19 世纪中叶以后，有越来越多的教科书不仅包含二面角在数学上的应用，还会加入其在实际生活方面的应用。

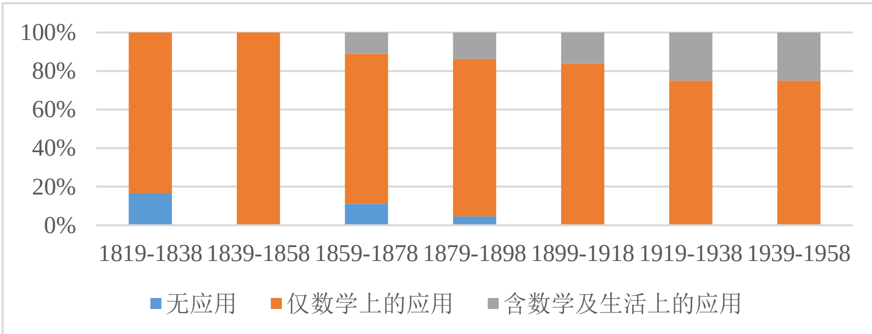


图 12 二面角应用问题的时间分布

19 世纪末 20 世纪初，随着科学技术的迅猛发展，由于当时的数学课程已不能适应科学和生活需要，也不能适应数学自身发展的需要，于是“克莱因—贝利运动”悄然兴起。英国数学家贝利提出“数学教育应该面向大众”“数学教育必须重视应用”的改革指导思想；德国数学家克莱因认为，数学教育的意义、内容、教材、方法等，必须紧跟时代步伐，结合近代数学和教育学的新进展，不断进行改革，他提出的改革方针是：顺应学生心理发展的规律，选取和排列教材；融合数学各分科，密切数学与其他学科的关系；不过分强调数学的形式训练，应当强调实用方面，以便充分发展学生对自然和社会的各种现象进行数学观察的能力；以函数概念和直观几何作为数学教学的核心[22]。

此后，在 1908 年 12 月，美国数学和国家科学教师联合会批准任命一个由 15 人组成的国家委员会（以下简称“十五人委员会”）负责几何教学大纲的修订。在十五人委员会关于几何大纲的最终报告中指出：立体几何扮演着越来越重要的角色，其为实际测量提供了一个相当广泛的领域。因此，十五人委员会将学习立体几何的目标总结为：强调并延续平面几何的价值；提出立体几何在测量领域的合理应用范围；培养空间想象能力[23]。在这两次数学教育改革的推动下，数学课程逐步转向注重数学的实用性和生活性，由此，20 世纪以来，越来越多的几何教科书编者会在教科书中加入关于二面角在实际生活中应用的内容。

6 教学启示

综上所述，历史上出现了二面角的诸多应用，其既可以用于几何证明、计算二面角度数等数学问题之中，又可以用于测量墙体的垂直度、计算相邻墙体夹角等生活问题之中，这些素材

为今日二面角应用的教学提供了诸多启示。

第一，以“境”培养学生学习数学的兴趣。兴趣是最好的老师，也是学生各种创造力、求知欲的原动力。应试教育让许多学生觉得数学是索然无味的，而新课改背景的数学教学则要极力改变这一现状。从二面角应用的教学来看，应用不能仅仅停留在简单几何体的计算之上，而应以学生周围的事物为载体，例如门窗、电脑开合等，并伴随动手操作，这样才可以称得上一种“有效应用”。学生涉境体味，在亲身经历中不仅加深了对于二面角及其平面角概念的理解和记忆，更重要的是学生成为了学习的主人，提高了数学学习效率和学习的兴趣。

第二，以“观”培养学生的数学应用意识。想要培养学生的应用意识，首先则应加强教师的应用意识。在日常生活中，教师应努力成为一名细心的“观察者”，于是教师将会惊奇的发现现实生产和生活中的诸多问题都与数学有关，把数学和周围的世界紧密联系在一起，将赋予数学新的内涵和使命。与此同时，教师也要引导学生善于观察，鼓励学生提出问题并运用所学知识解决问题。因此，教师可以给学生布置“寻找身边的二面角并进行测量”等问题，这样做不仅给予学生自主学习的空间，还有助于让学生体验数学在解决实际问题中的价值和作用，增强数学应用意识。

第三，以“做”加强学生的数学应用能力。学数学就是为了用数学，这是学习数学的最终目的，而学生应用能力的培养正是在解决一个个数学问题中得以发展和提高。这就要求我们的课堂更加注重理论联系实际，加强学生的数学操作活动。因此，教师可以给学生设置数学现实应用的情景，比如让学生以小组为单位，分别测量门、窗、墙壁之间的夹角，学生之间集思广益，将二面角及其平面角的定义运用于实际测量，在整个活动中不仅培养了学生的数学眼光和数学素养，还让学生体验到数学的魅力和价值，最终提高学生的数学应用能力。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 1+8.

[2] 王跃辉,谢林.“二面角”的教学分析与建议[J].教学月刊：中学版（教学参考）,2013:68-70.

[3] 吴梁. 浅析《二面角》的教学设计[J].新课程学习（学术教育）,2011: 49.

[4] 郭庆玲.“二面角及其平面角”的教学设计[J].《中学数学教学参考:上旬》,2016: 57-58.

[5] Mallory, V. S., Oakley, C. W. *Solid geometry*[M]. Chicago, B. H. Sanborn, 1954: 39-63.

[6] Wentworth, G. A. *Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Heath, 1880: 268-

271.

[7] Macnie, J. *Elements of Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1895: 240-247.

[8] Durell, F., Arnold, E. E. *Solid Geometry* [M]. New York: Charles E. Merrill Company, 1917: 336-348.

[9] Davies, C. *Elements of Geometry* [M]. Philadelphia: A. S. Barnes & Company, 1841: 116-122.

[10] Tappan, E. T. *Treatise on Plane and Solid Geometry* [M]. Cincinnati: Sargent, Wilson & Hinkle, 1864: 185-190.

[11] Wentworth, G. A. *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1911: 293-315.

[12] Ford, W. B., Ammerman, C. *Solid Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1913: 228-235.

[13] Grund, F. J. *Elementary Treatise on Geometry (Part II)* [M]. Boston: Carter, Hendee & Co, 1832: 25.

[14] Schuyler, A. *Elements of Geometry* [M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Company, 1876: 241-249.

[15] Cowley, E. B. *Solid Geometry* [M]. New York, Silver, Burdett and Company. 1934: 47-81.

[16] Bowser, E. A. *The Elements of Plane and Solid Geometry* [M]. New York: D. van Nostrand Company, 1890: 264-275.

[17] Baker, A. L. *Elements of Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn and Company, 1893: 15-19.

[18] Betz, W., Webb, H. E. *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1916: 357-367.

[19] Palmer, C. I., Taylor, D. P. *Solid Geometry* [M]. Chicago: Scott, Forsman & Company, 1918: 295-311.

[20] Olney, E. *Elementary geometry: including plane, solid and spherical geometry : with practical exercises* [M]. New York : Sheldon and Company, 1886: 225-245.

[21] Newell, M. J., Harper, G. A. *Plane and Solid Geometry* [M]. Chicago: Row, Peterson & Company, 1918: 262-269.

[22] 章建跃. 三次国际数学教育改革运动及其启示[J].数学通报, 2002: 7-9.

[23] National Education Association. *Final Report of the National Committee of Fifteen on Geometry Syllabus* [J]. Mathematics Teacher, 1912: 45-46.

美英早期教科书中的点到直线距离公式

秦语真

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

点到直线距离公式是高中数学重要公式之一，它运用了解析思想从距离角度定量刻画点和直线的位置关系，为研究两直线间的位置关系及曲线与曲线之间的关系奠定了基础。此外，点到直线距离公式蕴含转化思想，通过实践推导点到直线距离公式，有助于提升学生的数学素养。

《普通高中数学课程标准》要求学生探索并掌握点到直线的距离公式。关于该知识点，我国三种现行高中数学教材（人教版、北师大版、沪教版）均采用了直接引入，但在公式的推导上截然不同，人教版利用三角形面积法推导点到直线距离公式，北师大则通过联立求得交点，再根据两点间距离公式得到点到直线距离公式，沪教版则利用向量来进行推导。

我们可以看到今日教科书采用了截然不同方法推导点到直线距离公式，在已有文献中，对于点到直线距离不同推导方式的研究不在少数[1][2]，在相关教学设计上，有教师认为应进行探究式教学，落实核心素养[3][4]，也有教师将数学史融入课堂，从学生认知序出发来组织教学[5]。我们发现，不管从现今教材，还是从文献来看，点到直线距离的推导方式都丰富多彩。本文将从早期教科书入手，聚焦点到直线距离公式，对历史上的相关文献进行考察，汇集丰富多彩的推导方式，了解知识的发生发展过程，以期获得有益的教学素材和思想启迪。

2 教科书的选取

本文从有关数据库中选取 1830-1970 年间出版的 92 种美英早期解析几何教科书，其中 83 种出版于美国，9 种出版于英国。在选取的过程中，对于同一作者再版的书籍，若相关内容无明显差异，则视为同一种，若内容有明显差异，则视为不同的教科书。以 20 年为一个时间段，各教科书的分布情况如图 1 所示。

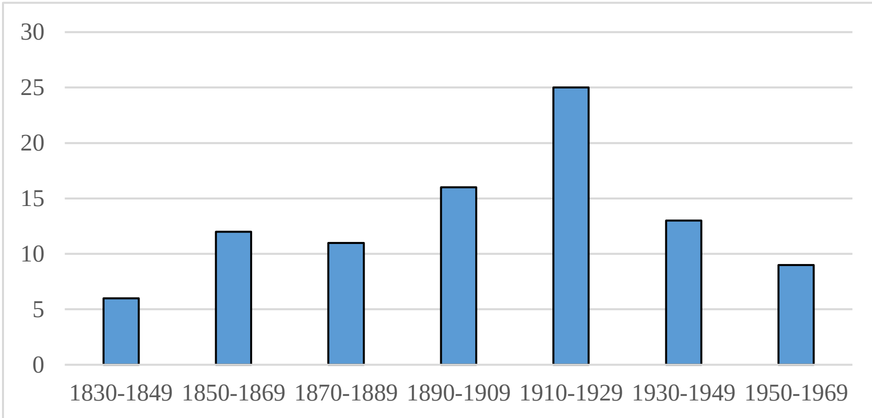


图 1 92 种美英教科书的时间分布

3 点到直线距离公式的推导

3.1 两点距离法

3.1.1 交点法

Robinson（1860）最早采用了交点法来推导点到直线距离公式[6]，其方法如下：

（1）当直线斜率存在时，如图 2 所示：设直线 l 的方程为 $y = ax + b$，设点 P（x_0，y_0），直线 $l_1 \perp l$，则直线 l_1 的方程为：$y - y_0 = -\frac{1}{a}(x - x_0)$，联立直线 l 和 l_1 可得，交点 D 坐标为：$\left(\frac{x_0 + ay_0 - ab}{a^2 + 1}, \quad \frac{ax_0 + a^2 y_0 + b}{a^2 + 1}\right)$，借助两点间距离公式可得：

$$d = PD = \sqrt{\left(x_0 - \frac{x_0 + ay_0 - ab}{a^2 + 1}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{ax_0 + a^2 y_0 + b}{a^2 + 1}\right)^2}$$

整理可得点到直线距离公式为：

$$d = \frac{|y_0 - ax_0 - b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

（2）当直线斜率不存在时，设点 P（x_0，y_0），直线 l 的方程为 $x = c$，则点到直线距离可表示为 $d = |c - x_0|$。

在 20 世纪之后，教科书通常利用一般式 $Ax + By + C = 0$ 来进行推导，与现行北师大版教

科书中的推导方法一致。

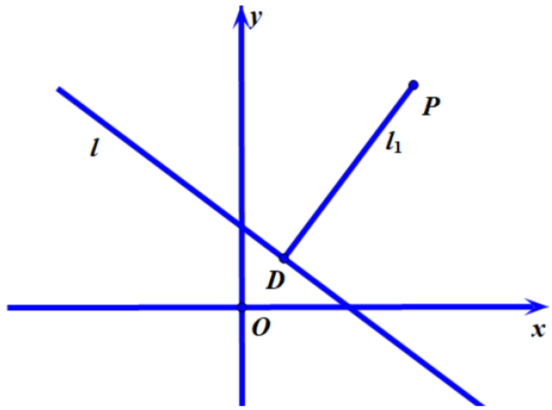


图 2 交点法

3.1.2 设而不求法

Docharty（1865）采用了设而不求、整体代入的方法[7]，如图 2 所示，设直线 l 的方程为 $y=ax+b$，点 P（x_0，y_0），D（x_1，y_1），因为点 D 在直线 l 上，故得 $y_1=ax_1+b$，该方程可化为：

$$y_1-y_0=a(x_1-x_0)-(y_0-ax_0-b) \tag{1}$$

又因点 D 在直线 l_1 上，则：

$$y_1-y_0=-\frac{1}{a}(x_1-x_0) \tag{2}$$

联立（1）、（2）两式可解得 x_1-x_0 和 y_1-y_0，利用两点间距离公式可得到点到直线距离公式。

在 20 世纪之后，由于教科书通常采用一般式 $Ax+By+C=0$ 来进行推导，于是此方法得到了进一步简化。Gibson（1911）方法如图 2 所示[8]，D 在直线 l 和直线 l_1 上，因此有：

$$A\left(x_1-x_0\right)+B\left(y_1-y_0\right)=-\left(Ax_0+By_0+C\right) \tag{3}$$

$$B\left(x_1-x_0\right)-A\left(y_1-y_0\right)=0 \tag{4}$$

将（3）、（4）两式平方后相加可得点到直线距离公式。

3.2 直角三角形法

3.2.1 求直角边

（1）利用余弦

Loomis（1877）的推导方法法如图 3 所示[9]，将点到直线距离利用三角形转化成线段长，设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$，与 x 轴所成角为 α，点 P（x_0，y_0），$PQ\perp x$ 轴，可得：$Q\left(x_0,-\dfrac{Ax_0+C}{B}\right)$，于是有：

$$PQ=\left|y_P-y_Q\right|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}\right|$$

又因 $\tan\alpha=-\dfrac{A}{B}$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\pm\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$，故得：

$$d=PD=\left|PQ\cos\alpha\right|=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

（2）利用正弦

如图 4 所示，设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$，与 x 轴所成角为 α，点 P（x_0，y_0），PQ //x 轴，可得：$Q\left(-\dfrac{By_0+C}{A},y_0\right)$，于是有：

$$d=PD=\left|PQ\sin\alpha\right|=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

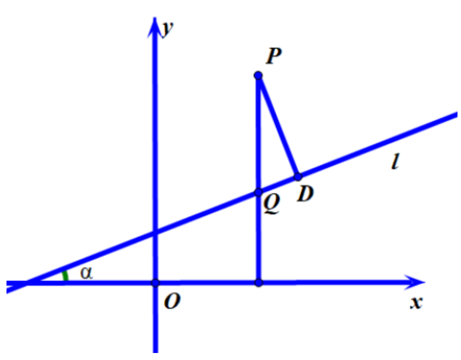


图 3 利用余弦求直角边

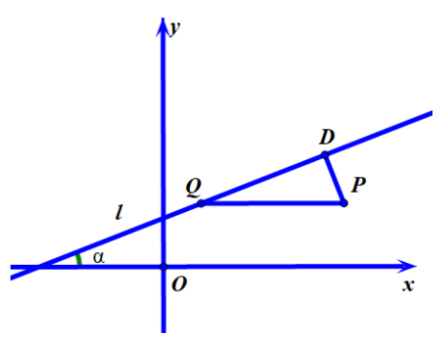


图 4 利用正弦求直角边

（3）利用相似三角形

Crenshaw（1925）的推导方法如图 5 所示[10]。设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$，$PN\perp l$，作 $PM\perp x$ 轴交直线 l 于点 Q。易得：$\Delta SOT\sim\Delta PNQ$，则有 $\dfrac{OS}{ST}=\dfrac{PN}{PQ}$。其中 $OS=\left|\dfrac{C}{A}\right|$，$ST=\left|\dfrac{C}{AB}\sqrt{A^2+B^2}\right|$。设 P（x_0，y_0），由 3.2.1 节（一）知 $PQ=\left|\dfrac{Ax_0+By_0+C}{B}\right|$，故：

$$d=PN=\frac{OS}{ST}\cdot PQ=\left|\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|\cdot\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{B}\right|=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

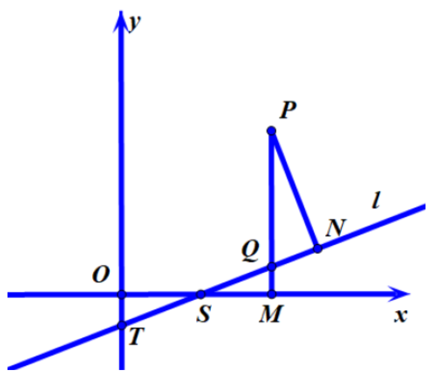


图 5 利用相似三角形求直角边

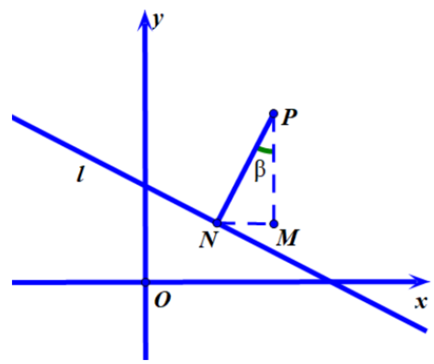


图 6 求斜边

3.2.2 求斜边

Reynolds（1930）利用参数方程，将点到直线距离转化为三角形的斜边，其作法如图 6 所示[11]，设 P（x_0，y_0），N（x，y），$\angle NPM=\beta$，直线 l 与 x 轴正半轴夹角为 α，$PN=d$，则：$x_0=x+d\sin\beta$，$y_0=y+d\cos\beta$，设直线 l 方程为 $Ax+By+C=0$，则其可化为：

$$A(x_0-d\sin\beta)+B(y_0-d\cos\beta)+C=0$$

化简可得：

$$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{A\sin\beta+B\cos\beta},$$

其中 $\tan\beta=\tan(\pi-\alpha)=\dfrac{A}{B}$，因此 $\cos\beta=\pm\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$，$\sin\beta=\pm\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$，代入即可得点到直线距离公式。

3.3 三角形求高法

Johnston（1893）的推导方法如图 7 所示。设直线 l 方程为 $Ax+By+C=0$，分别交 x 轴、y 轴于 $M\left(-\dfrac{C}{A},0\right)$、$N\left(0,-\dfrac{C}{B}\right)$ 两点，可得

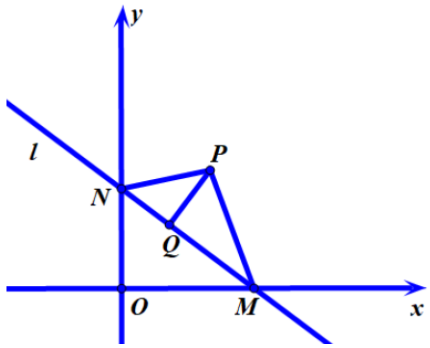


图 7 三角形求高法

$$S_{\Delta PMN}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ -\dfrac{C}{A} & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{C}{B} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|\frac{C(Ax_0+By_0+C}{AB}\right|,$$

再由 $S_{\Delta PMN}=\dfrac{1}{2}|MN|\cdot|PQ|$，联立可得点到直线距离$|PQ|$的长。

3.4 函数最值法

Taylor（1949）利用函数最值来推导点线距离公式[12]。设直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$，设 P（x_0，y_0），则直线方程可化为：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=-(Ax_0+By_0+C)$$

点 P 到直线 l 的距离即为 $f(x,y)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 的最小值，利用柯西不等式得：

$$|A(x-x_0)+B(y-y_0)|\le\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

即

$$|Ax_0+By_0+C|\le\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

因此有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\ge\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

故得点到直线距离公式。

3.5 向量投影法

Fine（1914）的推导方法如图 8 所示[13]，设 P（x_0，y_0），$OR\perp l$，过 P 向 OR 作垂线交于延长线于点 N，作 $PQ\perp l$，$PM\perp x$ 轴，其中 $\mathrm{Proj}_{ON}\overrightarrow{OP}$ 表示向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 ON 上的投影，则根据向量投影可知：

$$\mathrm{Proj}_{ON}\overrightarrow{OM}+\mathrm{Proj}_{ON}\overrightarrow{MP}=\mathrm{Proj}_{ON}\overrightarrow{OP}=ON$$

设直线 l 方程为 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$，$\angle ROM=\alpha$，点 P 到直线 l 距离为 d，则 $ON=p+d$，$\mathrm{Proj}_{ON}\overrightarrow{OM}=x_0\cos\alpha$，$\mathrm{Proj}_{ON}\overrightarrow{MP}=y_0\sin\alpha$，故

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|。$$

Murnaghan（1946）则直接利用向量去求解点到直线距离公式[14]，设直线 l 方程为 $Ax+By+C=0$，法向量为 $\vec{v}=(A,B)$，给定不在 l 上的点 P（x_0，y_0），设直线 l 上任意一点 N（x，y），则 $\overrightarrow{PN}=(x-x_0,y-y_0)$，因 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{PP_1}=|\vec{v}|\left|\overrightarrow{PP_1}\right|\cos\theta$，故得点到直线的距离为

$$d=\left|\overrightarrow{PP_1}\right||\cos\theta|=\frac{\left|\vec{v}\cdot\overrightarrow{PP_1}\right|}{|\vec{v}|}$$

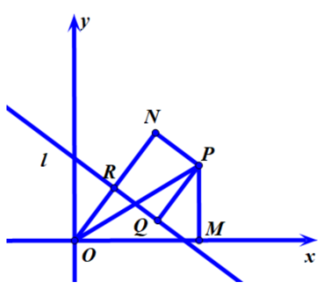


图 8 向量投影法

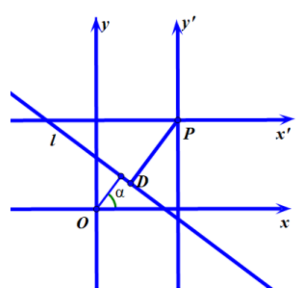


图 9 坐标轴平移法

3.6 坐标平移法

3.6.1 利用法线式方程

Riggs（1911）的作法如图 6 所示[15]，直线 l 的法线式方程为 $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$，$\alpha$ 为过原点且垂直于 l 的直线与 x 轴正方向之间的夹角，以点 P 为原点建立新坐标系，设新、旧坐标系下直线 l 上的点分别为（x'，y'）、（x，y），则有：$x = x_0 + x', y = y_0 + y'$，将其代入直线方程可得：

$$x'\cos\alpha + y'\sin\alpha = p - x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha$$

根据法线式的几何意义可知：$|p - x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha|$ 即为直线到原点 P 之间的距离。其中

$$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}，\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}，\sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}，$$

代入即可得点到直线距离公式。

3.6.2 利用一般式方程

如图 9 所示，也有教科书利用一般式方程来进行探究，直线 l 的一般式方程为 $Ax + By + C = 0$，将坐标原点平移至点 P 可得：

$$Ax' + By' + Ax_0 + By_0 + C = 0$$

将其变换为法线式，即为：

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x' + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y' + \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

根据法线式几何意义可得点到直线距离公式。

3.7 原点距离法

3.7.1 利用法线式方程

Newcome（1884）的推导方法如图 10 所示[16]。设直线 l 的法线式方程为 $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$，

直线 l_1 的方程为 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p'$，设 P（x_0，y_0），则 $p'=x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha$。因此

$$d=OP-OQ=|p'-p|=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p|$$

3.7.2 利用一般式方程

Poor（1934）的推导方法如图 7 所示[17]。已知点 $P(x_0,y_0)$，直线 l 的方程为 $Ax+By+C=0$，即：

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x'+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y'=\frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=-p$$

直线 l_1 的方程为 $Ax+By=Ax_0+By_0$，即：

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x'+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y'=\frac{Ax_0+By_0}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=-p'$$

因此

$$d=|p'-p|=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

3.7.3 利用几何关系

Howison（1869）的推导方法如图 8 所示[14]。$PA\perp x$ 轴，$OT\perp l$，过 P 向 OT 的延长线作垂线交于点 Q，作 $AN\perp OT$，设 $\angle NOA=\alpha$，P（x_0，y_0），则有

$$ON=OAcos\alpha=x_1cos\alpha，\ NQ=MP=APsin\alpha=y_1sin\alpha，$$

若直线 l 的法线式方程为 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$，则可得点到直线距离公式为：

$$d=PS=TQ=ON+NQ-OT=|x_1cos\alpha+y_1sin\alpha-p|$$

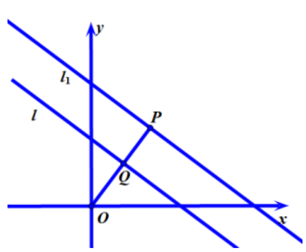


图 10 利用原点距离法进行推导

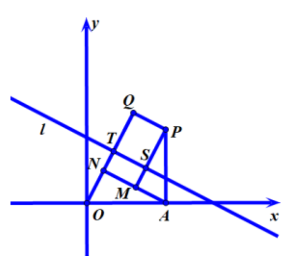


图 11 利用几何关系进行推导

4 推导方法的演变

以 20 年为一个时间段，图 12 给出了点到直线距离公式不同推导方法的分布情况。

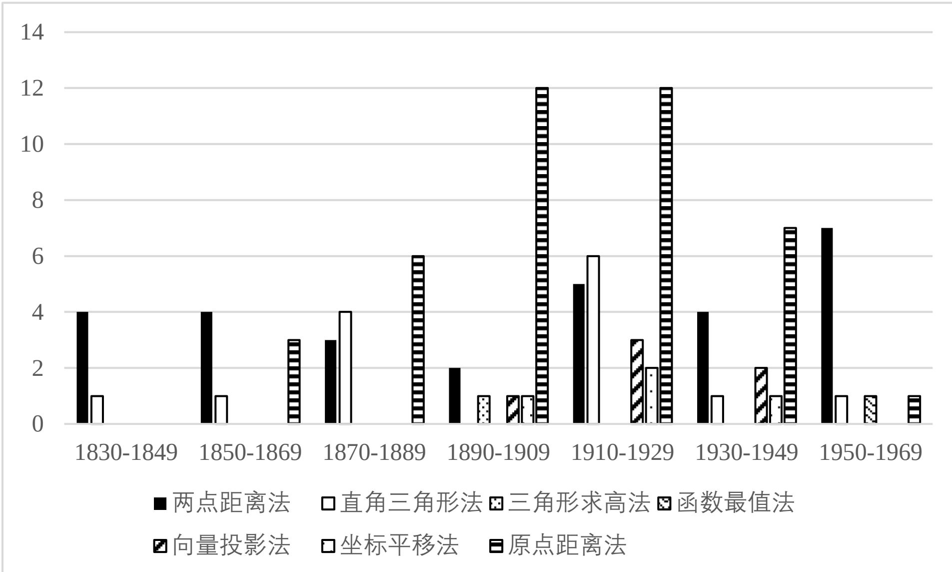


图 12 点到直线距离公式推导方法时间分布

从图 12 可见，在 19 世纪初，教科书中多将点到直线距离公式转化为两点间的距离或三角形的一边来求解。在 19 世纪中叶之后，随着法线式方程出现在教科书中，因借助法线式方程的几何意义运算简便、图形直观，教科书多将点到直线距离公式转化为到“原点的距离”，代数与几何交融在一起。而在 20 世纪中叶之后，由于法线式方程逐步淡出教科书，运用原点距离法推导点到直线距离公式的教科书种数也大幅下降，而投影法和函数最值法则在此时出现于教科书中，这与 F·克莱因提出的培养学生函数思想和空间观察能力、促进几何和代数统一的观点有着一定的关系。

5 结论与启示

历史上点到直线距离公式的推导方法的演变，可以为今日教学提供如下启示。

其一，建立知识间的普遍联系。如图 13 所示，点到直线距离公式的内涵与外延十分丰富，在公式的推导上，涉及三角学、不等式、向量等多方面知识，运用了化繁为简的思想。在公式的应用上，可以借助点到直线距离推导三角形面积公式、角平分线方程以及平行线间距离。教师在教学中应注重知识间的普遍联系，培养学生的高层次思维能力，让学生认识到点到直线距

离公式的价值。

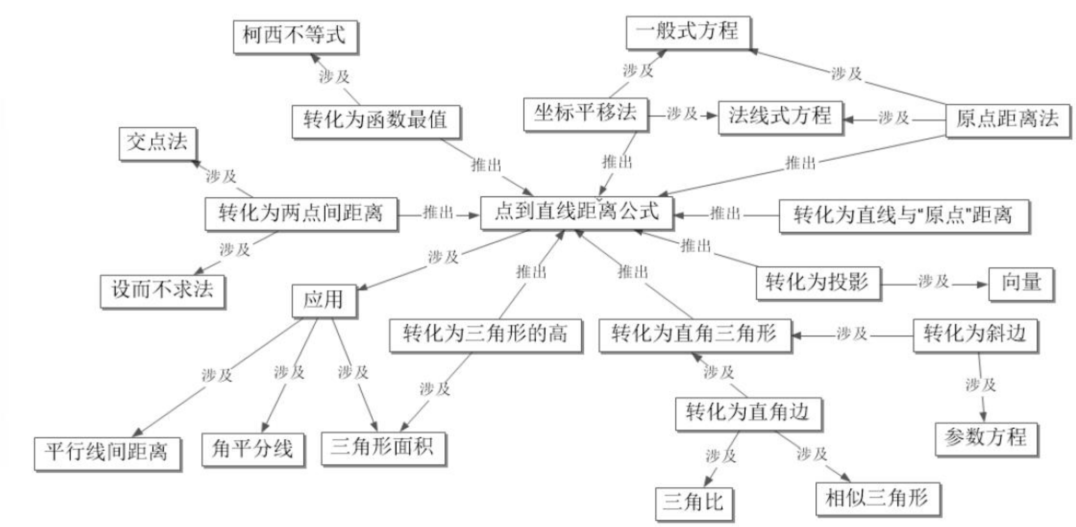


图 13 点到直线距离公式概念图

其二，渗透数学文化，丰富学科德育。早期教科书中展现了多样的推导方法，体现了方法之美。多样的推导方法背后蕴含了数学家们的思考，体现了数学家们不懈创新、不断探究的精神，蕴含了学科德育。此外，在课堂中可以让学生主动探究点到直线距离公式的推导，感受其中的逻辑推理、数学运算和直观想象素养，体会能力之助。同时，教师将学生的方法与历史上数学家的作法对应，让学生穿越时空和数学家们进行对话，提升数学学习的自信心。

其三，早期教科书中的推导方法多涉及转化思想，将点到直线距离公式转化为点到点的距离、直角三角形的高、三角形直角边长、函数最值等。教师在本节授课时应侧重其转化思想，借助多维知识运用转化思想，培养学生数学能力，凸显点到直线距离的本质，提炼数学方法，欣赏方法之美。

参考文献

[1] 余树林, 袁新宝. 点到直线的距离公式的十三种证明方法[J]. 中学数学杂志, 2009(01): 20-23.

[2] 熊昌进. 用柯西不等式推导点到直线的距离公式[J]. 数学通报, 2002(03): 32.

[3] 王敏杰. 研究性教与学:点到直线的距离课例[J]. 中学数学月刊, 2018(01): 24-26.

[4] 王跃辉. 核心素养视角下高中数学教学设计的基本要求——以“点到直线的距离”的教学设计为例[J]. 中小学数学(高中版), 2019(11): 24-27.

[5] 杨懿荔，汪晓勤."点到直线的距离":基于认知基础，选择历史方法[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(02): 60-64.

[6] Robinson, H. N. *Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Ivison, Blakeman., 1860: 114

[7] Docharty, G. B. *Elements of Analytical Geometry, and of the Differential and Integral Calculus*[M]. New York: Harper & Brothers., 1865: 21.

[8] Gibson, G. A. *Elements of Analytical Geometry*[M]. London: Macmillan & co, 1911: 54.

[9] Loomis, E. *The Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Harper & Brothers., 1877: 58.

[10] Crenshaw, B. H. & Killbrew, C. D. *Analytic Geometry and Calculus*[M]. New York: P. Blakiston's Son & Co., 1925: 21-25.

[11] Reynolds, J B. *Analytic geometry and the elements of calculus*[M]. New York; Prentice-Hall., 1930: 74-75.

[12] Taylor, A. E. *Calculus, with Analytic Geometry*[M]. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall., 1959: 272.

[13] Fine, H. B. & Thompson, H. D. *Coordinate Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company., 1914: 31.

[14] Murnaghan, F. D. *Analytic Geometry*[M]. New York Prentice-Hall, 1946: 46.

[15] Riggs, N. C. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company., 1911: 84.

[16] Newcomb, S. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. New York: Henry Holt and Company., 1884: 44.

[17] Poor, V. C. *Analytical Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons., 1934: 45.

[18] Howison, G. H. *A treatise on analytic geometry*[M]. Cincinnati: Wilson, Hinkle & Co.; 1869: 107.

美英早期解析几何教科书中圆的定义和标准方程

韦润蓉，秦语真

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

众所周知，圆作为最重要的几何图形，其历史十分悠久，在四大文明古国的数学文献中均有记载，圆周率的近似值是古代文明几何学发展水平的尺度。化圆为方成了古希腊三大几何难题之一；古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中用一整卷的篇幅来研究它的各种性质；阿波罗尼奥斯在《平面轨迹》一书中研究了很多轨迹为圆的问题，在《圆锥曲线论》中研究了圆、椭圆和双曲线的很多共同性质；阿基米德专门著有《论圆的度量》一书。17 世纪，解析几何的发明者费马和笛卡儿都研究过圆的方程，自此，圆和圆锥曲线一样，披上了解析几何的外衣，成了解析几何思想的重要载体。

《普通高中数学课程标准》（2017 年版）指出，通过回顾圆的几何要素，在平面直角坐标系中，引导学生探索并掌握圆的标准方程与一般方程，并让学生利用圆的方程解决一些简单的数学问题和实际问题[1]。现行人教版教科书将圆定义为到定点的距离为定长的点的集合，而沪教版则将圆定义为到定点的距离等于定长的动点的轨迹。

圆在平面几何和解析几何中都扮演着重要的角色，关于作为平面几何研究对象的圆及其度量，目前已有相应的 HPM 课例问世，而关于作为解析几何研究对象的圆，迄今尚未见 HPM 课例的诞生。究其原因，一是教师对解析几何背景下的圆的历史缺乏深入了解，二是教师认为学生学习圆的定义与方程并不存在有什么困难，缺乏融入数学史的必要性。

然而，在提倡单元教学研究和挖掘学科育人价值的今天，照本宣科、碎片化知识传授已经不能满足教育的需求，从这个意义上说，探讨 HPM 视角下的圆的教学具有重要现实意义。鉴于此，本文聚焦圆的定义与方程，对英美早期解析几何教科书进行考察，为 HPM 视角下的课堂教学提供教学素材和思想启迪。

2 早期教科书的选取

从有关数据库中选取 1820-1969 年间出版的 95 种英美早期解析几何教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，具体时间分布如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无明显变化，则选择最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同种类的教科书。

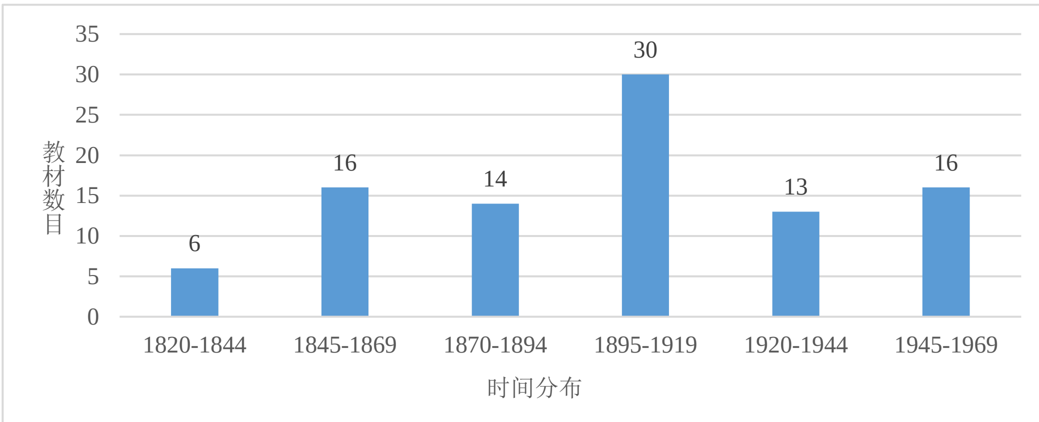


图 1 95 种美英早期解析几何教科书的出版时间分布

在 95 种解析几何教科书中，圆的定义与方程所在章大致相同，主要出现在“圆”、“圆与直线”或“圆的方程”中，也有少数教科书将圆安排在“二次曲线”或“圆锥曲线”章中。图 2 给出了圆所在章的占比情况，可见，早期教科书在有关圆的内容的编排上存在着一定的差异，但绝大多数教科书都将其视为独立的知识单元。

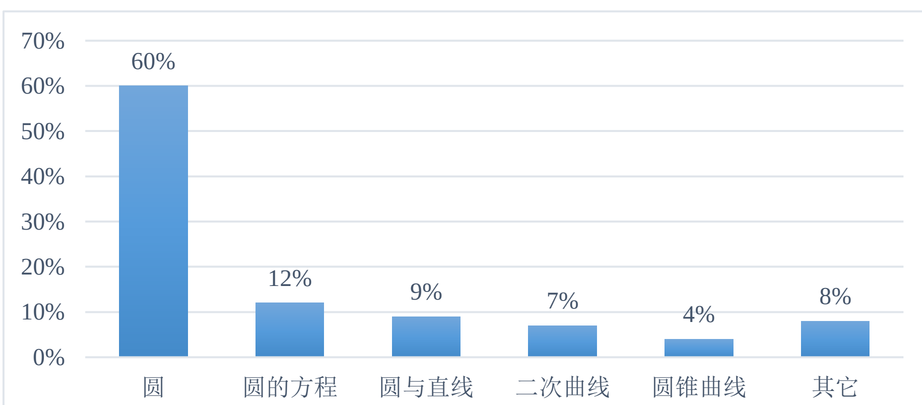


图 2 各章节占比情况

3 圆的定义

95 种教科书均给出了圆的定义，但定义方式互有不同，可分成圆锥定义、直角三角形定义、一中同长定义和三线轨迹定义。

3.1 基于圆锥的定义

9 种教科书用圆锥来定义圆，与三种圆锥曲线统一起来，其中 Candy（1909）还将圆定义为特殊的椭圆[2]。从数学史上看，公元前 4 世纪古希腊数学家梅奈克缪斯（Menaechmus）用垂直于母线的平面去截顶角分别为直角、钝角和锐角的圆锥，得到三种不同的圆锥曲线，但这种截法并不会出现圆。公元前 3 世纪，古希腊数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius）在《圆锥曲线论》卷 I 命题 5 中用平面以不同方式去截同一个斜圆锥，得到圆的情形（但阿波罗尼奥斯并未将圆视为特殊的椭圆）。美英早期解析几何教科书大多使用了正圆锥[14]。如图 3 所示，以平行于正圆锥底面且不经过圆锥顶点的平面去截该圆锥，所得截线称为圆。圆的这一定义可谓返璞归真。

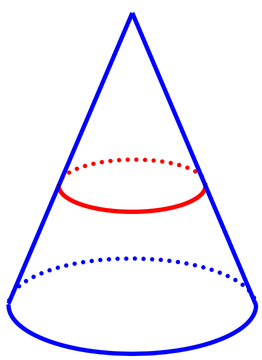


图 3 基于圆锥的定义

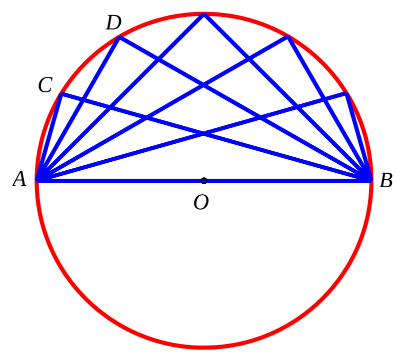


图 4 圆的直角三角形定义

3.2 直角三角形定义

95 种教科书中，只有 Hymers（1845）和 Askwith（1908）提到，可以用散焦性顶点轨迹来描述圆，即以给定线段为斜边作直角三角形，所有直角三角形的顶点所构成的平面图形为圆[3][4]。如图 4 所示，C、D 是以 AB 为斜边的任意两个直角三角形的顶点，将所有符合条件的点连起来，即为圆 O。在中国古代天文学著作《周髀算经》中，商高提出了以矩为工具的测量方法——“环矩以为圆”，著名数学史家李俨（1892-1963）将其解释为“直角三角形固定弦，其直角顶点的轨迹便是圆”[5]。可见，斜边固定的直角三角形的顶点轨迹早已为中国古代数学家所知。

但基于直角三角形的定义并不严谨，因为固定斜边的直角三角形的顶点轨迹并不包含斜边

的两个端点。

3.3 “一中同长”定义

有 92 种教科书采用了“一中同长”定义，但这些定义在表述上互有不同，大致可分为三类。

欧氏定义：圆是由一条曲线围成的平面图形，曲线上的每个点到固定点的距离都相等[7]；

轨迹定义：平面上一个点以一个固定点为中心，以固定距离绕该点运动所形成的轨迹叫做圆，这个恒定的距离称为半径[8]；

集合定义：平面上到定点的距离等于定长的点的集合叫做圆，其中，该定点称为圆心，定长为半径[11]。

Schmall（1921）强调，圆指的是圆周曲线，而不是以该曲线为边界的平面 [6]。

3.4 三线轨迹定义

古希腊数学家已经发现，若给定平面上的三条直线，则到其中一条直线的距离的平方与到另两条直线距离乘积之比为常数的动点轨迹是圆或圆锥曲线。考虑特殊的情形，如图 5 所示，直线 AC 和 BD 都平行于直线 AB。动点 P 到 AB 的距离平方与到 AC 和 BD 的距离乘积之比等于 1，则点 P 的轨迹为圆。事实上，由直角三角形射影定理的逆定理即可得到上述结论。

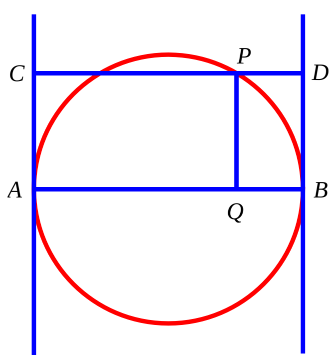


图 5 特殊的三线轨迹

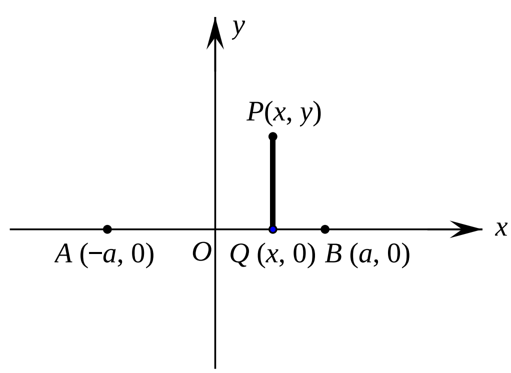


图 6 三线轨迹定义

利用三线轨迹，Sommerville（1924）给出了圆和圆锥曲线的新定义：A 和 B 是平面上两个固定点，P 为动点，从点 P 向 AB 引垂线，垂足为 Q，若 $PQ^2=kAQ\cdot QB$，则点 P 的轨迹为圆锥曲线。如图 6，所得轨迹方程可表示为 $y^2=k\left(a-x\right)\left(a+x\right)$，化简得 $kx^2+y^2=ka^2$。当 $k>0$ 且 $k\neq1$

时，点 P 的轨迹为椭圆；$k=1$ 时，点 P 的轨迹为圆；当 $k<0$ 时，点 P 的轨迹为双曲线。当 k=1 时，即可得圆的另一种定义[15]。

4 圆的定义的演变

以 25 年为单位，对上述圆的六类定义：基于圆锥的定义、直角三角形定义、欧氏定义、轨迹定义、集合定义以及比例定义进行统计，得到 1820-1969 年间各类定义的具体分布情况，如图 7 所示。

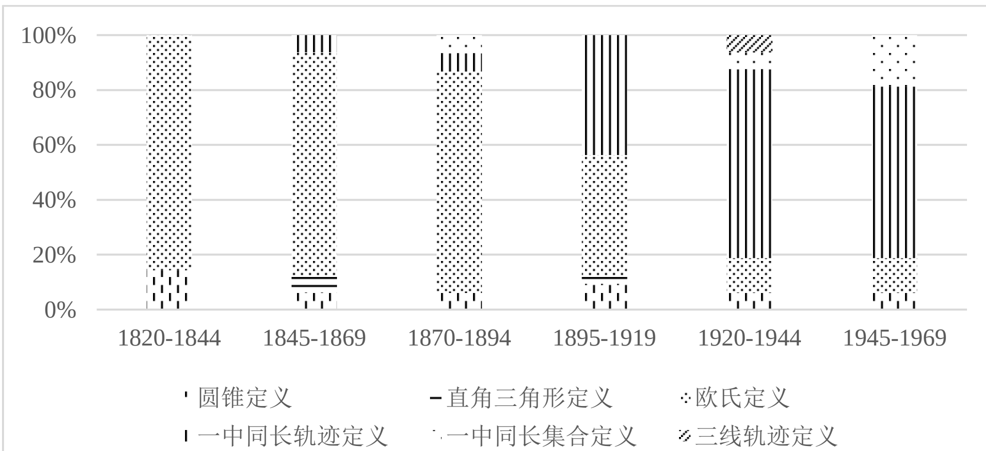


图 7 圆的定义时间分布情况

从图 7 中可见，受《几何原本》的影响，欧氏定义在 20 世纪以前一直占据着主要地位，其后才开始逐渐减少，后期的占比已远低于圆的轨迹定义。基于圆锥的定义虽数量不多，但一直存在于各个时期的教科书中。直角三角形定义与三线轨迹定义则昙花一现，仅在某个时期出现后就销声匿迹。一中同长轨迹定义自 19 世纪中期初露头角后，其占比不断增大，到 20 世纪初已经取代了欧氏定义，在早期解析几何教科书中占据主要地位。而一中同长集合定义则在 19 世纪 80 年代德国数学家康托尔（G. Cantor, 1845-1918）引入集合论后才首次诞生，随着集合论的完善与发展，圆的集合定义也开始在早期解析几何教科书占据一席之地。从整个时间分布来看，圆的定义主要有两种形式，前期为欧氏定义，后期则是一中同长轨迹定义，其余的定义只占据了其中的一小部分。

5 圆的标准方程

早期教科书中，圆的标准方程也有不同的推导方法，主要包括两大类，即从圆的定义以及从圆的性质出发进行推导。

5.1 基于一中同长定义的推导

共有 84 种早期解析几何教科书采用这一推导方法，在直角坐标系中根据圆上任意一点到圆心的距离为定值[10]，如图 8，不妨设圆上任意一点 P 的坐标为（x, y），定点坐标 C 为（a, b），定长为 r，根据两点间距离公式，即可得到圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。此外，各类教科书还给出了圆心在不同位置，如原点处、x 轴、y 轴上的标准方程。

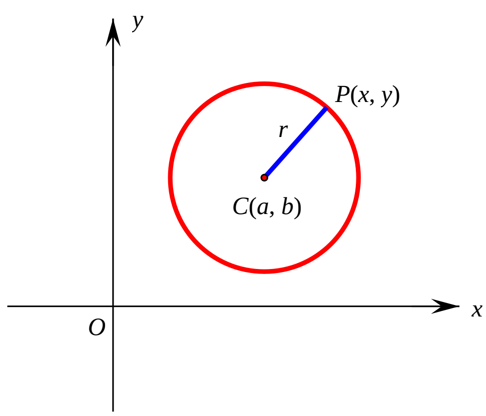


图 8 直角坐标系下圆的方程的推导

5.2 基于圆锥的推导

Biot（1840）利用圆锥定义来推导圆的标准方程[12]。如图 9，以圆锥截圆的圆心为原点、截圆所在平面为 xOy 平面建立空间直角坐标系，设圆锥顶点 C 的坐标为（$0, 0, c$），圆锥上任意一条母线与平面 xOy 所成的角都相等，记为 α，设点 $P(x,y,0)$ 为圆周上任意一点，则有 $\tan^2\alpha=\dfrac{c^2}{x^2+y^2}$。当圆锥一定时，$\tan\alpha$ 与 c 都为常数，因此，不妨将 $\dfrac{c^2}{\tan^2\alpha}$ 记为 r^2，即得 $x^2+y^2=r^2$。编者随即给出了圆的一中同长定义。

5.3 基于补弦性质的推导

以上三种方式都是从圆的定义出发进行推导，与此不同，还有 5 种教科书利用圆的性质去

推导其标准方程。Docharty（1865）利用了补弦相互垂直这一性质进行证明[13]，其中补弦的定

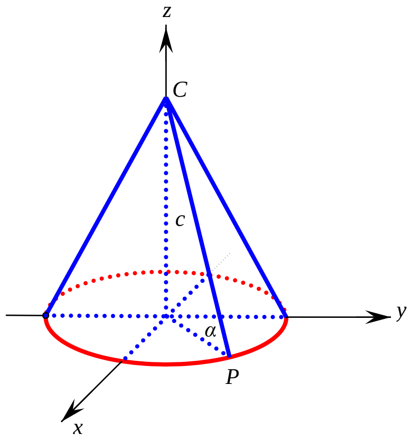


图 9 利用圆锥曲线推导过程图

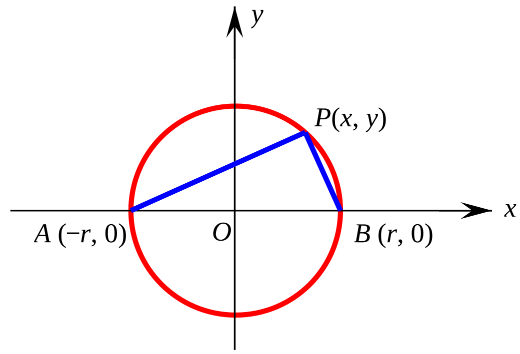


图 10 补弦定理

义为：从曲线任意直径的端点画出的两条线与曲线相交于同一点，称为补弦。如图 10，以圆心为原点，建立直角坐标系，设两端点 A，B 坐标分别为（$-r, 0$ 和（$r, 0$）与，P（x, y）为圆上任意一点，AP 所在的直线，其方程可表示为 $y = k_1\left(x + r\right)$，同理，$BP$ 所在的直线方程可表示为 $y = k_2\left(x + r\right)$，易知 $k_2 k_1 = -1$，两式相乘，即可得到圆心在原点处的标准方程。

6 圆的方程推导方式的演变

与圆的定义相同，以 25 年为单位，对其标准方程的推导方式进行统计，得到 1820-1969 年间各类推导方式的具体分布情况，如图 11 所示。

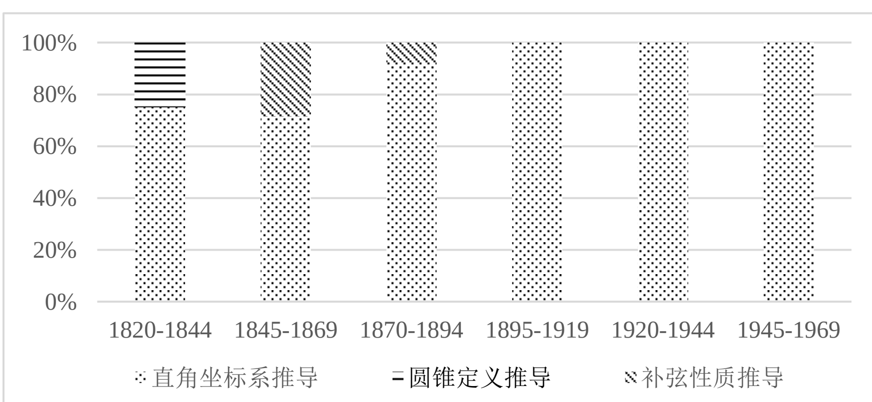


图 11 圆的标准方程推导方式时间分布情况

从图中易知，利用直角坐标系推导是教科书中最常用的方法，甚至在 20 世纪后，教科书都选择了只保留这一种推导方式。利用补弦性质推导则基本只出现在 19 世纪中后期，对应着上述

利用直角三角形来定义圆的时期，当这一定义不再出现在教科书中时，该证明方式也随之抹去。利用圆锥曲线定义进行推导也仅仅只出现在 19 世纪初的一种教科书中，随即销声匿迹。越来越多的教科书倾向于选择更为简单直观的推导方式，因此，只有单一的推导方式被保留了下来，并沿用至今。

7 轨迹应用问题

除了圆的定义与方程外，不少教科书在其习题部分还给出了有关圆的轨迹问题，包括到定直线和定点两大类问题。探究在何种情况下，动点的轨迹可为圆。

7.1 与定点有关的轨迹

Borger(1928)提出与定点有关的轨迹问题[9]：已知平面上有两个固定点 A、B 以及任意一点 P，当点 P 在平面上运动，且 $\frac{|PA|}{|PB|}$ 为常数 k 时，P 的轨迹为圆，其中 $k\neq 1$。阿波罗尼奥斯在《平面轨迹》中最早对该轨迹做过研究，故今人将满足条件的动点轨迹称为阿波罗尼奥斯圆。

如图 12 所示，不妨以点 B 为圆心，AB 为 x 轴上所在的线段，设 P 点坐标为（x, y），B 点坐标为（a, 0），由已知条件可得 $\frac{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=k$，化简得

$$\left(x+\frac{a}{k^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{ak}{k^2-1}\right)^2。$$

根据圆的一中同长定义，当 $k\neq 1$ 时，可知点 P 的轨迹为圆。

Sommerville（1924）提出：一个点到若干不动点的距离的平方和为常数，其轨迹是一个以不动点的质心为中心的圆[15]。以两点为例，如图 13，设 A、B 为两个定点，M 为线段 AB 的中点，动点 P 满足 $PA^2+PB^2=k^2$，过点 P 作 $PQ\perp AB$，垂足为 Q，易知 $AQ+BQ=2MQ$，可得 $PA^2+PB^2=AQ^2+BQ^2+2PQ^2=AQ^2+BQ^2+2PM^2-2MQ^2=\frac{1}{2}AB^2+2PM^2=k^2$，可解得，$PM=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$，当 $2k^2-AB^2>0$ 时，点 P 的轨迹是以点 M 为圆心、PM 为半径的圆。多个不动点以此方式类推即可。

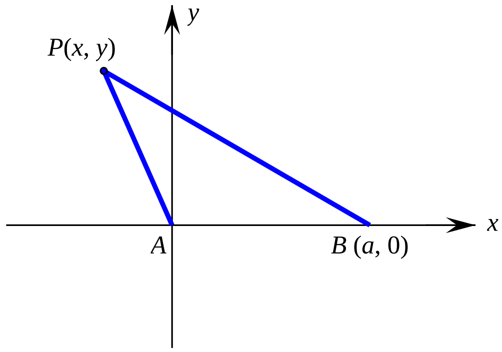


图 12 阿波罗尼奥斯圆的方程

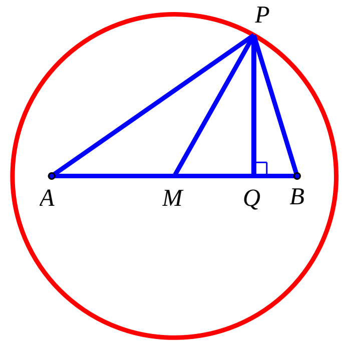


图 13 点 P 轨迹图

7.2 与定直线有关的轨迹

Sommerville（1924）在其习题中还提出定点到定直线的轨迹问题：一个点到一个正方形（边长为 a）四条边距离的平方和是常数 k^2，证明其轨迹为圆[15]。以正方形两邻边分别为 x 轴与 y 轴建立坐标系，设动点 P 的坐标为（x , y），则有

$$x^2+y^2+(a-y)^2+(a-x)^2=k^2,$$

化简后易知，当 $k^2-\dfrac{a^2}{2}>0$ 时，该轨迹为圆。

Schmall（1921）则将上述问题中的正方形改为边长为 $2a$ 的等边三角形[6]。以三角形底边中点为原点建系，可得点 P 的轨迹方程为

$$6\left(x^2+y^2\right)+6a^2-4\left(k^2+ay\sqrt{3}\right)=0,$$

同理，在满足一定条件时，该方程也表示圆。

8 若干启示

圆的定义与方程的早期历史为该主题的教学提供了许多启示。

其一，构建多元定义，深化知识理解。历史上圆的定义与方程推导方式丰富多彩，教师可以打破一中同长的单一定义和推导方式，借鉴历史设计探究活动，让学生用不同的方式给圆下定义，并根据不同的定义推导圆的方程；又回顾平面几何中学过的圆的性质，利用这些性质来推导圆的方程，从而更深刻地理解解析几何中由曲线性质推求其代数方程的思想。通过与早期教科书中的定义与推导方法的比较，实现古今对话。

其二，挖掘方程内涵，建立新旧联系。在建立圆的方程后，可以反过来再对方程中蕴含的几何性质作出进一步的探讨。例如，将方程 $x^2+y^2=a^2$ 进行变形，可得

$$y^2=(a+x)(a-x) \tag{1}$$

$$\frac{y}{x+a}\cdot\frac{y}{x-a}=-1 \tag{2}$$

据此，教师可以让学生思考（1）和（2）所对应的圆的几何性质。

又，若圆 O：$x^2+y^2=a^2$ 上有三点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 和 $C(x_0,y_0)$，已知 $OC\perp AB$，教师可以让学生证明平面几何中的垂径定理。事实上，由圆的方程可得直线 AB 的斜率为

$$k_{AB}=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} \tag{3}$$

又由 $OC\perp AB$ 可得

$$k_{AB}=-\frac{x_0}{y_0} \tag{4}$$

由（3）和（4）可得线段 AB 的中点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ 位于 OC 上，故 OC 平分 AB。

这样，可以让学生更深刻地理解解析几何中由曲线方程推求曲线几何性质的思想。

其三，寻求统一定义，促进单元学习。在教科书中，从表面上看，圆除了与椭圆有密切关联之外，与其他圆锥曲线似乎风马牛不相及。三线轨迹定义揭示了圆、椭圆、双曲线和抛物线之间的内在逻辑联系，可以贯穿解析几何的教学，从而适用于单元教学。

其四，融入数学文化，落实学科德育。中国古代数学是世界数学之树不可分割的一枝，中算家很早就对圆进行定义，“一中同长”、“环矩以为圆”，这些定义与西方数学家的定义交相辉映。因此，圆的定义揭示了数学文化的多元性，可以让学生在树立国际意识的同时，增强文化自信。

我们有理由相信，数学史在解析几何的教学中必将大有可为。

参考文献

[1] 中国人民共和国教育部. 全日制义务教育数学课程标准（实验稿）[M]. 北京：北京师范大学出版社, 2011.

[2] Candy, A. L. *The Elements of Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1909.

[3] Hymers, J. *A treatise on conic sections: and the application of algebra to geometry*[M]. Cambridge: The University press, 1845.

[4] Askwith, E. H. *The Analytical Geometry of the Conic Sections*[M]. London: A. and C. Black, 1908.

[5] 李俨. 中国古代数学史料[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1963: 01.

[6] Schmall, C. N. *A First Course in Analytic Geometry, Plane and Solid: With Numerous Examples*[M]. New York: D. Van Nostrand Company, 1921.

[7] Nowlan, F. S. *Analytic Geometry*[M]. New York: McGraw-Hill, 1946.

[8] Bailey, F. H. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn, 1899.

[9] Borger, R. L. *Analytic Geometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1928.

[10] Smith, P. F. & Arthur S. G. *New Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn, 1912.

[11] Hamilton, H. P. *The Principles of Analytical Geometry*[M]. Cambridge: J. Deighton & sons, 1826.

[12] Smith, F. H. & Biot, J. B. *An Elementary Treatise on Analytical Geometry*[M]. New York & London: Wiley and Putnam, 1840.

[13] Docharty, G. B. *Elements of Analytical Geometry, and of the Differential and Integral Calculus*[M]. New York: Harper & brothers, 1865.

[14] Young, J. W. & Morgen, F. M. & Fort, T. *Analytic Geometry*[M]. Boston: Houghton Mifflin Company, 1936.

[15] Sommerville, D. M. Y. *Analytical Conics*[M]. London: Bell, 1924

教学实践

HPM 视角下平面解析几何序言课的教学实践与思考

韩 粟[1]，王巳震[2]

（1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062; 2.华东师范大学第二附属中学，上海 201203）

1 引 言

序言课，又称起始课、引言课或章头课，指在某一章或某一主题的正式教学前，以勾勒知识体系概貌、引入核心数学概念及点拨数学思想方法等为教学目标的课型，承载着展示知识源流、拓宽学科联系及浸润多元文化等教育价值。早期的序言课多从知识层面概述“为什么学”“学什么”及“怎么学”，并适当点缀了相关的历史文化。但从 HPM（History and Pedagogy of Mathematics, 数学史与数学教育）的视角来看，数学史的运用层次较低，知识发生历史未能真正促进学生的数学学习。

平面解析几何是序言课常见的主题之一。已有课例[1-4]均以古希腊轨迹问题串[5]为线，复制式或顺应式地引入平面解析几何的学习，亦有课例[2, 4]附加式地介绍了费马（P. de Fermat, 1601-1665）和笛卡儿（R. Descartes, 1596 - 1650）创立解析几何时的不同侧重[5]，但数学问题与数学史仍为“两张皮”，教师未能从学科发展史的高度重构序言课教学。美国数学史家 M·克莱因（1908 - 1992）曾言：“解析几何把数学造成一个双面的工具”[6]，解析几何的诞生，内蕴着数学史上代数从几何附庸到独立分支，最终又和几何相融合的过程。因此，平面解析几何序言课不应仅停留在轨迹问题解决的立意，还应恰当地融入学科发展史，以彰显理性、信念等德育价值[7]。

有鉴于此，笔者以高校研究者和职前数学教师的双重身份，选定平面解析几何序言课为实习期的研究课题，并开展教学实践，其中核心实践为：以古希腊轨迹问题为明线，以解析几何学科发展史为暗线，通过“以问引史”的教学策略，达到“知史明理”的教学目标。教学实践后，笔者收到了多方的评课意见，故在学生反馈的基础上，就平面解析几何序言课的教学提出了三点教学反思。

2 教学准备

2.1 学情分析

初中阶段，在平面几何系统内，学生掌握了直线与圆的相关知识，如从点的轨迹来看，和线段两个端点距离相等的点的轨迹是这条线段的垂直平分线，而到定点的距离等于定长的点的轨迹是以这个定点为圆心、定长为半径的圆等；在函数系统内，学生了解了特殊函数图像的形状，即一次函数的图像是直线，反比例函数的图像是双曲线，二次函数的图像是抛物线；学生初步学习了平面直角坐标系及平面向量，具有一定的联系与转换“数”与“形”的意识。

高中阶段，学生进一步学习了平面向量，能够运用向量的坐标法解决一些几何及三角问题。特别地，在物理学科中，学生学习了开普勒第一定律（又称椭圆定律），知道行星绕太阳的运动轨道是椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上；通过做平抛运动的物理实验，知道抛物线得名于物体作平抛运动的轨迹。

解析几何的诞生在数学史上具有里程碑式的意义[6]。如果教师仅仅将解析几何视作数学知识的合集，那么从上述学情分析来看，大部分知识点对学生而言并不是彻底陌生的，但如果教师将解析几何视作数学思想方法的合集，即立足于“解析几何是一种方法论”的定位[8]，则学生未必了解它的起源和发展，更难将零散的知识点建构为一个高度凝练的知识体系。

2.2 教材分析

由于笔者的教学实践在上海市某高中开展，因此教材分析以沪教版教科书为主。解析几何内容位于沪教版选择性必修一，分列在第 1 章《坐标平面上的直线》和第 2 章《圆锥曲线》。第 1 章的引言指出：“解析几何的研究思路是通过引进坐标系，建立‘点’与‘数’之间的一一对应，从而用代数的观点与方法去解决几何问题。”此处点明了解析几何的研究目的（用代数的观点与方法去解决几何问题）与研究方法（坐标法）。第 2 章的引言指出：“在直角坐标平面上，所有圆锥曲线都可以用二元二次方程来表示，从而可以用方程的思想去解决与这些曲线有关的问题。”此处蕴含着解析几何的两大研究问题：如何求出表示曲线的方程？如何由方程研究曲线的性质？沪教版将“曲线与方程”单列在圆锥曲线一章的最后一节，第 1 课时为“求轨迹的方程”，由 2.1 节的学情分析，从初高中衔接的角度，第 1 课时可以前置到序言课中。此外，由于

“解析（analytic）”一词是作为形容词修饰“几何（geometry）”一词，所以解析几何的研究对象为几何图形的事实不言而喻，而高中阶段的平面解析几何又以直线与圆，椭圆、双曲线及抛物线三类圆锥曲线为主要研究对象。

2.3 数学史分析

从教材分析中发现，沪教版教科书将圆的内容尽数划入《圆锥曲线》一章中，这不符合圆锥曲线起源的史实。古希腊数学家梅内克缪斯（Menaechmus, 约 380 B.C. - 320 B.C.）称用垂直于母线的平面截顶角分别为直角、钝角和锐角的正圆锥后得到的截线为直角圆锥曲线，钝角圆锥曲线和锐角圆锥曲线，而阿波罗尼奥斯（Apollonius, 约 262 B.C. - 190 B.C）称用不同方向的平面截同一个斜圆锥得到的截线为齐曲线（parabola）、盈曲线（hyperbola）和亏曲线（ellipse）。梅内克缪斯和阿波罗尼奥斯的命名对应着现行抛物线、双曲线和椭圆的命名。公元 3 世纪，帕普斯（Pappus，约 290 - 350）将轨迹分为平面轨迹、立体轨迹和线轨迹，其中平面轨迹专指直线和圆，立体轨迹专指圆锥曲线。古希腊轨迹问题中，“三线轨迹”和“四线轨迹”问题揭示了圆锥曲线的几何性质，而“三线轨迹”和“四线轨迹”性质的逆命题相应地给出了圆锥曲线的定义[5]。

历代数学家对轨迹问题的痴迷与求索，是解析几何诞生的源动力之一。为平面直角坐标系冠上自身之名的法国哲学家、科学家及数学家笛卡儿，其用方程表示曲线的思想及单轴坐标系的运用都出现《几何》内对三线轨迹和四线轨迹问题的讨论中，但是他的出发点是用代数方法解决作图问题，因此其工作侧重于推导轨迹的方程，之后再用尺规作出方程的根。同时期，有“业余数学家之王”称号的法国律师费马同样从帕普斯的著作中关注到了轨迹问题，而他的工作与笛卡儿恰恰互补：从给定方程出发，研究方程所表示的曲线的性质，所以费马与笛卡儿共享解析几何创始人之誉。

3 教学设计与实施

3.1 教学目标与重难点

【教学目标】

（1）了解解析几何的发展史，明确平面解析几何的研究对象、研究目的、研究问题和研究

方法；

（2）从几何直观出发探究古希腊轨迹问题，能够应用坐标法定量研究几何图形，领悟解析几何诞生的必然性，提升直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；

（3）经历轨迹问题串的解决，体会用代数方法解决几何问题的普适性，同时经历数学史上代数和几何从分野到融合的过程，树立理性精神。

【教学重点】从“为什么学”“学什么”“怎么学”三个方面整体认识平面解析几何。

【教学难点】基于笛卡儿和费马的工作，明晰曲线与方程的两大研究问题：建立曲线的方程和通过方程研究曲线的性质。

3.2 教学过程

3.2.1 几何方法探轨迹

【问题1】在以往的数学学习中，你更喜欢几何还是代数？

【说明】问题1与学生课前学习单的第1题对应。统计学生答案后发现：23位学生明确表示更喜欢几何，原因集中在“几何直观”和“几何美”两项；13位学生表示更喜欢代数，原因多为“代数好学”；7位学生表示两者都不喜欢，其中1位还表示“几何难以想象，代数难以构造”；2位学生表示两者都喜欢。从数量上看，多数学生更喜欢几何，与古希腊数学家对几何的“偏爱”形成古今对照，由此引出古希腊轨迹问题串。

师：这是意大利画家拉斐尔（Raphael, 1483-1520）的油画作品《雅典学派》（图1），画右下方为欧几里得（Euclid, 约325 B.C.-265 B.C）使用圆规在石板上作几何图形来为青年学者讲学的场景（图2）。

图1 油画《雅典学派》　　图2 《雅典学派》局部——欧几里得讲学

欧几里得经过严密的演绎推理，建立起庞大的欧氏几何体系，其撰写的《几何原本》流传至今。不止是欧几里得，古希腊数学家都非常热爱演绎推理，几何学为他们进行演绎推理提供

了不少研究对象，比如轨迹。

【问题2】平面内，分别满足以下条件的动点的轨迹是什么？

（1）到一个定点的距离等于定值；

（2）到一条定直线的距离等于定值；

（3）到两个定点的距离相等；

（4）到两条定直线的距离相等.

【说明】问题 2 中，（1）（2）为简单定性问题，（3）（4）分别涉及两个定点和两条定直线，为轨迹问题从定性到定量的过渡。学生根据已有的几何直观，易找出平面内满足条件的动点轨迹，教师再借助几何画板，动态演示轨迹生成。

3.2.2 代数方法探方程

【问题 3】平面内，若两定点距离为 2，则满足到两定点距离之比为 2:1 的动点轨迹是什么？

【说明】教师留给学生三分钟时间独立思考。巡视中，发现多数学生通过建立坐标系，设点坐标，由两点间距离公式得到动点坐标满足的代数方程。教师板演轨迹方程的推导过程，解读方程$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$表示动点轨迹满足到定点$\left(\frac{5}{3},0\right)$的距离为定值$\frac{4}{3}$，并演示坐标系内的“点动成圆”，由动点满足圆的平面几何定义，所以判断其轨迹是圆。阿波罗尼奥斯最早发现圆具有题述的几何性质，所以满足该性质的圆史称“阿波罗尼奥斯圆”（图 3）。

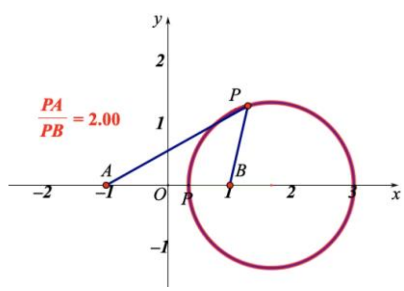


图3 坐标系中的阿波罗尼奥斯圆

两位学生在课后补充，由三角形内角平分线定理和外角平分线定理的逆定理，更易获得动点轨迹是圆，此即阿波罗尼奥斯的纯几何方法。

【问题 4】古希腊人用纯几何方法，处理“二线轨迹”“二点轨迹”问题可谓得心应手，但当他们遇到“三线轨迹”、“四线轨迹”乃至“n 线轨迹”问题时，哪怕是最出色的几何学家也显得有些为难。以特殊的“三线轨迹”问题为例，想想，你会怎么做呢？

（1）平面内，已知三条直线 l_1、l_2、l_3 满足：$l_1 // l_2$ 且距离为 2，$l_1 \perp l_3$，则满足到 l_1 和 l_2 的距离之积与到 l_3 距离的比为 2 的动点轨迹是什么？

（2）条件同（1），满足到 l_1 和 l_2 的距离之积与到 l_3 距离的平方的比为 2 的动点轨迹是什么？

【说明】教师引导学生建立坐标系，将轨迹满足的几何条件翻译为动点坐标满足的代数方程。

问题（1）中，轨迹方程可化为分段函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x-1)(x+1), x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\\ \dfrac{1}{2}(1-x)(x+1), x\in(-1,1)\end{cases},$$

函数图像为两条相同形状且关于 x 轴对称的**抛物线**（图 4）。

问题（2）中，当点 P 在 l_1 和 l_2 之间，即 $x\in(-1,1)$ 时，点 P 坐标满足方程

$$x^2+2y^2=1;$$

当点 P 在 l_1 和 l_2 的两侧，即 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，点 P 坐标满足方程

$$x^2-2y^2=1.$$

教师动态演示两种情况下的轨迹，学生观察发现，前者的特征是形似“被压扁的圆”，不妨暂称前者为**椭圆**；后者的特征是由两支对称的曲线组成，由反比例函数图像的命名，不妨暂称后者为**双曲线**（图 5）。教师表示，之后会学习二者在数学上的严格定义。

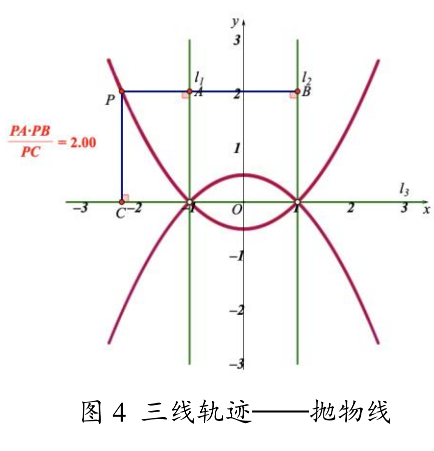


图 4 三线轨迹——抛物线

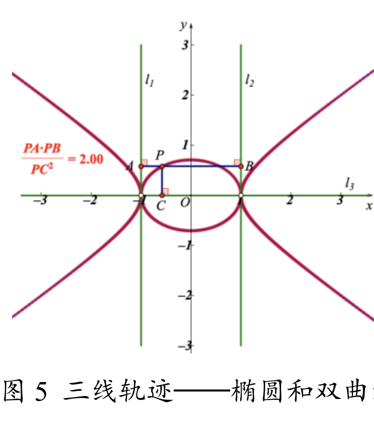


图 5 三线轨迹——椭圆和双曲线

【小结】从问题 2 到问题 4，问题 2 的解决仅调用了几何直观，便探明了满足条件的轨迹，这就叫“几何方法探轨迹”。到问题 3 和问题 4，难以根据给定几何性质，凭直观想象出满足条件的轨迹，于是想到通过建系，将点和坐标一一对应，将轨迹满足的几何条件翻译成动点坐标满足的代数方程，这就叫“代数方法探方程”，再将坐标满足代数方程的点坐标系中描出来，就得到了要求的轨迹。这一过程中，最有创造力的一步是建立坐标系（学生齐声回答）。古希腊人因为没有坐标系的工具，被囿于纯几何中，于是在解决复杂的轨迹问题时举步维艰。

师：同学们知道坐标系是哪位数学家发明的吗？

生：笛卡儿。

师：平面直角坐标系又名笛卡儿坐标系。笛卡儿在用代数方法解决轨迹问题中的几何作图难题时，无心插柳发明了坐标系，这是一个非常漂亮的数学抽象过程。

【微视频一】央视纪录片《被数学选中的人》片段

“因为受到感官的制约，我们看到的世界并不是完全真实的。所以如果想离真正的机理和本质更近一点，数学抽象或许是最有效的途径。去掉所有感性的东西之后，比如轻重、大小、软硬、冷热等等，其背后的各种关系和结构才有可能显现出来。抽象之后，你会发现另外一个世界。在这个世界里事物被重新定义。当我们带着这些关系和结构再次回到现实世界，它可以创造出很多新的东西，可以追溯过去，应对现在，也可以预测未来。

传说伟大的数学家笛卡儿在梦中获得了坐标系的灵感，从而找到了用代数方法解释几何问题的桥梁，这便是用一种抽象去表达另一种抽象。坐标系的概念其实是很抽象的，但由于我们受到过系统的数学教育，这个抽象的概念反而在头脑中变得清晰明了。”

【追问】与今天不同的是，笛卡儿仅用到了单轴坐标系，并且他已知帕普斯的工作，知道轨迹是什么，然后再去推导曲线表示的方程（轨迹方程）。那么反过来，已知轨迹方程，如何研究方程表示的曲线呢？

3.2.3 几何代数相联姻

【问题 5】在平面直角坐标系内，方程 $x^2+ky^2=1$（$k>0$）表示的曲线是什么？

【说明】教师提示 k 是参数，可取特殊值。当 $k=1$时，方程 $x^2+y^2=1$表示的曲线是单位圆；当 $k=2$时，方程 $x^2+2y^2=1$曾在问题 4 的第（2）问中出现过，表示的曲线是椭圆（图 6）。

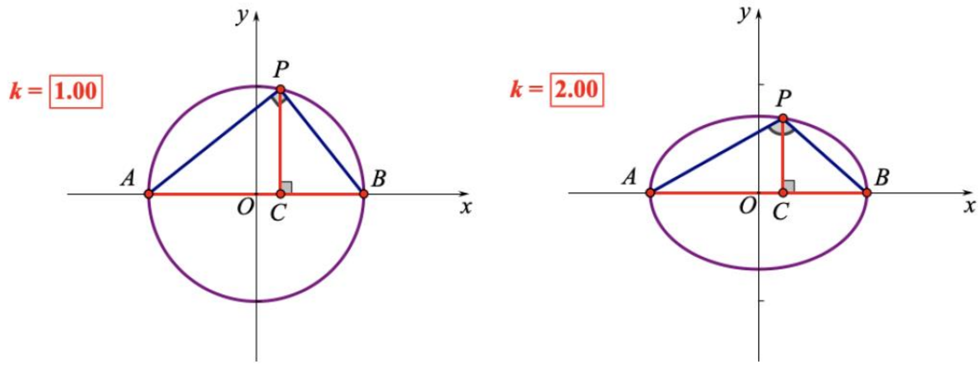


图6 方程 $x^2+ky^2=1$（$k>0$）表示的两类曲线

对其余 $k>0$ 且 $k \neq 1$ 的情况，教师首先变化 k 的值进行动态演示，学生观察后发现曲线均是椭圆。教师随即介绍费马的方法，他通过建立单轴坐标系，并将代数方程 $x^2+ky^2=1$ 变形（注：此处非等价变形，需补上 $A(-1,0)$ 和 $B(1,0)$ 两点），直至能找出方程中各个量的几何表示：

$$x^2+ky^2=1 \Rightarrow \frac{y^2}{1-x^2}=\frac{1}{k} \Rightarrow \frac{y^2}{(1-x)(x+1)}=\frac{1}{k} \Rightarrow \frac{PC^2}{AC \cdot BC}=\frac{1}{k}$$

而 $\dfrac{AC \times BC}{PC^2}=k$（$k>0$ 且 $k \neq 1$）为常数，是古希腊数学家熟知的椭圆性质之一。同笛卡儿一样，站在前人的肩膀上，费马判断出方程 $x^2+ky^2=1$（$k>0$ 且 $k \neq 1$）表示的曲线是椭圆。两人的工作在冥冥之中互补，最终几何代数相联姻，解析几何诞生了。

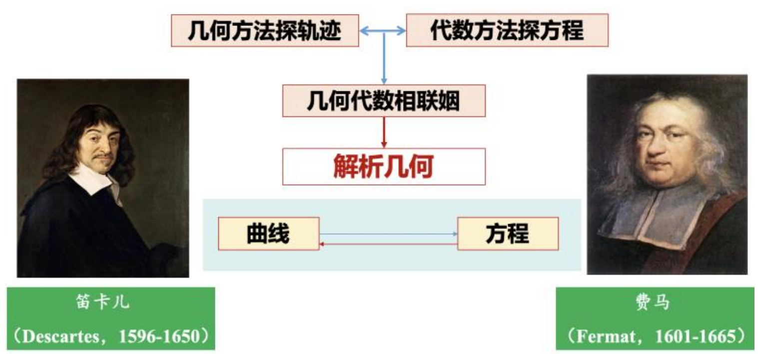


图7 解析几何的诞生

【微视频二】《解析几何的“前世今生”》

“解析几何的英文为 Analytic Geometry，Analytic 的词源是 Analysis，分析。对韦达、笛卡儿来说，Analysis 指用代数来分析几何作图问题，代数仍是几何的附庸。费马的工作出现后，代

数才逐渐成为一个独立的数学部门，和几何不断交融，于是有了解析几何。

18 世纪法国著名数学家拉格朗日曾说：‘只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄。但是，当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从那以后，就以快速的步伐走向完善。’正是在 18 世纪，微积分和无穷级数进入了数学，比如瑞士数学家欧拉就用“无穷小量解析”一词来指代微积分。

以上是从数学自身发展的角度。从自然科学的发展史来看，16 世纪后，运动与变化的研究成为中心问题，对数学工具的需要促使数学从常量数学向变量数学转型，而变量数学的第一个里程碑就是解析几何的发明。综上，我们就看到了解析几何的‘前世今生’。”

【课堂小结】

- **WHY:** 为什么要学习解析几何？（**研究目的**）
- **WHAT:** 平面解析几何的**研究对象**和**研究问题**是什么？
- **HOW:** 如何处理平面解析几何问题？（**研究方法**）

【说明】从“为什么”“学什么”“怎么学”三方面整体提炼平面解析几何的研究对象、研究目的、研究问题和研究方法，发挥序言课“知识导航、思想引领”的作用。

【课后作业】阅读《古今数学思想》第一册第 14 至 15 章，以解析几何的产生与发展或解析几何对人类文明的贡献为主题进行数学写作。

4 教学反思

4.1 问题设置：从问题解决到问题提出

本节课以古希腊轨迹问题为明线，串联起“几何方法探轨迹”，“代数方法探方程”到“几何代数相联姻”的三步曲，清晰地展示了解析几何的知识源流。但从“二点轨迹”问题（阿波罗尼奥斯圆）起，教师便有意识地引导学生使用代数方法，直至“三线轨迹”问题时，对大多数学生而言，解决轨迹问题的纯几何方法已完全谢幕，课后仅两位学生能补充出阿波罗尼奥斯的方法。课堂中未涉及“四线轨迹”、“五线轨迹”问题等，更未展示纯几何方法用于解决这些问题时的复杂与棘手，因此学生未能体验代数方法的不可替代性。

课后学习单中，要求学生提出一个新的轨迹问题，除 4 位学生未提出问题外，41 位学生提出的问题可分为 7 类，具体如表 1 所示：

表 1 学生提出的轨迹问题

问题类型	数量	举例
I.“单点轨迹”、“二点轨迹”和“二线轨迹”问题	18	1）求平面中到一个定点的距离在$\left[1,2\right]$间的动点轨迹 2）求平面中到两定直线距离之比为$3:1$的动点轨迹 3）求平面中到两定点连线段所成角相等的动点轨迹
II.“三线轨迹”问题	9	平面中，已知三条直线l_1、l_2、l_3满足：$l_1//l_2$且距离为 2，$l_1\perp l_3$，求满足到l_1和l_3的距离之积与到l_2距离的比为 2 的动点轨迹
III.与圆锥曲线定义相关的轨迹问题	5	1）求平面中到两定点距离之和为定值的动点轨迹 2）求平面中到 1 个定点和 1 条定直线距离相等的动点轨迹
IV.空间中的轨迹问题	4	求空间中到定点距离等于定值的动点轨迹
V.物理中的轨迹问题	1	在一定高度把一个物体平抛出去，求其轨迹
VI.线轨迹问题	1	求垂直于某一直线的直线的轨迹
VII.非轨迹问题	3	设两定点在一定直线两侧，求直线上一点，使得两定点与该点连线长度与不同常数之比的和最小

从问题种类数来看，学生提出了丰富的轨迹问题：近 66%的学生提出的 I、II 类问题是课堂中的轨迹问题及变式；约 12%的学生提出了与圆锥曲线第一或第二定义相关的 III 类问题，说明部分学生预习了圆锥曲线知识；近 10%的学生类比平面中的情形，提出了空间中的轨迹问题（IV 类）；还有两位学生分别提出了物理中的平抛问题及超出初等数学范畴的线轨迹问题。但从问题的认知需求来看，未有学生提出一般“三线轨迹”问题及“n线轨迹”（$n>3$）问题，从平面类比到空间的轨迹问题也比较简单。

综上，基于问题解决（Problem Solving）的传统视角，教师在设计平面解析序言课中的轨迹问题串时，应当预设好纯几何方法何时“进场”，何时“退场”；为使学生深刻理解解析几何诞生的必然性，直观和不直观的几何图形都有必要呈现在课堂中。而基于问题提出（Problem Posing）的新视角，与其让学生课后再提问，不如大胆放手，让学生当堂提问，在课堂中实现问题共享，

当问题过难，如轨迹过于复杂以致现有几何知识无法解出时，代数方法或将顺其自然登场，纯几何方法则顺理成章落幕。

4.2 教学留白：从序言课到单元教学

圆锥曲线是解析几何中的核心内容，作为圆锥曲线的椭圆、双曲线及抛物线具有天然的内在联系，所以教师在整体把握三类曲线的几何特征、方程及性质等内容的基础上，应当秉持整体设计的教学思想，指导学生以联系的观点开展关于圆锥曲线的综合研究，落实圆锥曲线的单元教学[8]。考虑到序言课作为一章内容的先行组织者，具有帮助学生形成概貌性认识的教学价值[9]，因此，序言课“何时留白”、“如何留白”及“留什么白”，对后续的单元教学具有旁指曲谕的指导性意义。

如本节课中，特殊的“三线轨迹”问题，引入了特殊的抛物线与椭圆、双曲线，学生初步认识了三类曲线的形状。课后学习单中，要求学生从梅内克缪斯用垂直于母线的平面截顶角分别为锐角、直角和钝角的正圆锥，得到三类圆锥曲线（图 8）的历史出发，

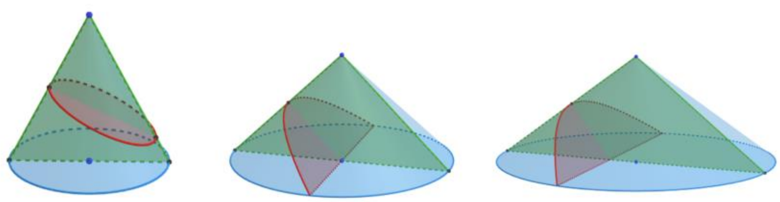


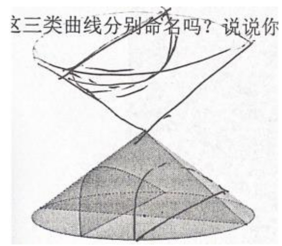
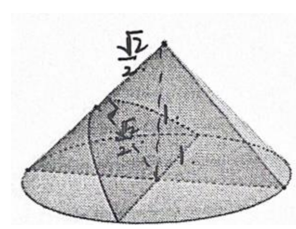
图8 梅氏三线

尝试为三类曲线分别命名并叙述原因。除 5 位学生未给出命名外，40 位学生的命名统计结果如表 2 所示。

超过一半的学生给出了正确的命名，其中 10 位学生的命名与梅内克缪斯相同，体现了历史相似性，而学生给出的错误命名，体现了源于几何直观的欺骗，从而凸显了解析几何中建立几何直观后的代数运算的必要性[8]。转用历史的眼光看，梅内克缪斯的命名并未揭示圆锥曲线的本质特征，这为阿波罗尼奥斯根据面积贴合理论，提出齐曲线、盈曲线和亏曲线的新命名埋下伏笔，而后者的“秘密武器”便是圆锥曲线的通径（latus rectum）。

回到本节序言课，问题 5 中的 $\dfrac{AC \cdot BC}{PC^2} = k$ 正是阿波罗尼奥斯利用通径推导出的圆锥曲线性质之一：当 $k > 0$ 且 $k \neq 1$ 时，椭圆满足该性质；当 $k < 0$ 时，双曲线满足该性质；当 $k = 0$ 时，

表 2 学生对梅氏三线的命名及原因举例

	命名类型	数量	命名举例及原因
正确命名	同梅氏命名，即锐角圆锥曲线、直角圆锥曲线与钝角圆锥曲线	10	这样可以明确展现曲线所在的模型
	现行通用命名，即椭圆、抛物线与双曲线	11	椭圆像“拉伸过的圆”，抛物线像“抛出物体的飞行轨迹”，双曲线是“弯曲的，且有上下两根”（图 9）  图 9
错误命名	混淆不同类圆锥曲线的命名	10	e.g.1 锐抛物线、直抛物线及钝抛物线：截得的曲线为抛物线，加上圆锥顶角的大小
	与圆相关的命名	6	e.g.2 斜截圆、直切圆及偏截圆：看形状，与圆形似
	其余不当命名	3	e.g.3 命名抛物线为“等腰直角弧”：感觉和一堆等腰直角三角形有关（图 10）  图 10

若将抛物线视为一个顶点在无穷远处的曲线，则抛物线同样满足该性质。由此便可链接圆锥曲线的单元教学，比如探寻圆锥曲线标准方程中隐藏的几何意义，又或基于该几何性质，选择合适的坐标系，以建立解析几何背景下的圆锥曲线标准方程等。

4.3 学科联系：从数学内部到数学外部

从数学内部来看，本节课生动地展现了解析几何的缘起、诞生与发展，浓缩了代数从几何附庸到日趋独立，再到与几何交融产生解析几何的过程，微视频二中还提到解析几何诞生后迎

来了微积分的诞生，意在锤炼思维，激励学生从学科发展史的高度审视初等数学，形成动态的数学观。有学生在课后学习单中提出“代数依靠严谨的抽象，而远胜人类看似显然的直觉。而分析源于代数，分析是最美好的！”的观点，说明高观点下的教学有益于学生理性精神的培育。

但从数学外部来看，本节课仅用微视频二中“运动与变化成为 16 世纪后自然科学研究的中心问题”一言，匆匆带过推动解析几何诞生的外部动力，忽视了解析几何成为数学重要分支的原因之一是其在天文学、物理学及军事等各领域的广泛应用。表 1 也显示，已有学生想到了物理中的平抛轨迹问题。

因此，序言课应当适时呈现解析几何坚实的现实背景及丰富的文化内涵。如核电站的双曲线型冷却通风塔、探照灯的镜面等，有可能为学生从平面解析几何通向高等数学中的空间解析几何架起一座桥梁。而如开普勒（J. Kepler, 1571-1630）由行星运动的观测数据提出椭圆定律，到二战时双曲线性质被应用于 Loran 导航系统开发，再到如今体育竞赛中投篮、跳水及掷铅球等各类抛物线的轨迹等素材，则有助于沟通解析几何主题下数学内部和外部的联系，为开发“STEAM + HPM”的教学新模式作有益的探索。

参考文献

[1] 任念兵. 一个新课型案例:《解析几何序言》的教学设计[J]. 数学教学, 2014(11): 9-13.

[2] 钟萍. HPM 视角下的平面解析几何引言课[J]. 数学教学, 2019(08): 42-46.

[3] 庞海燕. HPM 视角下“解析几何序言课”实践与研究[J]. 数学教学通讯, 2020(27): 9-12.

[4] 方元沁, 栗小妮. 数学学科德育视角下平面解析几何起始课设计[J]. 中小学数学(高中版), 2021(Z2): 43-46.

[5] 汪晓勤, 柳笛. 平面解析几何的产生(一)——古希腊的三线和四线轨迹问题[J]. 中学数学教学参考, 2007(17): 58-59.

[6] M・克莱因. 古今数学思想（第 1 册）[M]. 上海:上海科学技术出版社, 2014.

[7] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. 数学通报, 2020, 59(03): 7-12+19.

[8] 章建跃. 利用几何图形建立直观通过代数运算刻画规律——解析几何内容分析与教学思考(之二)[J]. 数学通报, 2021, 60(08): 1-10+26.

[9] 蔡甜甜, 宁连华. 数学教材章头课的理性分析及教学建议[J]. 数学通报, 2018, 57(04): 22-26.

数学文化视角下的长方体直观图画法课例研究

顾海萍[1]，余庆纯[2]
（1 上海师范大学附属经纬实验学校，上海，200444；2 华东师范大学数学科学学院，上海，200241）

1 问题提出

《上海市中小学课程标准（试行稿）》提出，数学教学要有数学抽象、探索的过程与体验，能运用数学的思维方式观察、分析问题，同时要有一定的数学视野和数学文化素养，树立理性精神，培育对数学美的感受[1]。数学文化，是指数学的思想、精神、语言、方法、观点以及它们的形成和发展，还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及与数学相关的人文活动[2]。数学文化融入义务教育阶段数学教学，是中小学数学教育改革的新趋势。

“互联网+教育”时代下，信息技术为数学文化融入数学教学提供有力的保障。电子书包是以学生为主体，融合信息终端与网络学习资源的学习载体，是推动教学方式与学习方式变革的动力来源[3]。微视频辅助教学能激发学习兴趣，提高学习效率。几何画板、GeoGebra 等几何软件是数学探究和数学实验教学的有力工具，实现“做中学”[4]。数字媒体下的在线博物馆、数字名画等，突破空间限制，将中华民族五千年的悠久历史积淀下的艺术瑰宝鲜活地展示出来[5]。借助信息技术将文化和艺术融入数学课堂，展现学科底蕴和跨学科联系是值得一线教师思考和研究的内容，笔者以“长方体直观图的画法”教学实践为例进行阐述。

“长方体直观图的画法”是沪教版教科书六年级下册第八章第二节的内容，主要阐述平面与长方体的画法与表示法。学生已学过线段与角的画法，会用量角器画任意角，用尺规二等分线段与角，知道长方体的基本元素及特征。长方体“斜二测画法”是学生学习的第一个立体图形的画法，需要突破从平面到空间图形的认知跨越，提升直观想象能力，为后续学习长方体中元素的位置与数量关系作铺垫。传统课堂教学普遍直接介绍长方体斜二测画法的规定，学生对于“斜二测画法如何产生”、“为何要学习斜二测画法”等问题，存在一定的疑惑。

通过查阅数学史料，发现用平面图形表示空间形体有着悠久的历史，而长方体的画法变迁过程为“长方体直观图的画法”教学提供创新思路与实践依据。鉴于此，数学文化视角下“长方体直观图的画法”信息化课例的教学目标，拟定如下：（1）通过课前微视频，了解绘图的历

史，知道画长方体直观图的必要性；结合几何画板探究“斜二测画法”规定的合理性，培育理性精神；（2）借助数字教材和空中课堂资源，掌握平面和长方体的画法与表示，学会运用“斜二测画法”画出长方体直观图，掌握补画长方体的方法；（3）运用电子书包与数字媒体等技术赏析《清明上河图》，体会数学的社会角色，数学与艺术的学科联系，彰显数学文化，增强民族自信。

2 教学过程

2.1 课前准备

课前，教师用微视频介绍将空间图形绘制在平面上的历史，依次呈现：约 5000 年前贺兰山岩画中的投影画法、公元前 1 世纪罗马建筑师维特鲁维（Vitruvins，约 1B.C）所著《建筑十书》中水平投影、正面投影与等角投影等画法[6]、我国宋代的工程制图和宋徽宗（1082-1135 年）《文会图》中的投影画法[7]（见图 1）。此外，教师还对学生进行了认知前测，问卷内容为“请绘制一个长方体，并写出你认为绘制长方体直观图需要画出哪些元素和特征”。

【设计意图】借助微视频，学生了解直观图在艺术和建筑领域的作用，知道绘制直观图的必要性；通过课前测，教师知道学生的认知基础，为课堂教学做好铺垫。

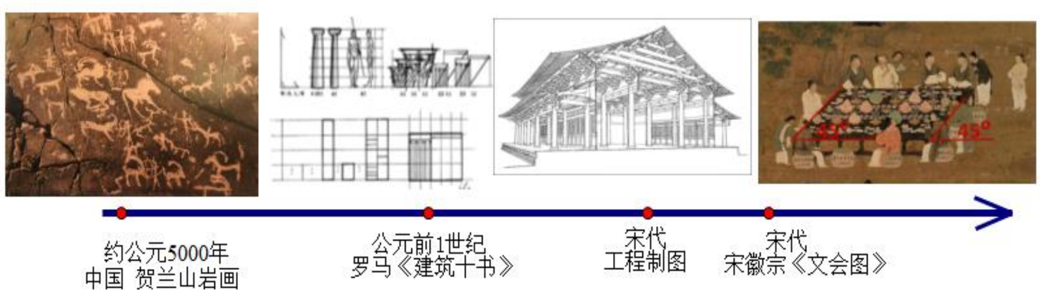


图 1 微视频图片

2.2 复习引入

思考 1：编号①-⑥是前测问卷中部分同学绘制的长方体（见图 2）。哪些图更能体现长方体的元素和特征？请说说理由，并把不合适的图进行排除。

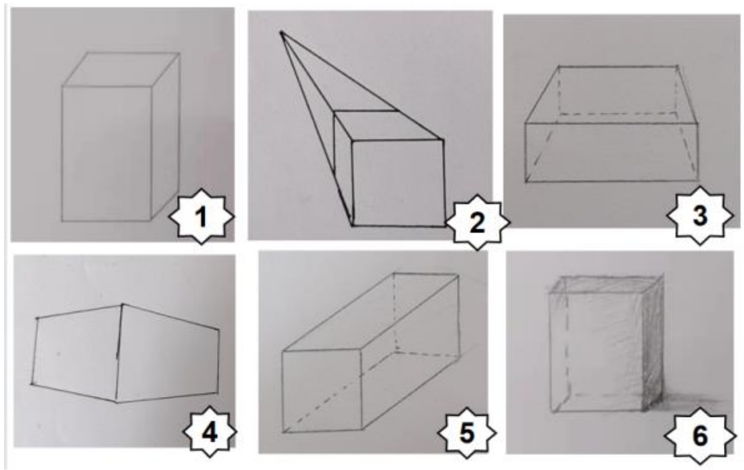


图 2 学生课前绘制的长方体

生 1：长方体有 6 个面、8 个顶点、12 条棱，图④只展示了两个面，图②和①只有 7 个顶点，要排除。

生 2：依据长方体 6 个面，每 2 个面一组且形状大小相同的特征，排除图③。

生 3：数学与美术不同，不需要阴影美化，选择图⑤更能体现长方体的元素与特征。

师：长方体直观图可以像图⑤这样画。这个画法有什么规定吗？下面进一步研究。

【设计意图】借助课前测结果，复习长方体的元素及其特征，确定作图要点和元素，了解长方体直观图需要体现长方体的元素和特征，培养学生数学抽象、直观想象素养，数学说理的表达能力。

2.3 规定探究

探究 1：正方体是特殊的长方体。根据从特殊到一般的数学思想方法，我们先研究研究绘制正方体的规定。借助几何画板，探究对于不同取值的宽，所绘制的长方体的差异。

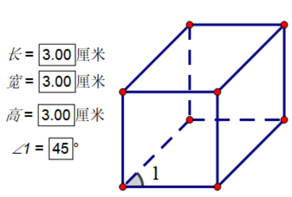


图 3 长方体 1

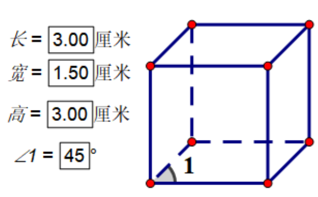


图 4 长方体 2

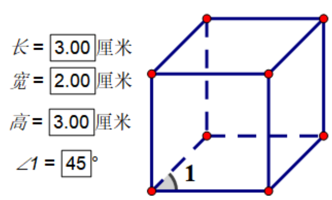


图 5 长方体 3

师：在几何画板中取长、宽、高都为 3cm，平行四边形中锐角的度数是 45°，像正方体吗（见图 3）？

生：宽偏长，不像正方体。

师：宽取实际宽的一半，有所改善吗（见图 4）？

生：像正方体了。

师：宽取 2cm（见图 5）。

生 1：差别不大。

生 2：宽取 2 更像正方体。

师：如果请你们制定长方体画法的规定，你会如何设定？

生 1：如果规定宽取 2，宽就是实际宽的三分之二，计算不方便。

生 2：宽取实际的一半方便计算。之前学过画线段中点，能用尺规作图画线段中点，作图方便。

生 3：宽取实际长度最方便，就是看起来不像。

生 4：兼顾视觉直观和绘制方便，规定宽为实际宽的一半更好。

探究 2：长方体直观图图中底面平行四边形中∠1 的夹角是否一定要 45°呢？

教师运用几何画板变化参数，将底面平行四边形中锐角∠1 的度数从 0°到 180°变化，（见图 6）师生共同确定底面平行四边形长与宽夹角的大小。

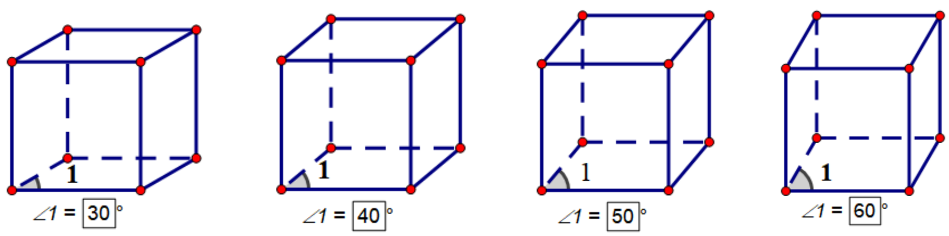


图 6 夹角数变化的长方体

通过观察讨论发现，角度偏差 1°视觉差距不明显，夹角从 40°到 50°都像正方体，考虑尺规作图方便和视觉美观，取 45°更好，此外，学生还有补充：看见的棱，用实线表示；看不见的棱，用虚线表示，更符合视觉直观。从而形成水平放置的平面的画法和长方体斜二测画法的规定。

【设计意图】师生借助几何画板，共同讨论分析：绘制长方体直观图时长方体中宽与实际宽的数量关系、底面平行四边形中锐角的度数等问题，共同经历长方体直观图画法规定的形成过程，感受“规定”的科学性、合理性与必要性。

操作 1：“画一个长、宽、高分别为 4cm、2cm、1cm 的长方体的直观图”。师生共同实践操作，经历：阅读书本圈划重点——跟随空中课堂视频作图——下载电子书包“数字教材”中“参考答案”（见图 7）——对比答案查漏补缺——交流作图要点。

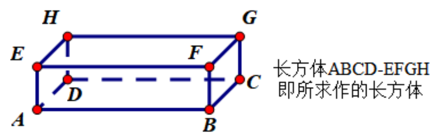


图 7 所求作的长方体

【设计意图】经历画图过程，掌握“斜二测画法”。借助信息技术，明确作图要点和过程，以核对“参考答案”查漏补缺的形式，培养学生自主学习能力，在交流讨论中培育数学表达能力。

2.4 回顾历史

思考 2：图中是西方早期教科书中长方体直观图的画法（见图 8）。想一想，不同时期的长方体画法是否有不足之处，分别说一说？

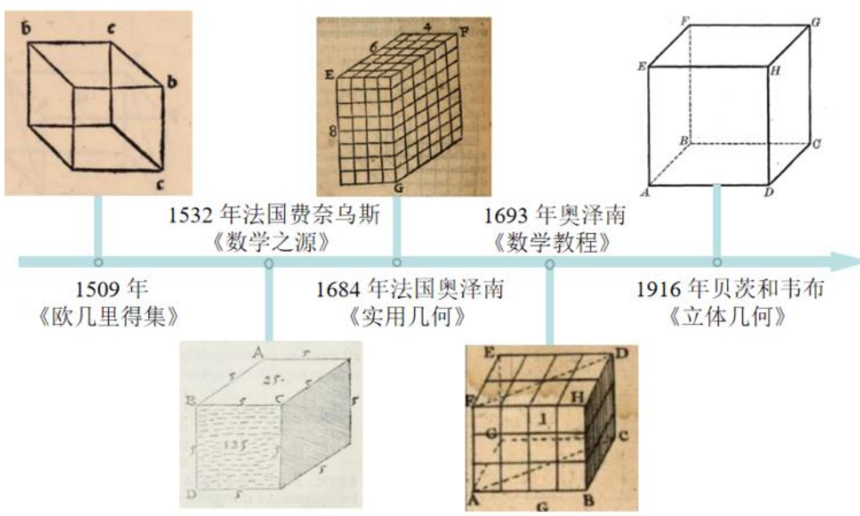


图 8 西方早期教科书中的长方体

生 1：《数学之源》和《实用几何》中的长方体没有画看不见的棱，

生 2：《欧几里得集》中的长方体没有使用虚线绘制看不见的棱。

生 3：《数学之源》、《实用几何》中长方体的宽没有取实际的一半。

生 4：《数学之源》、《实用几何》和《数学教程》中长方体的长与宽的夹角不是 45°。

生 5：《立体几何》中长方体的画法与斜二测画法相同。

师：长方体直观图的画法经历了漫长的历史变迁，不同的画法各自延续了一段时间，斜二画法因兼具准确和美观的特点而登上历史舞台，最终受到人们的青睐。

【设计意图】通过历史时间轴，展现西方早期教科书中的长方体直观图的变化过程。以“思考题”的形式依次呈现，引导学生观察、发现图中长方体直观图绘制的变化及其优缺点，巩固对画法规则的理解，感受长方体画法的历史变迁，培育动态数学观，感受数学多元文化之魅。

2.5 练习巩固

练习 1：学生打开“电子书包”中“数学教材”完成教师编制的配套练习。进一步巩固平面和长方体的画法和表示法，通过软件的批改功能，了解知识掌握情况，教师根据答题情况，分析讲解。

探究 3：若一个长方体擦去若干条棱，最多可以擦去多少条，至少需要保留哪些棱才能够补画出原长方体？分别该如何补画？

结合几何画板中的长方体，师生共同讨论，逐步擦除长方体中的棱，发现至少保留长、宽、高各一条棱，即最多擦去 9 条棱（见图 9），可以通过作平行线、画相等的线段和角等方法，补画出长方体。

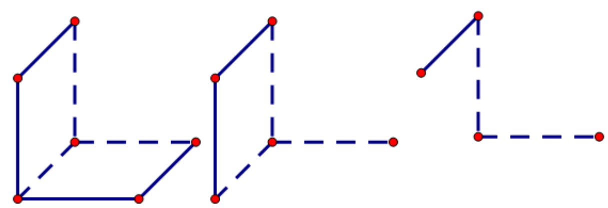


图 9 待补画的长方体

【设计意图】借助信息技术的习题批改和反馈功能，巩固基础知识。通过探究活动进一步掌握长方体斜二测画法，结合信息技术技术，夯实双基。

2.6 拓展赏析

《清明上河图》现存北京故宫博物院，是由宋代画家张择端创作的举世闻名的中国古典现实主义绘画杰作，描绘了繁华富庶的京城居民生活景象[13]。依托“电子书包”等技术媒介，打

开高清数字版《清明上河图》，欣赏并思考以下问题。

思考 3：画家是如何绘制平面以及长方体的？是否运用了今天所学的平面的画法或者斜二测画法？量一量图中长方体物体长和宽夹角的度数，并把发现的相关内容，截图上传云端并交流（见图 10）。

图 10-1 田地

图 10-2 帐篷顶

图 10-3 房子

图 10-4 箱子

图 10 学生上传的截图

学生分别找到了田地、帐篷搭的亭子、房子、长方体箱子等，交流并发现虽然画家的画法与今日所学内容相似，但没有统一整个作品中平面和长方体的画法。故猜测画家通过生活感知，有了绘制平面和长方体画法的意识，但是并未掌握斜二测画法，如果能按照今天的规定绘图，那么画出来的田和房子肯定会很整齐。

【设计意图】借助数字媒体，欣赏画作，感受艺术与数学的联系，体会数学在生活中的应用价值。借助数字平台交流功能，提升学习效率，用数学的语言表达，用数学的眼光欣赏。

2.7 小结作业

小结环节，学生回顾了本课中的信息技术应用、斜二测画法规定的探究过程、名画《清明上河图》赏析。教师布置了数学写作作业“将平面和长方体画法知识，图文并茂地将今日所学介绍给我国古代的画家”。

【设计意图】通过数学写作，回顾知识，提升数学表达能力，感受数学与生活的联系。

3 数学写作

在数学写作中学生图文并茂地介绍了斜二测画法：有些学生描述了斜二测画法绘制长方体的步骤，并说明“斜二测画法可以将长方体画得简洁清晰，简单实用”（见图 11）；有些学生通过绘制不同规则下的正方体，比较得出“宽取实际宽的一半，因为如果不取一半，看起来就不真实了；长与宽的夹角要 45°，不然不美观；看不见的地方虚线，为了更真实”，逐步讲解说明

斜二测画法规则（见图 12）；还有些学生举例，分步骤绘图阐述如何运用斜二测画法绘制一个长方体凉亭“清水堂”，步骤清晰，有理有据（见图 13）；另外，也有学生结合文字和图形，古今对话交流：“你好！古代的画家，我来自一千多年后，看见了您作的《清明上河图》感到十分震撼，但仍觉得不够精确，我为您推荐一种画法（斜二测画法），这种画法可以使景物井井有条，用斜二测画法作图时，要先知道所画物体的长、宽、高。之后长与高保留原数（或比例缩小后的数），宽取原来（或按比例缩小后的数）的一半作图。作图时，顶面底面和侧边的两个面化成夹角为 45°的平行四边形”，并举例绘制由一个长方体直观图添加其他装饰后绘制而成的亭子（见图 14）。

可见，通过数学写作的巧妙方式，落实数学史的多元教育价值：（1）巩固数学新知，回顾梳理所学知识；（2）规范语言表达，提升数学表达能力；（3）赏析数学文化，培育理性精神与文化自信。

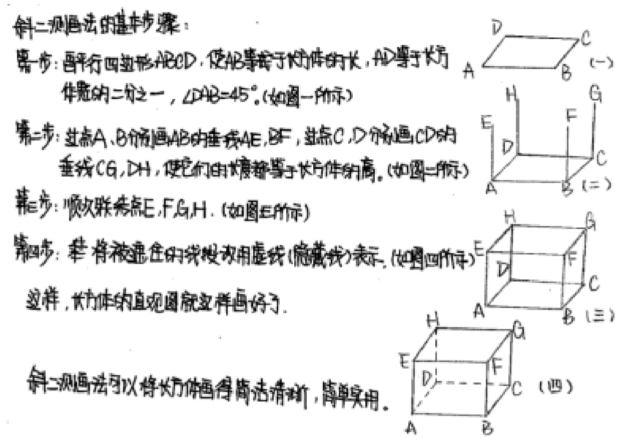


图 11 斜二测画法步骤

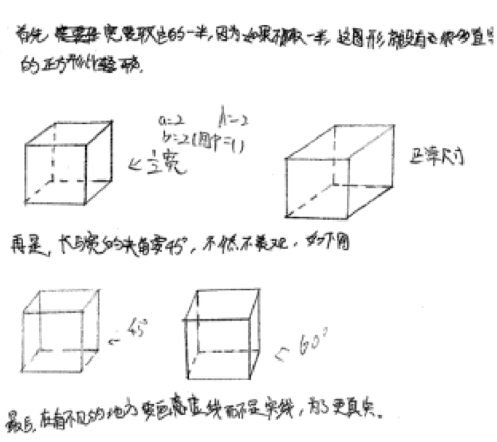


图 12 不同规则的长方体

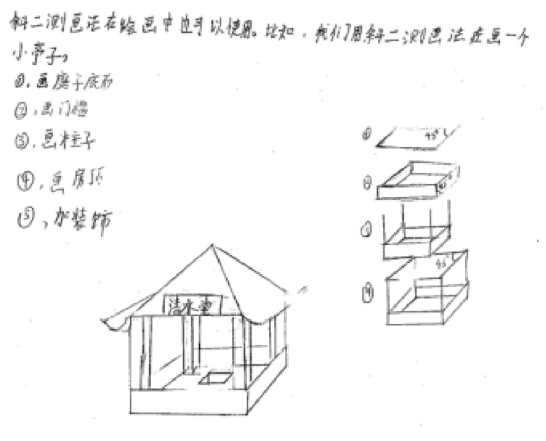


图 13 长方体凉亭“清水堂”

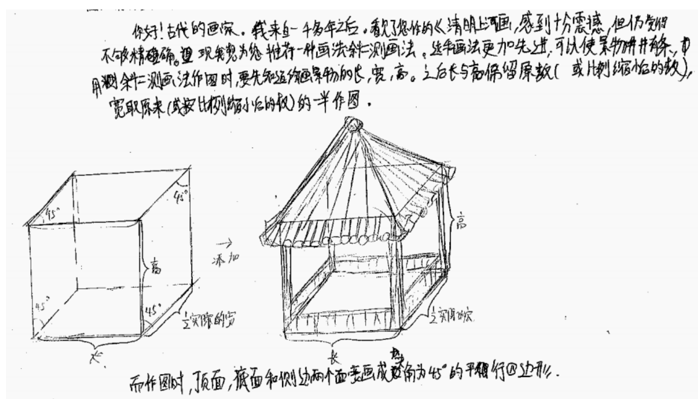


图 14 长方体亭子

4 文化内涵

依据“基于数学史的数学文化”理论分析框架[9]，对数学文化视角下信息化课例“长方体直观图的画法”课例教学的五个数学文化内涵维度进行分析：**（1）知识源流**，借助微视频、时间轴了解绘图的历史、体会长方体直观图画法的变迁；经历探究斜二测画法规定形成过程，感受知识源流；**（2）学科联系**，通过《清明上河图》中平面和长方体的画法赏析来阐述数学与艺术的联系，再结合数学写作，感受数学对建筑、艺术等跨学科的重要作用；**（3）社会角色，**微视频中的岩画活灵活现地描绘动物形象，数字版《清明上河图》栩栩如生地呈现北宋汴京的繁荣，感受直观图的画法在生活中的应用，领悟数学源于生活、服务于生活的本质；**（4）审美娱乐，**在几何画板动态演示探究规定过程中体验“做数学”的乐趣，借助几何画板呈现的“如何补画长方体”活动，体现数学趣味，培养数学抽象、直观想象素养；**（5）多元文化，**以经典画

作、建筑图纸、早期教科书中的长方体直观图为素材，展现长方体直观图画法的异同，揭示其文化底蕴，感受中西文化交融。

5 总结展望

数学文化视角下“长方体直观图的画法”课例研究，用信息技术辅助“做数学”探究活动，聚焦“画法规定”缘由和历史演进与文化内涵。活动课前导学中微视频助力学生了解画直观图的必要性；新知讲解运用几何画板、希沃白板等信息技术的辅助进行探究，培育理性精神；数字教材中的习题实时反馈，查漏补缺；高清版《清明上河图》让学生穿越时空，拓展视野，从历史到课堂，从数学到艺术，信息技术融合促进数学文化融入数学教学。

未来，数学文化视角下信息化课例研究需要做好以下几点：（1）深挖历史素材，通过查阅早期教科书、古代著作、艺术作品等，挖掘契合教学内容的数学史料；（2）涵养文化内涵，梳理“历史发生序—数理逻辑序—心理认知序”，优化教学设计，阐发数学文化；（3）巧用信息技术，互联网+教育时代，将契合的数学文化内容渗透于课堂，提升学习效率，扩展视野，丰富知能，培育文化自信。

参考文献

[1] 上海市教育委员会. 上海市小学数学课程标准[M]. 上海: 上海教育出版社, 2004: 32.

[2] 中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018.

[3] 李逢庆, 王政, 尹苗. 智慧课堂的嬗变与趋向[J]. 现代教育技术, 2021, 31(09): 13-19.

[4] 蒋培杰, 牛伟强, 熊斌. 国内信息技术与数学教学融合研究述评[J]. 数学教育学报, 2020, 29(4): 96-102.

[5] 张爱华, 孟开元. 数字媒体环境下古典名画的展示传播研究——以《清明上河图》为例[J]. 美术教育研究, 2016(10):4 6-47.

[6] 刘克明, 杨叔子. 画法几何学的历史及其现代意义纪念蒙日画法几何学公开发表 200 周年[J]. 数学的实践与认识, 1998(03): 281-288.

[7] 赵园园. 轴测图法在唐宋绘画中的空间表现研究[D]. 江苏大学, 2019.

[8] 徐邦达. 清明上河图的初步研究[J]. 故宫博物院院刊, 1958(01): 37-51.

活动讯息

旧题新探：HPM 视角下的古典概率教学

钱 秦[1]，雷沛瑶[2]

(1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2.华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

2021 年 12 月 1 日上午，数学史与数学教育（HPM）工作室课例研究活动在上海市曹杨第二中学顺利举行。因疫情防控，本次活动采用线上、线下相结合的方式进行，共持续两个半小时。参与本次活动的有华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师、曹杨第二中学数学组教师、华东师范大学数学教育方向的研究生和 HPM 高中教师网络研修班的老师等近 70 人。

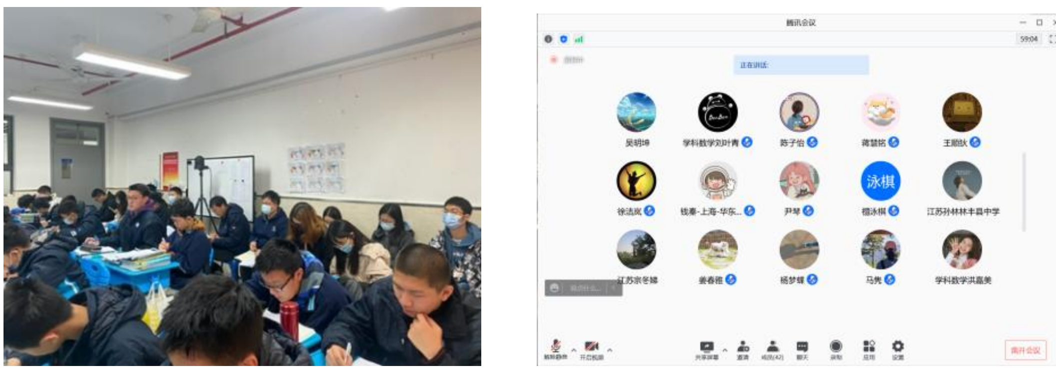


图 1 线上和线下的参与情况

本次课例展示活动上，王海雯老师带来了 HPM 视角下的古典概率教学，目的是让学生学习古典概型的条件、计算公式及其运用。

首先，王海雯老师利用赌金分配问题进行情景引入，并进行问题变式，要求学生运用枚举法解决问题。接着引入古典概型需要满足的条件，通过例题和练习让同学们辨析概念、加深理解。王老师引导学生用集合的语言描述基本事件和样本空间，进一步构造概率计算模型。紧接着通过微视频介绍古典概率的历史，提升学生的数学素养。最后王老师从知识和思想方法两方面进行了小节，加深同学们对数学模型和“特殊到一般”数学思想的认识，并布置了数学写作的作业，意在启发学生将对数学的深入思考进行总结。

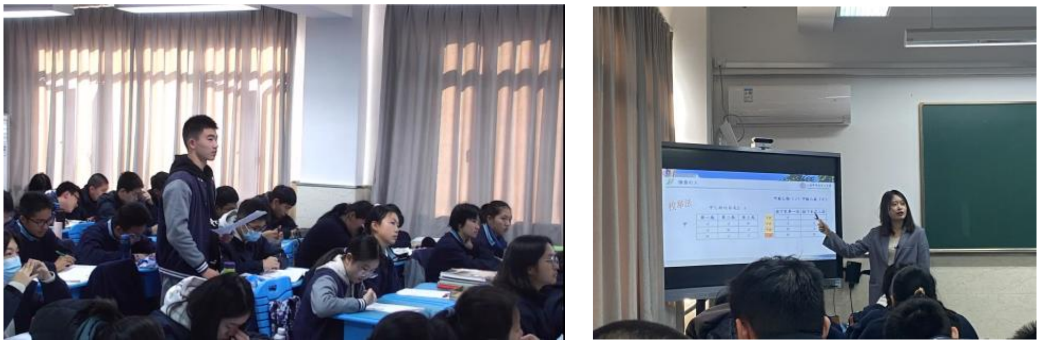


图 2 课堂教学

课例展示结束后，王海雯老师从学情分析、教学目标、教学内容等方面清晰、具体地阐述教学设计。之后，研究生们和专家老师对本堂课进行了交流点评。

首先，研究生们分享了听课感受：孔同学表示本节课很好地融入了数学文化。彭同学提出整节课非常流畅，但在学生归纳有限性之前铺垫基本事件个数是有限的，效果可能更好。韩同学认为这堂课内容很丰富、完整，并结合自己的实习经历分享了感受。

接着，曹杨二中数学组的青年教师们结合对新教材的理解进行了交流：概率这一章与生活实际联系紧密，教师和学生需要重点把握数学语言的表达。在情境导入部分，王海雯老师将学生的思维过程阐述得很清楚。在构造古典概率模型时，教师应当加强引导和强调规范性。

图 3 评课

邹佳晨老师从教材改革、课堂互动、作业布置等方面作了点评：首先，本章是新教材中的重大改革部分，数学研究的是确定的关系，而统计和概率研究的是生活中的不确定关系问题，高中更注重数学抽象的过程，运用数学的语言、符号、方法去研究和表达不确定现象。邹老师

指出课堂留白和微视频的应用是本堂课的亮点，也分析了学生反馈没有达到预期的原因。本节课由问题串贯穿教学过程，通过赌徒分金问题将德育融入课堂。针对这些历史素材，邹老师提出了更高的要求：如何更好地发挥历史故事的价值？关于数学写作的作业，邹老师建议：除了让学生谈认识，也可以谈理解、复述概念，还可以做总结。以促进学生思考，加强学生语言表达、概念理解的能力。

图 4 评课

最后，曹杨二中的正高级教师、特级教师黄坪老师针对本次课例活动进行了点评。黄老师指出本节课是高中数学中渗透数学建模思想的典型课例。在教学中，教师应重视让学生用数学的眼光看世界，用数学思维表达问题。教师可以从简单问题引入，由易到难，让学生在充分理解的基础上展开讨论，发挥学生的主动性。黄老师还指出既要尊重历史，又要联系现今，通过适当的实例，在课堂中融入数学建模的思想。新教材注重概率的基本思想，教师应理清章节的思维方式，从核心素养的高角度开展教学。最后，黄老师建议新老师应当多研读教材和课标，加强基本功的训练，也应注意语言表达的规范，做到表述简洁、严谨。

至此，本次交流活动也圆满结束，通过课例展示、说课、点评、研讨相结合的形式，聚焦 HPM 视角下的古典概型的教学，促使同学们对数学史融入数学教学的设计进行深入思考。两个半小时的研讨的活动结束了，但活动带给我们的收获与思考将引领我们朝着 HPM 视角下教学的探索之路不断迈进。

借助概率历史，达成德育之效

——HPM 视角下古典概型教学同课异构纪要

钱 秦[1]，雷沛瑶[2]

(1.华东师范大学教师教育学院，上海 200062；2.华东师范大学数学科学学院，上海 200241)

2021 年 12 月 14 日下午，华东师范大学数学史与数学教育（HPM）工作室课例研修与华东师范大学数学教育方向研究生见习联合教研活动在曹杨中学举行，华东师范大学数学教育方向研究生线上参与此次教研活动。本次课例研讨活动的主题是“古典概型”，授课教师为 HPM 工作室成员、奉贤中学的张益明老师和曹杨中学的蔡真逸老师。

华东师范大学数学科学学院程靖老师赴现场参与此次教研活动，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师线上参与观摩与研讨，HPM 工作室成员、华东师范大学数学教育方向研究生通过线上或线下的方式参与此次见习活动。两位教师进行在高二年级进行同课异构，首先进行授课的张益明老师通过抛硬币的小游戏引出此节课对概率的研究，同时拉近了与学生的距离。基于对初中所学习的“等可能性试验”、“概率”等定义的回顾，张老师引导学生思考：硬币和骰子能做到质地均匀吗？借此张老师也分享了现实中一些不均匀的硬币与骰子，以此渗透学科德育，培养学生的理性精神。接着，师生共同归纳出此节课所研究的随机事件的共同特点，进而抽象出古典概型的定义，之后，并尝试用集合的语言表述古典概型的概念和古典概型的计算公式。最后，通过历史上经典的概率问题（包括但丁《神曲》中弗罗伦萨贵族的困惑以及简化版的赌徒分金问题）为本节课画上圆满的句号。

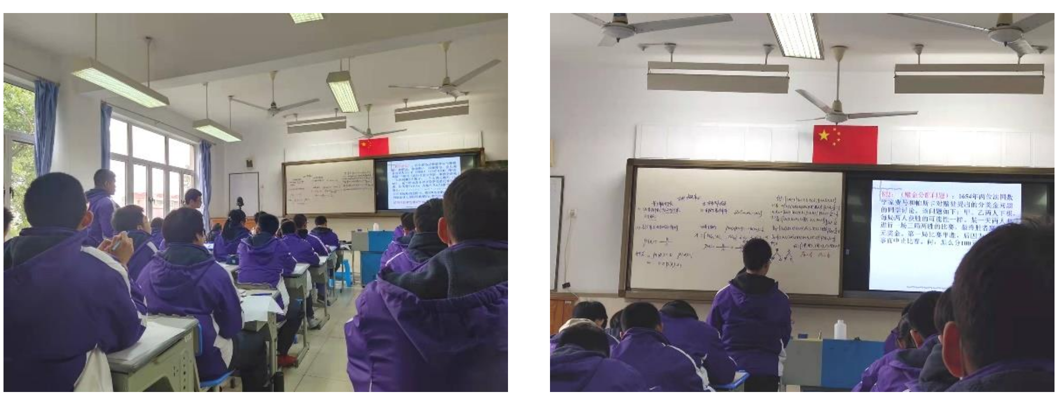


图 1 张老师授课中

蔡真逸老师的课堂也从概率游戏引入。蔡老师通过让学生选择更愿意玩的概率游戏并说明

选择理由，以引发学生的学习兴趣，引入此节课对概率的研究。学生从随机现象的角度分析、讨论各个游戏获胜的概率。蔡老师引导学生总结随机试验的共同特征。学生在教师引导下抽象出来“等可能性”和“有限性”的特点，归纳出了古典概型的定义。与此同时，蔡老师向学生说明现实中抛硬币和掷骰子不一定是等可能的，劝诫学生要远离赌博。蔡老师强调道：“概率论能帮助我们在自然科学、社会科学、选举、审判等方面进行决策，更加理性地观察并思考世界，这就是研究概率的意义和价值”，突出概率知识的社会角色与学科联系。最后，蔡老师和学生一起探讨了历史上著名的点数问题，并把赌徒分金问题留作课后习题，以强化学生对古典概型的理解和概率计算公式的应用。

图 2 蔡老师授课中

观摩结束后，活动进入研讨环节。首先，两位老师介绍了自己的设计思路。张益明老师指出，八年级学生已经学习了等可能性试验，高中对于古典概型的学习是在初中所学的基础上进行符号语言的强化，更加注重理性精神的培养。结合上海的新教材更加注重“等可能性”这一古典概型性质的特点，张老师进行设计时将重点放在“等可能性”的理解和概率思想、数学建模思想的体会上。蔡真逸老师在进行教学设计时考虑到授课学生的学情，希望借助选择游戏的活动设计，提升学生的学习兴趣。借助具体实例，让学生归纳并理解组成古典概率模型的两个基本条件，发展数学抽象能力。然后，通过集合语言，从特殊到一般，引导学生概括出古典概型的计算公式。同时，蔡真逸老师也强调了学习概率的意义和规范表达的重要性。

程靖老师认为两位老师对数学教育根本任务——“立德树人”有较好的把握，体现在张益明老师在课堂教学中强调理性精神的培养，而蔡益明老师则重视数学与现实生活的密切联系。从学科的特点来看，概率统计就是观察随机事件中不确定性与规律性，两位教师都运用了生活中随机事件的实例来帮助学生建构概念。从学生学习特点看，初高中内容的衔接是比较难的，

而两位老师都强调了集合语言的表达和理性精神。

邹佳晨老师在研讨中指出，张老师的课堂强调用数学的符号语言进行表达，让学生经历从生活中对概率的描述到科学的概率概念的过程。同时，理性精神在这堂课中也得到了良好的体现；蔡真逸老师给学生提供了较多的表达的机会，是一节留白式课堂，让学生在具体实例中发现、归纳古典概率的意义，在蔡老师的引导下，班级学生非常活跃、表达能力也很强，学生敢于尝试、分享。最后，邹老师对两位老师的教学设计提出了一些建议。第一，在数学史料的应用上，还可以进行其他尝试以发挥数学史更大的教育价值。第二，在教学安排上，分组教学也许是提高教学效率的有效方式，通过问题串、问题组的形式，让更多的学生参与课堂讨论中来。华东师范大学学科教学（数学）专业一年级硕士研究生们也纷纷交流个人观摩的心得体会，表示从此次观摩中收获良多。

图 3 邹佳晨老师发言

图 4 程靖老师发言

本次活动中的两节课从不同的角度开发 HPM 视角下的古典概型课例，揭示了古典概型的来源、生活中的应用价值以及学习概率的意义，充分发挥了立德树人的理念。数学史为课堂教学提供了丰富的素材，HPM 工作室的成员们也不断对数学史视角下的学科德育进行积极探索。

万物皆比寻根源，育智育德浸课堂

——“比的意义”课例研讨活动

王智洋，刘思璐

(华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2021 年 12 月 2 日，数学史与数学教育（HPM）工作室及上海市延安初级中学“指向学科德育的初中数学课例研究”课题组开展了主题为“比的意义”线上课例研讨活动。参与本次活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授和邹佳晨老师，长宁区教育学院教研员栗小妮老师，上海市延安初级中学的杨欣乐老师。此外，华东师范大学 HPM 工作室成员及 HPM 方向的硕博研究生，上海市延安初级中学杨欣乐老师课题组成员也参与了此次研讨活动。本次活动主要分为课堂教学展示、课后交流研讨、活动总结共三个环节。

一、课堂教学展示

教学展示 1：

上海市延安初级中学的李素珍老师首先通过“两个部落间交换物品”的情境引导学生给出的不同交换方案，再让学生思考最“公平”的交换方案。接着，李老师将情境转换为“三个部落间兑换货币”，请学生思考并分享自己的兑换过程，并由此提到度量衡的统一。然后，李老师播放微视频向学生阐述度量衡的含义，介绍中国早期的测量方式和单位，如“布手知尺”等，并亲自用手示范测量讲台的尺寸。随后，李老师引导学生总结比的定义，并且对定义进行解析，从两个数或量的关系的角度揭示了比的意义。之后，学生在李老师的组织下独立思考、分组讨论，并交流分享了比、分数、除法三者之间的关系。最后，师生共同列举了生活中的比，用定义验证其是否满足课本中比的定义，包括球赛比分、黄金比等，并对本节课进行总结。

图 1 李老师的课堂教学

图 2 李老师的课堂教学

教学展示 2：

上海市教育学会宝山实验学校的吴琼老师利用“物物交换”的问题情境，让学生小组讨论给出交换方案，再全班讨论哪一种交换方案更好。接着，吴老师通过学生们的分享引出本节课的主题“比的意义”，并请学生提出了当下的问题与困惑，包括比的定义，比的对象等，并一一解答学生在理解上的困难。之后，吴老师组织学生小组交流讨论了比、除法和分数三者之间的区别和联系，让学生们对比的定义有了更深刻的理解，对比的书写形式也有了进一步的掌握。然后，吴老师让学生们进行练习巩固，并上黑板演示，在师生讨论中强化了比值的计算方法。最后，吴老师和学生一起列举了生活中的比，包括黄金比等，并通过改编课前的问题情境，抛出利润分配问题，为之后比例的学习做铺垫。

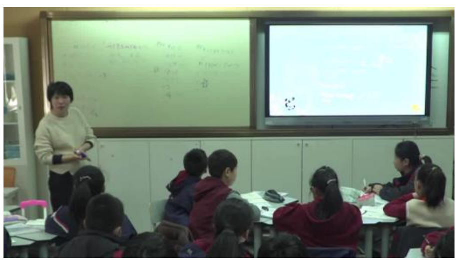


图 3 吴老师的课堂教学

图 4 吴老师的课堂教学

二、课后交流研讨

观摩之后，两位老师介绍了自己的教学设计意图，并且分享实施感受。接着，参与活动的老师就本节课进行了交流与研讨。

上海市新杨中学的李德虎老师将观课体会总结为一句话“沟通了历史与现实，横跨了代数与几何”。李老师说到，两位老师均从物物交换的角度引入课堂，实现知识之谐；以物易物让学生体会比是表示两个数量关系的一种最有效方法，体现了方法之美；运用黄金比、度量衡等古今中外的例子彰显了文化之魅；在课堂上渗透“公平”的思想、制定分配规则，达成了德育之效。其次，两位老师带领学生探究比的定义的过程中结合运算、分数、相似比等概念，架起了代数与几何之间的桥梁。

上海市延河中学的孙洲老师用“由点及面，处处开花”来形容李素珍老师的课。孙老师说到，从物物交换这一个“点”出发，与学生交流探讨，引出了比的意义这一个“面”。李老师的课中每个环节都渗透了文化和德育，还包括美育，让学生体会到数学与生活息息相关，对比

的概念既有了直观形象的认识，又理解了抽象的定义。在 HPM 的视角下，通过李老师精心的设计和史料的融合，课堂呈现出“出处开花”的局面。

上海民办建平远翔学校的贾彬老师认为李素珍老师的课有主题、有思想、有突破。李老师围绕着古代物物交换的情境，每个环节通过问题串联结，同时老师渗透的德育思想，并通过融入古代、现代的多个问题情境让学生全方位、深层次地感受到比的意义。李老师课堂上提出的“公平”思想，与如今的时代背景非常吻合。吴琼老师同样以问题串的形式引出课堂，给予学生更多的主动性，值得大家学习。最后，贾老师对于问题情境的选择以及课堂的引入，结合自身的教学经验提出了个人的建议。

上海市延安初级中学的杨欣乐老师提出李素珍老师采用情境教学的方式，建立了生活和数学之间的联系。李老师的课堂结构清晰，首先利用数学史引出比，然后引导学生认识比，感受比，拓展比，教学设计具有整体性和流畅性。同时，李老师在课堂的各个环节渗透了德育，为老师们做出了很好的学习模范。

华东师范大学的刘思璐博士生提出，吴琼老师的第一个问题情境让学生对两个量关系的描述，教学实施时学生们的回答情况与预期不符，这点值得反思。另外，吴老师课堂上有一大亮点，即鼓励学生主动提问。吴老师给予了学生充分的主动性去发现和提出问题，并在老师的启发下分析和解决问题。

三、课例活动总结

活动最后，汪晓勤教授从四个方面总结了两位老师的课堂教学。其一，从历史到课堂。两位老师从古代交换和度量的角度进行问题情境的创设，引出本节课的探究主题。其二，从生活到数学。课堂上师生举的例子涉及到了分配、审美、融合、兑换等生活的各个方面。其三，从知识到能力。两位老师运用互动式教学，给课堂留白，以知识为载体培养学生的能力。其四，从育智到育德。两位老师结合历史素材，从理性、信念、品质等方面渗透了德育，揭示了数学有用、有源、有美。

近三个小时的研讨活动在汪老师的精彩点评中逐渐落下了帷幕。活动虽已结束，但 HPM 团队将数学史融入数学课堂的研究和探索的脚步永远不会停止，相信在团队成员的共同努力下，未来一定会涌现出更多精彩的课例！