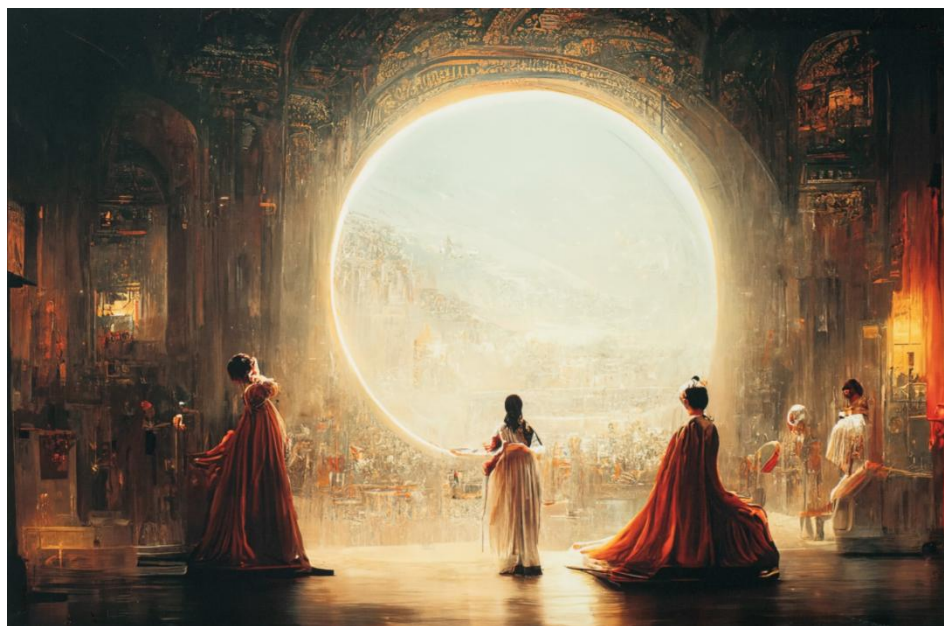




上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2023 年第 12 卷第 02 期



AI 绘画《太空歌剧院》

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：刘梦哲

编委（按姓氏字母序）：

韩 粟 胡永强 孔雯晴 栗小妮 刘倩雯 刘思璐 秦语真 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 岳增成 邹佳晨

刊首新语

失去光环的 ChatGPT

——HPM 视角下椭圆及其标准方程的教学设计刍议

刘梦哲，孔雯晴

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

随着现代教育技术的迅猛发展，“信息技术+教育”的深度融合再次成为人们关注的焦点。党的二十大报告明确提出，要推进教育数字化，建设全民终身学习的学习型社会、学习型大国，而在数学教育中，《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》业已指出，注重信息技术与数学课程的深度融合，提高教学的实效性。人工智能技术作为信息技术的发展趋势，已经对包括学校教育在内的各种传统行业产生了重要而深远的影响。可见，推动人工智能与数学教育的有机结合，是新时代党和国家赋予教师的使命和任务。

作为生成式人工智能的代表，ChatGPT 一经问世，便以其友好的交互性和超强的学习能力，在经济社会、文化教育等领域引起了社会各界的广泛关注和热议。对此，有的学者持乐观开放的态度，看到其具有促进学生个性化学习、减轻教师教学负担等应用价值，而有的学者则表示担忧，认为其可能产生学术不端、伦理等问题。即便如此，可以肯定的是，ChatGPT 的出现及其在教育领域的应用发展必将助推人工智能时代下教育行业产生更新、更深远的变革。

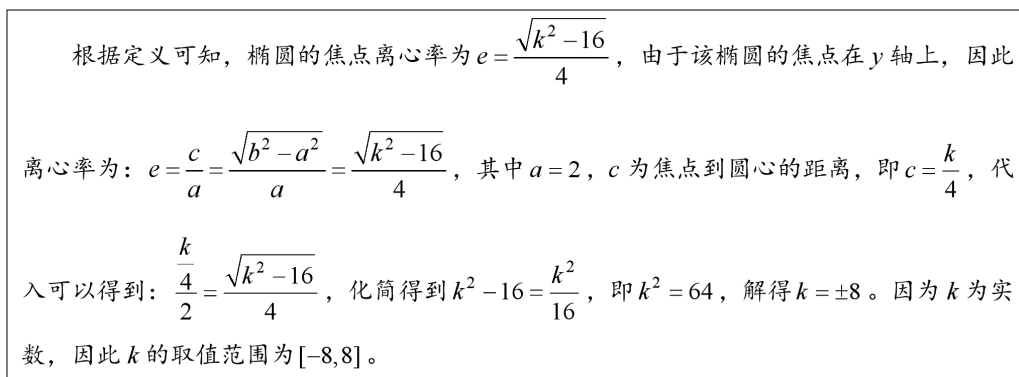
近年来，HPM 视角下的数学教学，由于其新颖的理念、独特的风格和显著的成效，因而，越来越多的教师对其产生了浓厚的兴趣。然而，目前鲜有学者探讨教育人工智能与 HPM 视角下的数学教学之关系。鉴于此，本文以 ChatGPT 作为抓手，考察其在数学教学，特别是在 HPM 视角下的数学教学中的应用，以期教师教学提供参考。

2 ChatGPT 在数学教学中的应用

随着教育人工智能技术的发展，数学教学方式逐渐向数字化、智能化方向转变，促使人工智能与数学教育紧密结合。利用人工智能实现并参与数学教学与研究，可以完善和发展新时代数学教育，其在支持学生个性化学习等方面为数学教育提供了新的机遇。以 ChatGPT 为例，我们看到其强大的自然语言处理能力在数学教学中的价值。

一者提供教学和学习资源。ChatGPT 能够为教师和学生生成所需的资源，例如，为教师设计一份教学设计、设计一节微课的脚本、设计一份讲义等，为学生搜集学习资源等。当然，ChatGPT-3.5 只能生成文本内容，且对于文本的长度有所限制，而 ChatGPT-4 业已实现生成图片的能力，可以说，随着算法的不断升级，未来 ChatGPT 有能力为师生提供更加丰富的资源。

二者回答概念性问题。ChatGPT 还可以回答一些简单的数学概念，例如，“什么是椭圆”“椭圆的标准方程是什么”等。然而，ChatGPT 在数学解题上犯了难。解题在数学学习活动中具有不可替代的重要作用，其不仅是数学学习的核心内容，还是掌握数学、学会“数学地思维”的基本途径。为此，我们尝试向 ChatGPT 提出一道有关椭圆定义的基础题“若方程 $16x^2 + ky^2 = 16k$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，求实数 k 的取值范围”，并得到如图 1 的回答。



根据定义可知，椭圆的焦点离心率为 $e = \frac{\sqrt{k^2 - 16}}{4}$ ，由于该椭圆的焦点在 y 轴上，因此离心率为： $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} = \frac{\sqrt{k^2 - 16}}{4}$ ，其中 $a = 2$ ， c 为焦点到圆心的距离，即 $c = \frac{k}{4}$ ，代入可以得到： $\frac{k}{2} = \frac{\sqrt{k^2 - 16}}{4}$ ，化简得到 $k^2 - 16 = \frac{k^2}{16}$ ，即 $k^2 = 64$ ，解得 $k = \pm 8$ 。因为 k 为实数，因此 k 的取值范围为 $[-8, 8]$ 。

图 1 ChatGPT 解答一道有关椭圆定义的基础题

由图 1 可见，ChatGPT 给出了错误的答案，解答过程更是与题意相距甚远，我们认为，出现这一问题的主要原因是 ChatGPT 对包含大量符号的数学问题的检索能力较弱，故就目前来看，其还不具备高中学段数学解题和教题的能力。

3 ChatGPT 与 HPM 视角下的数学教学

开发一节 HPM 课例需要经历“选题与准备”“研讨与设计”“实施与评价”以及“整理与写作”四个环节。以“椭圆及其标准方程”为例，我们尝试运用 ChatGPT 完成“选题与准备”和“研讨与设计”两大环节中的相关工作。

在选题与准备阶段，当研究者确定开发“椭圆及其标准方程”的课例后，则需要搜集与课题相关的历史素材。我们向 ChatGPT 提出问题“椭圆的定义与方程的历史”，图 2 给出了 ChatGPT 的回答。

椭圆是一种平面几何图形，其定义为到两个定点（称为焦点）的距离之和等于定长（称为主轴长）的所有点的集合。椭圆在古希腊时期就已经被研究，但直到 17 世纪才被完整地描述和定义。

最早对椭圆的研究可以追溯到公元前 6 世纪的希腊数学家阿波罗尼乌斯，他在研究椭圆的轴对称性质方面做出了重要贡献。公元 2 世纪的托勒密在其著作《Almagest》中讨论了椭圆的构造方法，但没有明确给出椭圆的定义。

17 世纪时，焦点和直线的几何性质得到了深入研究。法国数学家勒内·笛卡尔和德国数学家约翰内斯·开普勒在描述行星运动时使用了椭圆轨道。英国物理学家艾萨克·牛顿在其著作《自然哲学的数学原理》中描述了椭圆的几何性质和方程，并指出了它在行星运动中的应用。

椭圆的标准方程为： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中 a 和 b 分别为椭圆的两个半轴长度。这个方程最早由德国数学家雅各布·伯努利提出，并被后来的数学家所广泛使用。

总的来说，椭圆的历史可以追溯到古希腊时期，但其完整的定义和描述需要等到 17 世纪才能够被建立。至今，椭圆在数学和物理学中仍具有重要的应用和意义。

图 2 ChatGPT 给出的历史素材

当教师获得了数学史料，接下来需要思考数学史的运用方式，为此，我们向 ChatGPT 提出问题“如何运用上述历史材料设计数学教学？”，并得到如图 3 的回答。

在数学教学中，可以针对上述历史材料设计以下几个方面的教学内容和活动：

1. 研究椭圆的定义和性质。通过展示历史上著名数学家的研究成果，引导学生对椭圆的定义和基本性质进行深入了解。可以通过讲解椭圆的几何特征、参数方程、焦点、半轴等基本概念，让学生掌握椭圆的基本概念和特征。
2. 讨论椭圆的应用。通过引导学生了解和分析牛顿、开普勒等数学家在天文学中的应用，让学生更加深入地理解椭圆的应用和实际意义。可以通过丰富的案例和实例，让学生体验到椭圆在工程、建筑、航空等领域中的广泛应用。
3. 进行椭圆图形的绘制和计算。通过教授椭圆的图形构造方法和参数计算方法，让学生了解椭圆的绘制规则和方法，并且掌握椭圆的关键参数计算式子。可以通过各种工具进行椭圆图形的制作和计算，体验到椭圆图形的美妙和奥妙。

图 3 ChatGPT 给出的教学内容

在研讨与设计阶段，研究者需要先完成初步的教学设计，并在 HPM 专业学习共同体的研讨和交流中，反复修改、完善教学设计。于是，我们再次向 ChatGPT 提出问题“运用上述历史材料，设计一份融入数学史的椭圆及其标准方程的教学设计”，并得到如图 4 的教学目标和如图 5 的教学过程。

1. 了解椭圆的定义和性质；
2. 理解椭圆标准方程的含义和推导过程；
3. 了解椭圆在数学史上的重要地位。

图 4 ChatGPT 给出的教学目标

1. 引言（10 分钟）
 - 简单介绍椭圆的概念，并通过展示历史上著名数学家如牛顿、开普勒等人在天文学中如何应用椭圆，激发学生的学习兴趣。
2. 学习椭圆的定义、几何特征及参数方程（30 分钟）
 - 通过讲解椭圆的定义和基本特征，引导学生掌握椭圆的基本概念。
 - 通过参数方程，让学生更深入地了解椭圆的长短轴、焦点、离心率等基本性质。
3. 椭圆的标准方程及其推导（40 分钟）
 - 通过对牛顿、欧拉等数学家关于椭圆标准方程的研究成果进行讲解，探究椭圆标准方程的来源和推导。
 - 以椭圆的离心率为重点，让学生通过讲解离心率的定义、计算以及与椭圆形状的关系，进一步理解椭圆的标准方程。
4. 案例分析及实践操作（40 分钟）
 - 精选实际问题，如利用椭圆形建立地图、利用椭圆形计算天体轨迹等，进行案例分析，引导学生灵活运用所学的数学知识解决实际问题。
 - 通过实践操作，让学生掌握椭圆图形的绘制和计算、标准方程的运用等关键技能。
5. 结语（10 分钟）
 - 总结椭圆及其标准方程的学习内容和技能，鼓励学生在实际生活中发掘更多椭圆的应用场景。
 - 提醒学生学习数学不要忘记历史，并鼓励他们所学的数学知识运用到更多的领域中。

图 5 ChatGPT 给出的教学设计

4 讨论

在数学教学中，我们需要解决好“why”“what”“how”的问题，而在 HPM 视角下的数学教学中亦是如此。所谓“why”，即“为何”要将数学史融入本节课的教学，所谓“what”，即“有哪些”与本课题有关的历史素材，所谓“how”，即“如何”将数学史融入本节课的教学，只有回答好这三个问题，才有可能设计出一份完善的 HPM 视角下的数学教学设计。

4.1 HPM 教学之困

对于“为何”的问题，我们向 ChatGPT 提出问题“为什么要将数学史融入椭圆及其标准方程的教学”，并得到如图 6 的回答。

1. 提高学生的兴趣和积极性：学生通常觉得数学难以理解和乏味，但当数学问题与历史文化相结合时，学生的兴趣和积极性通常会增加。因此，将数学史融入教学可以让学生觉得学习数学不仅仅是一个枯燥的学科，而是一个积累知识与思考的深度学科。
2. 激发学生的探究欲：数学问题存在于历史和文化的背景中。将数学史的知识呈现给学生，他们会开始思考问题的背景和历史文化对问题的影响，从而进一步探究数学问题的本质。
3. 增加数学概念的理解度：融入历史背景可以帮助学生更深刻的理解数学概念和规则。通过学习数学史，学生可以领略到一种全新的数学方法，更好地理解数学概念和规则，掌握数学的真谛。
4. 引导学生发掘知识并解决实际问题：数学史融入教学，可以让学生更好地了解数学背景和知识体系，从而引导他们从更深层次、更广阔的视角探究知识，并更好的应用数学来解决实际问题。

图 6 ChatGPT 对为何要将数学史融入教学的回答

由图 6 可见，ChatGPT 给出了 4 条理由，涉及兴趣、动机、理解和应用四个方面，但这些理由只是在空谈理论，并未与教学内容相结合，给读者以泛泛而谈的感觉，例如，该表述中未曾出现“椭圆”二字，也未曾出现与本课题有关的字眼，又如，该表述通常为“将数学问题与数学史结合，有助于”，但并未对“数学问题”“数学史”“结合方式”等内容作详细说明。

同时，数学史的教育价值远不止于此。早在 1991 年，英国数学史家福韦尔（J. Fauvel, 1951-2000）业已总结出了在数学教学中运用数学史的 15 条理由，例如，有助于学生对概念的理解、改变学生的数学观、为学生提供探究的机会等。

已有教学中，有的教师通过折纸活动和 GeoGebra 演示，让学生发现折痕围成的图形是椭圆，由此抽象出椭圆中的定量关系，并总结出椭圆的定义，推导出椭圆的标准方程。有的教师引领学生探究不同的动点轨迹，由此引出椭圆定义，并引导学生合理选取坐标系，建立椭圆的标准方程。上述教师虽然从不同的探究活动引出椭圆及其标准方程，但他们并没有解决学生心中“为什么将椭圆、双曲线和抛物线称为圆锥曲线”“椭圆的标准方程是否还有更简便的推导方法”等困惑，这不免使学生产生定义识记不清、方程记忆不准、运算能力不足等问题。然而，当我们翻开历史的画卷，圆锥曲线的截面定义、旦德林双球模型、标准方程的推导方法等史料无疑可以解答学生的困惑。若教师将上述史料融入本节课的教学，还可以帮助学生更好地认识

椭圆、求解椭圆，经历椭圆的发生、发展过程，并在讨论中化简椭圆的标准方程，这恰好对应上述福韦尔给出的三条理由。

可见，ChatGPT 既没有结合本课题给出数学史融入教学的理由，又没有看到已有教学设计中的不足，还没有完整对照已有数学史的教育价值去分析数学史对本节课的价值。可以说，ChatGPT 对于“为何”这一问题的理解是不深刻的，其没有很好地回答“为何”的问题。

4.2 HPM 教学之质

图 2 是 ChatGPT 对“是什么”的问题的回答，我们不难发现 ChatGPT 在史料搜集方面的若干特点。

首先，历史素材不符合史料选取的五项原则。在 HPM 视角下的数学教学中，数学史料选取的五项原则包括科学性、人文性、有效性、可学性和趣味性。

一者不符合科学性。史料的科学性是 HPM 视角下的数学教学首要关注的问题，但从图中可以清晰地看到几大科学性错误。例如，阿波罗尼奥斯（Apollonius, 约前 262-约前 190）所处的年代是公元前 2-3 世纪，将其对应于公元前 6 世纪的时间点是错误的；托勒密（Ptolemy, 约 85-约 165）撰写的《天文学大成》中并没有讨论椭圆的构造方法，等。总之，ChatGPT 只是将不同来源的内容综合在一起，但内容的科学性有待读者考证。

二者不符合人文性和趣味性。图中虽然展示了古希腊时期至 17 世纪期间多位数学家对椭圆的研究成果，呈现了椭圆在行星运动中的应用，试图反映数学背后的人文精神以及数学与物理之间的联系，但是，ChatGPT 未曾对与之有关的具体研究成果或应用作具体介绍。

三者不符合有效性和可学性。本节课的首要任务是达成“掌握椭圆的定义、标准方程”的教学目标，但图中仅给出了椭圆的第一定义和标准方程，并没有对标准方程中焦点、图形、推导方法等作进一步讨论。同时，ChatGPT 面对的对象是个体，其难以选取出符合全班大多学生认知基础的史料。

其次，历史素材的呈现并不完整。ChatGPT 首先追溯到古希腊时期的阿波罗尼奥斯，介绍了圆锥曲线的起源，然后直接跳跃至 17-18 世纪笛卡尔（R. Descartes, 1596-1650）、开普勒（J. Kepler, 1571-1630）等数学家对椭圆的性质和应用的研究。可见，ChatGPT 仅简单列举了历史上几位数学家在椭圆发展过程中的贡献，但对这一内容的数学史的介绍并不完整。这里所说的

不完整有两层含义。

从整体看，ChatGPT 对历史脉络的介绍不完整，事实上，从公元前 4 世纪人们开始认识圆锥曲线到椭圆标准方程的出现，时间老人走过了两千多年，其中，不同数学家对椭圆的定义、标准方程、性质的研究更是百花齐放，ChatGPT 只展示了椭圆历史的冰山一角。

从局部看，ChatGPT 对某一数学家的贡献的介绍不完整，例如，阿波罗尼奥斯使用对顶斜圆锥来表示圆锥曲线，并在《圆锥曲线论》I.21 中给出并证明了椭圆的基本性质：从椭圆上两点分别向直径做两条线段与共轭直径平行，则两线段的平方比等于直径上两条相应线段乘积之比。对于该内容，ChatGPT 只是提及阿波罗尼奥斯研究了椭圆的性质，但并未作详细说明，为此，我们向 ChatGPT 提出问题“阿波罗尼奥斯对椭圆的研究”，并得到如图 7 的回答，该回答依然是概述性地提及阿波罗尼奥斯在《圆锥曲线论》中的研究，并未展开说明椭圆的基本性质是什么以及如何证明。

阿波罗尼奥斯是一位古希腊的数学家和天文学家，著有《圆锥曲线论》等多部著作。在他的《圆锥曲线论》一书中，他详细地研究了椭圆、双曲线和抛物线这三种圆锥曲线。

具体来说，阿波罗尼奥斯在他的著作中对椭圆做了深入的探讨，他提出了椭圆的定义，并且给出了椭圆的焦距定理，即一个椭圆上的点到两个焦点的距离之和是定值。他还通过对椭圆的研究，发现了许多椭圆的性质和规律，如椭圆的面积公式等等。阿波罗尼奥斯的这些成果对后世的数学研究产生了深远的影响，椭圆也因此成为了数学研究中的重要课题之一。

图 7 ChatGPT 对问题“阿波罗尼奥斯对椭圆的研究”的回答

其三，历史素材缺乏教育取向。所谓具有教育取向的历史研究，研究者需要从两个方向展开研究：一是对概念的不同定义、定理和公式的不同证明或推导方法、法则的不同解释、定理的不同应用以及数学史料的呈现方式、教育价值观等进行分类统计；二是在研究对象所在的整个时间段内，分析不同定义、方法、应用等的演变规律。然而，从已有 ChatGPT 的回答来看，其对于椭圆的定义、方程推导方法的类别和演变只字未提，也未提及历史素材在教学中可能的运用方式。

总之，从现有情况看，我们仍然需要研究者完成史料搜集的工作，研究者可以从原始文献和二手研究文献中搜集、整理出比 ChatGPT 更准确、更完整的历史素材，同时，目前 ChatGPT 只停留在“史料”搜集的层面，还没有上升到整理、加工的层面。因此，ChatGPT 没有很好地回答“是什么”的问题。

4.3 HPM 教学之法

图 3-5 给出了 ChatGPT 对“如何”的问题的回答。我们首先来看 ChatGPT 对本节课教学目标的设计。

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》指出，了解圆锥曲线的实际背景和作用，经历从具体情境中抽象出椭圆的过程，掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质，了解椭圆的简单应用。如图 4，从知识层面上看，ChatGPT 给出的目标要求与课标中的要求相契合，内容覆盖了教科书中“椭圆及其标准方程”一节的知识点，且对于“了解”“掌握”等用词准确。

然而，从三维目标的角度看，ChatGPT 仅给出了本节课在数学知识层面的教学目标，却没有给出思想方法和情感态度层面的教学目标。例如，运用和差法和平方差法推导椭圆的标准方程，培养学生的数学运算和逻辑推理素养；经历椭圆概念的发生发展过程时，让学生感受文化之魅，体会数学家坚忍不拔的探究精神，培养理性精神。事实上，知识背后蕴含着丰富的思想方法，这正是培养创新性人才不可或缺的内容，也是令学生终身受益的内容，而 ChatGPT 恰恰忽视了超越知识本身的内容，及其中人的因素给学生带来的重要影响。

其次，数学史的六大教育价值包括知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅和德育之效六类，我们可以从这六大价值入手来分析本节融入数学史的教学设计。

（1）椭圆的定义包括截面定义、第一定义和第二定义，截面定义可以帮助学生解决“为什么将椭圆、双曲线和抛物线称为圆锥曲线”的问题，而且德林双球模型可以帮助学生建立起截面定义和第一定义两者间的联系。如图 3 和 5，ChatGPT 将教学起点定为 17 世纪，忽视了椭圆的起源，为此，我们向 ChatGPT 提出问题“椭圆的起源”，并得到了如图 8 的回答。

椭圆的历史可以追溯到公元前 1500 年左右的埃及，当时埃及人使用椭圆来绘制太阳在不同时期的轨迹。古希腊数学家阿波罗尼奥斯于公元前 3 世纪对椭圆进行了系统研究，并发现了椭圆具有一些特殊的性质。例如，椭圆上任意一点到两个焦点的距离之和是一个定值，椭圆的周长和面积也可以通过数学公式计算。在不久之后，古罗马数学家埃拉托斯特尼也对椭圆进行了研究，将椭圆与抛物线和双曲线一起称为“锥曲线”。这些研究为后来的代数几何学和微积分学等学科奠定了基础，而椭圆的运用也十分广泛，比如在建筑、工程、天体力学、电磁场理论和密码学等领域都有应用。

图 8 ChatGPT 对问题“椭圆的起源”的回答

由图 8 可见，即使我们再次追溯椭圆的起源，ChatGPT 依然没有明确给出截面定义，只是提及“锥曲线”，暗示读者椭圆、双曲线、抛物线与锥体间存在联系，且没有指出用何种平面

截圆锥可以得到三条圆锥曲线，如此内容并不能帮助学生构建知识之谐。

(2) 历史上推导椭圆标准方程的方法丰富多彩，包括居西尼 (N. Guisnée) 的几何法、洛必达 (L' Hôpital, 1661-1704) 的和差术、斯蒂尔 (R. Steell) 的三角法、赖特 (J. M. F. Wright) 的平方差法等。然而，ChatGPT 并未给出推导椭圆标准方程的多种方法，于是，我们向其提出问题并得到如图 9 的回答。

1. 几何法：根据已知的椭圆长轴和短轴，通过计算椭圆上点到两个焦点距离之和，并运用到两点之间距离公式，得到椭圆的标准方程。
2. 向量法：将椭圆上的点表示为向量的形式，运用向量的性质和定义，建立椭圆的方程组，通过解方程组得到椭圆的标准方程。
3. 解析几何法：利用椭圆的对称性，将椭圆上的点表示为一般点 $P(x,y)$ ，根据椭圆的定义，列出椭圆的方程，并通过配方法化简方程，得到椭圆标准方程。
4. 参数方程法：根据椭圆的参数方程，将 x 和 y 用参数 t 表示，加以整理化简，得到椭圆的标准方程。
5. 矩阵法：将点坐标表示为矩阵的形式，运用矩阵的代数性质和椭圆的定义，建立椭圆的矩阵方程，并通过矩阵的运算，得到椭圆的标准方程。

图 9 ChatGPT 给出推导椭圆标准方程的多种方法

由图 9 可见，ChatGPT 实际上只给出了一种方法，只有“几何法”对应于教科书中的方法，其它方法都不具备可操作性。同时，历史上数学家给出的推导方法中包含化归、分类讨论等思想方法，可惜的是，ChatGPT 对各种推导方法一无所知，更何谈思想方法的渗透，而教学设计中也未曾涉及思想方法，故而 ChatGPT 无法彰显方法之美、实现能力之助。

(3) 已有 HPM 教学中，教师让学生经历“旦德林双球模型的建立”“椭圆标准方程的推导”的探究过程，由此串联起从截面定义、到第一定义、再到标准方程的教学内容。对比图 5，ChatGPT 已有将探究活动融入教学的意识，例如探究标准方程的推导，但其并不知道标准方程的多种推导方法，也不知道何为旦德林双球模型，因此，ChatGPT 所谓的探究只能是纸上谈兵，并不能为学生营造探究之乐。

(4) HPM 课堂中的数学文化内涵可以分为知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐和多元文化。ChatGPT 在教学内容和设计中既涉及椭圆与天文学的联系，又涉及椭圆在工程、建筑、航空等领域中的应用，这两者虽然属于学科联系和社会角色的范畴，但却没有给出应用的具体内容。同时，ChatGPT 也没有关注到其它三个方面。尽管其在历史素材中提及椭圆横跨古希腊时期至 17 世纪的研究，但在教学设计中只字未提，错失了呈现多元文化的好机会。可见，这一教学设计在文化之魅的展示上是有一定缺失的。

(5) 数学史的德育价值可以分为理性、信念、情感和品质^[11]。一方面, ChatGPT 虽然介绍了不同数学家对椭圆这一课题的贡献, 但并未点出数学家背后坚持不懈的探索精神, 另一方面, ChatGPT 没有具体介绍椭圆与其它学科、实际生活间有何联系, 这不免让学生感到数学史流于表面。当然, ChatGPT 在结语中提及“提醒学生学习数学不要忘记历史”, 这确实为学生指明了学习数学一条道路。可见, ChatGPT 没有充分关注到数学学科德育在教学中的重要性, 未能达成德育之效。

可见, ChatGPT 不仅忽视了思想方法和情感态度在教学中的重要价值, 同时, 该设计在数学史的六大教育价值的达成情况上也差强人意, 可以说, ChatGPT 没有回答好“如何”的问题。

5 结论与启示

综上, 我们看到 ChatGPT 在数学教学中的价值, 例如, 提供教学和学习资源、回答概念性问题等, 但其给出的内容多是基于互联网上已有资源的整合, 缺乏创造力, 且在数学解题上并不理想。除此之外, ChatGPT 在 HPM 视角下的数学教学中具有较大的局限性, 无论是为什么要用数学史(why), 还是有哪些数学史(what), 又或是如何运用数学史(how)的问题, 其几乎都不能给出回答。由此可见, ChatGPT 可能会为常规的数学教学带来些许帮助, 但其在 HPM 视角下的数学教学中是无效的, 这也意味着 ChatGPT 可能取代常规的数学教学, 但其取代 HPM 视角下的数学教学的可能性微乎其微。

上述结论为我们在人工智能时代开展 HPM 视角下的数学教学带来启示。

教育的本质是创新, 而教师与人工智能最大的区别在于创新。从上述教学设计中可以看到, 人工智能缺乏创新能力, 给出的教学设计只是对已有教学设计进行检索与整合, 且设计水平较低。同时, 人工智能虽然能够回答出什么是“HPM”“PBL”“单元教学”等教育理念, 但难以将理念融入教学设计, 这一过程依然需要教师来思考和完成。此外, 真正的教育不仅仅是知识的传授, 更是能力的培养与人格的塑造, 这更需要教师基于学情、开展教学。为此, 我们相信, 尽管人工智能在许多方面已经取代了人工, 但是, 人工智能的角色永远不会以任何方式“取代”教育工作者的职责。

随着 HPM 视角下的数学教学实践的不断增多, HPM 课例论文也不断见诸期刊杂志、在线文库、社交平台等各类媒体。于是, 在人工智能的支持下, 教师可以更快地搜索到已有的教学

设计，但这并不意味着教师可以完全地“拿来主义”，相反，教师不仅需要在已有 HPM 教学的基础上思考如何有所创新和突破，例如，解决学生的认知障碍、搜集新的数学史料、重构式地设计教学等，还需要和 HPM 专业学习共同体进行多次研讨和交流，由此才可能拿出一份好的 HPM 视角下的数学教学设计。

目 录

刊首新语

失去光环的 ChatGPT 刘梦哲, 孔雯晴 I

理论探讨

无字证明在数学教学中的应用 刘倩雯 1

专题研究

美英早期解析几何教科书中的圆锥曲线的光学性质 刘梦哲, 杨舒捷 11

数学史视角下的三角函数单位圆定义和终边定义 姚 瑶 22

一类解三角形高考题的历史探源 何可凡, 石 城 32

教学实践

HPM 视角下的对数定义同课异构课例分析 陈雨晴, 刘思璐 44

他山之石

高中数学教师在课例研究中信念和知识的改变 陈雨晴 55

数学写作

借助“K”字模型, 解决荒岛寻宝问题 金子轩, 胡永强 60

活动讯息

HPM 工作室小学教研基地二月份研修纪实 岳增成 64

HPM 融入高中数学教学课例研讨活动隆重举行 刘倩雯, 刘梦哲 67

中算史融入高中数学教学课例研讨活动隆重举行 陈雨晴 74

HPM 融入初中数学教学课例研讨活动隆重举行 姚 瑶, 陈雨晴 76

CONTENT

FOREWORD

The ChatGPT that Lost Its Aura····· Liu Mengzhe, Kong Wenqing I

THEORETICAL DISCUSSION

The Application of Proof Without Words in Mathematics Teaching·····
····· Liu Qianwen 1

THEMATIC RESEARCH

The Optical Properties of Conics in Early American & British Textbooks on
Analytic Geometry····· Liu Mengzhe, Yang Shujie 11

The Definition of Unit Circle and Terminal Side of Trigonometric Function from the
Perspective of Mathematical History····· Yao Yao 22

The Historical Source of a Class of Solving Triangle Problems in College Entrance
Examination····· He Kefan, Shi Cheng 32

TEACHING PRACTICE

The Teaching of the Definition of Logarithm from the Perspective of HPM: A
Comparative Analysis of Two Lessons····· Chen Yuqing, Liu Silu 44

LITERATURE REVIEW

High School Mathematics Teachers' Changes in Beliefs and Knowledge During
Lesson Study····· Chen Yuqing 55

MATHEMATICAL WRITING

Solve the Problem of Treasure Hunting on Desert Islands with the Help of "K"
Model····· Jin Zixuan, Hu Yongqiang 60

ACADEMIC INFORMATION

Primary School Teaching and Research Activities at HPM Studio in February·····
····· Yue Zengcheng 64

The Teaching and Research Activity of HPM Integrated into High School
Mathematics Teaching····· Liu Qianwen, Liu Mengzhe 67

The Teaching and Research Activity of Chinese Traditional Excellent Mathematics
Culture Integrated into High School Mathematics Teaching····· Chen Yuqing 74

The Teaching and Research Activity of HPM Integrated into Junior High School
Mathematics Teaching····· Yao Yao, Chen Yuqing 76

理论探讨

无字证明在数学教学中的应用

刘倩雯

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

无需语言的证明又称无字证明 (proof without words, 简称 PWW), 本质上是一种数学语言, 形式上是隐含数学命题或定理的证明的图象或图形, 可能包含数学符号、记号、方程, 但不附带文字。^[1]事实上, 无字证明并非新概念, 它拥有丰厚的历史, 可追溯到古希腊与古代中国时期,^[2]图 1 给出中国古代数学家刘徽 (约 220-约 280) 关于直角三角形内切圆半径的无字证明的现代版演绎, 图中仅有图形、符号与方程, 却隐含着关于直角三角形内切圆半径的证明。

$$ab = r(a + b + c)$$

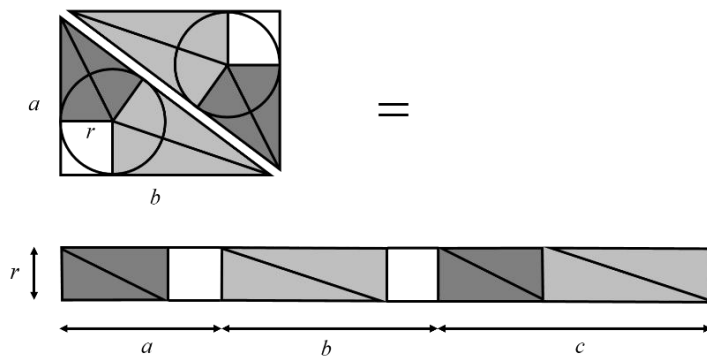


图 1 直角三角形内切圆半径的无字证明

虽然无字证明能否被视为正式有效的证明方式一直备受争议, 但是有学者提出, 无字证明在教学中是强大的工具, 可以帮助任何水平的学生构造出证明。^[3]以色列学者马克 (Marco) 认为, 无字证明是能够唤起学习者数学行为的学习资源, 马克等学者围绕“无字证明是否能够促进中学生的证明建构”以及“如何设计无字证明以促进学生的证明建构”两个问题对 144 名 10 年级学优生进行了实证研究。研究发现, 大多数学生都能够成功发现无字证明的中心思想并基于此建构证明, 同时, 该研究总结出五项关于无字证明的设计原则。^[4]

本文认为，在高中数学教学中融入无字证明是富有意义的。首先，《普通高中课程标准（2017 年版 2020 年修订）》（以下简称《课标》）要求着力发展学生数学核心素养，^[5]而无字证明凭借其形数结合、以形证数、隐含证明中心思想的特点为提升学生直观想象、数学抽象与逻辑推理的核心素养提供了一种途径，且已有研究表明，在中学课堂中实施无字证明活动能够有效培养学生的推理能力^{[1][3][6-7]}。其次，无字证明作为一种证明材料，需要学生在意义建构的过程中对其感知到的空白添加信息，因此无字证明本身即为学生留白，而适当的空白可以刺激学生在证明构造中的数学参与^[8]，调动学生思维的主动性与积极性，让学生基于自己的理解构建认知结构，帮助学生形成自己的认知策略，培养学生的创新能力^[9]。此外，无字证明是有线索的留白，它暗含着中心思想，故而在教学中融入无字证明可以在控制证明难度的同时，培养学生的发散性思维，明确学生在课堂中的主体地位的同时，提高课堂的教学效率。

2 无字证明的设计

现有无字证明的素材极其丰富，一方面，已有无字证明的数量和种类众多，另一方面，新的无字证明在持续不断地涌现。但是，并非所有的无字证明都适合在教学中直接使用。部分无字证明为了帮助读者快速地理解证明思路，尽可能地显性化所有证明过程，故而给予过多的提示。此类无字证明虽然能够降低读者理解证明的难度，但若直接作为教学素材，容易导致学生思考的机会较少，补白的空间不足。也有部分无字证明给予的线索过少或过杂，若不加以提示、修改，直接将其作为课堂教学素材，则对学生的思维能力要求较高，且容易造成课堂教学效率不高的问题。数学教育家张奠宙指出，数学课堂教学的优劣，自然应该以学生是否能够学好“数学”为依归，教育手段必须为教学内容服务。^[10]因此，为了更好地将无字证明融入教学，教师有必要对已有的无字证明进行重新改编、二次设计。已有研究在教学实验中提出五项关于无字证明的设计原则^[4]，下文将以正余弦和角公式、均值不等式、数列求和为例具体阐述如何根据五项原则设计无字证明。图 2-4 分别给出了各主题的一种无字证明。

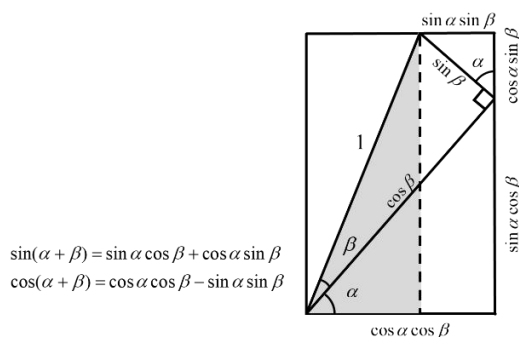


图 2 正余弦和角公式的 PWW

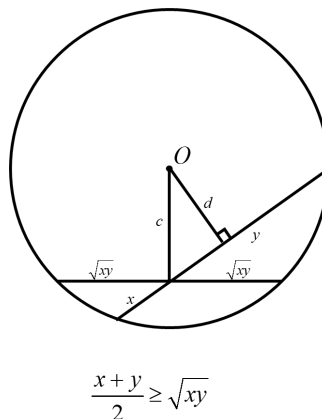


图 3 均值不等式的 PWW

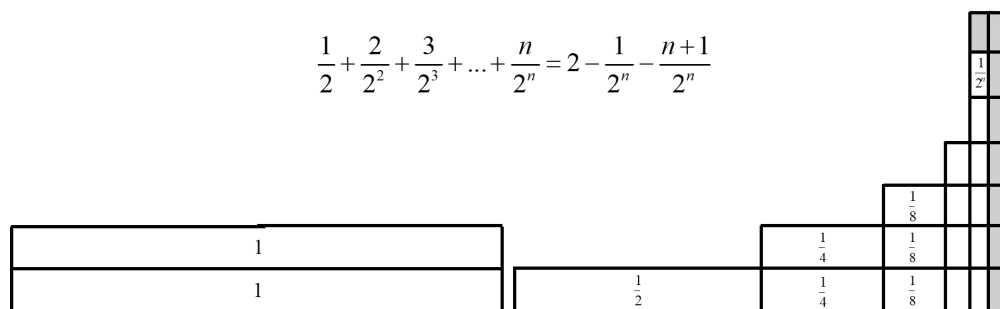


图 4 一种数列求和的 PWW

2.1 中心思想的可发现性

为了增强证明的可行性，无字证明需要提供必要的、能够体现中心思想的信息。事实上，由于无字证明本身隐含着证明的基本思想，因此在不修改无字证明时，学生也能够填补中心思想之白。^[4]若教师需要对无字证明进行重新设计，则要注意保留学生能够发现中心思想的信息，同时也要避免给予过多相关信息而剥夺学生自主探究、自主发现的机会。

正余弦和角公式无字证明的中心思想是，通过对直角三角形中直角边的两种不同表示方式来建立等式。为了体现中心思想，教师可以对直角三角形填充阴影，并对两直角边绘制箭头与问号，以此帮助学生聚焦于此三角形，思考直角边的线段长度应该如何表示，如图 5 所示。由于该直角三角形的斜边长为 1，其中一锐角的大小为 $(\alpha + \beta)$ ，学生容易表示出两条直角边的长度分别为 $\sin(\alpha + \beta)$ 与 $\cos(\alpha + \beta)$ 。结合待证命题，学生不难联想到需要找出另一种表示直角边的方式来建立等式。因此，相较于原无字证明（图 2），教师可以选择抹去此提示，在图 5 中不直接展示出直角边的另一种表示方式，给学生留下中心思想之白，留出思考探究的空间。

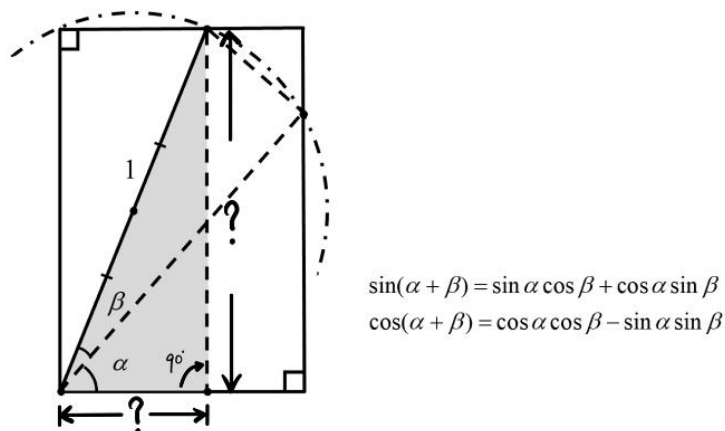


图 5 重新设计的正余弦和角公式 PWW

均值不等式无字证明的中心思想是比较两弦长度，以此得到不等式。教师可以通过标记线段 x 与 y ，以及绘制问号与箭头引导学生关注两弦长度，并通过绘制阴影提示学生两个三角形相似，从而求出弦长，如图 6 所示。学生按照提示正确计算出问号所表示的线段长度为 $\sqrt{xy}$ 后，结合待证命题便可补中心思想之白。

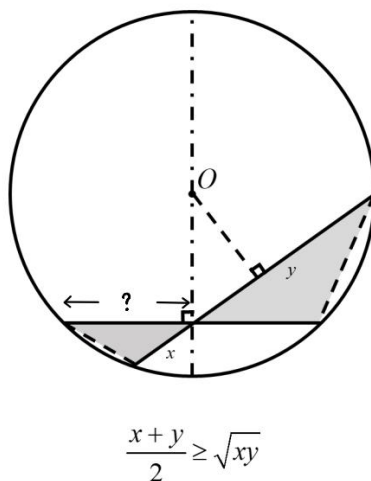


图 6 重新设计的均值不等式 PWW

数列求和无字证明的中心思想是用矩形面积来表示 $\frac{n}{2^n}$ ，将代数中的数列求和问题转化为几何中的图形面积问题。如何巧妙地构造图形是此无字证明的难点，对此，教师可以通过四幅图为学生搭建起脚手架。如图 7 所示，先作出基本图形，即两个面积为 1 的矩形，再展示其中一个矩形不断分割、重组，最终形成阶梯状图形的过程，最后填充阴影帮助学生找到 $\frac{n}{2^n}$ 以及

$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n}$ 的几何表征，进而发现中心思想。

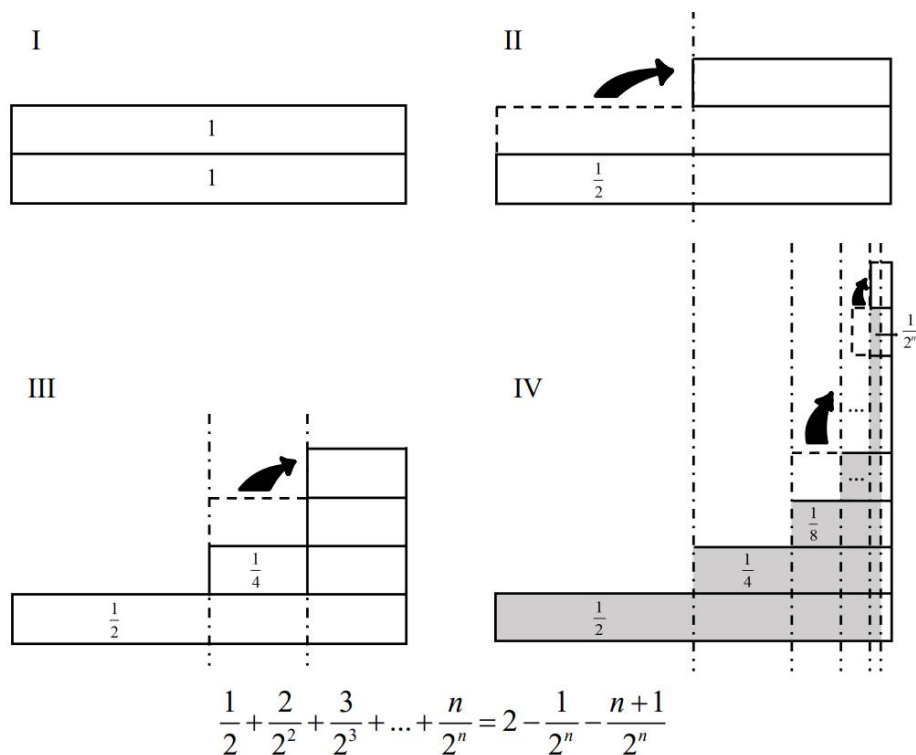


图 7 重新设计的一种数列求和 PWW

2.2 条件已知与未知的可区分性

大多数无字证明并未区分不同类型的条件，如原正余弦和角公式的无字证明（图 2），对于不同类型的条件，包括：给定的条件如角 α 、 β 与线段长度为 1，可以推导出的条件如矩形的宽为 $\cos \alpha \cos \beta$ 以及因构造而产生的条件如过点作垂线段等，无字证明的原设计者都采用相同的方式将它们展现于图 2 中。然而，中学生接触的大多数几何证明题，其配图直接显示的信息为给定条件，故而原始的无字证明很可能会给学生带来困扰，即让学生误认为所有在图中标出的信息都是给定条件。已有研究表明，在利用不同的作图方式来区分不同类型的条件以后，学生容易产生更严格的证明。^[4]因此，教师可以通过不同作图方式来区分无字证明呈现的条件。

在正余弦和角公式的无字证明（图 5）、均值不等式的无字证明（图 6）、数列求和的无字证明（图 7）中，教师可以用实线加印刷体表示给定条件，虚线表示因构造而产生的条件，手写体表示可以推导出的条件，以此促进学生正确理解条件。

2.3 构造的可视性

若不考虑图形是如何产生的，则无法将结论推广至一般，而当无字证明呈现更多构造信息时，学生更容易产生对图形构造过程的思考。^[4]大多数无字证明直接呈现出图象的最终形式，这种方式虽然简洁，但却容易让读者忽略对图形存在性的思考，即该图形是如何被构造出来。

在正余弦和角公式无字证明中需要思考的是，矩形中是否能嵌入一个图 2 所示的直角三角形：其直角顶点位于矩形的长边上、另外两顶点位于矩形的顶点与宽边上。此问题虽看似显然，但若严谨解答，则需要学生思考图象的构造过程。因此，教师可以对原无字证明进行重新设计，用“虚线-点”线条来体现如何确定直角三角形的直角顶点位置，使其呈现出构造过程（图 5）：首先，在矩形中，过左下顶点向上边作一条线段，长度记为单位 1。其次，以此线段为直径作圆并交矩形的右边于一点，再从此交点各自连接线段的两端点。只要能产生交点，就能够形成上述的直角三角形，问题的关键就在于交点是否能产生。当学生思考于此，便能成功解释图形的存在性：只需要让圆心即线段中点到矩形右边的距离小于等于 $\frac{1}{2}$ 即可。最后，再过矩形上边的点向下作垂线段，由此便产生了最终的图形。

在均值不等式无字证明中，其构造方式并不唯一，图 6 仅展示了其中一种思路。首先，通过实线表示给定条件，即已知圆 O 与一条弦。再通过“虚线-点”线条表示构造过程，即过圆心作弦的垂线交弦于一点。而后，通过虚线表示因构造而产生的条件，过上述所产生的弦上交点再作一条弦，弦两段分别为 x 与 y ，再分别连接端点。

在数列求和无字证明中，学生若不能理解图象的构造过程，则难以产生正确的证明。图 7 中主要通过四幅图使图象的构造步骤可视化。在每幅图中，又通过虚实线、“虚线-点”线条与箭头展示了图象的具体构造方式。图 7 中的初始图象 I 展示了两个面积为 1 的全等矩形，图象 II 将矩形对半分割即产生 $\frac{1}{2}$ 的几何表征，接着将左上方的矩形按照箭头所指平移至右上方的矩形上，由此便构造出 $\frac{2}{2^2}$ 的几何表征。图 III 重复上述构造步骤，直至图 IV 构造出 $\frac{n}{2^n}$ 的几何表征，形成最终的阶梯型图形（见图 7），由此成功构造出 $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n}$ 的几何表征。

2.4 图形性质的内隐性

已有的无字证明多会呈现并标记出图形性质，包括已知性质或需要经历推导而得的性质。由图 2 可知，原始无字证明直接呈现出一些学生能够发现的线段长度与角度，如 $\sin \beta$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \alpha \cos \beta$ 等，这将不利于培养学生“自发”的智慧^[11]。已有研究证实，当无字证明减少图形性质的呈现时，学生在证明过程中会更容易产生疑问，从而促进自身构造子证明去填补空白、解决疑问。^[4]因此，教师在重新设计无字证明时，可以考虑隐去学生能够从图中已给条件推导而出的信息，如图 5 的线段长度、角度，同时，教师也可以考虑隐去学生能够根据构造过程得到的结论，如图 6 中的半弦长度。特别地，在对正余弦和无字证明进行修改时，因为图 5 中已增加了确定直角顶点的过程，学生能够从图中构造过程得到直角的结论，所以也同时隐去直角标记。总而言之，通过上述隐藏图形的性质的设计，充分为学生留下图形性质之白，促进学生发现并填补图形性质之白，提升学生逻辑推理的核心素养。

2.5 包含人为痕迹

已有研究表明，抽象的、缺少人为痕迹的呈现方式会降低学生学习数学的兴趣，而包含人为数学痕迹的图形更容易激发学生的数学参与。^[12]因此，教师在图 5-7 中增加了人的数学活动形式，具体而言，在对三个无字证明进行修改时，通过添加作圆的痕迹、手写的角度、手写的箭头与问号等方式使无字证明显得更为生动、自然、有趣，进而拉近了无字证明与学生的距离。

3 基于无字证明的教学建议

当教师在课前完成对无字证明的二次设计后，如何在课堂中基于修改后的无字证明具体开展教学是值得我们思考的问题，本文结合已有文献提出如下教学建议。

(1) 分组研讨，组内补白。

《课标》提出，普通高中的培养目标包括使学生具有自主发展能力与沟通合作能力，^[5]传统的讲授式教学难以满足上述要求，而当课堂采取分组研讨的形式，围绕无字证明让学生小组主动思考、主动发现、主动讨论、主动论证，便能够在此过程中较自然地发展学生的自主探究与合作交流的意识与习惯。同时，无字证明对学生的个人能力要求较高，分组研讨能够帮助降

低无字证明活动的难度，提高课堂的教学效率。

(2) 小组展示，分享论证。

当学生完成组内补白后，教师可以让小组上台展示，分享论证结果。王建磐提出，在中小学数学学习中，有两样东西非常重要，一个是学会理性思维，另一个便是学会精确表达。^[13]此环节能够锻炼学生的语言表达能力，同时能够培养学生的数学自信，更能够引导学生养成倾听他人的习惯，由此发挥数学课堂的育人价值。当小组上台展示后，教师还可以引导学生开展组内自评与组间互评，让学生在相互交流、相互质疑、相互鼓励的过程中树立理性精神。更为重要的是，让学生真正成为课堂的主人，激发学生数学学习的乐趣，让学生真正爱上数学。

(3) 教师点拨，二次补白。

已有研究表明，学生能够自主填补无字证明的中心思想之白、部分图形性质之白与部分构造之白，但学生难以发现并填补一般化之白，即解释基于这个特定图的证明是否可以得到一般性的结论。^[14]对于学生在证明中忽略的空白，教师可以发挥引导作用，通过设问追问的形式让学生意识到忽略的空白，激发学生对证明的再思考、再补白，最终形成严密完整的证明。通过“问题引领”，不仅能够实现教师主导、学生主体的“双主体”，^[14]还可以帮助学生逐步学会更清晰、更深入、更全面、更合理地思考，并由“理性思维”逐步走向“理性精神”。^[15]以正余弦和角公式为例，教师可以通过问题“在已给的无字证明中，正余弦和角公式是否对任意范围的角度都成立？”引导学生发现一般化之白，再通过设问“由无字证明得到的正余弦和角公式能否推广至任意角度？”，启发学生思考并与学生共同填补一般化之白。此外，当学生在论证过程中产生科学性错误或遇到困难时，教师应及时指出并纠正，并进行适度地干预，避免产生“留白”变“白留”的问题。同时教师也要注意及时评价、恰当理答，培养学生提出问题的积极性，帮助学生真正做到“敢问、爱问、会问”。^[14]

4 结语

在如今人工智能技术高速发展的背景下，学生不仅要掌握知识，更要学会如何学习、如何思考、如何创新，当教师在课堂上充分留白，可以为学生提供思考创造的时间与空间，因此，开展留白式教学是极其必要的。本文介绍的无字证明是一种特殊的留白形式，是留有线索的白，是聚焦的留白。而基于无字证明的留白教学本质上即是学生根据无字证明提供的线索自主探究，

教师引导学生不断补白的过程。当然，实施基于无字证明的留白教学需要一定的条件。

首先，教师需要学习无字证明，具体包括了解无字证明的含义，寻找并积累适合中学阶段教学的无字证明。其次，教师需要将无字证明转化为教学材料，例如，利用本文所述的五项原则对无字证明进行修改或再设计，使之成为适合课堂教学的有效工具。同时，教师需要不断提升专业技能，在留白课堂中，学生开放性的思考结果需要教师及时给予正确的反馈与评价，因此，留白式教学对教师的专业能力要求较高。此外，教师需要塑造留白教学的信念，“满堂灌、一言堂”、“刷题式”教学可能在短期内提升学生的成绩，但从长远来看，其不利于学生的全面性发展。学生的潜能是无限的，学生的智慧也是无穷的，教师要敢于在课堂上留白，善于在课堂上留白，为学生创造补白的机会，让学生在补白过程中发散思维、创新创造、树立自信、激发兴趣。

参考文献

- [1] Nelsen, R. B. *Proofs without words: Exercises in visual thinking*[M]. Washington, DC: Mathematical Association of America. 1993: vi.
- [2] Netz, R. Greek mathematical diagrams: Their use and their meaning[J]. *For the learning of Mathematics*, 1998, 18(3): 33-39.
- [3] Stylianides, A. J. & Harel, G. *[ICME-13 Monographs] Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving*[M]. Springer Cham, 2018: 239-251.
- [4] Marco, N., Palatnik, A. & Schwarz, B. B. When is less more? Investigating gap-filling in proofs without words activities[J]. *Educ Stud Math*, 2022, 111(2): 271-297.
- [5] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 3.
- [6] Bell, C. J. Proofs without words: A visual application of reasoning and proof[J]. *The Mathematics Teacher*, 2011, 104(9): 690-695.
- [7] Nirode, W. Proofs without words in geometry[J]. *The Mathematics Teacher*, 2017, 110(8): 580-587.
- [8] Marco, N. The effects of a proof comprehension test on comprehending proofs without words[C]// Inprasitha, M., Changsri, N., Boonsena, N. *Proceedings of the 44th Conference of the*

International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, Khon Kaen: Thailand Society of Mathematics Education, 2021: 222-229.

- [9] 蔡甜甜, 刘国祥, 宁连华. 数学课堂留白艺术的理论探析与实践反思[J]. 数学教育学报, 2018, 27(6): 29-32.
- [10] 张奠宙. 张奠宙数学教育随想集[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2013: 88-91.
- [11] Hewitt, D. Arbitrary and necessary part 1: A way of viewing the mathematics curriculum[J]. *For the learning of Mathematics*, 1999, 19(3): 2-9.
- [12] Sfard, A. *Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing (Learning in Doing: Social, Cognitive and Computational Perspectives)*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2008: 125-126.
- [13] 陈行, 鲍建生. 中国数学基础教育热点聚焦与展望[J]. 数学教育学报, 2018, 27(1): 90-95.
- [14] 郑毓信. 中国数学教育的“问题特色”[J]. 数学教育学报, 2018, 27(1): 1-7.
- [15] 郑毓信. 数学教育视角下的“核心素养”[J]. 数学教育学报, 2016, 25(3): 1-5.

专题研究

美英早期解析几何教科书中的圆锥曲线的光学性质

刘梦哲, 杨舒捷

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

在解析几何的学习中, 圆锥曲线是极其重要的一部分内容, 它所涉及的知识面广, 且易于与平面向量、三角形、直线等知识进行结合, 因而在学习的过程中难度较大。圆锥曲线作为高中数学的重点与难点, 同时也是高考命题的热点之一, 其中蕴含了数形结合思想、方程思想、等价转化思想, 对学生的逻辑推理能力、运算求解能力等基本数学能力提出了一定的要求。

回溯历史, 圆锥曲线的光学性质是古代数学家的重要研究课题之一。早在古希腊时期, 阿波罗尼奥斯 (Apollonius, 约前 262-约前 190) 在《论点火镜》中论述了光线在各种形状镜面上的反射。阿波罗尼奥斯肯定知道抛物镜面能把焦点处发出的光反射成平行于镜面轴的光束, 反之亦然, 据说阿基米德 (Archimedes, 前 287-前 212) 正是利用这一性质, 把日光集中到罗马船上使他们起火^[1]。此外, 他在所著《圆锥曲线论》第三篇中讲述了椭圆和双曲线的有关几何性质, 却没有提到抛物线的性质^[2]。今天, 圆锥曲线的光学性质在实际生活中有着较为重要的应用, 例如, 椭圆镜面用来制作电影放映机的聚光灯、双曲面用来设计汽车后视镜、抛物面用来制作探照灯等。

随着新课程改革的不断推进, 重视数学与现实生活的联系, 注重实践应用, 正是广大数学教师所要探讨的重要课题。在现行沪教版教科书中, 圆锥曲线的光学性质只是以旁白的形式出现, 而没有给出这一几何性质的完整证明过程, 因而给学生留下了较大的思维空间。但也正因如此, 本节课对所探究的内容没有严格的限制, 对知识的跨度也没有严格的约束, 这就对教师的知识素养提出了较高的要求。鉴于此, 本文拟聚焦圆锥曲线的光学性质, 对 19-20 世纪美英解析几何教科书进行考察, 希望从中获得相关历史素材, 并为今后的教学提供思想养料。

2 圆锥曲线的光学性质

椭圆不仅应用于不同角速度的齿轮和半椭圆弹簧等科学和工程领域，它的一条几何性质在建筑设计中也被广泛应用^[3]，即椭圆的反射定律：由椭圆一个焦点射向椭圆上任意一点的光波或声波，经该椭圆反射后会经过另一个焦点。例如，华盛顿国会大厦有一间圆形大厅，由于其屋顶是椭圆形穹顶，因此在这个房间里和人讲话很不保险，如果你在窃窃私语时恰好站在地板上的某个金属星标点处，你的话就能被房间里站在对面的人听到；在伦敦圣保罗大教堂（St. Paul's Cathedral）中，若有人站在一堵墙附近低声细语，那么在 108 英尺远的墙边可以清晰地听到对话的内容。^[3]

双曲线也具有同样的光学和声学性质，即从双曲线的一个焦点发出的光线或声波，经双曲线反射后，反射光线的反向延长线都汇聚到双曲线的另一焦点，人们利用这一性质可以制作双曲面反射镜^[4]。

对于抛物线，其几何性质是设计声光反射器的基础。若点 P 是抛物线上任意一点， F 是抛物线的焦点， PQ 平行于抛物线的对称轴，则过 P 的法线 PN 平分 $\angle FPQ$ 。可知，从点 F 到点 P 的光线会沿射线 PQ 反射。如果反射器的形状是绕抛物线的对称轴旋转而得到的，那么来自焦点处的光线将平行于对称轴反射，从而产生集中的光束而不是漫射光（图 1）^[3]。

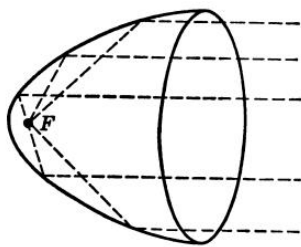


图 1 Purcell 给出的抛物面插图

前照灯、探照灯和抛物面反射器正是依据上述原理制造的^[5]，而许多灯塔采用抛物面镜的目的就是将所有的光线投向大海^[6]。

“所有平行于轴的光线经过抛物面的反射将集中到焦点”这一原理在抛物面反射镜的使用中得到了应用，比如反射式望远镜^[7]。如果将抛物面反射镜的轴朝向太阳，则太阳的光线会沿平行于轴的方向照射过来，经反射后集中于焦点处，这样，热量将会聚集于此，焦点处的温度就会很高，如果将一些火药放置在焦点处，那么它们将容易被点燃^[8]，而如果在抛物面反射器

的焦点处放置一个锅炉，这样就构造出了一个高效的太阳能发动机^[9]。

此外，由于声音与光线遵循同样的反射定律，抛物面麦克风被用来收集来自足球场远处的声音，从而起到很好的聚音效果，雷达和电波望远镜也是基于同样的原理^[10]。

3 圆锥曲线的光学性质的证明

在美英早期教科书中，关于椭圆、双曲线和抛物线的光学性质的证明方法可以分为焦半径法、夹角法和反证法。

3.1 焦半径法

3.1.1 椭圆

Ziwet & Hopkins 证明如下：如图 2，对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，则过椭圆上一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程为 $PT: \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ ，法线方程为 $PN: \frac{a^2}{x_1} x - \frac{b^2}{y_1} y = c^2$ ，于是这条法线在 x 轴上的截距为 $\frac{c^2}{a^2} x_1 = e^2 x_1$ 。由点到直线距离公式可以计算出两条焦半径的长度为

$$|F_1 P|^2 = (x_1 + c)^2 + y_1^2 = (x_1 + c)^2 + \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_1^2) = \frac{1}{a^2} (a^4 + 2a^2 c x_1 + c^2 x_1^2),$$

即 $|F_1 P| = a + e x_1$ ，同理得 $|F_2 P| = a - e x_1$ ，又由

$$|F_1 N| = c + e^2 x_1 = e(a + e x_1) = e \cdot |F_1 P|, \quad |F_2 N| = c - e^2 x_1 = e(a - e x_1) = e \cdot |F_2 P|,$$

因为 $\frac{|F_1 N|}{|F_1 P|} = \frac{|F_2 N|}{|F_2 P|}$ ，所以 $\angle F_1 P N = \angle F_2 P N$ ，则 $\angle F_1 P E = \angle F_2 P F$ 。^[11]

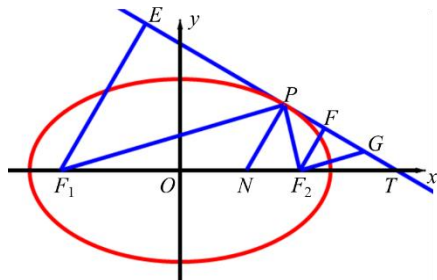


图 2 焦半径法证明椭圆的光学性质

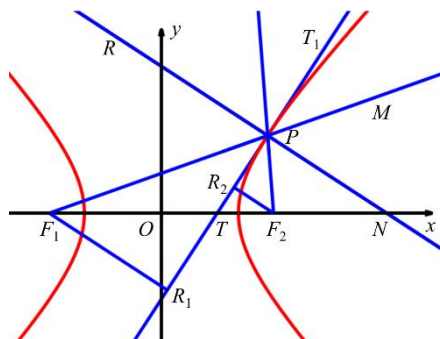


图 3 焦半径法证明双曲线的光学性质

Fine & Thompson 过两焦点作切线的垂线，并利用对应边成比例证明椭圆的光学性质^[12]。

如图 2，分别过点 $F_1(-ae, 0), F_2(ae, 0)$ 作椭圆切线 PT 的垂线，垂足为点 E, F 。因为椭圆的切线

方程可表示为 $b^2x_1x + a^2y_1y - a^2b^2 = 0$ ，由点到直线距离公式计算得 $|EF_1| = \frac{|b^2x_1 \cdot (-ae) - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}$ 、

$|FF_2| = \frac{|b^2x_1 \cdot ae - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}$ ，即 $\frac{|EF_1|}{|FF_2|} = \frac{a + ex_1}{a - ex_1}$ 。又因为 $|F_1P| = a + ex_1$ 、 $|F_2P| = a - ex_1$ ，所以

$\frac{|EF_1|}{|FF_2|} = \frac{|F_1P|}{|F_2P|}$ ，于是 $\triangle EF_1P \sim \triangle FF_2P$ ，则 $\angle F_1PE = \angle F_2PF$ 。

Church 作一条焦半径的平行线，并利用比例线段证明椭圆的光学性质^[13]。如图 2，过点

F_2 作 $F_2G \parallel F_1P$ ，因为 $|F_1T| = \frac{a^2}{x_1} + c, |F_2T| = \frac{a^2}{x_1} - c$ ，所以 $\frac{|F_1T|}{|F_2T|} = \frac{a^2 + x_1c}{a^2 - x_1c} = \frac{c + e^2x_1}{c - e^2x_1} = \frac{|F_1P|}{|F_2P|}$ 。又因

为 $\frac{|F_1T|}{|F_2T|} = \frac{|F_1P|}{|F_2G|}$ ，所以 $|F_2G| = |F_2P|$ ，故 $\angle F_1PE = \angle F_2GF = \angle F_2PF$ 。

3.1.2 双曲线

如图 3，对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，过其上任意一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程为 $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ ，这条切线在 x 轴的截距为 $\frac{a^2}{x_1}$ 。Dowling & Turneaure 的做法与 Ziwet 类似，由点到直线距离公式，两条焦半径的长度为 $|F_1P| = ex_1 + a$ 、 $|F_2P| = ex_1 - a$ 。因为 $|F_1T| = ae + \frac{a^2}{x_1}$ 、

$|F_2T| = ae - \frac{a^2}{x_1}$ ，于是 $\frac{|F_1T|}{|F_2T|} = \frac{|F_1P|}{|F_2P|}$ ，故 $\angle F_1PT = \angle F_2PT$ ，又因为直线 PN 是过点 P 的法线，所

以 $\angle F_1PR = \angle F_2PN$ 。^[14]

Runkle 的做法与 Fine & Thompson 类似，分别过双曲线的两个焦点 F_1, F_2 作切线的垂线，

垂足为 R_1, R_2 （图 3）。由双曲线的切线方程 $b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$ ，于是 $|F_1R_1| = \frac{|aeb^2x_1 + a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}$ ，

则

$$\frac{|F_1R_1|^2}{|F_1P|^2} = \frac{a^2b^4(ex_1+a)^2}{(b^4x_1^2+a^4y_1^2)(ex_1+a)^2} = \frac{a^2b^4(ex_1+a)^2}{a^2b^2(e^2x_1^2-a^2)(ex_1+a)^2} = \frac{b^2}{(ex_1-a)(ex_1+a)} = \frac{b^2}{rr'},$$

其中 $r=ex_1+a$ 、 $r'=ex_1-a$ 。同理 $\frac{|F_2R_2|^2}{|F_2P|^2} = \frac{b^2}{rr'}$ ，故 $\frac{|F_1R_1|^2}{|F_1P|^2} = \frac{|F_2R_2|^2}{|F_2P|^2} = \frac{b^2}{rr'}$ ，于是 $\angle$

$F_1PT = \angle F_2PT$ ，同理有 $\angle F_1PR = \angle F_2PN$ 。^[15]

Robinson 通过证明内角平分线 PT 是切线，由此得到双曲线的光学性质^[6]。如图 3，过点 P

作 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PT ，于是 $\frac{|F_1P|}{|F_2P|} = \frac{|F_1T|}{|F_2T|}$ 成立。假设 $\frac{ex_1+a}{ex_1-a} = \frac{c+\frac{a^2}{x_1}}{z}$ 成立，计算可得

$z = c - \frac{a^2}{x_1} = |F_2T|$ ，因此直线 PT 是过双曲线上一点 P 的切线，而直线 PN 是法线，于是

$\angle F_1PR = \angle F_2PN$ 。

Loomis 则与 Robinson 相反，通过证明所作外角平分线 PN 是法线，由此得到双曲线的光学性质^[16]。如图 3，延长 F_1P 至点 M ，作 $\angle F_2PM$ 的角平分线 PN ，交 x 轴于点 N ，得到

$\frac{|F_1P|}{|F_2P|} = \frac{|F_1N|}{|F_2N|}$ 。由比例的等比性质可知， $\frac{|F_1F_2|}{|F_1P|-|F_2P|} = \frac{|F_1N|-|F_2N|}{|F_1P|-|F_2P|} = \frac{|F_1N|}{|F_1P|}$ ，则

$\frac{2c}{2a} = \frac{|F_1N|}{ex_1+a} \Rightarrow |F_1N| = e(ex_1+a)$ ，因此直线 PN 是过双曲线上一点 P 的法线。又由 $PN \perp PT$ 、

$\angle F_2PN = \angle NPM$ ，故 $\angle F_2PT = \angle MPT_1$ ，则 $\angle F_1PT = \angle F_2PT$ 、 $\angle F_1PR = \angle F_2PN$ 。

Loomis 从角平分线出发证明直线 PN 是法线，而 Puckle 从法线出发证明直线 PN 是角平分线，通过求出双曲线的法线在 x 轴上的截距，进而由比例线段证明双曲线的光学性质^[17]。如图

3，过双曲线上一点 P 的法线方程为 $y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$ ，令 $y=0$ ，则 $x = \frac{b^2x_1}{a^2} + x_1 = e^2x_1$ 。因

为 $|F_1N| = e^2x_1 + c$ 、 $|F_2N| = e^2x_1 - c$ ，所以 $\frac{|F_1P|}{|F_2P|} = \frac{|F_1N|}{|F_2N|}$ ，则 PN 是 $\angle F_2PM$ 的角平分线，又因为

直线 PT 是过点 P 的切线，所以 $\angle F_1PR = \angle F_2PN$ 。

3.1.3 抛物线

如图 4, Davies 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上任意一点 $P(x_1, y_1)$ 作切线 PT , 其直线方程为 $y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$ 。因为 $|OT| = |OD| = x_1$, 所以 $|FT| = |FO| + |OT| = \frac{p}{2} + x_1$, 而焦半径长 $|FP| = x_1 + \frac{p}{2}$, 故 $|FT| = |FP|$ 。过点 P 作 x 轴的平行线 PQ , 因为 $\angle FPT = \angle FTP$, 所以 $\angle FPT = \angle QPM$ [18]。

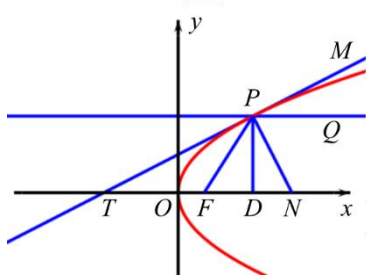


图 4 焦半径法证明抛物线的光学性质之一

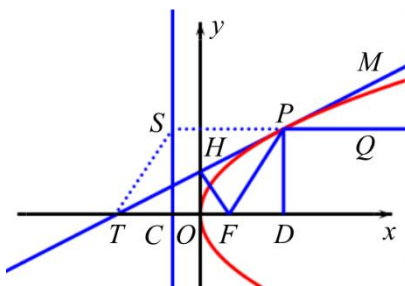


图 5 焦半径法证明抛物线的光学性质之二

如图 4, Ziwet & Hopkins 过点 P 作法线 PN , 其直线方程为 $p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0$ 。由于 $|OT| = |OD| = x_1$, $|DN| = p$ 且 $|OF| = \frac{p}{2}$, 所以 $|TF| = |FN|$, 则点 F 为 TN 的中点, 即点 F 是 $\text{Rt}\triangle TPN$ 斜边的中点, 故 $|FT| = |FP|$, 因此 $\angle FPT = \angle FTP$, 即 $\angle FPT = \angle QPM$ [11]。

如图 5, Davies & Charles 过点 P 作 PD 垂直于轴, 切线 PT 交 y 轴于点 H , 连结 HF 。因为 $|TO| = |OD|$, 所以 $|TH| = |HP|$, 又因为点 $H(0, \frac{px_1}{y_1})$, 所以 $k_{HF} = -\frac{2x_1}{y_1}$, 则 $HF \perp PT$ 。由 $\text{Rt}\triangle TFH \cong \text{Rt}\triangle PFH$, 因此 $\angle FPT = \angle FTP$, 即 $\angle FPT = \angle QPM$ [19]。

Young, Fort & Morgan 过点 P 作直线 QP 的反向延长线, 交抛物线的准线 SC 于点 S , 连结 ST (图 5)。因为 $|FP| = |SP| = |CD|$ 、 $|TO| = |OD|$ 、 $|CO| = |OF|$, 所以 $|TC| = |FD|$, 故 $|FT| = |CD| = |SP| = |FP|$, 因此四边形 $TFPS$ 是菱形, 而菱形的对角线平分相应的内角, 故 $\angle SPT = \angle FPT$, 于是 $\angle FPT = \angle QPM$ [20]。

3.2 夹角法

运用两直线的夹角公式即可计算焦半径与切线或法线的夹角，由此可以证明圆锥曲线的光学性质。以椭圆为例，Wilson & Tracey 证明法线与两条焦半径的夹角相等^[21]。如图 2，由点 $P(x_1, y_1), F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，直线 F_1P 和 F_2P 的斜率分别为 $k_{F_1P} = \frac{y_1}{x_1 + c}$ 、 $k_{F_2P} = \frac{y_1}{x_1 - c}$ ，过椭圆上一点的法线的斜率为 $k_{NP} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$ ，于是计算可得

$$\begin{aligned}\tan \angle F_1PN &= \frac{\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} - \frac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \cdot \frac{y_1}{x_1 + c}} = \frac{\frac{a^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1 - b^2 x_1 y_1}{b^2 x_1^2 + b^2 c x_1 + a^2 y_1^2}}{\frac{a^2 b^2 + b^2 c x_1}{b^2}} = \frac{c y_1}{b^2}, \\ \tan \angle F_2PN &= \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} - \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}}{1 + \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \cdot \frac{y_1}{x_1 - c}} = \frac{\frac{b^2 x_1 y_1 - a^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1}{b^2 x_1^2 - b^2 c x_1 + a^2 y_1^2}}{\frac{a^2 b^2 - b^2 c x_1}{b^2}} = \frac{c y_1}{b^2},\end{aligned}$$

所以 $\tan \angle F_1PN = \tan \angle F_2PN \Rightarrow \angle F_1PN = \angle F_2PN$ ，于是 $\angle F_1PE = \angle F_2PF$ 。当然，Davies 分别计算切线和两条焦半径之间的夹角亦可证明椭圆的光学性质^[18]。

Puckle 由两条焦半径方程出发，推导两条焦半径所夹角的角平分线，最后将所得直线化简即为椭圆的法线方程^[17]。仍如图 2，直线 PF_1 和 PF_2 的表达式分别为 $\frac{y}{x + ae} = \frac{y_1}{x_1 + ae}$ 、

$\frac{y}{x - ae} = \frac{y_1}{x_1 - ae}$ ，于是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线 PN 的表达式为

$$\frac{-(x_1 - ae)y + y_1 x - aey_1}{\sqrt{y_1^2 + (x_1 - ae)^2}} = \frac{(x_1 + ae)y - y_1 x - aey_1}{\sqrt{y_1^2 + (x_1 + ae)^2}},$$

将该方程化简后可得到与过椭圆上一点 (x_1, y_1) 的法线一样的表达式。与此同时，也可以令 $y=0$ ，

得到 $\frac{x - ae}{a - ex_1} = \frac{-(x + ae)}{a + ex_1}$ ，即 $x = e^2 x_1$ ，再由对应边成比例即可证明直线 PN 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线。

3.3 反证法

Robinson 分别作椭圆和双曲线的焦点三角形的外角平分线和内角平分线，然后证明这条平分线是椭圆或双曲线的一条切线，由此得到椭圆和双曲线的光学性质^[6]。以椭圆为例，设点 P

是椭圆上任意一点, 连结 PF_1, PF_2 , 延长 F_1P 至点 F , 使得 $PF=PF_2$ 。连结 FF_2 , 取 FF_2 的中点 G 并过点 P 、 G 作直线 GP (图 6)。

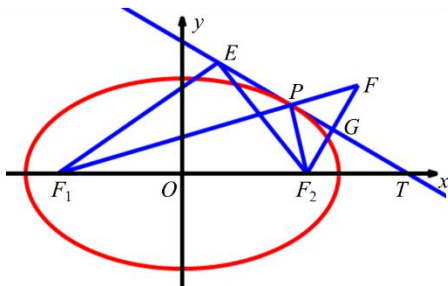


图 6 Robinson 运用反证法证明椭圆的光学性质

因为 $\triangle PFF_2$ 是等腰三角形, 且点 G 是 FF_2 的中点, 由等腰三角形三线合一知, 直线 PT 是 $\angle F_2PF$ 的角平分线, 即 $\angle F_2PG = \angle FPG$ 。又因为 $\angle FPG = \angle EPF_1$, 所以 $\angle F_2PG = \angle EPF_1$ 。假设直线 GP 交椭圆于另一点 E , 因为 $F_2E = EF$, 两边同加 F_1E 得 $F_2E + F_1E = EF + F_1E$ 。因为 $EF + F_1E > FF_1$, 所以 $F_2E + F_1E > FF_1 = PF_1 + PF_2$, 显然点 E 不在椭圆上, 与假设矛盾, 故直线 GP 是椭圆的切线。

Coffin 先假设双曲线的切线不是过该切点的焦点三角形的角平分线, 由此作一条过该点的角平分线, 从而导出矛盾, 于是证明了双曲线的光学性质^[22]。如图 7, 假设切线 PT 不是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线, 不妨设 PR 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线, 有 $\angle F_1PR = \angle F_2PR$ 。

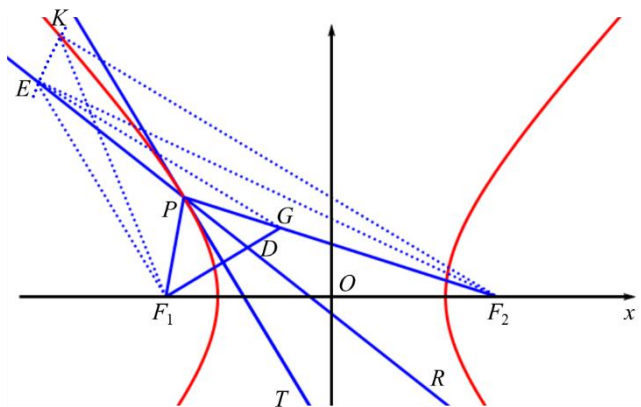


图 7 Coffin 运用反证法证明双曲线的光学性质

因为过双曲线上同一点有且只有一根切线, 所以直线 PR 与双曲线相交。在双曲线内的直线 PR 上取一点 E , 并以 F_2 为圆心、 F_2E 为半径作 $\widehat{EK}$, 交双曲线于点 K 。在 PF_2 上取 $PG = PF_1$, 连结 GF_1 、 GE 、 EF_1 、 EF_2 、 KF_1 、 KF_2 。在 $\triangle PF_1D$ 和 $\triangle PGD$ 中, 因为 $\angle F_1PD = \angle F_2PD$ 、

$PF_1=PG$ 、 PD 是公共边，所以 $\triangle PF_1D \cong \triangle PGD$ ，于是 $DF_1=DG$ 、 $\angle F_1DP=\angle GDP$ 。在 $\triangle EF_1D$ 和 $\triangle EGD$ 中，因为 $DF_1=DG$ 、 $\angle F_1DP=\angle GDP$ 、 ED 是公共边，所以 $\triangle EF_1D \cong \triangle EGD$ ，于是 $EF_1=EG$ 。又因为 $\angle EF_2F_1 < \angle KF_2F_1$ 且 $EF_2=KF_2$ 、 $F_1F_2=F_1F_2$ ，所以 $EF_1 < KF_1$ ，则 $EG < KF_1$ 、 $EF_2-EG > KF_2-KF_1$ 。由 $KF_2-KF_1=PF_2-PF_1=PF_2-PG=GF_2$ ，故 $EF_2-EG > GF_2$ ，与事实矛盾，显然假设不成立，即切线 PT 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线。

4 结论与启示

综上所述，圆锥曲线的光学性质不仅在生产和科学技术中有着广泛地应用，还能在解决切线问题时起到事半功半的效果。美英早期解析几何教科书中所呈现的椭圆、双曲线和抛物线的光学性质的简介以及各种证明方法，为今日圆锥曲线的光学性质的教学提供了诸多启示。

其一，以情境引思考，把握教学起点。数学起源于情境，情境是产生问题的沃土。在教学过程中创设适当的问题情境，不仅能激发学生的学习兴趣，还能在探索、解决问题的过程中提高学生的思维能力，发展学生的创新意识和实践能力。在本节课的教学中，教师可以探照灯、望远镜等学生身边的所见所闻为切入口，将学生置于“数学应用”的环境中，通过数学抽象，用数学语言归纳所得到的信息，最终构建模型证明圆锥曲线的光学性质。

其二，以探究促思维，关注教学节点。数学课程标准中多次提及“经历”“体验”“探索”等刻画数学活动水平过程性目标的动词，这就要求我们在数学教学中，不仅要让学生掌握相应的数学知识，还要给学生提供一种“经历”，以培养态度情感和意志品质、发展创新精神和实践能力。教师通过设置一些事例和问题，让学生以小组合作的方式开展探究活动，最终应用圆锥曲线的光学性质设计出一些模型、工具或产品。在做中学，不仅有助于加深学生对知识的理解，唤起学生的主体意识和主动能力，还有利于培养学生的数学素养和数学思维能力。

其三，以应用谋发展，落实教学终点。教师在日常教学中应关注数学知识与学生实际生活的结合，通过生动形象的情境、真实丰富的实例，在应用数学的过程中，自然地说明概念不同方面的含义，让学生从多角度理解数学概念，形成与真实情境相联系的背景性经验。关注学生亲身经历应用的过程，方能使学生在现实生活中自觉应用数学知识，发展数学应用意识，促进学生全面、持续、和谐的发展。

参考文献

- [1] M • 克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 张理京, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 189-191.
- [2] 阿波罗尼斯. 圆锥曲线论[M]. 朱恩宽, 等, 译. 陕西: 陕西科学技术出版社, 2007.
- [3] Kells, L. M. & Stotz, H. C. *Analytic Geometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1949: 128-129,139-140.
- [4] Lambert, P. A. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1897: 117.
- [5] Siceloff, L. P., Wentworth, G. & Smith, D. E. *Analytic Geometry: Brief Course*[M]. Boston: Ginn & Company, 1922: 91.
- [6] Robinson, H. N. *Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Ivison, Blakeman, 1860: 16-17, 70-71, 175, 194-195.
- [7] Newcomb, S. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. New York: Henry Holt and Company, 1884: 120.
- [8] Osgood, W. F. & Graustein, W. C. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1921: 96-97.
- [9] Poor, V. C. *Analytical Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1934: 98.
- [10] Purcell, E. J. *Analytic Geometry*[M]. New York: Appleton-Century-Crofts, 1958: 137.
- [11] Ziwet, A. & Hopkins, L. A. *Analytic Geometry and Principles of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company, 1913: 184, 208-209.
- [12] Fine, H. B. & Thompson, H. D. *Coordinate Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1914: 84-85.
- [13] Church, A. E. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: G. P. Putnam, 1851: 153-154.
- [14] Dowling, L. W. & Turneure, F. E. *Analytic Geometry*[M]. New York: Henry Holt and Company, 1914: 121-122.
- [15] Runkle, J. D. *Elements of Plane Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1888: 251-252.

- [16] Loomis, E. *Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculus*[M]. New York: Harper & Brothers, 1851: 87.
- [17] Puckle, G. H. *An Elementary Treatise on Conic Sections and Algebraic Geometry*[M]. London, Macmillan, 1870: 188-189.
- [18] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Co, 1836: 116-118, 148-151.
- [19] Davies, C. *Elements of analytical geometry and of the differential and integral calculus*[M]. New York: A. S. Barnes & Burr, 1860: 122-123.
- [20] Young, J. W., Fort, T. & Morgan, F. M. *Analytic Geometry*[M]. Boston: Houghton Mifflin Company, 1936: 177.
- [21] Wilson, W. A. & Tracey, J. I. *Analytic Geometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Company, 1915: 175-176.
- [22] Coffin, J. H. *Elements of Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Collins, 1881: 49.

数学史视角下的三角函数单位圆定义和终边定义

姚 瑶

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

众所周知, 在平面三角学中, 任意角三角函数的常见定义有两种, 即单位圆定义和终边定义, 现行不同版本教科书的选择互有不同, 教师在两种定义的选择上还存在疑惑。事实上, 两种定义本质上是一致的^[1-2], 但人们的争论源于认知习惯与解题需求上的差异^[3]。

章建跃总结了单位圆定义的几个优点: (1) 能突出三角函数的周期性; (2) 更便于探究三角函数的定义域和值域、三角函数值的符号、同角三角函数的基本关系式以及三角函数的周期性、单调性等; (3) 符合三角函数的发展历史。^[4]柏长胜认为, 单位圆定义有利于三角不等式和三角方程的求解。^[5]徐亚婷指出, 仅采用终边定义而将单位圆定义视为其特殊情形, 不符合三角函数的历史序。^[6]陈曦等认为, 直接利用单位圆来定义三角函数, 更符合三角函数的历史发展规律, 也符合学生的认知规律。^[7]王芝平等认为, 利用单位圆定义, 易于刻画圆周运动。^[8]何军等指出, 单位圆定义清楚地表明了正、余弦函数自变量与函数值之间的对应关系, 更好地反映了三角函数的本质。^[9]

相反, 陶维林建议, 利用终边定义先定义锐角三角函数, 再从锐角过渡到任意角。^[10]孙孜等认为, 终边定义更能反应三角函数的本质, 因而更支持在教学中采用该方式。^[2]

还有教师认为, 两种定义方式都有其缺点, 学生难以理解从几何形态的角转化成实数形态的过程^[11]。也有教师建议将两种定义加以融合, 先引出终边定义, 再以简化三角函数定义中的表达式为目的, 自然过渡到单位圆定义。^[12-13]董海涛也认为, 教师应兼顾两者, 讲明它们之间的联系, 使学生更加透彻地理解三角函数概念。^[14]

虽然教师在讨论两种定义的优劣时, 考虑到了三角函数的历史, 但事实上人们对此并没有清晰的认识。为了从历史的视角来审视两种定义, 本文对 1836-1960 年间出版的 97 种美英三角学教科书进行考察, 探讨历史上教科书编写者在两种定义上的倾向性, 为今日教学提供思想启迪。

2 任意角三角函数的定义

2.1 终边定义

在所考察的 97 种教科书中，有 92 种采用了终边定义。其中，De Morgan 最早提出了六种三角函数的终边定义^[15]。首先考虑锐角 AOB ，如图 1，过终边上任意点 B 作垂线 BM ，那么 BM 和 OB 的比值为 $\angle AOB$ 的正弦，记作 $\frac{BM}{OB}$ 。设 $\triangle KOL \cong \triangle OBM$ ，则 $\angle AOK$ 是 $\angle AOB$ 的余角，故 $\angle AOK$ 的正弦是 $\frac{KL}{OK}$ 或 $\frac{OM}{OB}$ ，即 $\angle AOB$ 的余弦。同样，由 $\angle AOB$ 的正切 $\frac{BM}{OM}$ 可推得其余切为 $\frac{OM}{BM}$ ，由 $\angle AOB$ 的正割 $\frac{OB}{OM}$ 可推得其余割是 $\frac{OB}{BM}$ 。

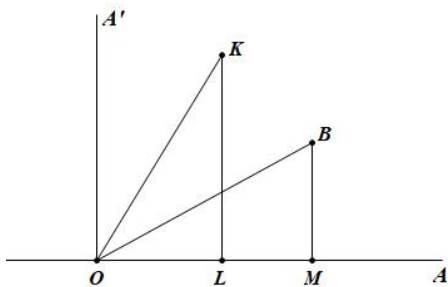


图 1 三角函数的终边定义

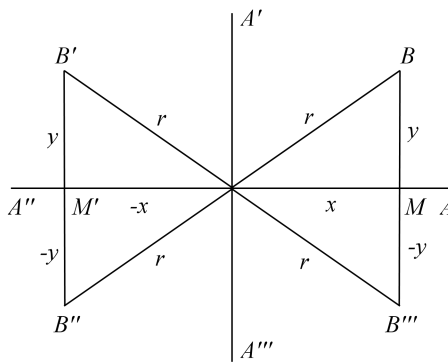


图 2 三角函数定义中的隐含性质

接着，De Morgan 分别对 $(90^\circ, 180^\circ)$ 、 $(180^\circ, 270^\circ)$ 和 $(270^\circ, 360^\circ)$ 上的角的三角函数进行定义，并确定任意角三角函数的符号。最后构造图 2，并探索三角函数所隐含的基本性质^[15]。图 2 中的标注是仅对线段长度的标记，且只是通过互相垂直的两条直线将平面划分为四个区域，并未明确提及直角坐标系。

Oliver, Wait & Jones 首次明确地引入平面直角坐标系来定义任意角三角函数^[16]。在引入三角函数定义前，编者先介绍了平面直角坐标系的概念，如图 3 所示。在此基础上，

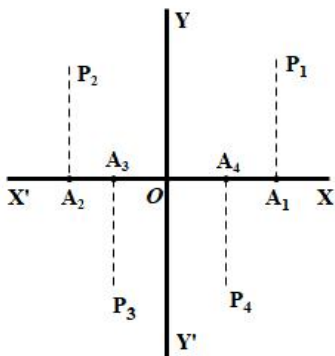


图 3 在平面直角坐标系中确定点的位置

将终边旋转方向和终边所处位置的不同情况分别作图，得到 8 种情况，如图 4 所示。

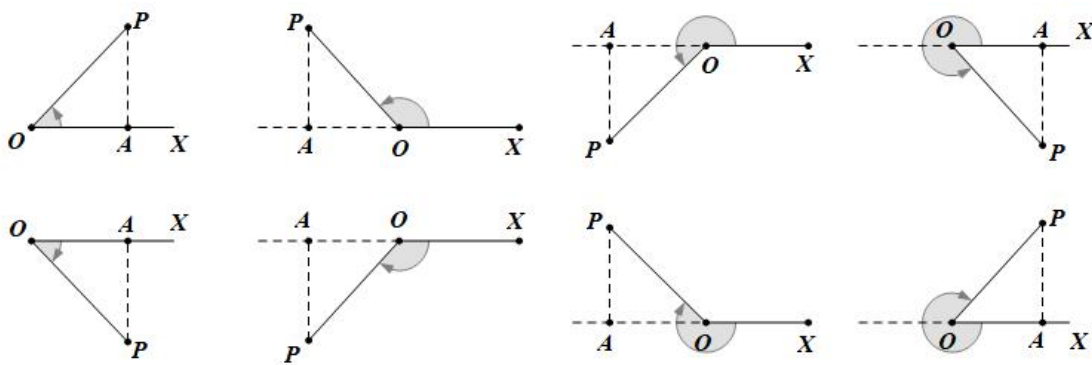


图 4 不同角度的终边位置示意图

设 $\angle XOP$ 是任意角， OX 是始边， OP 是终边， P 是终边上任意一点。作 $PA \perp OX$ ，记 $OP=r$ ，若以点 O 为原点、 OX 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则有向线段 OA 是点 P 的横坐标， AP 是它的纵坐标，于是， $\angle XOP$ 的三角函数定义为：

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

编者据此还给出了三角函数的几何意义，正弦和余弦可以称为投影因子，它们作为乘数的作用是将距离 OP 分别投影在 x 轴和 y 轴上，而正切和余切可以称为交换因子，它们的作用是将横坐标转化为纵坐标，反之亦然^[16]。

直角坐标系的引入为三角函数定义提供了更便捷、更易于理解的方式，后期教科书逐渐引入直角坐标系定义三角函数，完善了终边定义，例如，Holmes 在平面直角坐标系中直接给出三角函数终边定义的一般情形，且与极坐标相结合进行定义^[17]。设 θ 是任意角，将直角坐标系的 x 轴正半轴作为始边，同时也作为极坐标系的极线，如图 5 所示。

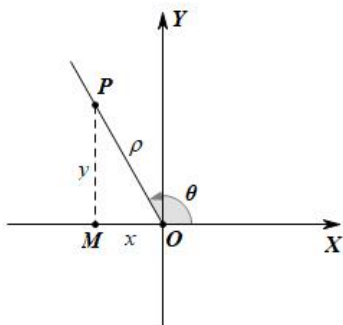


图 5 三角函数终边定义示意图

在角 θ 的终边上任取一点 P ，设它的直角坐标为 (x, y) ，极坐标为 (ρ, θ) ，则角 θ 的正弦、余弦、正切分别定义为：

$$\sin \theta = \frac{y}{\rho}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\rho}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

Brooks 用运动半径及其在水平和竖直方向上的投影三者中两两之间的比值来定义三角函数^[23]，这不过是终边定义的另一种表达方式而已。

2.2 单位圆定义

有 24 种教科书采用了单位圆定义，用单位圆中的三角函数线来表示三角函数。

Seaver 指出，早期作者将三角函数视为弧的函数，并将其定义为线段，但后世作者抛弃了弧和半径，倾向于采用更简单的定义，仅仅将三角函数视为比值。为方便起见，用与单位圆相关的线段来表达这些函数，这些线段的长度在数值上等于相应的三角比，在单位圆定义中，终边定义中的性质仍然得到保留^[18]。

在采用单位圆定义的教科书中，Wentworth 先通过单位圆中的线段长度得到三角函数的数值（正），再根据几何图形确定三角函数的符号^[19]；而 Wood、Nicholson 用单位圆中的线段长度定义三角函数后，直接定义了线段的符号^[20-21]。此外，Nicholson 还指出，单位圆定义中的三角函数值称为函数的线段值，区别于常规定义中的比值，前者的每个函数都表示一条线段，而后者的每个函数都表示两条线段的比值，因此前者更容易理解；Lyman & Goddard 进一步说明，单位圆中三角函数线的长度等于函数的数值，从这种意义上说，这些线段可以代表三角函数，此外还能看到它们的方向决定了函数的符号^[22]。

后期教科书引入有向线段概念，并利用有向线段来定义单位圆中的三角函数，便于直接得出三角函数的符号。Holmes 以平面直角坐标系的原点为圆心作单位圆，将角 θ 置于标准位置（即始边与 x 轴正方向重合，终边按逆时针方向放置）。令 A 、 P 、 B 分别是单位圆与 x 正半轴、角 θ 的终边、 y 轴正半轴的交点。作 MP 、 AT 垂直于 OX ， BS 垂直于 OY ，其中 T 是 AT 和 OP 的交点， S 是 BS 和 OP 的交点，如图 6 所示^[17]。

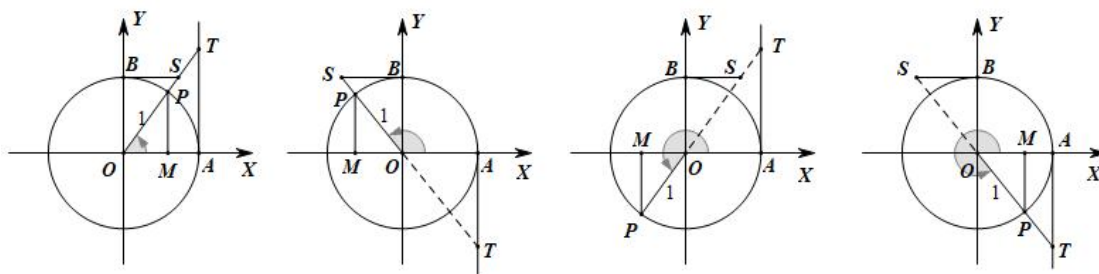


图 6 单位圆定义

图中角 θ 的终边 OP 的位置可能位于四个象限，三角函数的大小和方向都可以用有向线段来表示：

$$\sin \theta = MP, \quad \cos \theta = OM, \quad \tan \theta = AT.$$

2.3 三角函数定义的时间分布

以 25 年为一个时间段进行划分，两种定义的时间分布情况如图 7 所示。

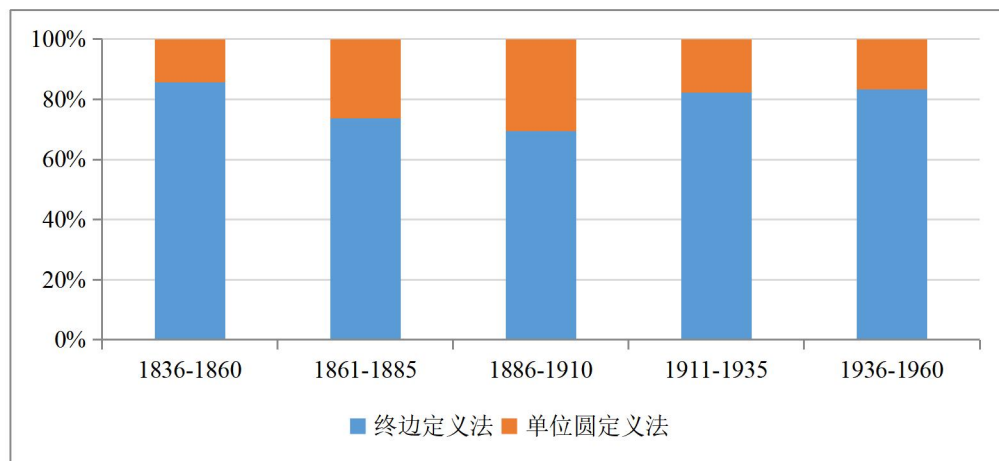


图 7 三角函数定义方法的时间分布

由图 7 可知，在各个时间段，终边定义都占据了统治地位，单位圆定义并未受到教科书编写者的青睐。

虽然多数教科书并未采用单位圆定义，但其中有 50 种（约占未采用单位圆定义的教科书的 73.5%）都引入了三角函数线的概念。Taylor 指出，用来表示一个角的三角比的线段称为该角的三角函数线；三角比是表示三角函数线的数，由三角函数线之间的关系，即可知三角比之间的关系，反之亦然^[30]。Rider & Davis 在引入三角函数线概念之后，讨论了正弦、余弦和正切函数随着角的变化而变化的情况，然后讨论了三角函数的图象。编者强调，虽然三角函数可以用线段表示，但三角函数本身并非线段，而是数值^[32]。

3 两种定义的比较

一些教科书对两种定义的优劣进行了讨论。Bohannon 指出，与终边定义相比，单位圆定义有两点不足^[24]：一是单位圆半径实际上是任取的，这就导致三角函数也是任取的；二是从单位圆到半径为 r ($r \neq 1$) 的圆的转换，不易被学生所接受。Conant 认为，虽然三角函数最初被用作直线，且使用单位圆定义有一定的优点，但就一般用途而言，终边比值定义比单位圆定义方便得多，因此现在几乎得到普遍应用^[28]。

也有教科书认为，单位圆定义更加方便，可归纳为以下三个方面。

其一，单位圆定义为三角函数的作图带来便利。Davis & Chambers 指出，单位圆可应用于绘制三角函数曲线^[25]。Clarke 认为，在圆中定义三角函数能更加直观地表示出圆弧^[27]。Wood 指出，同角三角函数的基本关系可直接由三角函数线来证明，其好处在于几何图形有助于记忆公式^[20]。

其二，单位圆定义更易于学生理解。Nicholson 提出，单位圆定义中的三角函数值被称为函数的线段值，其与常规定义中的比值是相等的，但前者仅由线段表示，而后者则是两条线段长度的比值，因此单位圆定义更容易理解^[21]。Durell 也认为，通常用单位圆定义比用比值定义更易于理解三角函数的性质^[29]。

其三，单位圆定义利于后续进一步深入学习三角函数的性质等内容。Wentworth & Smith 利用圆来判断三角函数值的正负，推导 $-\alpha$ 、 $\pi \pm \alpha$ 、 $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ 等的诱导公式，也可推导和角公式等三角函数关系式^[26]。Taylor 则进一步具体地阐述了三角函数线的优点^[30]：（1）可用来证明同角三角函数之间的关系；（2）可用来确定三角函数在四个象限的符号；（3）可用来追踪角度从

0° 增大到 360° 的过程中三角函数值的变化；(4) 若 A 为第一象限角，利用三角函数线，可以证明 $180^\circ \pm A$ 、 $-A$ 、 $90^\circ \pm A$ 各组诱导公式。

Phillips & Strong 则认为，同时引入两种定义不应使学生感到不知所措，在某些情况下用终边定义更方便，而在另一些情况下则用单位圆定义更方便，因此，熟悉两种定义都很重要^[31]。

4 若干启示

以上我们看到，由于终边定义具有一般性，因而在不同时间段都占据主导地位，而单位圆定义具有特殊性，因而并未受到教科书编写者的青睐，但三角函数线的运用却十分广泛。早期教科书在两种定义上的倾向性为今日教学提供了若干启示。

其一，设计留白活动，促进学生理解。在实际教学中，教师可以让学生对两种定义加以比较，总结出各自的优越性；通过让学生补白，培养他们的数学表达能力；也可以引导学生分别编制更适合采用终边定义以及更适合采用单位圆定义解决的三角函数求值问题，通过让学生补白，培养他们的创造性思维。

其二，立足定义主线，厘清知识网络。在不含单位圆定义的早期三角学教科书中，采用终边定义仍能推得同角三角函数关系、三角函数的单调性、三角函数的符号等性质，但其在三角函数的图象和三角恒等变换的几何证明上难以发挥作用。尽管现行各版本教科书大多采用终边定义，但在探究同角三角函数关系、三角函数的图象、三角函数的单调性以及三角函数的符号时，几乎都采用单位圆进行推导，因其直观性而更易于理解。因此，教师在进行“任意角三角函数”的教学设计时，需要关注三角函数章节的整体知识脉络，抓住“数”与“形”两条主线，厘清三角函数定义与相关三角知识的联系（图 8）。

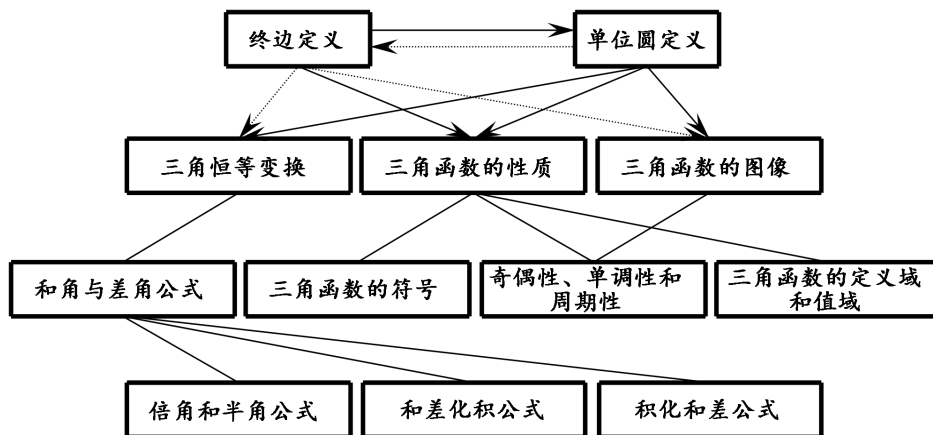


图 8 三角函数定义相关知识网络图

其三，关注优势互补，实现有机融合。已有研究表明，学生在解决实际问题时，更倾向于使用单位圆和三角函数线^[33]，也有教学案例表明，终边定义更能反映三角函数的“比值”本质，且更便于学生理解三角函数在非圆周模型中的应用^[34]。教师在教学中应该彰显两种定义各自的优势，做到“物尽其用”，实现教学效益的最优化。

参考文献

- [1] 吴童. “任意角三角函数”概念教学研究[D]. 山东: 曲阜师范大学, 2021.
- [2] 孙孜, 涂荣豹. “单位圆定义法” VS “终边坐标法” - 人教 A 版与苏教版教材比较一例[J]. 中学数学教学参考(上半月高中), 2009(6): 21-23.
- [3] 刘海亚. 也谈“单位圆定义法” VS “终边坐标法” [J]. 中学数学教学参考(上旬), 2009(9): 19-20.
- [4] 章建跃. 为什么用单位圆上点的坐标定义任意角的三角函数[J]. 数学通报, 2007, 46(1): 15-18.
- [5] 柏长胜. 也谈“单位圆定义法” VS “终边坐标法” [J]. 数学教学通讯, 2009(36): 36-37.
- [6] 徐亚婷. 基于数学史的“任意角的三角函数”概念教学设计研究[D]. 江苏: 江苏师范大学, 2018: 41.
- [7] 陈曦, 张海玲, 王尚志. HPM 视角下“任意角三角函数的概念”教学研究[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2014, 35(6): 23-27.

- [8] 王芝平, 连春兴. 构造函数模型, 刻画圆周运动——再议“三角函数”定义的教学[J]. 中小学数学(高中版), 2011(4): 4-7.
- [9] 何军, 徐香丽. “任意角的三角函数定义”教学片段三种设计之比较[J]. 中小学数学(高中版), 2009(Z1): 35-36.
- [10] 陶维林. “任意角的三角函数”教学设计与反思[J]. 中国数学教育(高中版), 2009(4): 6-10.
- [11] 陆贤彬, 朱占奎. 体认“单位化思想”, 明晰三角函数定义[J]. 中学数学教学参考, 2018(10): 11-14.
- [12] 王佩, 赵思林, 曾心鹍. “单位圆定义法”与“终边定义法”的有机融合——以3节“任意角的三角函数”课堂实录为例[J]. 中学教研(数学), 2018(6): 23-27.
- [13] 杨孝斌. 三角学的历史对任意角三角函数的教学启示[J]. 数学传播, 2012, 36(3): 86-96.
- [14] 董海涛. 再谈“单位圆定义法”与“终边定义法”[J]. 数学教学, 2010(6): 9-10, 13.
- [15] De Morgan, A. *Elements of Trigonometry & Trigonometry Analysis*[M]. London: Taylor & Walton, 1837: 15-18.
- [16] Oliver, J. E., Wait, L. A. & Jones, G. W. *A Treatise on Trigonometry*[M]. Ithaca: Finch & Apgar, 1881: 8, 20.
- [17] Holmes, C. T. *Trigonometry*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company: 1951: 10-11.
- [18] Seaver, E. P. *Elementary Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York & Chicago: Taintor Brothers & Co, 1889: 86-87.
- [19] Wentworth, G. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Co, 1882: 29-30.
- [20] Wood, D. V. *Trigonometry, Analytical, Plane & Spherical*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1885: 27-30.
- [21] Nicholson, J. W. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Co, 1898: 37-38.
- [22] Lyman, E. A. & Goddard, E. C. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1899: 22-23.
- [23] Brooks, E. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Philadelphia: Christopher Sower Company, 1891: 38.
- [24] Bohannan, R. D. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1904: 103-104.

- [25] Davis, H. A. & Chambers, L. H. *Brief Course in Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1933: 11-12.
- [26] Wentworth, G. A. & Smith, D. E. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1914: 82.
- [27] Clarke, J. B. *Manual of Trigonometry*[M]. Oakland: Pacific Press, 1888: 10-11.
- [28] Conant, L. L. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1909: 64-66.
- [29] Durell, F. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: Merrill, 1910: 76-79.
- [30] Taylor, J. M. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Co, 1904: 46-47.
- [31] Phillips, A. W. & Strong, W. M. *Elements of Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York: American Book Company, 1926: 4-7.
- [32] Rider, P. R. & Davis, A. *Plane Trigonometry*[M]. New York: D. van Nostrand Co, 1923: 208.
- [33] 王冬岩. 高中生对用单位圆定义三角函数的理解的调查[J]. 中学数学月刊, 2014(4): 32-34.
- [34] 连春兴, 郑新春. 让“单位圆定义法”发挥更大的教学效益——再谈三角函数定义起始课的教学[J]. 中小学数学(高中版), 2013(12): 43-46.

一类解三角形高考题的历史探源

何可凡, 石城

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

随着“一核”“四层”“四翼”评价体系的形成, 新高考试题着力将基础性、综合性、应用性、创新性融为一体, 稳中有新。增加中档试题的数量, 既关注学生的接受程度, 又关注高考的选拔性功能^[1]。作为普通高中数学课程中几何与代数主线的核心内容之一, 解三角形一直是高考试题中的重要内容。它往往作为中档题出现, 条件和目标指向有关三角形边与角的值、面积、周长以及形状判定等方面。虽然试题难度并不高, 但其不仅考查学生的必备知识和基本能力, 更对学生理解转化与化归、函数与方程、数形结合等数学思想, 提升数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养提出了更高的要求。

在新高考背景下, 解三角形问题的考查方式更加灵活, 更加趋于多样化。它不仅需要结合三角恒等变换进行边角互化, 还会结合不等式和函数知识求解最值和范围问题。虽然新高考试题每年都会变换视角提出“新问题”, 但万变不离其宗, 此类问题背后的命题趋势还是有迹可循。在诸多解三角形类试题中, 有这样一类值得研究的典型问题: 已知边、角之间的关系, 通过正弦定理实现边角转换、求解三角形、证明一些三角等式、求解边或角的范围等, 本文称之为“边角关系问题”。

追本溯源, 历史是最好的教科书, 它为我们寻找试题的演化规律, 把握命题方向提供了一个视角。鉴于此, 本文聚焦边角关系问题, 通过对高考题和美英早期三角学教科书中的有关习题进行比较, 尝试回答以下两个问题: 早期三角学教科书中的边角关系问题有着怎样的特点? 新高考下的边角关系问题与前者之间有着怎样的联系?

2 高考试题和早期教科书的选取

本文对 2018-2022 年的全国卷、新高考卷以及部分省市的自主命题卷中的高考试题进行研

究，总共收集了 67 个解三角形类试题（见表 1），并在其基础上探索边角关系问题。

表 1 高考试题的选取

年份	2022	2021	2020	2019	2018
数量	11	11	15	17	13

此外，本文选取 1810-1958 年间出版的 132 种美英早期三角学教科书作为研究对象。对于同一作者的不同版次的教科书，若无明显差别则视为同一版，若内容差别较大则视为不同的教科书，图 1 给出了 132 种教科书的出版时间分布情况。

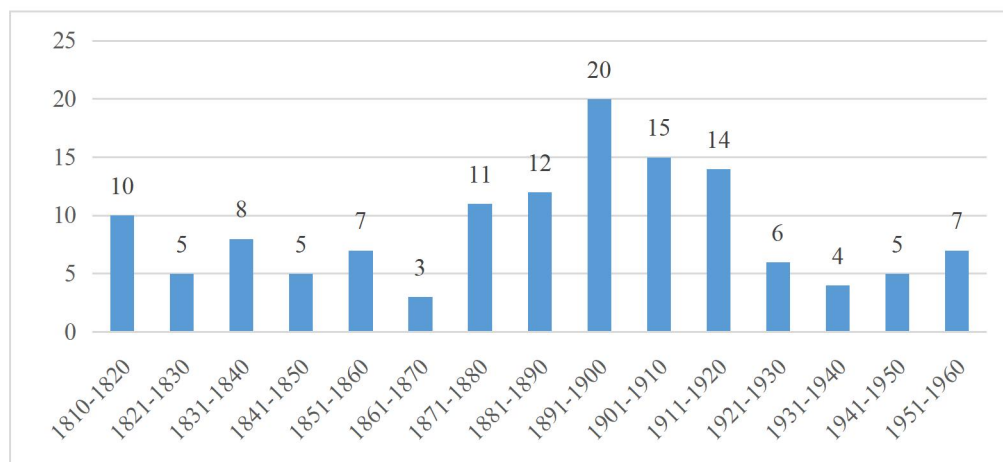


图 1 132 种三角学教科书的出版时间分布

3 早期教科书中的边角关系问题

在早期三角学教科书中，边角关系问题通常以等式的形式给出条件，条件中有时会加上边或角的具体大小。本文将边角关系问题分成如下 5 类。

- (1) 已知边与边的关系以及边或角的大小（简称 SS 问题）；
- (2) 已知角与角的关系以及边或角的大小（简称 AA 问题）；
- (3) 已知边与角的关系以及边或角的大小（简称 SA 问题）；
- (4) 已知边与边的关系、角与角的关系以及边或角的大小（简称 SS+AA 问题）；
- (5) 已知边与边的关系、边与角的关系以及边或角的大小（简称 SS+SA 问题）。

相比于高考题，早期三角学教科书中的边角关系问题在问题陈述、情境设置方面更加简洁，通常不会设置多个小问，也较能凸显问题的本质。

3.1 SS 问题

关于 SS 问题，早期三角学教科书主要涉及边之间的和差或比例关系，可分成四类，典型问题见表 2。

表 2 各种 SS 问题示例

类别	示例	已知条件
1	求一个周长为 25 英尺，内角分别为 35° 、 75° 和 70° 的三角形的最长边 ^[2] 。	三边之和；三个角
2	在 $\triangle ABC$ 中，已知 $B=48^\circ$ 、 $C=35^\circ$ 、 $b-c=10$ ，求 b 和 c （精确到小数点后两位）； 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $a+b=2100$ 、 $A=67^\circ30'$ 、 $B=52^\circ30'$ ，在三角函数表的允许范围内尽可能精确地解出 a 和 b ^[3] 。 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b:c=4:5$ 、 $a=1000$ 码、 $A=37^\circ19'$ ，求 b ^[4] 。	两边之差；两个角 两边之和；两个角 两边之比；第三边及其对角
3	在 $\triangle ABC$ 中，三边长 a 、 b 、 c 成等差数列，证明 B 不超过 60° ^[5] 。 在 $\triangle ABC$ 中，三边长 a 、 b 、 c 构成调和数列，证明 $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\sin A \sin C / (\cos A + \cos C)}$ ^[6] 。	三边关系 三边关系
4	在 $\triangle ABC$ 中，已知 $2a^2(b^2+c^2-a^2) = (c^2+a^2-b^2) \times (a^2+b^2-c^2)$ ，证明 $2 \cot B \cot C = 1$ ^[5] 。	三边关系

第一类问题是已知三角形的周长和角的大小求边长，利用正弦定理可求得三边之比，进而求得三边长。第二类问题是已知两边和差、比例关系以及角或第三边，求边长。如果所给角的条件多，通常可由正弦定理求出两边之比再解答。如果所给边的条件多，则可利用余弦定理求边。第三类问题是已知三边构成某种数列，求角的范围或证明其他结论。第四类问题是给定关于边或角的某个较为复杂的等式，证明另一个关于边或角的等式，通常需要转化成角或利用余弦定理加以解决。

3.2 AA 问题

AA 问题主要可分成三类，具体见表 3。

表 3 各种 AA 问题示例

类别	示例	已知条件
1	三角形的两条边分别是 8.53 和 7.41，这两条边的对角之差是 $18^{\circ}23'$ ，求解三角形 ^[7] 。	两角之差；两条边
2	三角形内角的余切成等差数列，由此证明边的平方和也成等差数列 ^[5] 。 如果三角形内角的半角的余切成等差数列，求出边之间的关系 ^[8] 。	三角之间的关系 三角之间的关系
3	已知 $2\cos A + \cos B + \cos C = 2$ ，证明 $2a = b + c$ ^[9] 。	三角之间的关系

第一类问题是已知两角之差和对边的大小，求角和其他边，可由正弦定理理解出两角正弦之间的比例关系，再由两角和差关系进行消元。第二类问题是已知角的三角函数构成某种数列，证明边的关系。第三类问题是已知角的三角函数满足某个等式，证明边的关系，通常可由角化边或利用内角和进行消元来求解。

3.3 SA 问题

常见的 SA 问题是已知边与角的三角函数满足某个较为复杂的等式，证明边或角的关系、求角的范围或判断三角形的形状等，典型问题见表 4。

表 4 SA 问题示例

示例	已知条件
已知 $a\cos B = b\cos A$ ，证明 $A = B$ ^[10] 。	两边及其对角之间的关系
已知 $(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B)$ ，证明 $\triangle ABC$ 为等腰或直角三角形 ^[5] 。	两边及其对角之间的关系
如果 $b\cos^2 \frac{C}{2} + c\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{3a}{2}$ ，那么 b 、 a 、 c 成等差数列 ^[11] 。	三边与两角之间的关系

解这类题目时，需要结合正余弦定理，实现边角之间的转化。可见，转化与化归思想在解三角形类问题中由来已久。大部分 SA 问题的解法无外乎由角化边或由边化角，而这又取决于

等式中的边和三角函数值哪一方是齐次的，或者哪一方更加复杂。

3.4 SS+AA 问题

SS+AA 问题可分成 3 类，典型问题见表 5。

表 5 各种 SS+AA 问题示例

类别	示例	已知条件
1	三角形的两条边的比是 13:3，这两条边的对角比为 2:1，求出这些角 ^[12] 。	两边之比；两角之比
2	三角形的两条边之差是 20，这两边的对角之差是 20° 。如果这两条边的夹角是 50° ，解出三角形 ^[13] 。 三角形的三边成等差数列，最大的角比最小的至少大 90° ，证明边成比例 $\sqrt{7}+1$ 、 $\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{7}-1$ ^[14] 。	两边之差；两角之差；一个角 三边关系；两角之差
3	在 $\triangle ABC$ 中，已知 $(a^3+b^3+c^3)/(a+b+c)=c^2$ ，证明 $C=60^\circ$ ，若再有 $\sin A \sin B = \sin^2 C$ ，证明该三角形为正三角形 ^[5] 。	三边关系；三角关系

第一类问题是已知边的比值以及边所对角的比值，求边或角，可由边之比得出角的正弦之比，消元求角后再求边（由一条边表示另外两边）。第二类问题是已知两边和差、两角和差或三边关系，求边或角。第三类问题是已知边之间或角之间的关系，证明某个结论。

3.5 五类边角关系问题的占比及其变化

在 132 种三角学教科书中，总共出现 178 个边角关系问题，具体分布情况如图 2 所示。100 多年间里，SS 问题始终占据主流地位；AA 问题的数量在 19 世纪末期有一段激增，随后慢慢减少；SA 问题则在 19 世纪末、20 世纪初有过一段时间的繁荣；SS+AA 问题随着时间推移先减后增，SS+SA 问题在早期教科书上并未出现。在这些问题中不乏具有代表性的、与新高考的边角关系问题具有密切关系的题目。

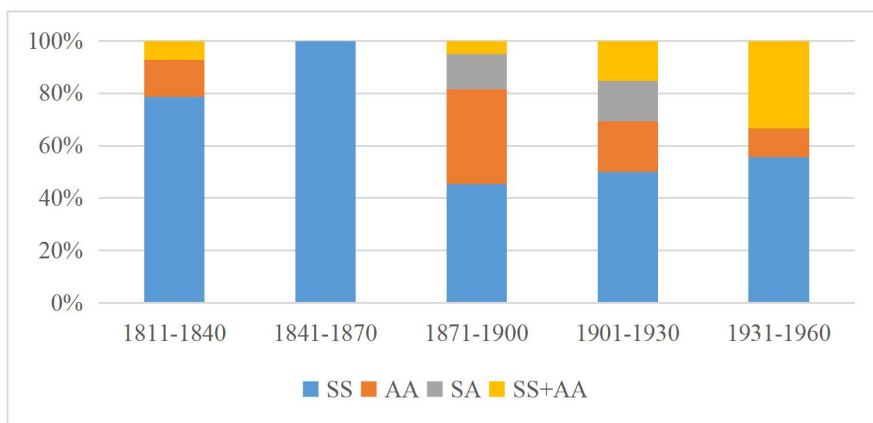


图 2 各类边角关系问题的占比变化

4 新高考中的边角关系问题

边角关系问题在新高考中也较多。在收集的近五年的 67 个解三角形类高考题中，有 34 个都可以归入这类问题，具体分布情况见表 6。与早期三角学教科书不同的是，高考试题中还出现了一定数量的 SS+SA 问题。

表 6 高考试题中的边角关系问题

类型	数量	题目
SS	12	2019 全国II卷（理）15 题，2019 北京卷（理）15 题，2019 北京卷（文）15 题； 2020 全国II卷（文）17 题，2020 北京卷 17 题； 2021 全国乙卷（理）15 题，2021 全国乙卷（文）15 题，2021 新高考I卷 19 题； 2022 全国甲卷（理）16 题，2022 全国甲卷（文）16 题，2022 浙江卷 18 题，2022 天津卷 16 题。
AA	6	2020 全国II卷（理）17 题； 2021 天津卷 16 题； 2022 全国乙卷（理）17 题，2022 全国乙卷（文）17 题，2022 新高考I卷 18 题，2022 新高考II卷 18 题。
SA	8	2018 天津卷（理）15 题，2018 天津卷（文）16 题； 2019 全国I卷（文）11 题，2019 全国II卷（文）15 题，2019 全国III卷（理）18 题，2019 全国III卷（文）18 题；

		2020 浙江卷 18 题；
		2021 北京卷 16 题。
SS+AA	4	2019 全国I卷（理）17 题；
		2020 全国I卷（文）18 题；
		2021 新高考II卷 18 题，2021 上海卷 18 题。
SS+SA	4	2018 全国I卷（文）16 题；
		2019 江苏卷 15 题，2019 天津卷（理）15 题，2019 天津卷（文）16 题。

在近几年高考试题中，常见的 SS 问题是已知两边和差或比例关系以及其他边或角的大小，求边以及角的三角函数值。例如，2022 天津卷的 16 题：在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a = \sqrt{6}$ ， $b = 2c$ ， $\cos A = -\frac{1}{4}$ ，（1）求 c 的值；（2）求 $\sin B$ 的值；（3）求 $\sin(2A - B)$ 的值。还有 2019 北京卷（理）的 15 题：在 $\triangle ABC$ 中， $a = 3$ ， $b - c = 2$ ， $\cos B = -\frac{1}{2}$ ，（1）求 b, c 的值；（2） $\sin(B - C)$ 的值。此类问题主要利用余弦定理来求解。

在 AA 问题上，高考题给出的已知条件是较为复杂的等式，需要进行边角转换。例如，2020 全国II卷（理）的 $\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \sin B \sin C$ 。还有通过三角函数的比例形式给出的，如 2021 天津卷的 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 1 : \sqrt{2}$ 。

SS+AA 问题通常是同时给出三角函数之间的复杂等式以及边的比例、和差关系。前者需要通过边角转换或消元处理，后者的处理方式则相对灵活，具体情况具体分析。

在 SA 和 SS+SA 问题中，条件的处理方式、转化与化归的思想和早期三角学教科书是共通的。例如，2018 天津卷（理）的 15 题 $b \sin A = a \cos\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$ ，2018 全国I卷（文）16 题 $b \sin C + c \sin B = 4a \sin B \sin C$ ，2019 全国II卷（文）15 题 $b \sin A + a \cos B = 0$ 等共 9 个条件均可通过由边化角来处理；2019 全国I卷（理）17 题 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$ ，2019 全国I卷（文）11 题 $a \sin A - b \sin B = 4c \sin C$ ，2020 全国II卷（理）17 题 $\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \sin B \sin C$ 等共 5 个条件则可通过由角化边来处理。

5 新高考试题探源

新高考的边角关系问题虽在形式上千变万化，但其内容和思想仍然可在历史长河中进行探源。对比早期教科书中的习题，我们不难发现很多高考题与之高度相似，或进行了等价替换，或将代数式稍作变形，调整系数，或将边和角的大小用边角关系式“隐藏”等。因此，从客观上说，高考题可以看作以这些题为题源，并采用了恰当的提问策略。根据 Silver 和汪晓勤等人的研究，对于“数学问题”这种含有条件和目标的数学史料，提出新问题的策略具体来说有以下七种^[15-17]：

复制式，即除语言翻译外不改编问题；

情境式，即补充情境或改编原有情境，但条件和目标（或结论）不变；

条件式，即改变给定情境的条件的同时目标（或结论）不变；

目标式，即改变给定情境的目标（或结论）的同时条件不变；

对称式，即互换给定情境的条件和目标（或结论）；

链接式，即将给定情境的目标（或结论）作为已知条件；

自由式，即同时改变情境、条件和目标（或结论）。

鉴于早期三角学教科书上的题目较为简洁，而高考解答题往往又包含多个小问，我们给出部分相似题目或其片段的古今对照，以及高考试题采用的提问策略（见表 7）。

表 7 部分相似题目古今对照

早期三角学教科书中的习题	高考题	提问策略
若 $b = 2a$ 、 $C = 60^\circ$ ，求 A 、 B 、 c ^[18] 。（三角形仅形状确定）	$\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c 。 若 $b = 6$ 、 $a = 2c$ 、 $B = \frac{\pi}{3}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。 (2019 全国 II 卷（理）第 15 题)	自由式
若 $a = 2b$ 、 $C = 120^\circ$ ，求 A 和 B 以及 $c : a$ ^[19] 。（三角形仅形状确定）	在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a = 3$ 、 $b = 2c$ 。若 $\angle A = \frac{2}{3}\pi$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。 (2021 上海卷第 18 题)	自由式

若 $\sin A : \sin B : \sin C = 13 : 14 : 15$, 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 条件式求 $\cos A$ [20]。

c , 已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 1 : \sqrt{2}$ 、 $b = \sqrt{2}$, 求 $\cos C$ 的值。

(2021 天津卷第 16 题)

一个三角形的三边满足关系 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 条件式 $a^2 - (b - c)^2 = bc$, 求角 A [21]。

设 $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$, 求 A 。

(2019 全国 I 卷 (理) 第 17 题)

若 $c^2 = a^2 + ab + b^2$, 求 $\cos C$, 并 $\triangle ABC$ 中, $\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C = \sin B \sin C$, 求自由式证明三角形面积等于 $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$ [22]。

A 。

(2020 全国 II 卷 (理) 第 17 题)

在任一三角形中, 已知记 $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 条件式 $\frac{a}{c} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(B - C)}$, 证明 a^2 、 b^2 、 c^2 成等差数列 [23]。

$\sin C \sin(A - B) = \sin B \sin(C - A)$, 证明 $2a^2 = b^2 + c^2$ 。

(2022 全国乙卷 (理) 第 17 题)

P 是三角形的边 AB 上的一点, 满足 $AP : PB = m : n$, 设 $\angle CPB = \theta$, 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, 自由式 $\angle ADB = 120^\circ$, $AD = 2$, $CD = 2BD$, 当 $\frac{AC}{AB}$ 取

则 $(m + n) \cot \theta = n \cot A - m \cot B$ [5]。

得最小值时, 求 BD 。

(2022 全国甲卷 (理) 第 16 题)

由表可见, 在 7 组古今对照的题目中, 4 组采用了自由式, 3 组采用了条件式, 没有试题采用其他形式的提问策略。在采用了自由式的题目中, 有 2 组通过增加条件确定了三角形的大小, 同时将目标变为三角形面积, 可能是为了增加对三角形面积公式的考察。在采用了条件式的题目中, 有 2 组是在进行边角转换的同时对等式作了简单的变形, 相当于给原题“蒙上了一层面纱”, 在条件的改动方面较小。

对于最后一组古今对照, 我们有必要作详细说明。如图 3, 高考题的常规做法是用余弦定

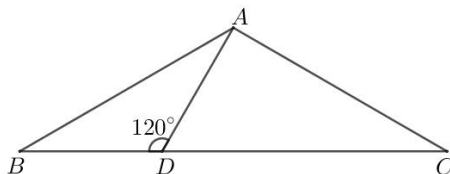


图 3 2022 全国甲卷 (理) 16 题

理将 $\frac{AC^2}{AB^2}$ 转化成 CD 或者 BD 的函数，再求最小值，走的是“边”的路线，分式的加工略微繁琐，最后可用基本不等式求解。然而，若利用早期教科书中习题的结论，可以选择走“角”的做法，更加简洁。由 CD 和 BD 的比例关系可知， $\cot C - 2\cot B = 3\cot \angle ADB = -\sqrt{3}$ 。移项平方后可得

$$\frac{4\cos^2 B}{\sin^2 B} - \frac{4\sqrt{3}\cos B}{\sin B} + 3 = \frac{\cos^2 C}{\sin^2 C} = \frac{1}{\sin^2 C} - 1。$$

再由正弦定理可得

$$\begin{aligned}\frac{AC^2}{AB^2} &= \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} = \sin^2 B \left(4 + \frac{4\cos^2 B}{\sin^2 B} - \frac{4\sqrt{3}\cos B}{\sin B} \right) \\ &= 4\sin^2 B + 4\cos^2 B - 4\sqrt{3}\sin B \cos B = 4 - 2\sqrt{3}\sin 2B \geq 4 - 2\sqrt{3},\end{aligned}$$

当且仅当 $B = 45^\circ$ 时取等号。

相比于高考题，早期三角学教科书的题目必然是更加简单的，但同时也可以体现出更加本质化的内容。处理三角问题要善于发现三角形图形和三角形基本量之间的关系，体会图形与图形、图形和数量的关系，探索图形之间的规律，借助图形探索解决问题的途径。同时，对于三角形的边角关系要敏感，把握住等式条件中边或角关系的齐次性，从而有针对性地进行加工或转化，这是古今共有的解题思路。

6 结论与启示

美国著名教育家波利亚（G. Polya, 1887-1985）曾说过：“掌握数学就意味着要善于解题。”^[24]美英早期三角学教科书为我们关于新高考题的历史探源提供了丰富的素材。通过与高考题的比较研究，我们发现新高考中的很多解三角形试题能在早期教科书中找到原型，这为今天中学数学教学提供了一些启示。

其一，关注问题之源。新高考试题深受一线教师的关注，但多数教师只关注解题的技巧和方法的多样性。高考题的研究不仅仅需要考虑问题的求解，还要关注问题本身的来源。虽然试题千变万化，但从源头来看，其体现出的通性通法古往今来是始终如一的。以边角关系类问题为例，古今问题都以正余弦定理为工具，紧紧围绕边与角的互化。因而在解题教学中，不仅需

要“一题多解”，更需要“多题一解”。考量问题背后的历史演变规律，才能发现问题不变的本质，从而将问题归类。

其二，重视问题提出。数学教学离不开解题，但在教学中教师常常关注现成的、形式化的问题的求解，而对问题提出较少留心。解题容易命题难，这源于没有重视潜藏在无穷无尽的问题之下的有限的提问策略。边角关系问题众多，为我们的问题改编创造了良好条件。解题教学中，教师可以为学生提供历史上的问题，让他们运用有关策略编制新问题。这样的课堂“留白”，既激励学生课下自主探究、独立思考，也弥补课堂时间有限的问题，极大地扩展了题目的多样性。

其三，增加习题研究。目前早期教科书相关研究中很少关注习题。一方面是由于早期教科书的习题研究难度较大，另一方面，尽管解题研究有丰富的资料积累，但公认具有中国特色的数学解题理论尚待创建^[25]，更少有从历史角度考察试题的演变规律。本文的研究表明，早期教科书中的习题同样具有研究价值，且对于今日解题教学、问题编制都有重要参考价值。从历史视角考察问题分类和问题变式，有助于教师在习题教学中对问题进行整合重组、分类呈现、横纵向比对，让“数学解题”作为载体，促进数学核心素养发展。

参考文献

- [1] 教育部教育考试院. 创设情境, 发挥育人作用, 深化基础, 考查核心素养——2022 年高考数学全国卷试题评析[J]. 中国考试, 2022(7): 14-19.
- [2] Hearley, M. J. G. *Modern Trigonometry*[M]. New York: The Ronald Press Company, 1942: 123.
- [3] Davison, C. *Plane Trigonometry for Secondary Schools*[M]. Cambridge: The University Press, 1919: 187.
- [4] Newcomb, S. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Holt, H. and Company, 1883: 220.
- [5] Davison, C. *Plane Trigonometry for Secondary Schools*[M]. Cambridge: The University Press, 1919: 172-174.
- [6] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892: 215.

- [7] Passano, L. M. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan company, 1918: 81.
- [8] Pendlebury, C. *Elementary Trigonometry*[M]. London: George Bell, 1895: 298.
- [9] Hobson, E. W. & Jessop, C. M. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1896: 152.
- [10] Harding, A. M. & Turner, J. S. *Plane Trigonometry*[M]. London: G. P. Putnam's sons, 1915: 62.
- [11] Newcomb, S. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Holt, H. and Company, 1883: 205.
- [12] Holmes, C. T. *Trigonometry*[M]. New York: The McGraw-Hill Book Company, 1951: 97.
- [13] Wylie, C. R. *Plane Trigonometry*[M]. New York: The McGraw-Hill Book Company, 1955: 207.
- [14] Loney, S. L. *Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University press, 1893: 187.
- [15] Silver, E. A. et al. Posing mathematical problems: an exploratory study[J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1996, 27(3): 293-309.
- [16] Singer, F. M. et al. Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions[J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2013, 83(1): 1-7.
- [17] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. *数学通报*, 2020, 59(5): 9-15.
- [18] Todhunter, I. *Trigonometry for Beginners*[M]. London, 1866: 74.
- [19] Loney, S. L. *Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University press, 1893: 199.
- [20] Pendlebury, C. *Elementary Trigonometry*[M]. London: George Bell, 1895: 218.
- [21] Wylie, C. R. *Plane Trigonometry*[M]. New York: The McGraw-Hill Book Company, 1955: 198.
- [22] Birchard, I. J. *Plane Trigonometry*[M]. Toronto: Briggs, W. 1891: 93.
- [23] Morrison, J. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*[M]. Toronto: Canada Pub. Co., 1880: 150.
- [24] 乔治·波利亚. 怎样解题[M]. 涂泓, 冯承天, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2011: 15.
- [25] 罗增儒, 罗新兵. 作为数学教育任务的数学解题[J]. *数学教育学报*, 2005, 14(1): 12-15.

教学实践

HPM 视角下的对数定义同课异构课例分析

陈雨晴, 刘思璐

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

“对数的定义”是沪教版高中数学教科书必修一第三章第二节的内容。在本节课之前, 学生已经学习了乘方运算, 经历了“已知底数和指数而求幂”的过程, 而“已知底数和幂而求指数”实则为三个变量“知二求一”的情形, 当考虑方程的解的表示方法时, 即在 $a^x = N$ 中, 若已知 a 和 N , x 应该如何表示, 此时对数符号“ $\log$ ”便呼之欲出。因此, 现有的教学设计大多以运算过程和方程求解这两条线索串联课堂^[1], 前者能够深化学生对“对数式和指数式等价关系”的认识, 后者则能够帮助学生理解“ $\log_a N$ ”的含义。在沪教版教科书中, 对数的内容在指数之后, “通过指数认识对数”看似符合知识理解的逻辑序和学生认知的心理序, 却难以解释对数的“对”是何含义、为何学习对数等问题。究其原因, 今天的对数源于欧拉的幂指数定义^[2], 与对数诞生之初的定义迥然不同, 而学生在学习对数时无法感受知识产生的动因, 更遑论领略数学家们创造对数的艰辛和背后的人文精神。

德国著名数学家 F·克莱因 (F. Klein, 1849-1925) 曾言, “如果希望进一步全面了解对数的理论, 最好是大体上遵循它的历史发展。”^[3]来自 HPM 工作室的教师 A 和 B 从 HPM 的视角, 分别设计和实施了对数定义的教学。由于班级学情、教师教学风格、教学目标等差异, 两位教师选择了不同的史料和运用方式。本文拟从宏观和微观两个层面对两节课进行分析, 试图揭示出各自的特点, 为 HPM 课例研究和评价提供参考。

2 宏观比较

2.1 教学目标

A 和 B 设定的教学目标有同有异，其中相同的目标有：（1）通过数学史料了解对数概念产生的背景，理解对数的概念；（2）掌握指数与对数的关系，通过指数式和对数式的互化，理解对数中底数和真数的含义，提升数学运算能力；（3）经历对数概念的形成过程，发展数学抽象的核心素养。不同之处在于，A 强调通过数学史料让学生理解由指数引入对数概念的合理性，并注重让学生体会从特殊到一般的思想方法；B 则强调通过数学史料让学生体会对数概念学习的必要性，并从中感受到数学所蕴含的人文精神。

2.2 教学过程

两位教师的教学过程可分为新知引入、概念形成、巩固应用和小结提升四个环节，具体内容详见表 1。

表 1 两位教师的教学环节对比

教学环节	教师 A	教师 B
新知引入	播放微视频“简化运算思想的形成” “对数表的诞生”，让学生分享观看心得，引出本节课的重点内容：探究欧拉的对数定义。	回顾数学基本运算的三个等级，引导学生思考：乘方运算中，已知底数和幂，如何表示指数？
概念形成	围绕欧拉对数定义中的底数、指数和幂设置问题串，结合《无穷分析引论》关于对数的描述，分析教科书中对数定义的合理性。介绍对数的词源、读法和写法、对数与指数的关系，引导学生发现对数恒等式。	按照对数的历史发展脉络，介绍斯蒂菲尔构建的双数列，引导学生发现两者之间的对应关系。介绍纳皮尔构造的对数几何模型，让学生感受其简化运算的作用。设置简化不同底数幂的运算问题，引发学生思考。以复利问题引出欧拉的对数定义，据此强调对数的表示和读法，并介绍常用对数和自然对数，带领学生感受对数将运算降级的优越性。

	(1) 给定底数、真数, 求对数值 (A 还介绍了常用对数和自然对数);	
巩固	(2) 给定底数、对数, 求真数值。	
应用	以复利问题让学生熟悉计算器的使用 和在实际问题中近似值的取法。	播放讲述“对数与航海”的微视频, 介绍对数在化学、物理等领域的用途。
小结	学生从知识和情感两个层面总结本节课的内容, 教师播放视频介绍“标准对数视力表”, 帮助学生了解对数在实际生活的广泛应用。	引导学生从知识和情感两个层面回顾本节课内容, 最后进行思想方法的升华, 让学生感受归纳、类比和对应在数学研究中的作用。

由表 1 可知, 两位教师都将对数的历史融入教学。A 将教学重点定位于探究欧拉的对数定义, B 则是融对数的历史脉络于课堂的各个环节, 带领学生经历对数的形成过程。对于课堂引入, A 通过课前阅读材料和微视频让学生了解“对数的前世”, 进而引出本节课探究的主题“欧拉的对数定义”, 即“对数的今生”; B 则从数学运算出发, 引导学生猜想“新运算”。在概念形成环节, A 围绕欧拉的对数定义中底数、指数和幂设置问题串, 引导学生探究欧拉的对数定义的合理性; B 聚焦对数产生的动因——简化运算, 让学生通过历史上的运算问题感受对数将运算降级的优越性。之后, 两位教师都通过微视频展示对数在实际生活中的广泛应用。最后, 两位教师均引导学生从知识和情感两个层面总结本节课的内容。

3 微观比较

参照 HPM 课堂教学评价框架^[4], 以下从内容呈现、认知需求、学习机会、学生表现和评价运用五个维度对两节课进行微观比较。

3.1 内容呈现

内容呈现是指数学史料的准确、连贯与合理性程度。数学史料应该满足科学性、可学性、有效性和人文性, 有助于学生掌握所学主题的知识和培养数学核心素养, 并感受到数学蕴含的人文精神^[4-5]。两位教师所用的数学史料由高校专家和研究生提供, 具体内容如表 2 所示。

表 2 两位教师在各教学环节所用的数学史料

教学环节	教师 A	教师 B
新知引入	• 阿基米德构造的双数列； • 斯蒂菲尔在《整数算术》中提出的双数列； • 纳皮尔构造的双数列； • 布里格斯制作常用对数表的过程； • 《数理精蕴》中的对数定义。	/
概念形成	• 欧拉的《无穷分析引论》中对数的定义和关于底数的论述； • 对数拉丁文“logarithmus”的词源。	• 斯蒂菲尔在《整数算术》中构造的双数列表； • 纳皮尔构造的对数的几何模型和双数列表； • 《无穷分析引论》中的对数定义。
巩固应用	/	• 对数在航海、天文的应用。
小结提升	/	/

两位教师使用的数学史素材均能找到文献出处，且体现了对数在不同发展阶段的代表观点，因此史料具有科学性。

在教学过程中，A 以 HPM 微视频呈现了对数产生的背景。在介绍《数理精蕴》中对数的含义之后^[6]，A 引出本节课的重点探究内容：欧拉的对数定义^[7]，并由此说明教材中对数定义的合理性，引导学生辩证地看待教材中对数的定义，激发学生探究对数的好奇心。而 B 则是以斯蒂菲尔构造的双数列为起点，串联了纳皮尔构造的对数的几何模型和双数列表、欧拉的对数定义等内容，旨在带领学生经历对数发展的关键阶段。通过 B 的引导，学生在这个过程中发现斯蒂菲尔双数列的局限性和纳皮尔双数列的规律，感受到利用双数列简化大数运算的过程。在两节课中，教师对所选的数学史料进行了解释，学生在理解上没有困难。此外，两位教师选择的历史素材能够激发学生的理性精神和探究精神，有利于实现“了解对数概念产生的背景，理解对数的概念”这一教学目标。因此，两节课所用的数学史料具有可学性和有效性。

然而，在数学史料的人文性方面，A 并未让学生真正参与到数学史上的大数计算问题，因此，学生对对数产生的动因感受不深。若 A 能够进一步说明对数发展的坎坷历程，并让学生亲身参与大数计算问题，引导学生感悟对数的重要作用以及数学家们制作对数表的艰难，则数

学史料的人文性将进一步凸显。B 选择的数学史料展现了对数产生的动因以及对数与航海、天文的联系等，学生从中体会到了纳皮尔等数学家的创新精神和勇担重任的责任感，因此，数学史料展现了人文性。

3.2 认知需求

认知需求是指数学史的应用对学生理解和掌握数学概念的支持程度^[4]。教师应合理运用数学史料从而为学生的认知提供支架、设立挑战。

两位教师拥有不同的教学思路，具体如图 1 所示。

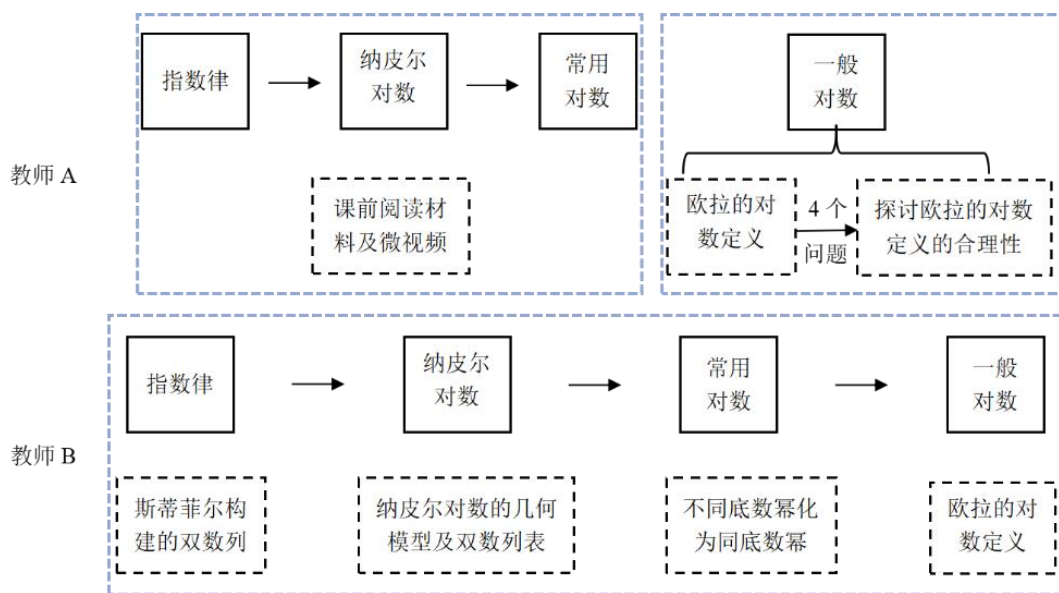


图 1 两位教师的对数概念教学思路对比

整体上看，A 的重点是挖掘教材中基于欧拉定义的对数的合理性，因此，A 在探究欧拉的对数定义中设置问题串：

- 以 a 为底数时，幂 a^z 是否对所有的 z 都有意义？
- y 的取值有何特点？
- 当 $a > 0$ 时，正数 y 对应的指数是否一定存在？
- 在 $a > 0, a \neq 1$ 且 $y > 0$ 时，方程 $a^z = y$ 的解是否唯一？

这是基于欧拉在《无穷分析引论》中关于底数的论述进行的问题改编，属于顺应式。

B 则主要采用了重构式，通过“利用斯蒂菲尔双数列简化运算”“发现纳皮尔对数的几何

模型与双数列的规律”“化不同底数幂为同底数幂”“如何表示对数”等探究活动，让学生经历对数的发现过程。同时，B 采用了顺应式的方式设置探究活动“如何简化运算不同底数的幂”，以引导学生进行问题的转化。

此外，两位教师在教学实施中还采用了附加式和复制式。A 展示了《数理精蕴》中的“对数比例”书影；B 介绍了对数符号“log”的来源等，属于附加式。A 在阅读材料中介绍了对数产生的早期历史；B 呈现了斯蒂菲尔构造的以 2 为底的双数列表，属于复制式。两位教师都通过历史有机联系了教学的各个环节，并合理地运用数学史素材以促进学生对对数概念的理解。

3.3 学习机会

学习机会是指基于数学史的数学活动对全体学生获得学习机会的支持程度^[4]。教师创设的数学活动应该吸引学生，并支持所有的学生参与课堂活动。HPM 视角下的学习机会可以从课堂提问、组织讨论、课堂练习和资料学习四个维度进行评价^[5]。

在课堂提问上，A 以欧拉的对数定义为基础，设计了一系列问题，给予学生深入分析教科书中对数定义合理性的机会，但由于采用线上教学，A 无法关照班级所有学生的想法，只让少数几名同学分享了问题的解答过程。B 设置了“利用计算器发现纳皮尔双数列表规律”“将不同底数幂转化为同底数幂”等活动，为全体学生提供了研究对数的机会，促进了学生的思考。在组织讨论上，由于网络限制等因素，A 未组织学生进行讨论交流。总体而言，课堂以教师讲授、师问生答为主，生生之间的互动较为缺乏。B 则在计算 $2^{35} \times 7^{47}$ 时，让学生以小组形式讨论如何将不同底数幂化为同底数幂。在课堂练习上，A 并未利用数学史素材设置相关习题，B 则利用斯蒂菲尔双数列、纳皮尔双数列等素材让学生亲历对数简化运算的过程。在资料学习上，两位教师均利用 HPM 微视频呈现了对数的发展过程，A 还为学生准备了课前阅读材料，这都为学生的自主学习提供了丰富的素材。

A 聚焦欧拉的对数定义，在课堂中多以顺应式、附加式的方式呈现史料，总体来说，A 在课堂中给学生的留白空间较少，没有为学生提供足够的思维空间和探究机会，学生缺少“补白”的学习机会^[8]。B 则以重构对数发展的历史为主，辅以其他三种数学史的运用方式，在“简化不同底数幂的运算”等课堂关键活动中适当留白，为全体学生提供了充分思考、交流、创造的机会，学生在小组探究和全班讨论活动中可以自由表达观点。

3.4 学生表现

学生表现是指在基于数学史的数学活动中，学生在任务完成、想法及其讨论上的贡献程度^[4]。学生是课堂的主体，教师应关注学生的想法与创造，并为学生提供表达观点、分享探究成果的机会，师生之间、生生之间倾听彼此，并从他人的想法中获得启迪。

教师 A 的教学片段

师：当 $a > 0$ 时，正数 y 对应的指数是否一定存在？

生 1：……这个问题等价于当 $a > 0$ 时，正数 y 对应的指数是不是有意义。

师：对的，问题转化为 $a^z = y$ 是否有实数解，那有吗？

生 1：不一定，当 $a = 1$ 时， $a^z = 1$ ，若 $y \neq 1$ ，则无实数解。

师：那 $y = 1$ 呢？

生 1：原式有无穷多解。

师：无穷多解意味着很难去描述 z 的取值，为了避免这种情况，给 a 加上限制条件。

生 1： $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。

师：在 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，且 $y > 0$ 时，方程 $a^z = y$ 的解唯一吗？如何证明？

生 2：唯一的。当 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，且 $y > 0$ ，方程的解不唯一，用反证法。设方程有两个不同的实数解 z_1 和 z_2 ，可以列出一个等式组：
$$\begin{cases} a^{z_1} = y \\ a^{z_2} = y \end{cases}$$
，则有 $a^{z_1} = a^{z_2}$ ，就是 $a^{z_1 - z_2} = 1$ 。

师：那既然 z_1 和 z_2 不同，是否可以假设一个大小关系？

生：可以假设 $z_1 > z_2$ ，就有 $z_1 - z_2 > 0$ 。 $a^{z_1 - z_2} = 1$ 不是恒成立的，只有当 $a = 1$ 时才成立……可以将 a 的取值分成两段（ $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ ）……

【评析】这节课的重点是探究欧拉的对数定义的合理性，其关键在于确定 $a > 0$ 时，正数 y 对应的指数的存在性和唯一性。学生 1 巧妙地将存在性问题转化为方程 $a^z = y$ 是否有实数解，并指出当 $a = 1$ 时， a^z 恒为 1，这为解释教科书定义中的条件 $a \neq 1$ 埋下伏笔。学生 2 想到利用反证法证明唯一性，并指出可以利用幂的基本不等式，将 a 分为大于 0 和小于 0 两个部分进行讨论。A 任教的班级具有良好的学习基础，然而 A 未给学生提供充分的表达时间，学生并未自主

完成存在性和唯一性的证明。此外，受线上教学的限制，A 难以兼顾班上其他学生的想法。在本节课中，教师在一定程度上束缚了学生的表现，这也是课堂的遗憾之处。

教师 B 的教学片段

师：大家能不能仿照前面讲的数学家的思想，简化 $2^{35} \times 7^{47}$ 的运算。

生 1：这是不同底数幂的相乘，前面的都是同底数的幂，可以将不同底数的化为同底数。

师：非常好，还有别的同学有想法吗？请大家相互交流一下。

学生在黑板上展示了不同做法：

$$\text{方法一： } 7^{47} = 2^m, 2^{35} \times 7^{47} = 2^{35+m};$$

$$\text{方法二： } 2^{35} = 7^n, 2^{35} \times 7^{47} = 7^{47+n};$$

$$\text{方法三： } 2^{35} = 10^x, 7^{47} = 10^y, 2^{35} \times 7^{47} = 10^{x+y};$$

$$\text{方法四： } 2^{35} = 14^x, 7^{47} = 14^y, 2^{35} \times 7^{47} = 14^{x+y};$$

$$\text{方法五： } 2^{35} \times 7^{47} = \left(\frac{14}{7}\right)^{35} \times \left(\frac{14}{2}\right)^{47}。$$

师：同学们很棒，方法一和方法二都只转化了 2^{35} 或 7^{47} 中的一个底数，一个是将 7^{47} 化为 2^m ，另一个是将 2^{35} 化为 7^n ，方法三和方法四都借助了第三个量作为底数，无论是选 10 还是选 14，只要能够将 x 和 y 求出来，那 $2^{35} \times 7^{47}$ 也就算出来了。方法五并没有将两个数化为同底数幂，但是这位同学也很棒，她想到了变形 2 和 7，我们在解决问题时也可以考虑将困难的问题做一些变化。化为同底数幂之后，我们可以看到原式由乘法转化为加法，同样地， $2^{35} \div 7^{47}$ 可以转化为减法。

【评析】学生在经历利用双数列简化同底数幂运算的过程后，教师设置挑战“如何将不同底数幂化为同底数幂”，并给予学生充分的交流时间，学生的方法也精彩纷呈。在解决任务时，学生基于已有经验对知识进行拓展和延伸，这个过程体现了其思维的创造性。此外，有学生将 2^{35} 和 7^{47} 都化为以 10 为底数的幂，这其实与历史上布里格斯提出的常用对数的思想契合，此法恰好可与后面介绍常用对数相关联。

3.5 评价运用

评价运用是指在基于数学史的数学活动中，教师揭示学生思维、利用学生想法或处理学生错误的态度^[4]。师生之间的良性互动可以为课堂创造思维碰撞的火花，教师对学生的表达给予充分的回应与评价，有助于对后续教学产生积极的影响。

A 在即时回应时采用了古今联系的评价策略。例如，在学生讨论底数范围、证明 $a^x = y$ 的解的存在性和唯一性之后，A 感叹道：“我觉得你们非常棒，你们具备了与大数学家欧拉一样的数学分析能力，对底数的讨论、对解的存在性和唯一性的讨论做得非常棒！”同时，A 呈现了欧拉在《无穷分析引论》中关于底数的论述。B 并未采用古今联系策略，错过了部分揭示对数产生的动因的机会，如，在学生利用计算器发现纳皮尔双数列的规律后，B 仅提到：“纳皮尔这两列数是怎样想出来的呢？同学们能不能想到？”若 B 进一步介绍纳皮尔以 $1-10^{-7}$ 作为公比的理由，则学生将会更深入地理解纳皮尔对数产生的动因。此外，在巩固应用环节，B 并未对学生的错误进行即时回应。

两节课的评价运用环节均较为薄弱，学生是课堂的主体，有效的形成性评价有助于促进学生的思维发展，提升其课堂表现水平。因此，在 HPM 教学中，教师需要关注学生评价，从而使数学史内容的教育价值得到进一步发挥。

4 结语

综上所述，A 的教学重点是围绕欧拉的对数定义探究教材定义的合理性，B 的教学重点是带领学生经历对数产生的四个阶段。在内容呈现上，两节课的数学史素材均符合科学性、可学性和有效性，但 A 选取的史料人文性较弱，而 B 则很好地利用数学史料让学生体会大数运算的困难以及数学家探索对数的求真和创造精神。在认知需求上，A 以顺应式为主，辅以附加式和复制式，通过数学史帮助学生理解对数的定义；B 以重构式为主，辅以附加式、复制式和顺应式，通过数学史带领学生探究对数的发展从而理解对数的定义。在学习机会上，A 限于线上教学，仅让少数学生分享其想法，师生互动较少，生生互动难以实现，B 则在线下教学过程中积极与学生互动，通过小组讨论和全班讨论为绝大多数学生提供了分享机会。在学生表现上，A 没有重构式地运用史料，课堂留白较少，学生也未自主完成关键证明；B 则重构对数的关键

历史，在探究任务中为学生留下充分的思考和交流时间，学生因此展现了多种转化方法，并自主发现了常用对数。在评价运用上，A 采用了古今联系的策略，学生从教师的话语中受到了鼓励，而 B 并未采用古今联系等有效的评价策略。

通过对两节课进行分析与比较，可以得到如下教学启示。

其一，建立古今联系，呈现来龙去脉。对数概念已今非昔比，学生从教科书的定义中难以窥见对数产生的动因和概念的本质。在概念教学中，教师可以以史为鉴，重构概念发展的关键历史阶段，这能够让学生理解知识产生的来龙去脉，从而更深入地理解其内涵。两位教师运用数学史的主要方式不同，其达成的教学目标也有差异。不同的运用方式还导致了不同的学习机会和学生表现。根据历史相似性，学生的认知障碍往往也是古人的认知障碍，数学史能在古今之间建立沟通的桥梁，使学生亲历知识的发展过程，由此学生可形成对知识更完整的认知。

其二，运用课堂留白，培养创新意识。当今时代需要创新型人才，数学教学是培养学生创新意识的重要途径，教师在课堂中应该为学生提供“创造”的机会。重构式的 HPM 教学蕴含了发现之白和论证之白，教师可以通过探究活动和思维留白，让学生经历概念发现的过程，从而更好地满足学生的认知需求。A 虽然借鉴历史而设置问题串，但是其并未采用重构式，也未能向学生提供充分的探究和创造机会，学生没有经历概念的发现之白和论证之白；B 重构概念的发展过程，并创设探究任务“将不同底数幂化为同底数幂”，为学生留下了解决新问题的思维空间。“满堂灌”的课堂生态难以让学生自主探究、自主发现，而教师在重构式课堂中留白，将有助于学生发散思维，勇于创造，从而促成更好的学生表现。

其三，凸显人文精神，达成德育之效。对数蕴含深厚的教育价值，教师应该借助史料，挖掘对数的人文元素。B 通过数学史让学生体会到了数学家的理性精神和创新意识，学生也从古人的思想中获得启迪，在探究任务中表现出色。若 B 能够采用古今联系等评价策略，则对数的德育价值将进一步彰显。数学史融入数学教学，理应为学生营造探究之乐、展示文化之魅，从而达成德育之效。数学知识都是前人创造的，运用数学史应该考虑知识背后“人”的元素，突出其独特的教育意义，融德育于课堂无声。

参考文献

- [1] 周毅鸿, 周建玲, 洪竞雄. 基于核心素养的教学设计——以“对数的概念”为例[J]. 中学数学教学参考, 2022(16): 12-14.
- [2] 汪晓勤. 对数的历史及其德育价值——兼论对数教学设计[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2021(3): 67-72.
- [3] 菲利克斯·克莱因. 高观点下的初等数学（第一卷）[M]. 舒湘芹, 陈义章, 杨钦樑, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2008: 165.
- [4] 汪晓勤. 关于 HPM 课堂教学评价的案例分析[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 1-6.
- [5] 刘思璐. HPM 课堂教学评价框架构建及其应用[D]. 上海: 华东师范大学, 2021: 40.
- [6] （清）何国宗, （清）梅穀成, 汇编. 御制数理精蕴下编（卷 38）[M]. 江宁藩署, 1882: 1.
- [7] 欧拉. 无穷分析引论[M]. 张延伦, 译. 太原: 山西教育出版社, 1997: 83-86.
- [8] 王华, 汪晓勤. 中小学留白创造式教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023: 25.

他山之石

高中数学教师在课例研究中信念和知识的改变

陈雨晴

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

本文探讨了在课例研究中, 设计和执行具有挑战性的任务如何影响越南高中数学教师的知识和信念。在国际上, 较少有研究提及环境及其背后的文化因素对进行课例研究的影响, 不同文化背景可以塑造进行课例研究的不同视角, 而“文化换位”则能够让教师重新思考自身所处的文化, 使课例研究更贴合本国的教育国情。在越南进行课例研究潜在以下文化因素: 教师具有高度的权威性; 参与“学习共同体”是一种挑战; 专家与教师之间的关系消极等。本文通过 MKT 框架来研究教师知识的变化, 通过 TEDS-M (Teacher Education Development Study-Mathematics) 中提到的教师对数学和数学教学的信念这两个评估维度来研究教师信念的变化 (TEDS-M 包含: 教师对数学本质的信念、教师对数学学习的信念、教师对数学成就的信念三个维度), 并考虑了“文化换位”“‘理想课程’‘预期课程’‘获得课程’”“师生之间、师师之间、教师与研究者之间的关系”等文化因素对教师的知识和信念变化的影响。

本文的第一作者 Duyen Thi Nguyen 来自于越南顺化师范大学 (University of Education, Hue University), 第二作者 Dung Tran 来自于澳大利亚麦考瑞大学 (Macquarie University)。本文于 2022 年 7 月刊发于 Journal of Mathematics Teacher Education, 文章介绍了一项个案研究, 研究对象为来自越南同一所学校的 3 名男教师 (Quang、Kha、Binh), 其中 Quang 和 Binh 具有课例研究的经验, 而 Kha 则从未参与过课例研究。

2 数据来源及分析

2.1 数据来源

• 会议讨论：在进行课例研究之前，研究团队和教师组织了两场会议，每场 60 分钟。在会议中，教师讨论了不同文化背景下数学学习的意义，研究了教科书中的数学任务，并思考如何利用数学任务、学生在课堂中实施的任务、学生的学习过程来了解其对基本数学知识的掌握情况。教师和研究团队还探讨了有关数学教学和任务设计的问题，提出高认知需求的任务能够提升学生的数学能力，这些任务为学生提供了“做数学（doing mathematics）的机会”，学生完成任务需要更加复杂的数学思维和推理能力（猜想、论证、解释等）。例如，对于 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 的证明，教科书采用数学归纳法，而研究团队讨论了怎样改编这个例子，从而使学生达到“做数学”的层次，并将课堂目标确定为“通过设置具有挑战性的任务来帮助学生经历提升数学能力的综合学习”。

• 教学计划：总共有 7 个教学计划，内容涵盖三角函数的图象、概率、二次函数、函数、数学归纳法、等差数列等。

• 课堂观察、讨论和访谈：在进行课例研究之前，研究团队进行了 9 次课堂观察（每次 45 分钟）；在进行课例研究期间，研究团队对高中 3 个年级进行了一共 14 节课的观察和录像，跨时近一个学年（9 个月）。研究团队着重于观察教师的任务执行和其与学生的互动情况，并于课后与教师讨论在课程的改编和实施中的经验教训、教师的 SCK 和 PCK 等内容。在课例研究的开始和结束阶段，研究团队对教师均进行了访谈。

• 学生作业。

表 1 给出了收集的数据和用途。

表 1 数据收集和分析总结

数据收集	数据分析
教学计划（7）	学习目标和学习任务（课程知识和信念）；挑战性任务；教学计划和教科书中的学习任务及其呈现顺序的差异（课程知识）；预估学生可能产生的困难和迷思（内容与学生知识）；实例和任务的选择与排序，教学

	方法的评价（内容与教学知识）
课堂观察、现场笔记、录像 (9+14)	学习目标和学习任务（课程知识和信念）；挑战性任务；教学计划和教科书中的学习任务及其呈现顺序的差异（课程知识）；小组工作、个人工作、学生回应（信念）；教师对学生的回应（专门内容知识）；实例和任务的选择与排序（内容与教学知识）
小组会议：初始会议（2）、准备阶段（7）、课后讨论（2×7）	信念、专门内容知识、教学内容知识
个人访谈：课例研究的开始和结束 (3+3)	信念
学生作业	反馈：课例研究对学生学习的影响

2.2 数据分析

本研究采用了三角互证法。

在专门内容知识（SCK）的分析方面，研究者观察了教师“如何回应学生生成的数学”“如何评估学生提出的策略的有效性”“如何解释学生提出的解决方案和表征方法”“如何联系学生的解决方法和学习目标”。

研究者也分析了教科书，包括教科书的设计意图、教科书呈现的学习任务、观察的课程在教科书的位置顺序、教科书呈现的任务和实际教学的区别等内容。此外，研究者将授课的教师分为两类，一类是实施者，即教师原封不动地接受教科书顺序并使用教科书中的任务，另一类是转化者，即教师呈现的教学内容有别于教科书的设计。

在内容与学生知识（KCS）的分析方面，研究者记录了教师在教学设计中对学生可能出现的理解、困难、迷思的预设以及做出的相关回应。比如，学生在 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ 的计算过程中，若利用 $1^2, 2^2, \dots, n^2$ 的几何表征，怎么将这些几何形状组合起来。

在内容与教学知识（KCT）的分析方面，研究者记录了教师对任务的排序以及对不同表征方法的优缺点的评估。比如，在计算 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ 之前，教师会让学生先找到 $1 + 2 + \dots + n$ 和 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ 的公式。

在对数学信念的分析方面，研究者会对教师认为重要的数学知识进行编码，例如，关注符

号的操作、关注推理和解决问题等。在对数学教学的信念的分析方面，研究者会分析教师是如何为学生提供机会，从而使学生与学生、学生与教师之间产生数学对话；教师如何回应学生的思考；教师如何看待自己与学生的角色关系等内容。

3 研究结果

3.1 教师知识变化

3.1.1 对学生数学问题的回应 (SCK)

在参与课例研究后，教师能够欣赏学生的解决方案，并试图从学生的解决方案出发为之提供解决问题的途径，而不是直接给他们提供正确的方案；教师也注重为学生创造认知冲突，使学生能够重新考虑和审视自己的方法，尤其是对概念的理解，并且希望学生能够从反例中修正自己的概念；教师逐渐形成了倾听学生的意识，在第一次会议中，研究者提到了教师阻止学生探索其他解决方案的习惯，并很少考虑到学生的理解和思考，而通过课例研究，教师逐渐学会了倾听学生。

3.1.2 课程的实施者到转化者 (KC)

在进行课例研究之前，教师严格遵循教学指南和教科书，课程中使用的任务和例子与教科书完全一致。进行课例研究之后，教师仍然遵循教学进度和课程顺序，但是却以不同的方式构建了教学设计和教学方法。比如，在讲授数列的概念时，Binh 选择了“Big C”这个实际背景（Big C 为越南一公司的名称，在成立的 20 周年纪念日之际，公司有关部门举办了一场标志“C”的设计大赛），而这与教科书中纯粹的数学背景是不同的。

进行课例研究后，教师希望丰富学生的学习目的，例如，教科书关注于利用数学归纳法证明 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ，除此之外，Quang 和 Kha 还希望学生能够将这个等式与其他表征（如几何表征）联系起来。

3.1.3 认识到学生的困难(KCS)，选择不同的教学方式并评估其优缺点(KCT)

最初的会议中提到的“文化换位”让教师能够在面对不同的学习观点时，反思自己的教学

实践。比如对于 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ 的计算，Quang 采用了多种方法，并且对问题进行了多种表征，从而帮助学生建构最适合自身的解决方案。

3.2 教师信念变化

3.2.1 什么是重要的数学知识——利用具有挑战性的任务引导学生进行综合而全面的学习

学生不是简单地、机械地只会根据程序进行解题，而是能够多元表征问题，并且探索解决问题的多种方法，还能够理解在不同情境中蕴含的数学概念（如“Big C”任务）。

3.2.2 学习如何发生——朝着更为复杂的教学信念前进

教师的教学信念在进行课例研究后发生了转变，教师从最初单向对学生进行知识传递转化为促进学生与学生在小组互动中的交流；教师更加注重倾听学生；教师改变了班级管理，并注意到了在学生学习中忽略的细节等。

4 结论

本文强调了文化因素对实施课例研究的影响，其中“文化换位”是文化因素的重要部分，本文主要探讨了高中数学教师在设计和实施具有挑战性的任务时，其知识和信念的变化。结果表明，研究者花费大量时间来讨论“全面学习的意义”和“设置挑战性任务的方法”是很重要的，长达 9 个月的课例研究影响了教师的知识和信念。教师的理想课程受到了挑战，研究团队为分析教师的预设课程创造了机会，并且支持教师通过“文化换位”来提升他们的获得课程的水平。当解决了研究者和教师之间的平等关系问题时，教师不必说或做一些事情来取悦研究人员。此外，我们还想知道在实施课例研究后，哪些影响会持续伴随着教师，实施改革后的课程可能为讨论课例研究对教师知识和信念的影响提供一个机会。

参考文献

- [1] Nguyen, D. T. & Tran, D. High school mathematics teachers' changes in beliefs and knowledge during lesson study[J]. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2022.

数学写作

借助“K”字模型，解决荒岛寻宝问题

金子轩，胡永强

（苏州市阳山实验初级中学校，江苏 215151）

1 问题提出

近日，老师给我们介绍了一道有趣的荒岛寻宝问题，这个问题来自著名物理学家乔治·伽莫夫的《从一到无穷大》一书，具体如下。

一个年轻人得到了一张藏宝图，上面写着：“在某荒岛的一片空地上，有两棵树，一棵是橡树，一棵是松树，还有一个断头台。从断头台走向橡树，记住所走的步数，向左拐弯 90° 后，向前走相同的步数，在脚下做一个记号。回到断头台，走向松树，记住所走的步数，向右拐弯 90° 后，向前走相同的步数，在脚下再做一个记号，两个记号连线的中点便是藏宝之处。”年轻人来到荒岛后很快找到了那两棵树，但断头台却消失得无影无踪，他因此两手空空，败兴而归。请问如果你是那位年轻人，你能找到宝藏吗？

2 模型引入

不难发现上述问题中隐藏着两个等腰直角三角形，这让我想到了“K”字模型。如图 1，已知 $\angle A = \angle BCE = \angle D = 90^\circ$ 、 $BC = CE$ ，容易证出 $\triangle ABC \cong \triangle DCE$ ，由此可以推导出一些相等的线段和相等的角，比如 $AC = DE$ ， $AB = CD$ ， $\angle B = \angle DCE$ ， $\angle ACB = \angle E$ 。这张图有点像躺着的“K”字，因此我们常称它为“K”字模型。

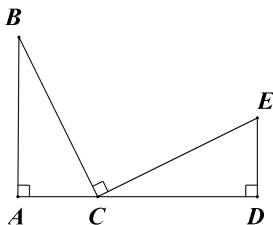


图 1 “K”字模型

3 问题解决

我们用符号语言描述这一问题：如图 2， $AC=AO$ ， $BD=BO$ ， $\angle CAO=\angle DBO=90^\circ$ ，点 P 为线段 CD 的中点。试说明点 P 只与点 A 和点 B 的位置有关，与点 O 的位置无关。

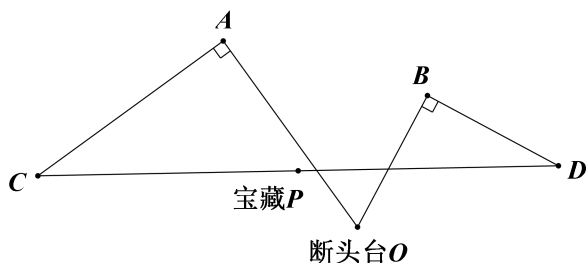


图 2 荒岛寻宝问题

观察图 2，我联想到“K”字模型，于是尝试构造这一模型来解决问题。

3.1 代数法

《从一到无穷大》一书介绍的方法是建立实轴和虚轴进而求解，这里涉及虚数的运算，我尚未学习过相关知识。但是，受其启发，我构造了一个平面直角坐标系，借助“K”字模型对其分析解答。

如图 3，以直线 AB 为 x 轴，线段 AB 的垂线平分线为 y 轴，点 Q 为坐标原点，建立平面直角坐标系。

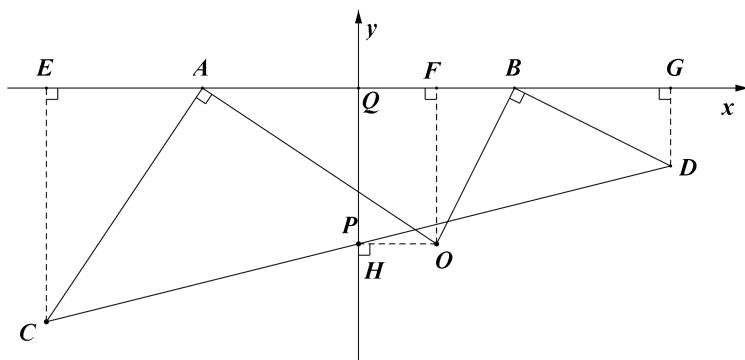


图 3 代数法探究荒岛寻宝问题

作 $CE \perp x$ 轴、 $DG \perp x$ 轴、 $OF \perp x$ 轴， $OH \perp y$ 轴，垂足分别为 E 、 G 、 F 、 H 。设 $O(m, n)$ ， $A(-a, 0)$ ， $B(a, 0)$ ，则 $OF = -n$ ， $QF = m$ ， $AQ = BQ = a$ 。根据“K”字模型的结论，易知 $\triangle$

$CEA \cong \triangle AFO$, 所以 $AE = OF$, $CE = AF$, 则 $QE = -n + a$, $AF = m + a$. 所以 $CE = m + a$. 所以 $C(n-a, -m-a)$, 同理 $D(a-n, m-a)$, 则线段 CD 中点 $P(0, -a)$. 所以点 P 在 y 轴上, $QP = a$, $PQ = AQ = BQ$. 所以点 P 位置与点 O 无关, 根据 A 、 B 两点即可确定点 P 位置。

3.2 几何法

对代数解法深入思考后, 我发现不设坐标, 直接使用“K”字模型的相关结论也可以解决。

如图 4, 分别过点 C 、 P 、 O 、 D 作 CE 、 PF 、 OG 、 DH 垂直于直线 AB , 交直线 AB 于点 E 、 F 、 G 、 H 。

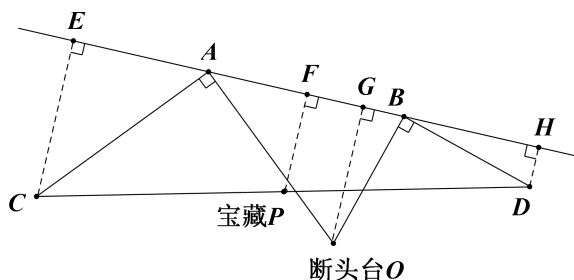


图 4 几何法探究荒岛寻宝问题

因为 $CE \perp AB$ 、 $PF \perp AB$ 、 $OG \perp AB$ 、 $DH \perp AB$. 所以 $\angle CEA = \angle CAO = \angle AGO = \angle OGB = \angle OBD = \angle BHD = 90^\circ$. 因为 $\angle ACE + \angle CEA = \angle CAO + \angle OAG$. 所以 $\angle ACE + 90^\circ = 90^\circ + \angle OAG$. 所以 $\angle ACE = \angle OAG$. 在 $\triangle CEA$ 和 $\triangle AGO$ 中, 因为 $\angle CEA = \angle AGO$, $\angle ACE = \angle OAG$, $CA = AO$. 所以 $\triangle CEA \cong \triangle AGO$. 同理可得, $\triangle OGB \cong \triangle BHD$. 所以 $CE = AG$, $DH = BG$, $AE = OG = BH$. 因为 $\angle CEA + \angle BHD = 180^\circ$, $\angle CEA + \angle AFP = 180^\circ$, $\angle PFG + \angle BHD = 180^\circ$. 所以 $CE \parallel PF \parallel DH$. 因为点 P 为线段 CD 的中点, 所以点 F 是线段 EH 的中点, PF 是梯形 $CEHD$ 的中位线, $PF = \frac{1}{2}(DH + CE)$, 所以 $PF = \frac{1}{2}(BG + AG) = \frac{1}{2}AB$. 因为 $AE = OG = BH$, 所以 $EF - EA = HF - HB$, 即 $AF = BF$, 即点 F 为线段 AB 中点. 所以点 P 位置与点 O 无关, 只需 A 、 B 两点即可确定点 P 位置。

4 小结与思考

以上我们可以发现, 理解“K”字模型可以帮助我们找到解题思路, 构造“K”字模型可

以解决一类问题，大家在做题时要善于思考，敢于构造。两种解法也告诉我们看待问题要数形结合，综合利用代数眼光和几何眼光去思考问题，寻找解题思路！

最后不得不说的是，当我成功解决荒岛寻宝问题的那一刻，我的内心非常激动，体会到了成功的喜悦，同时我也深刻体会到了数学的魅力和价值。

【指导教师点评】我们在数学学习中经常会遇到一些稳定的结构，通常称作数学模型。大家对数学模型进行深入研究后能够总结提炼出一些规律性的结论，这些结论可以用于解决相应的一类问题。小金同学运用“K”字模型，从代数和几何两个视角分析并解决荒岛寻宝问题，体会到数学学科分支之间的联系、感悟到数学具有广泛的应用价值，同时也品尝到了研究数学所带来的乐趣。

参考文献

[1] G·伽莫夫. 从一到无穷大 科学中的事实与臆测[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 31-33.

活动讯息

HPM 工作室小学教研基地二月份研修纪实

岳增成

(杭州师范大学经亨颐教育学院, 浙江 杭州 311121)

春山茂, 春日明。梅始发, 柳始青。2023 年 2 月, HPM 工作室小学教研基地共开展两场线上活动。

2 月 12 日晚, 数学史与数学教育 (HPM) 工作室小学教育基地第 19 场活动如期而至 (图 1)。本次活动主题是“论文写作问与答: 教师专业成长与教学主张提炼”。这个主题是 HPM 工作室小学教研基地与“研师三人行”团队合作开展的, 是寒假“教育教学成果提炼与论文写作研修课程”的延续。



图 1 HPM 工作室小学教育基地第 19 场活动

活动中, 岳增成博士针对学员提出的数学史融入数学教学的问题进行了回应。他指出, 小学数学教师可以从宏观的理论或理念出发, 开展微观的教学实践, 在单节课或单元整体设计中融入数学史, 并在中观的层面总结经验、提炼方法、撰写论文; 他认为, 教学研究与论文写作是相统一的, 我们是为了教学改进而写论文, 不是为了论文而论文; 他还举例说明如何选择研究角度融入历史, 并总结成文; 最后, 他推荐了开展 HPM 研究的专业阅读书目。

教研基地成员、杭州市萧山区夹灶小学的李建良老师分享了自己开展 HPM 教学与研究、论文写作与发表的经验，并举例说明课例开发的切入点与创新点、论文的类型和结构、文献搜集和阅读的方法，为 HPM 的教研带来启发。

写作能力是教师专业发展的重要一环，也是目前教师普遍薄弱的一环。此次研修，在一问一答中，串联起了教师的实践性知识，激活了教师“缄默的智慧”，让教师专业写作的道路澄清了起来！

2 月 25 日晚，数学史与数学教育（HPM）工作室小学教育基地举行第 20 场研修活动（图 2）。本次活动聚焦“自然数的认识”专题，开展教材分析、学情分析和史料梳理。研修活动由岳增成博士主持，承担分享展示任务的是 HPM 工作室迁安市小学数学团队和长沙市一中金山桥学校小学部数学组。



图 2 HPM 工作室小学教育基地第 20 场活动

首先，岳增成博士介绍了基地已研究过的专题和本年度新的研修选题，然后结合“自然数的认识”启发大家思考：自然数的发展历史如何与我们的课堂教学有效融合？自然数的发展史为我们认识自然数带来了什么？自然数的发展史与教科书内容安排的进阶是否有联系？自然数的发展史能否帮助我们解释学生认识自然数的困难？数学史如何在新授课与拓展课有机融？数学史融入如何从课时到单元或不同专题？

迁安市马兰庄镇马兰社区完全小学王小娟老师负责教材分析。王老师梳理了冀教版“数的认识”教材结构，结合课标解读了数感的内涵。她认为，数是对数量的抽象，儿童数感的形成在教材中大致分为三步，20 以内数的认识重点是认识数字，百千数的认识重点是认识位值，

较大数的认识重点是认识数级。然后王老师以“千以内数的认识”为例，对冀教版、人教版、北师大版、浙教版教材“数的认识”教学内容的编排序列和特点进行了对比分析，从模型支撑、学习过程、算盘表示数等几个方面分析了教材编排的异同，提出数学史融入的重点。岳增成博士简短点评，他启发大家思考：为什么不同数位上的数就可以表示不同的数？学生认识两位数是非常困难的，学生对 10-20 的理解是滞后于他的学习进度的。

迁安市马兰庄镇马兰社区完全小学蔡宇倩老师负责学情调研分析。马老师首先介绍了前测目的，然后具体分析了学生面对新情境时的记数方法。岳增成博士就迁安团队的深度调研发表了自己的看法：学生为什么不能顺利迁移认识数的经验到千？因为学生对十进位值制的理解还不够深入。

长沙市一中金山桥学校曾舟石老师负责梳理“整数的认识”的史料。结合丰富的图例，曾老师介绍了人类认识数的四个阶段：原始数觉时期、匹配法记数时期、模范集合时期、数码记数时期，并对比了古埃及、玛雅、古巴比伦、古罗马、中国五个不同文明古国的数码，提炼出数的认识的关键概念——十进位值制。

活动最后，岳增成博士进行了总结。他指出，我们研究“数的认识”教学，梳理数的产生历史，就是想从数学文化的视角理清数概念形成的过程，让教师了解数概念发生发展的脉络和关键节点，并从历史中汲取启示，优化学习设计；他引导老师关注教材中“数的认识”内容编排的进阶点，又提示大家关注学生自主创造的数字表达形式与古代记数间的相似性；他以“认识古罗马数字”为例，介绍了以拓展课的形式开展数学史融入数学教学的成功案例，又以《小学数学教师》中的专辑为例，介绍了新授课中数学史融入的方式与方法；最后，他强调数学史不应仅在单节课中应用，更重要的是在单元整体中、在不同专题中的系统融入，这样才能帮助学生更好地学习数学。

自然数是人们所认识的数中最基本的一类，数的认识产生于人类文明诞生之初，但直到 19 世纪，数学家才对自然数的概念、运算和有关性质进行了严格的论述，建立起了数的系统的严密理论。小学数学是儿童数学学习的启蒙阶段，结合学生认知特点，恰当融入数学史，有利于学生感悟数学思想，体会数学发展规律，启发创新。因此，“数的认识”专题的研修，对小学数学教师扩充专业知识、设计创新课例大有裨益。

新学期，新起点，基于数学史的教研走向深度，HPM 小数共同体迈向共同成长。

HPM 融入高中数学教学课例研讨活动隆重举行

刘倩雯，刘梦哲

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2023 年 2 月 16 日下午，“留白创造式”教学课题组、华东师范大学 HPM 工作室与华东师范大学基础教育学科教研联盟联合举行高中课例研讨活动（图 1）。本次活动在上海外国语大学附属普陀实验学校隆重举行，采取线下线上相结合的形式。线下参与本次活动的有 HPM 工作室成员、“留白创造式”课题组成员代表与联盟各成员校教师代表，线上线下参与人数共计 100 余人。本次活动研讨的课题为“圆锥曲线的统一性（专题复习课）”与“余弦定理”。



图 1 HPM 融入高中数学教学课例研讨活动

【圆锥曲线的统一性（专题复习课）】

首先，华东师范大学第二附属中学蔡东山老师（图 2）、华东师范大学上饶实验中学郑钧老师、上海交大附中嘉定分校钟萍老师（图 3）、上海市浦东教育发展研究院季永华老师（图 4）与上海市晋元高级中学邵夏燕老师（图 5）根据自己的理解并结合学情，依次分享了“圆锥曲线的统一性（专题复习课）”的教学设计。



图 2 蔡东山老师分享教学设计



图 3 钟萍老师分享教学设计



图 4 季永华老师分享教学设计



图 5 邵夏燕老师分享教学设计

其次，各位老师针对五位老师的教学设计发表了自己的看法与建议。上海市建平中学李传峰老师（图 6）建议，几何教学可以从直观入手，再至代数抽象，最后再回归于直观。华二附中宝山校区徐波老师（图 7）表示，平时参加此类学术研讨的机会较少，今天的活动让他收获颇丰，不仅开拓了研究的视角，还学习到利用单元整合知识的方式。上海华旭双语学校李小凡老师（图 8）从跨学科的角度分享了自己的观点，他表示可以通过物理现象去引入并解释圆锥曲线，如天体运动中行星围绕恒星转的轨迹为椭圆、抛出物体形成的轨迹为抛物线等。



图 6 李传峰老师点评



图 7 徐波老师点评



图 8 李小凡老师点评



图 9 任升录老师点评

上海市静安区高中数学教研员、特级教师、正高级教师任升录老师从单元教学的意义展开点评（图 9）。一方面，数学具有整体性，几何与代数密切相连，代数的模型是几何，而几何的直观需要代数去推理论证。同时，在知识内部也存在整体性，如圆、椭圆、双曲线与抛物线的解题方法是相似相通的，本质原因是圆锥曲线的内在统一性。因此，单元教学可以从整体出发，有效克服知识碎片化的问题。另一方面，单元教学可以有效激发学生主动思考数学、主动学习数学的兴趣。具体而言，教师可以充分利用教科书中的阅读材料，有意识地引导学生课后阅读，帮助学生理解数学内容。此外，任老师还建议通过数学的应用，如双曲灯、双曲导航等，将圆锥曲线统一起来，如此一来，在不增加学生学习负担的同时，通过学生自主学习与教师讲解能够将圆锥曲线讲解透彻。

华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授聚焦圆锥曲线的统一性进行点评（图 10）。汪老师



图 10 汪晓勤老师点评

首先介绍了圆锥曲线名称的来源以及名称背后所蕴含的古希腊文化底蕴，古希腊人称椭圆为亏曲线、称抛物线为齐曲线、称双曲线为超曲线的原因是基于面积贴合理论，而这便解释了圆锥曲线的统一性。其次，汪老师建议教师要在课堂中充分留白，培养学生的创新能力。在本节课

的教学中，教师可以留发现之白，让学生自主确立视角去探究圆锥曲线的统一性。同时，汪老师还建议教师应充分考虑学情，进行适当留白，避免产生因留白过多而导致教学困难的问题。

【余弦定理】

首先，华东师范大学附属天山学校方元沁老师（图 11）、华东师范大学盐城高级中学凌国华老师、华东政法大学附属中学陈春丽老师（图 12）、上海市曹杨中学蔡真逸老师（图 13）、华东师范大学上饶实验中学江小华老师、厦门市华师希平双语学校任飞老师与罗俊玲老师、上海市晋元高级中学缪寿红老师（图 14）依次分享了关于“余弦定理”的教学设计。



图 11 方元沁老师分享教学设计



图 12 陈春丽老师分享教学设计



图 13 蔡真逸老师分享教学设计



图 14 缪寿红老师分享教学设计

随后，与会老师对七位老师的教学设计展开了热烈的讨论。上海市行知中学高振严老师（图 15）表示，各位老师的报告都很精彩，从中他也学习到了余弦定理证明的新方法，如通过向量的平方以及和的运算来证明。华东师范大学附属周浦中学朱辰昊老师（图 16）表示，作为一名青年教师，很荣幸有此机会向各位前辈学习，印象最深刻的是蔡真逸老师详实细致的教学设计。华二附中松江分校赵建刚老师（图 17）结合教学经验发表了自我感想：在实际教学中，学生有能力自主证明余弦定理，且证明方式多样，因此，教师可以考虑在本节课进行留

白，同时，向量方法具有直观简洁的优点，可以在学习向量后引导学生用向量方法再次证明余弦定理，进而使前后知识连贯、形成整体。



图 15 高振严老师点评



图 16 朱辰昊老师点评



图 17 赵建刚老师点评

华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师从四个方面进行阐述（图 18）。其一，教师在教学时应充分考虑学生认知的起点。具体而言，学生利用初中数学知识即作高法就能够完成余弦定理的证明，因此，相较于向量法，学生可能会更自然地联想到作高法。其二，教师可以引导学生利用勾股定理的证明方法来证明余弦定理。其三，此课例非常适合留白创造式教学，虽然学生的学情不同，但是当教师充分留白后，学生一定能呈现出精彩的表现。其四，教师可以设计数学写作活动，这不仅是一种留白方式，还能促进学生未来的发展。

上海市闵行区高中教研员、特级教师、正高级教师杨家政老师首先对老师们的教学设计进行了点评（图 19），他表示，各位老师都关注到了情境引入、学情、学习活动的设计、定理的应用以及单元整体设计的视角等，准备较为充分，报告十分精彩。同时，杨老师还提出了两点建议，其一，教学不仅要关注知识，还要关注知识学习的价值。课堂上，定理的发现、证明的过程与方法要顺理成章、合乎情理。例如，教师可以通过复习旧知、引导学生自主探讨等方式

让学生自然地发现知识。其二，教师需要思考如何在定理的发现与探索中提升学生的核心素养。目前教师们的教学设计过满，没有留出充分的时间和空间让学生补白，关于这一点教师们需要进一步加强。



图 18 邹佳晨老师点评



图 19 杨家政老师点评

汪晓勤老师围绕“为什么要学习余弦定理”与“如何在课堂上留白”两个问题进行点评（图 20）。对于学习余弦定理的必要性，汪老师表示，从数学外部看，教师可以基于勾股定理构造现实情境。在情境中，我们无法构造出一个可测量两直角边的直角三角形，只能构造出一个已知两边和夹角的三角形，即当勾股定理无法解决实际问题时，我们需要进一步推广知识，从而引出余弦定理。从数学内部看，为了解三角形“知三求三”的需要，我们要寻找新的知识。同时，汪老师还提出，历史上三角学的根起源于几何测量，因此，余弦定理不应该建立在向量的基础上，而应建立于几何之上。对于课堂上的留白，汪老师提出，整节课可以聚焦发现之白与论证之白。通过余弦定理学习的必要性可以给学生留下发现之白，而关于论证之白，可以引导学生从勾股定理走向余弦定理。具体而言，有两种途径，一者从旧方法到新方法，即将证明勾股定理的方法沿用至斜三角形上，二者从旧命题到新命题，即直接用勾股定理证明余弦定理。



图 20 汪晓勤老师点评



图 21 王华老师总结

最后，上海市晋元高级中学特级教师、正高级教师王华老师进行总结发言（图 21）。王老师阐述了四个“新”：一是新形势，即本次活动代表着高校与基础教育合作的新形势，同时也是 HPM 工作室、华东师范大学基础教育学科高中数学联盟与高峰计划课题组三者联合举办的活动；二是新成员，本次活动由不同课题组、不同学校、不同地区的老师共同参与；三是新元素，希望“留白”这个新元素能够在课堂中生根发芽，发生发展以促进教学，更能够促进课堂向“学生真正成为课堂的主人”方向转型；四是新要求，成就教师、成就课堂的关键是成就学生，而成就学生的前提便是教师不断提升自身发展。

本次研讨活动充分展现了 HPM 研究团队与一线教师的深度合作与共同成长，激发了教师们对数学史融入课堂与留白创造式教学的进一步思考，期待本次研讨能够催生出精彩的课例。



图 22 高中数学联盟第四次课例研讨活动线下合影

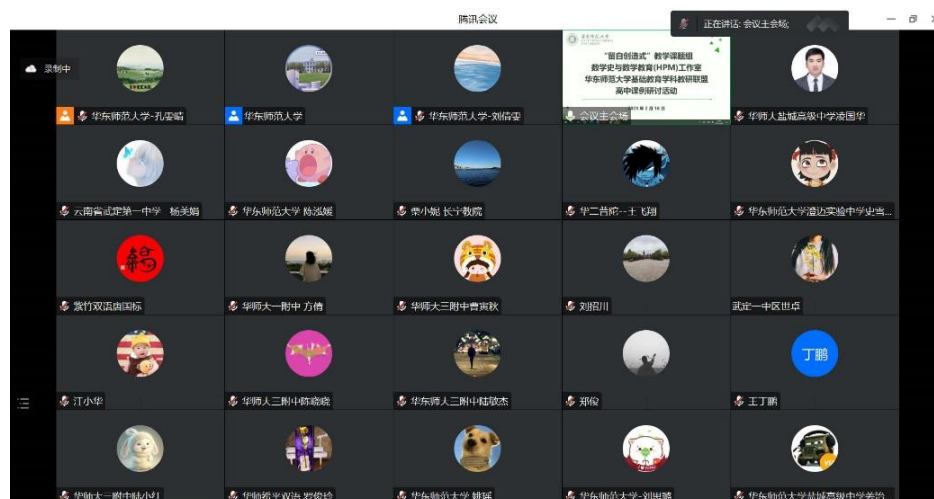


图 23 高中数学联盟第四次课例研讨活动线上合影

中算史融入高中数学教学课例研讨活动隆重举行

陈雨晴

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2023 年 2 月 22 日下午，华东师范大学 HPM 团队与中国中学高中数学教研组举行课例研讨活动。本次活动在中国中学隆重举行。参与本次活动的有华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师，华东师范大学教师教育学院研究生，以及中国中学“中华优秀传统文化融入高中数学教学实践研究”课题组。本次活动研讨的课题为“中算史融入高中数学教学”。

首先，来自华东师范大学教师教育学院的汪晓勤教授做了主题为“中华优秀传统文化融入高中数学教学的主题与意义”的报告（图 1）。汪老师首先介绍了该主题的时代背景，其一，在坚定文化自信的要求之下，中华优秀传统文化数学文化、数学史等内容逐渐渗透在近年来的数学高考试题中；其二，教育部印发了《中华优秀传统文化进中小学课程教材指南》，对于数学学科而言，研究中华优秀传统文化怎样有机地融入数学教学实践具有重大的意义；其三，基于数学史的数学文化包含了知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐和多元文化五个维度，并通过问题聚焦体现了 HPM 教学的知识之谐、方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅和德育之效的教育价值。接着，汪老师通过案例，介绍了宋元以前的中国在算术、代数和几何领域的数学成就，并给出了在高中数学阶段，教师可以融入中华优秀传统文化的课题，例如，均值不等式、二项式定理等内容。最后，汪老师进行了关于课例研究与教师专业发展的介绍，并表达了对教师们的期待，希望教师们能够在知识、信念和能力上有所发展、有所提升。

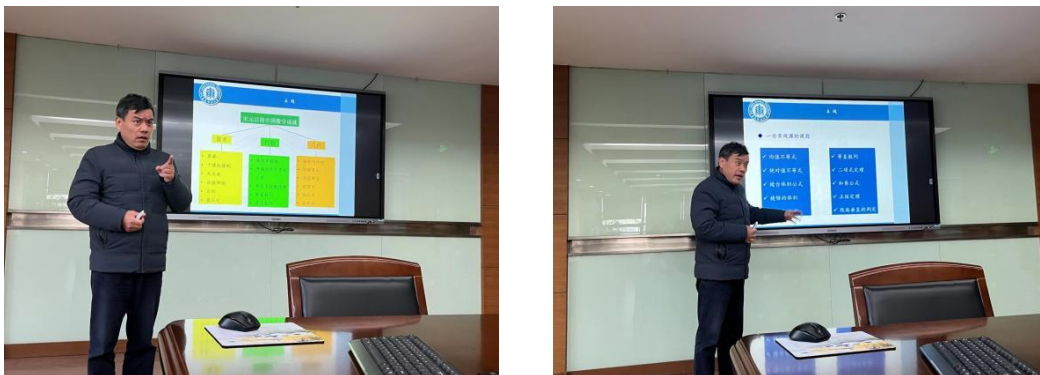


图 1 汪晓勤老师作报告

然后，来自华东师范大学教师教育学院的邹佳晨老师做了主题为“中华优秀传统文化

融入高中数学教学的设计与实施”的报告（图 2）。首先，邹老师从迫切性、教师专业发展、教育部出台的政策等方面阐述了主题内容的缘起，当今教育提出“立德树人”是教育的根本任务，我们应该全学段、全学科、全员育人。我国古代数学成就是中华优秀传统文化的有机组成部分，具有悠久的历史，创造出了许多具有中国特色和世界影响的成果，因此，中华优秀传统文化融入数学教学具有重大的时代意义。随后，邹老师从“寻找特色”“实施路径”以及“团队建设”三个维度介绍了教师专业发展共同体建设。接着，邹老师提到了本次课题的项目概况，并向在场教师介绍了课例研究的一般流程，分别是“选题与准备”“研讨与设计”“实施与反馈”以及“整理与写作”。最后，邹老师进行了总结与展望，希望各位教师能够在本次课例研究中取得收获。

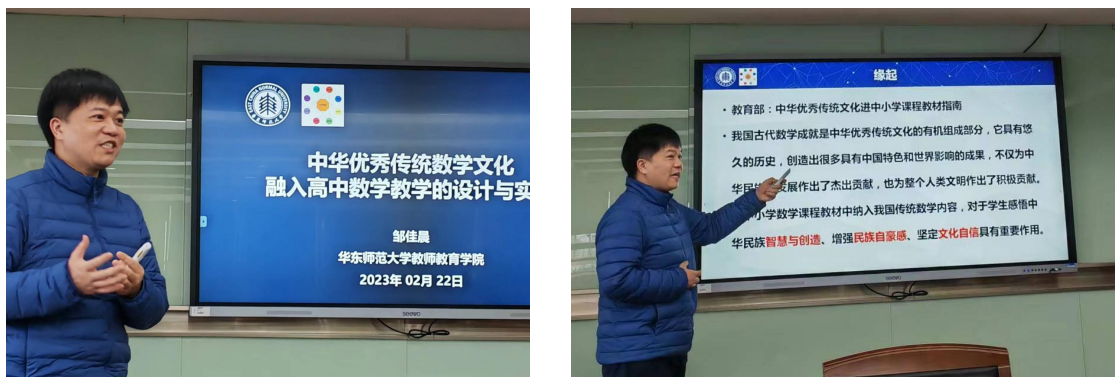


图 2 邹佳晨老师作报告

最后，中国中学“中华优秀传统文化融入高中数学教学实践研究”课题组与汪教授、邹老师商议了本学期将要开设的主题，并就课题可能包含的数学史内容进行了初步的探讨（图 3）。



图 3 郑沐老师和黄勇副校长大会发言

HPM 融入初中数学教学课例研讨活动隆重举行

姚瑶，陈雨晴

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2023 年 2 月 23 日下午，“留白创造式”教学课题组、数学史与数学教育（HPM）工作室、华东师范大学基础教育学科教研联盟联合举行初中课例研讨活动（图 1）。本次活动在华东师范大学第二附属初级中学隆重举行，采取线上线下相结合的形式。线下参与本次活动的有 HPM 工作室成员、“留白创造式”课题组成员代表、联盟各成员校教师代表、华东师范大学教师教育学院数学教育方向的研究生。本次活动研讨的课题为“全等三角形的判定（边角边）”“矩形的性质与判定”和“同位角、内错角、同旁内角”。

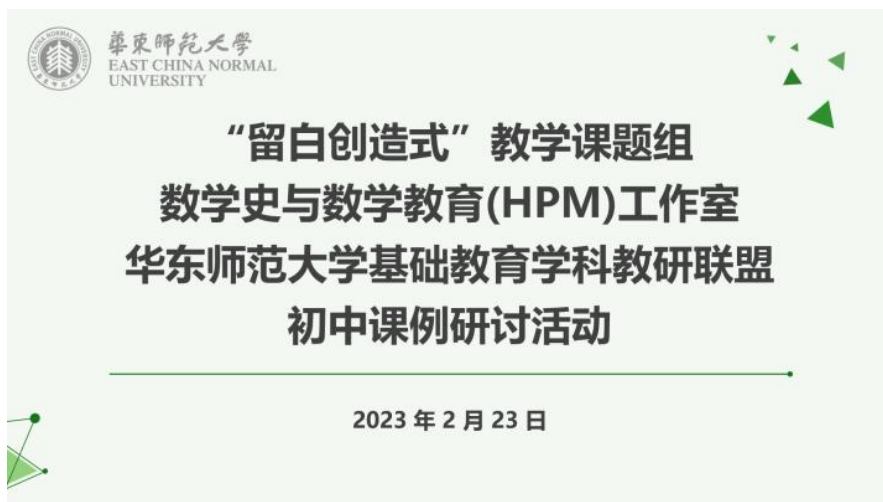


图 1 HPM 融入初中数学教学课例研讨活动

【全等三角形的判定（边角边）】

首先，华东师范大学第二附属初级中学的徐阳嘉老师分享了“全等三角形的判定（边角边）”的教学设计（图 2），分为四个部分：画图引入、判定获得、判定应用、课堂小结。徐阳嘉老师考虑从全等三角形的由来、SAS 的证明、全等三角形的趣味小故事三个角度融入数学史，并提出问题，学生能否理解叠合法以及数学史如何融入到基础课堂中。

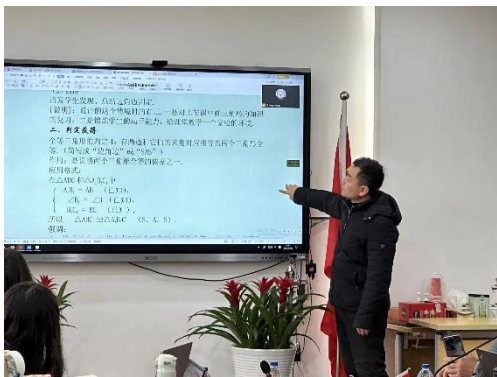


图 2 徐阳嘉老师分享教学设计



图 3 顾海萍老师点评

其次，各位老师对徐阳嘉老师的教学设计发表了自己的看法。上海师范大学附属宝山经纬实验中学的顾海萍老师（图 3）指出，可以从贴近学生生活的实际应用引入，如古代测量步长的方法恰好符合全等三角形的边角边模型。上海市上汇中学的尤文奕老师（图 4）从留白教学的角度提出建议，学生的逻辑起点对于数学教学非常重要，可以考虑从学生的实际生活案例来引入，如测瓶子内径的工具，而后再引导学生自行探究全等条件。



图 4 尤文奕老师点评



图 5 王华老师点评

上海市晋元高级中学特级教师、正高级教师王华老师（图 5）认为，本次课例研讨活动旨在探讨如何在数学课堂中落实立德树人，让学生成为课堂的主人。王老师指出，沪教版教科书中画三角形的活动体现了从实验几何过渡到演绎几何，本节课的动机创设在于研究两个三角形之间的关系，因此可以从两个视角考虑本节课的教学：一是单元视角，探究全等三角形概念、性质、判定定理，并将实践与说理相结合；二是认知视角，从视觉、触觉等感知方式入手促进学生理解。

华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授（图 6）首先强调了三角形在平面几何学研究历史中的重要性，介绍了几何概念的研究先从“质”开始，即按照图形形状划分，再从“量”入手，

最后从“关系”的角度来研究。其次，汪老师从数学内部和数学外部两个角度对本节课的教学设计提出了建议。从数学外部看，可以通过步长度量、河宽测量等生活实际中抽象出边角边模型，从数学内部看，三角形面积、三角形内角和等已有知识基础体现了三角形在“质”与“量”上的性质，本节课可以进一步研究三角形之间的“关系”。最后，汪老师从留白创造式教学的视角指出，本节课的情境引入部分应建立在学生的生活经验基础上留出发现之白，定理证明部分可以留出论证之白，实践应用部分可以考虑留出问题之白，在教学过程中可以加入微视频来介绍全等三角形判定定理的历史故事等。



图 6 汪晓勤老师点评



图 7 柯新立老师点评

华东师范大学第二附属初级中学的柯新立老师（图 7）指出，本节课的引入部分可以通过微视频帮助学生更快进入状态，而三角形叠合法符合学生的认知基础，因此在定理证明部分可以留出论证之白。此外，在问题设计上也要给学生提供更多的思考空间。

【矩形的性质与判定】

首先，上海市长桥中学的汤雪川老师（图 8）、上海市进才实验中学的林徐励老师（图 9）、华东师范大学广陵实验初级中学的罗瑞娟老师、上海师范大学附属宝山经纬实验中学的顾海萍老师（图 10）和付敏老师（图 11）、华东师范大学弋阳实验学校的程紫繁老师与张依老师、上海市实验学校南校的蒋来老师（图 12）依次分享了关于“矩形的性质与判定”的教学设计。



图 8 汤雪川老师汇报教学设计



图 9 林徐劭老师汇报教学设计



图 10 顾海萍老师汇报教学设计



图 11 付敏老师汇报教学设计



图 12 蒋来老师汇报教学设计

随后，与会教师对八位教师的教学设计展开热烈讨论。华东师范大学教师教育学院硕士研究生吴越（图 13）介绍了《几何原本》以及早期教科书中的几种矩形定义，矩形的定义经历了漫长的发展过程，教师在定义教学时可以进行适当留白，以便顺利开展矩形的性质与判定的教学。华东师范大学附属宝山宝杨实验学校的黄芳老师（图 14）指出，学生已有关于中心旋转的知识基础，教师可以从旋转的角度引入，通过化繁为简提升学生数学能力。上海市晋元高级中学附属学校的薛平老师（图 15）认为，教学顺序的调整使得教学内容更具有数学性，并

对矩形定义从历史早期到当今教科书中变化的原因提出了自己的思考。上海市天山初级中学的沈晓阳老师（图 16）也分享了自己的深刻感受，沈老师指出，特殊四边形的对称性可以让学生感受从一般到特殊的数学过程，从性质定义的逆命题角度让学生进行推理证明有利于学生更加深刻地理解知识。



图 13 吴越同学点评



图 14 黄芳老师点评



图 15 薛平老师点评



图 16 沈晓阳老师点评

华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师从四个方面提出建议（图 17）。其一，学生的认知起点就是教学的起点，本节课教师站在学生对长方形以及平行四边形的已有知识基础上进行探究十分重要；其二，并非所有矩形的等价条件都要列入课堂教学；其三，性质定理与判定定理的教学顺序可以根据实际情况进行调整，教师可以给学生提供下定义的机会，充分体现课堂的留白教学；其四，课堂小结部分除了知识内容外，教师还应引导学生对本节课的数学思想方法进行总结。



图 17 邹佳晨老师点评



图 18 张玲玲老师点评

上海市梅陇实验中学的张玲玲老师（图 18）认为，由于学生已有对长方形的认知，因此简单的测量探究并非课堂的必要过程；学生已经历平行四边形的学习，教师可以给学生更多自主探究矩形的空间，再对学生的想法进行梳理和总结。

王华老师首先对各位教师的教学设计进行点评（图 19）。其一，各位教师的教学设计都富有单元意识，认知方式清晰，强调知识呈现的逻辑顺序；其二，各位教师拥有问题意识，会采用问题串呈现问题设计；其三，各位教师拥有学生意识，关注学生在课堂中的收获。其次，王老师指出，各位教师的教学设计缺乏留白，并提出以下建议：其一，引入部分可以体现发现之白、论证之白；其二，矩形性质的研究方式可以从共性性质与个性性质两个角度进行分类；其三，从性质到判定定理的过程中可以留出发现之白，从猜想到证明的过程应体现论证之白，留白教学可以采取分组讨论的形式以获取学生更多的想法；其四，教师可以进一步创造教科书中没有体现的内容，体现超越之白。最后，王老师以自己的亲身经历分享讲授式与探究式课堂的区别，指出教师应搞清楚教育的“源”和“流”，强调在探究式课堂中运用留白创造式教学的重要性，虽然课堂留白对教师有很高的要求，但对学生终身发展有重要作用。



图 19 王华老师点评



图 20 汪晓勤老师点评

汪晓勤老师（图 20）认为，若增加 HPM 元素和留白理念，各位老师的教学设计将更加精彩。汪老师首先介绍了四边形的数学史发展，其次从 HPM 和留白视角对“矩形的性质”以及“矩形的判定”两节课的教学设计提出建议。“矩形的性质”一课，在引入环节，从数学外部出发，设计伸缩门、地砖镶嵌、“没有规矩，不成方圆”等情境，从数学内部出发，可以回顾三角形面积公式的推导、由三角形到平行四边形的变换，进而探索由直角三角形到矩形的变换；在探究环节，矩形的性质部分可以让学生自己探索和说理，留出发现之白和论证之白；在应用环节，可以在例题编制中融入中华优秀传统文化，鼓励学生利用矩形的性质编写一道数学题，留出问题之白；在小结环节，应体现本节课从部分到整体、从一般到特殊的数学思想方法，引导学生感受人生启迪，留出超越之白；在作业布置环节，可以从如果没有或如果有平行四边形这两个角度，对四边形进行分类，进行数学写作。“矩形的判定”一课，在引入环节，从数学外部出发，设计窗户的测定、黑板的测定等情境，从数学的内部出发，引导学生回忆平行四边形的性质与判定，进而思考如何研究矩形；在探究环节，可以引导学生自己探索矩形的判定并说理，留出发现之白和论证之白；在小结环节，教师引导学生归纳为两种思维、三个判定定理、四点启示。

【同位角、内错角、同旁内角】

上海市晋元高级中学附属学校的薛平老师分享了“同位角、内错角、同旁内角”的教学设计（图 21）。薛老师首先从学校周边地图引入，抽象出其中的几何元素，即三线八角图；接着，薛老师以问题串的形式，探究情境中八个角之间的关系，除对顶角和邻补角外，引导学生对剩余角的关系进行分类和命名；最后在例题环节设计三线十二角的变式问题，体现化归思想。



图 21 薛平老师汇报教学设计

邹佳晨老师表示，薛平老师的教学设计充分体现了留白教学的理念，引导学生命名的环节

可以让学生经历数学发展的过程，教师可以在问题设计上进一步思考，以促进学生在问题思考中的创造与收获。

汪晓勤老师从 HPM 和留白视角进行点评。其一，教师可以加入微视频，介绍关于三线八角的数学史发展；其二，在小结环节，教师可以引导学生总结相关数学研究方法，通过局部来研究整体、根据有限来探究无限、从量到质、从古到今，进一步体现超越之白。

在线上线下与会老师和同学们的热烈讨论中，本次课例研讨活动圆满结束。本次研讨活动充分体现了 HPM 研究团队与一线教师的深度合作与共同成长，促使教师们从 HPM 融入初中数学课堂和留白创造式教学两个角度对数学教学有更深入思考，也期待未来能够呈现出更多精彩的课例。



图 22 华东师范大学附属贵阳学校线上参与活动