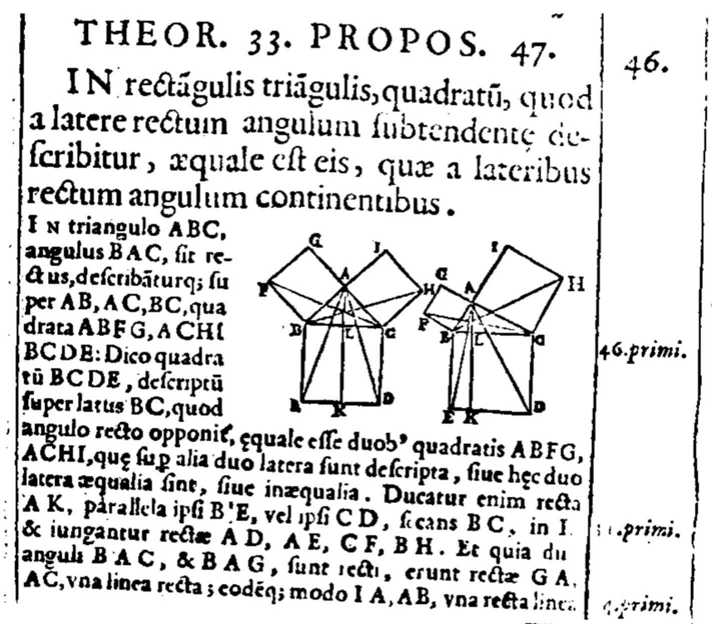
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2024 年第 13 卷第 01 期


THEOR. 33. PROPOS. 47. 46.

IN rectãgulis triãgulis, quadratũ, quod a latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus.

IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, describãturq; super AB, AC, BC, quadrata ABFG, ACHI BCDE: Dico quadratũ BCDE, descriptũ super latus BC, quod angulo recto opponit, ęquale esse duob' quadratis ABFG, ACHI, quę sup alia duo latera sunt descripta, siue hęc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L. & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, & BAG, sunt recti, erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodẽq; modo IA, AB, vna recta linea erunt

46.primi.

31.primi.

14.primi.

克拉维斯《几何原本》注释本（1574）中的勾股定理

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首新语

中华优秀传统文化融入数学课程的价值探析

孙丹丹

（山东师范大学数学与统计学院, 山东 250358）

2021 年 1 月教育部印发《中华优秀传统文化进中小学课程教材指南》，首次对中小学课程教材如何有效落实中华优秀传统文化教育进行了顶层设计，2022 年 4 月，《义务教育数学课程标准（2022 年版）》（以下简称“标准”）在基本课程理念中首次将继承和弘扬中华优秀传统文化作为数学课程内容选择的原则之一。为什么强调将中华优秀传统文化融入数学课程？换言之，中华优秀传统文化融入数学课程有怎样的教育价值？

1 作为工具的传统文化

工具价值强调中华优秀传统文化所扮演的促进学生数学学习的工具角色，包括激励学生研究数学的情感价值以及促进学生数学理解的认知价值。

（1）提供探究情景

数学和华夏大地的生产生活交融在一起，许多促进数学知识发展的情境及数学的应用情境都可以被直接运用或改编为数学探究情境，这样的情境可以揭示数学学习的必要性及重要性，而且因扎根本土而对学生有别样的吸引力。例如，生活中经常听到“五音不全”的说法，宫-商-角-徵-羽是中国古乐五个基本音阶，五音对应律管长度可以用三分损益法推算，这种方法依赖于分数的乘法及加减法，可以作为分数乘法的探究情境。

（2）解释知识缘由

历史发展的来龙去脉蕴含着知识的认知根源，有些数学知识缘由只能从我国传统数学文化土壤中探寻，特别是术语之源，例如“小数”“方程”的命名缘由。中华传统文化中新知及孕育其诞生的背景还以一种特定方式昭示着知识之间的相互关联，体现着知识生成的意义，例如，我国传统数学中小数诞生的缘由揭示了其与度量衡、十进制计数法、十进分数的内在关联，说明了测量情境之于小数学习的重要性。

（3）彰显思想方法

在时间的长河里，从宏观而非局部的角度审视数学，更容易识别那些具有重要意义的思想方法，而且不同文化背景孕育出的思想方法具有不同特色。例如，中国古人善用出入相补原理处理各种几何问题，其中之一是面积求解，《九章算术》中首先给出基本图形矩形的面积计算方法，三角形、梯形等图形的面积都可通过出入相补原理转化为矩形面积。

2 作为目标的传统文化

除了作为工具，了解与数学有关的优秀传统文化本身就是一种教育目标。这些目标可以在数学学习中潜移默化地达成，与数学学习相得益彰。

（1）培育数学观念

我国传统数学植根于中华历史文化经脉中，其发展有着不同于西方数学的一面，是培育学生全面数学观不可或缺的素材，可以涵养学生对数学本质及作用的洞察力。例如，我国古代分数理论的发达揭示了数学与音乐以及天文学的交融关系，《九章算术》展示了数学与实践生活乃至社会文化背景的密切关联，咫尺天涯、半斤八两等成语则显示了数学与文学的联系。

（2）坚定文化自信

我国传统数学虽注重实用，没有发展出西方数学严密的公理化体系，但在诸多方面曾领先世界，对印度、阿拉伯乃至世界范围内的数学发展产生重要影响，这有助于帮助学生坚定文化自信。例如，在十进制计数法、小数、负数、分数算法、圆周率计算、方程求解等重要数学主题上我国都曾领先欧洲上千年。

（3）涵养中华精神

中华优秀传统文化积淀着多样而珍贵的精神财富，中国古代数学家的人格特质、学术态度等是数学教学中实施德育的理想素材，例如，三国时期的布衣数学家赵爽为生计而辛劳，却“负薪余日，聊观《周髀》”，珍惜光阴，勤奋钻研，南北朝时期祖暅潜心研究，“当其诣微之时，雷霆不能入”，对数学的执着与热爱可见一斑。

作为工具与作为目标是中华优秀传统文化在教育场景的两个价值面向，二者虽有区别但也互相关联。当传统文化扮演促进学生数学学习的工具角色时，往往稍作延伸引导便可达成了解传统文化的目标，若想深入了解与数学相关的优秀传统文化，必须学习理解其中的数学元素。

目 录

CONTENT

历史研究

从欧氏几何命题到平面三角学定理

汪晓勤

（华东师范大学数学科学学院，上海 200241）

众所周知，欧几里得《几何原本》卷二命题 12 和 13 是卷一命题 47（勾股定理）的推广，是余弦定理的几何形式[1]。在 HPM 视角下的课堂教学中，教师可以借鉴历史，从勾股定理出发，引导学生寻求斜三角形三边之间的关系，学生通过作高，两次运用勾股定理，即可推导出余弦定理的结论。但在正弦定理的教学中，由于不知道定理的几何形式，教师在引导学生从“三角形大边对大角”出发进一步寻求其定量关系时，缺乏历史的参照。

《几何原本》包含了平面几何最重要的三个定理：卷一命题 32（三角形内角和定理）、命题 47 和卷六命题 6（相似三角形判定定理），它们分别给出了三角形角的关系、边的关系和边角关系的基础，因此，有理由相信，三角学中的许多定理和公式必然可以在这部“数学圣经”中找到源头。本文试图以欧氏命题及其证明为出发点，运用直角三角形中的边角关系，导出人们熟悉的三角学定理或公式，为 HPM 课例研究提供教学素材和思想启迪。

1 三角形等面积定理

《几何原本》卷一命题 38 称：“等底且位于相同二平行线之间的三角形彼此相等。”[2]如图 1，在△ABC 中，$BC = a$，$AC = b$，$AB = c$（下文同），CD 是底边 AB 上的中线，则△ADC 和△DBC 的面积相等。过点 D 分别作 AC 和 BC 的垂线，垂足为点 E 和 F。由三角形面积公式得 $AC\times DE=BC\times DF$，故得

$$\frac{b}{a}=\frac{AC}{BC}=\frac{DF}{DE}=\frac{\sin B}{\sin A}。$$

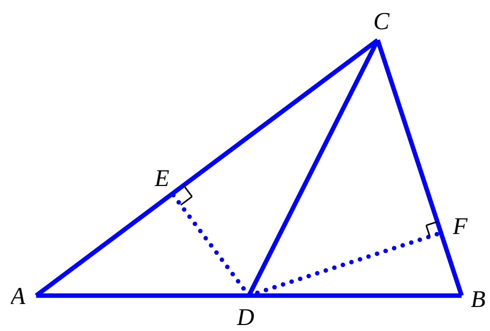


图 1 正弦定理证明之一

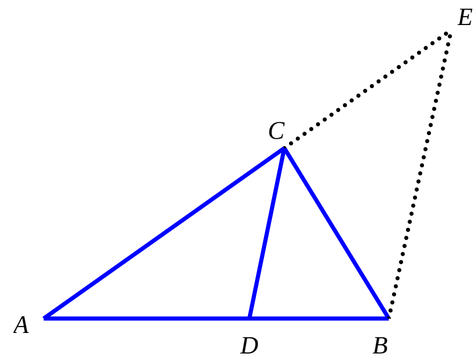


图 2 《几何原本》卷六命题 3

2 三角形角平分线定理

《几何原本》卷六命题 3 第一部分称：“三角形一个角的平分线截对边成两段，则这两段之比等于三角形另两边之比。”[2]如图 2，在$\triangle ABC$中，CD是$\angle ACB$的平分线，则$AC:BC=AD:BD$。欧几里得的证明如下：延长AC至点E，使得$CE=BC$，连结EB，易知$CD//EB$，故$AC:CB=AC:CE=AD:DB$。

如图3，过点D分别作AC和BC的垂线，垂足为点F和G，则$DF=DG$，于是得

$$\frac{b}{a}=\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{\frac{DG}{BD}}{\frac{DF}{AD}}=\frac{\sin B}{\sin A}。$$

可见，角平分线定理可以视为正弦定理的几何形式。

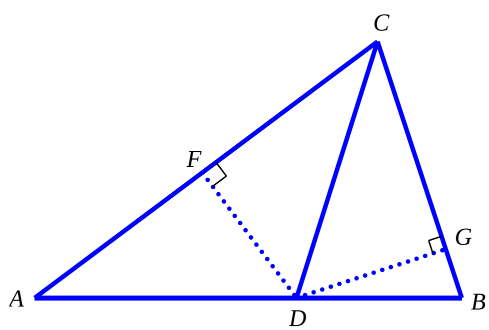


图 3 正弦定理证明之二

另一方面，欧几里得关于角平分线定理的证明也为正弦定理的证明带来启示：如图 4，在$\triangle ABC$中，不妨设$AC>AB$，过点C作AB的垂线，垂足为点H；以C为圆心、CB为半径作圆，

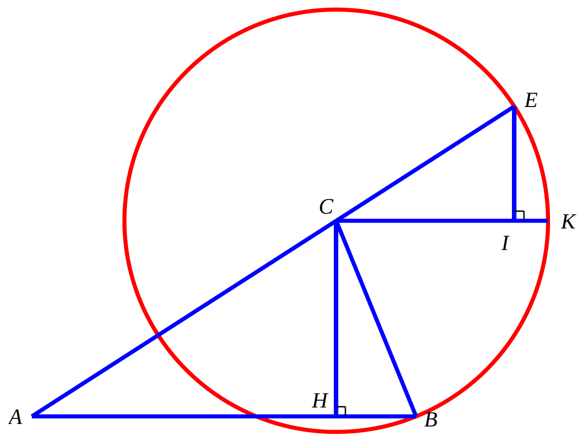


图 4 正弦定理证明之三

交 AC 的延长线于点 E；过点 C 作 AB 的平行线，交圆于点 K；过点 E 作 CK 的垂线，垂足为点 I。因 Rt△AHC∽Rt△CIE，故有

$$\frac{b}{a}=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{CE}=\frac{CH}{EI}=\frac{\sin B}{\sin\angle ECI}=\frac{\sin B}{\sin A}。$$

或者以 C 为圆心，以 CA 为半径作圆，交 CB 的延长线于点 E，分别过点 B 和 E 作 CK 的垂线，垂足为点 J 和 I（见图 5）。于是有

$$\frac{b}{a}=\frac{AC}{BC}=\frac{EC}{BC}=\frac{EI}{BJ}=\frac{EI}{CH}=\frac{\sin\angle ECI}{\sin A}=\frac{\sin B}{\sin A}。$$

上述两种证明均属于等径法[3]，与梅文鼎的方法一脉相承。

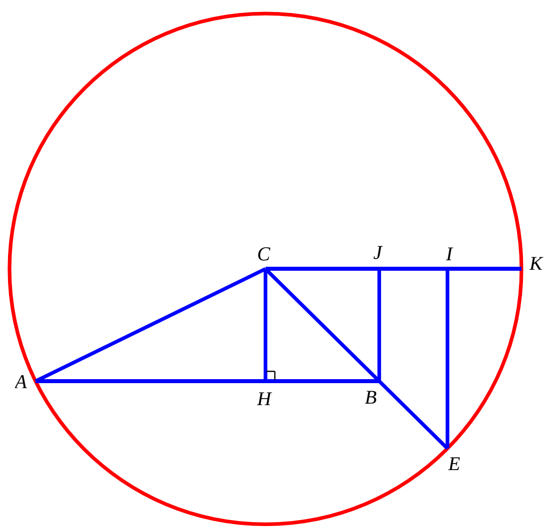


图 5 正弦定理证明之四

3 三角形大边对大角

《几何原本》卷一命题 18 称："在任何三角形中，大边对大角。"[2]如图 6，在△ABC 中，若 $AC > BC$，则$\angle ABC > \angle A$。欧几里得的证明如下：在 AC 上取点 F，使得 $CF = CB$，连结

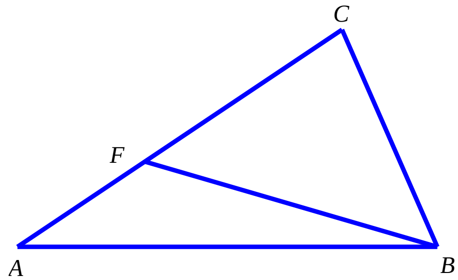


图 6《几何原本》卷一命题 18

BF，于是$\angle ABC > \angle FBC = \angle CFB > \angle A$。

如图 7，以 C 为心、以 CB 为半径作圆，交 AC 延长线于点 E，连结 BE，根据卷三命题 31 的一部分（"半圆上的角是直角"[2]）知，$\angle FBE$ 是直角。过点 F 作 BE 的平行线，交 AB 于点 G。易知 $\angle CFB = \angle CBF = \frac{1}{2}(B + A)$，$\angle ABF = \frac{1}{2}(B - A)$。因 $AF:AE = FG:EB$，故有

$$\frac{b-a}{b+a} = \frac{\tan\frac{B-A}{2}}{\tan\frac{B+A}{2}},$$

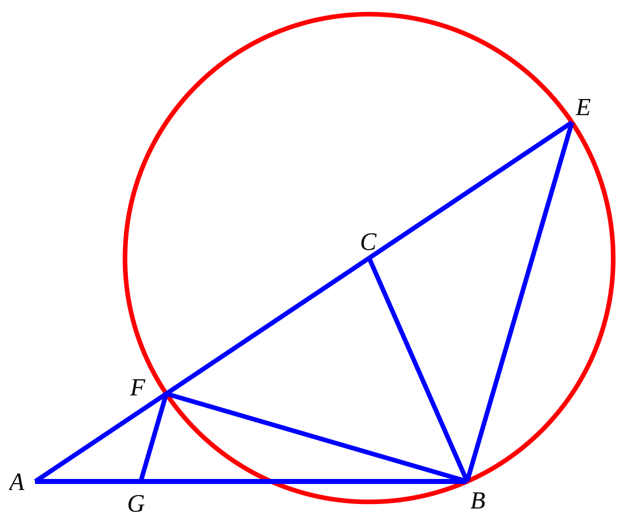


图 7 正切定理的证明

或即

$$b-a=(b+a)\tan\frac{C}{2}\tan\frac{B-A}{2} \qquad (1)$$

等式（1）建立了“两边之差与其对角之差”之间的定量关系。

4 三角形两边之和大于第三边

《几何原本》卷一命题 20 称：“在三角形中，任意两边之和大于第三边。”[2]如图 8，在△ABC 中，$a+b>c$，$c+a>b$，$b+c>a$。欧几里得的证明如下：延长 AC 至 D，使得 $CD=BC$，于是，在△ADB 中有$\angle ABD>\angle CBD=\angle D$，故 $AD>AB$，即 $a+b>c$。

以 A 为圆心，AB 为半径作圆，交 AD 于点 F，延长 DA 和 DB，分别交圆于点 E 和 G，过圆心 A 作 BC 的平行线，交 DG 的延长线于点 H。又过点 B 作 AD 的平行线，交 AH 于点 I。易证 $BD=GH$，故 $DG=BH$。在等腰△CBD 和等腰△IHB 中，$\angle CBD=\angle D=\angle IBH=\angle H=$

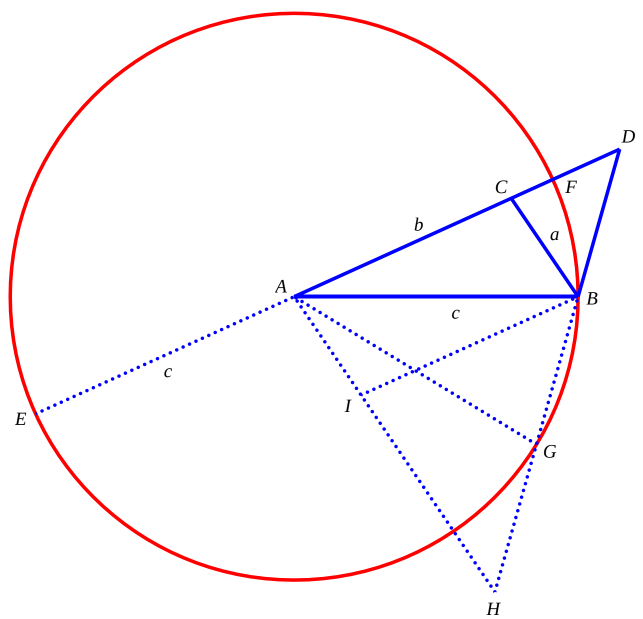


图 8 余弦定理新证之一

$\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{C}{2}$，$BD=2a\cos\frac{C}{2}$，$BH=2b\cos\frac{C}{2}$。于是，由割线定理（《几何原本》卷三命题 36 之推论）得 $DF\times DE=DB\times DG$，即

$$(a+b-c)(a+b+c)=4ab\cos^2\frac{C}{2} \qquad (2)$$

也可以 A 为圆心，AD 为半径作圆，利用相交弦定理得到等式（2），如图 9 所示。

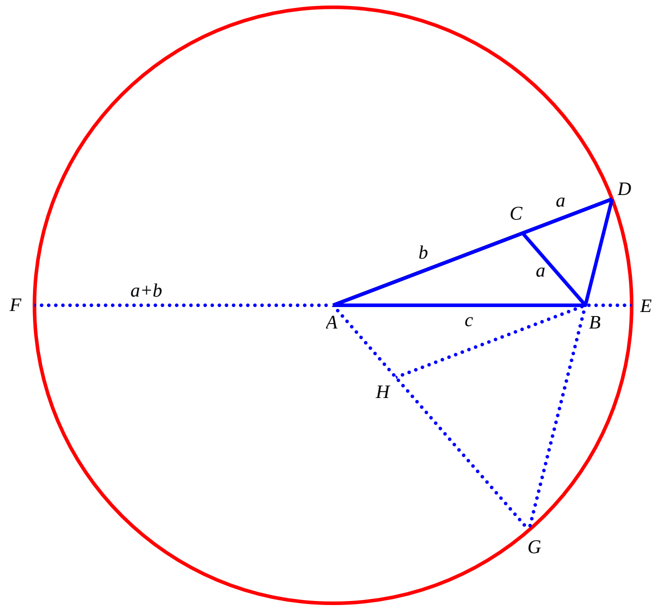


图 9 余弦定理新证之二

由（2）可得

$$a+b-c=\frac{4ab}{a+b+c}\cos^2\frac{C}{2} \qquad （3）$$

等式（3）回答了“三角形两边之和比第三边大多少”的问题。

等式（2）和余弦定理的结论是等价的：由（2）得

$$(a+b)^2-c^2=4ab\cos^2\frac{C}{2}，$$

即

$$\begin{aligned} c^2&=(a+b)^2-4ab\cos^2\frac{C}{2}\\ &=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)\\ &=a^2+b^2-2ab\cos C。\end{aligned}$$

反之，由 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 可得等式（2）。

5 三角形边角边定理

《几何原本》卷一命题 24 称：“若一个三角形的两边分别等于另一个三角形的两边，且其中一个夹角大于另一个夹角，则夹角大的其对边也较大。”[2]如图 10，在△ABC 和△DEF 中，

$AB = DE$，$AC = DF$，$\angle A > \angle D$，则 $BC > EF$。欧几里得的证明如下：在$\triangle ABC$ 中，作$\angle BCG = \angle D$，取 $CG = DE$，连结 AG 和 BG，则 $GB = EF$。因$\angle AGB > \angle AGC = \angle GAC > \angle GAB$，故 $AB > GB = EF$。

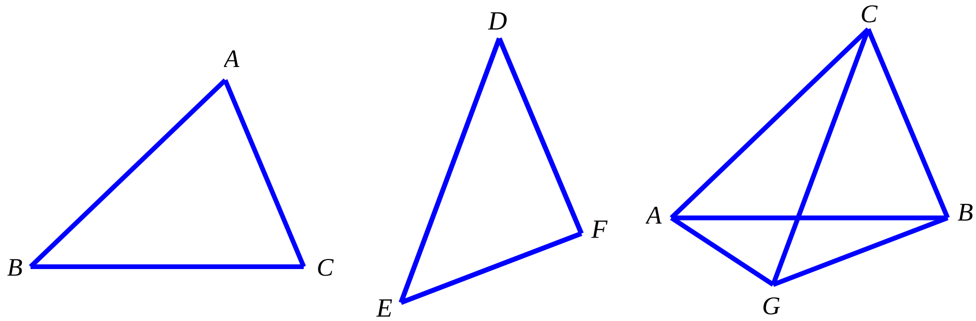


图 10 边角边定理

从欧几里得的上述证明出发，可以导出余弦定理。如图 11，在$\triangle ABC$ 中，不妨设$\angle ACB=\theta$ 为锐角。在 BC 上作$\angle BCD = \varphi > \angle ACB = \theta$，且在其边上取 $CD = CA = b$，连结 BD，设 $BD = c'$。以 B 为圆心、BD 为半径作圆，交 AB 的延长线于点 E 和 F，连结 DA 并延长，交圆于点 G。

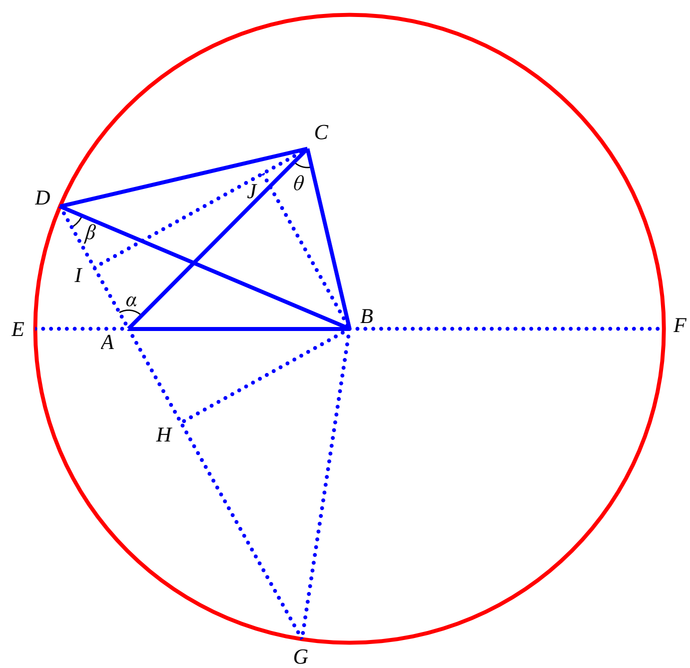


图 11 余弦定理新证之三

分别过点 B 和 C 作 DG 的垂线，垂足为点 H 和 I，又过点 B 作 CI 的垂线，垂足为点 J。设 $\angle CAD = \alpha$，$\angle ADB = \beta$，则 $\angle DCI = \angle ACI = \dfrac{\varphi-\theta}{2}$，$\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi-\theta}{2}$，$\angle BCJ = \dfrac{\varphi+\theta}{2}$。由相交

弦定理得 $EA \times AF = DA \times AG$，即

$$(c'-c)\times(c'+c) = 2b\cos\alpha \times (2c'\cos\beta - 2b\cos\alpha),$$

相继利用差角公式、射影公式和积化和差公式得

$$\begin{aligned}
c'^2 - c^2 &= 4b\left(c'\cos\alpha\cos\beta - b\cos^2\alpha\right) \\
&= 4b\left[c'\left(\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta\right) - b\cos^2\alpha\right] \\
&= 4b\left(b - a\cos\varphi - c'\sin\alpha\sin\beta - b\cos^2\alpha\right) \\
&= 4b\left(b\sin^2\alpha - c'\sin\alpha\sin\beta - a\cos\varphi\right) \\
&= 4b\sin\alpha\left(b\sin\alpha - c'\sin\beta\right) - 4ab\cos\varphi \\
&= 4ab\cos\frac{\varphi+\theta}{2}\cos\frac{\varphi-\theta}{2} - 4ab\cos\varphi \\
&= 2ab\left(\cos\varphi + \cos\theta\right) - 4ab\cos\varphi \\
&= 2ab\left(\cos\theta - \cos\varphi\right),
\end{aligned}$$

故得

$$c' - c = \frac{4ab}{c'+c}\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2} \tag{4}$$

等式（4）是对三角形边角边定理的定量刻画。当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时，$c'^2 = a^2 + b^2$，于是有

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta。$$

类似可以解决θ为钝角的情形。

6 勾股定理

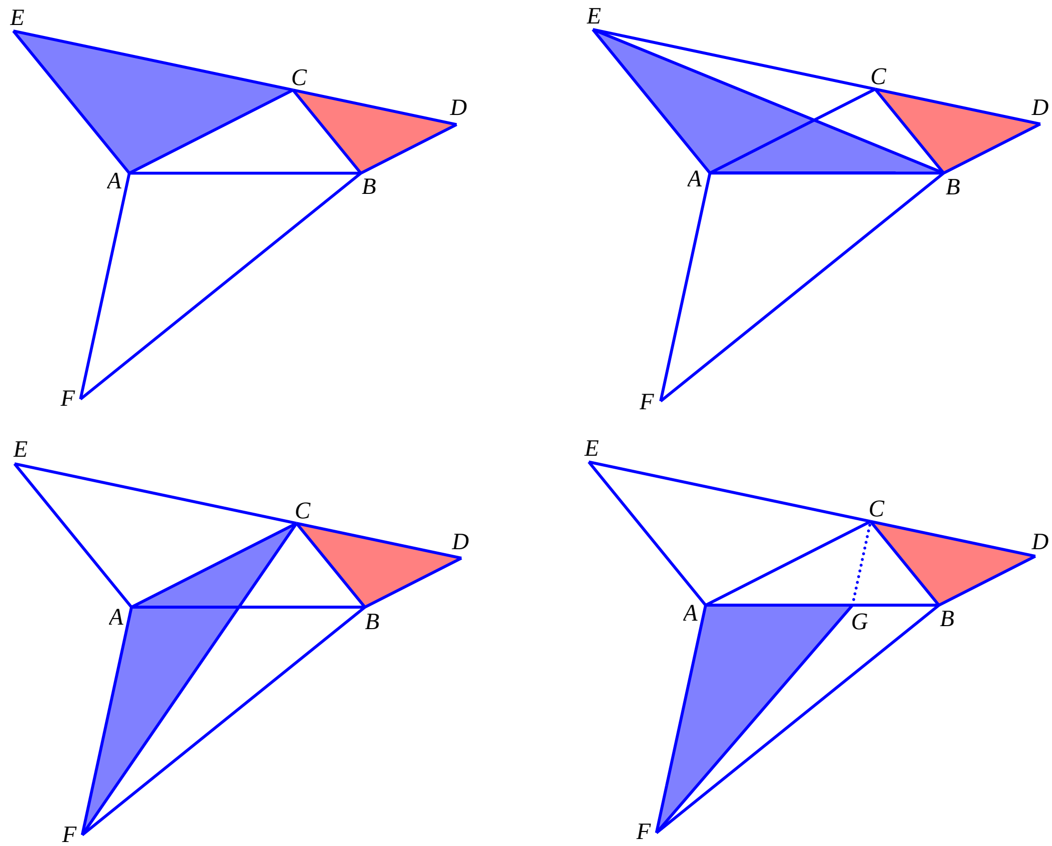
欧几里得在卷二命题 12 和 13 中将勾股定理推广到了斜三角形，又在卷六命题 31 中将直角三角形三边上所作的正方形推广到了以直角三角形三边为对应边、且两两相似的任意多边形，但并未考虑在斜三角形三边上作以其三边为对应边、且两两相似的任意多边形。综合卷二命题 12 和 13 以及卷六命题 31，可以得到余弦定理的新证明。

如图 12，在△ABC 中，$\angle ACB$ 为钝角，在三边上各作等腰△ABF、BCD 和 ACE，其顶角均

等于$\angle ACB$，且三边各为相应等腰三角形的一条腰。依次将$\triangle ACE$ 进行等积变换、旋转、再等积变换，得到$\triangle AGF$；依次将$\triangle BCD$ 进行等积变换、旋转、等积变换、再等积变换，得到$\triangle BIF$。因此，$\triangle ACE$ 和$\triangle BCD$ 的面积之和与$\triangle ABF$ 的面积相差了$\triangle GIF$ 的面积。因$\triangle AGC \backsim \triangle ACB \backsim \triangle CIB$，故得$CG = CI = \dfrac{ab}{c}$，于是有$GI = -\dfrac{2ab}{c}\cos C$，故得

$$S_{\triangle GIF} = \frac{1}{2} GI \times c\sin C = -ab\sin C\cos C$$

从而得



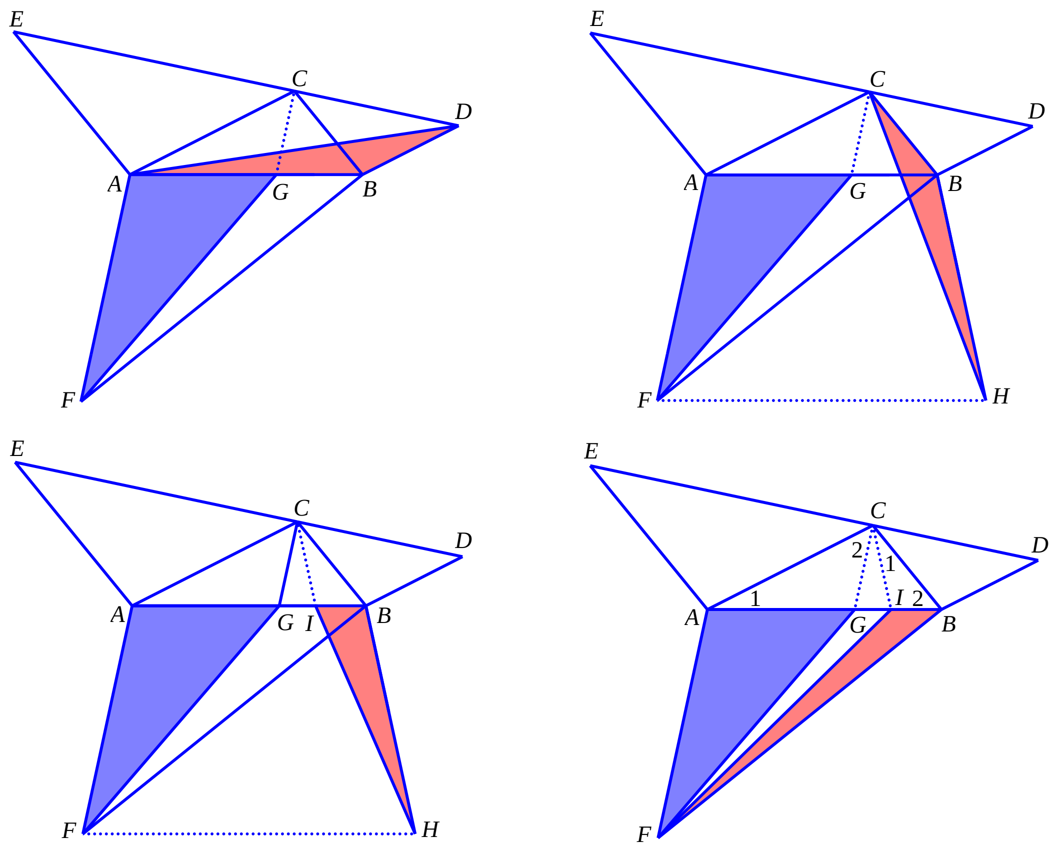


图 12 余弦定理新证之四

$$\frac{1}{2}c^2\sin C=\frac{1}{2}a^2\sin C+\frac{1}{2}b^2\sin C-ab\sin C\cos C,$$

于是有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C。$$

类似地，也可以证明锐角三角形的情形。

7 分线段平方和定理

《几何原本》卷二命题 18 称：“分别将一条线段分成相等和不等的两段，则不等两段上的正方形之和等于原线段一半上的正方形和两分点之间一段上的正方形之和的两倍。”[2]如图 13，点 D 和 F 分别平分和不等分线段 AB，则 $AF^2+FB^2=2\left(AD^2+DF^2\right)$。欧几里得的证明如下：过点 D 作 AB 的垂线，并在其上取 $DC=AD$，连结 AC 和 BC；过点 F 作 AB 的垂线，交 BC 于点 E，过点 E 作 DC 的垂线，垂足为 G，于是

$$AF^2+FB^2=AF^2+FE^2=AE^2=AC^2+CE^2=2\left(AD^2+GE^2\right)=2\left(AD^2+DF^2\right)$$ 。

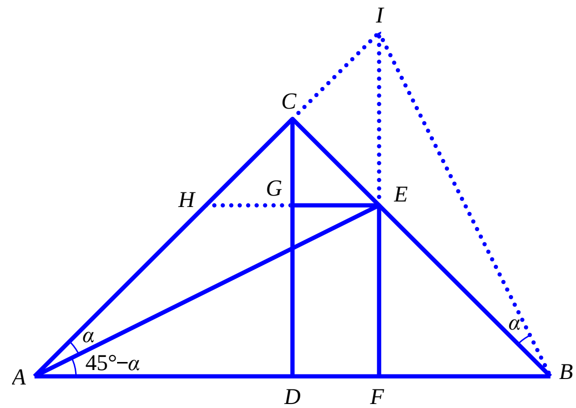


图 13 平方和定理

利用欧几里得的图形，可推导出若干三角公式。延长 *FE*，交 *AC* 的延长线于点 *I*，连结 *BI*，易证 Rt△*BCI* ≅ Rt△*ACE*；延长 *EG*，交 *AC* 于点 *H*。设 *AC* = 1，$\angle CAE=\alpha$，则 $CE=CH=CI=\tan\alpha$，$\angle CBI=\alpha$。于是得

$$\tan\left(45^\circ-\alpha\right)=\frac{EF}{AF}=\frac{EF}{IF}=\frac{AH}{AI}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha},$$

$$\tan\left(45^\circ+\alpha\right)=\frac{IF}{BF}=\frac{IF}{EF}=\frac{AI}{AH}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}。$$

如图 14，在一般等腰△*ABC* 中，*AC*=*BC*，作 *AE*⊥*BC*，垂足为点 *E*；作 *EG*⊥*CD*，垂足为点 *G*。设 *AC*=*BC*=1，则可导出若干倍角或半角公式，如，在 Rt△*AEB* 中有：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha,$$

$$\tan\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha};$$

又由 *H*、*D*、*B*、*E* 四点共圆得 *CE*×*CB* = *CH*×*CD*，即

$$\cos 2\alpha=\left(\cos\alpha-\sin\alpha\tan\alpha\right)\cos\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha。$$

欧几里得的图形还可以启发人们去发现和角公式的帕普斯模型。

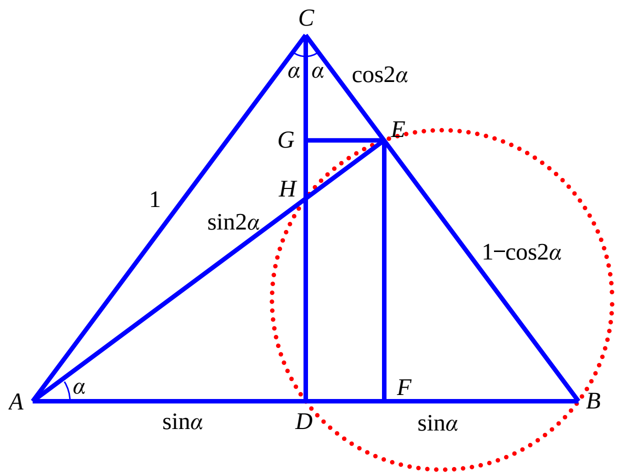


图 14 部分倍角或半角公式的几何证明

8 教学启示

以上我们看到，正弦定理和余弦定理一样，在《几何原本》中也有其几何形式；如果说，正弦定理是对命题“三角形大边对大角”的定量刻画，那么正切定理是对同一命题的另一种刻画，余弦定理则是对命题“三角形两边之和大于第三边”和三角形边角边定理的定量刻画；从欧氏有关命题及其证明出发，可以证明正余弦定理或推导三角公式。

三角学定理或公式的几何溯源为 HPM 视角下的数学教学提供了诸多启示。

其一，从定性到定量。在正弦定理的教学中，教师可以从命题“大边对大角”的定性描述出发，引出边角定量关系问题，然后引导学生从平面几何中的三角形等面积定理或角平分线定理出发，将三角形两边之比转化为对角正弦之比；在余弦定理的教学中，教师可以从命题“两边之和大于第三边”或边角边定理的定性描述出发，引出“两边之和比第三边大多少”或“已知三角形两边及其夹角，如何求第三边”的问题，然后引导学生在欧氏图形的基础上进一步作圆，利用割线定理或相交弦定理导出余弦定理的结论。这样，正余弦定理的设计思路就得到了统一。

其二，从留白到创新。数学的历史就是前人留白、后人创新的历史，留白是创新的必要条件[4][5]。类似地，在数学教学中，教师唯有留白，方能引发学生的创新，而“否定属性”是留白的重要策略之一。从欧氏几何命题中的定性描述出发，寻求定量刻画，就是留白和补白的过程。对于学生耳熟能详的勾股定理，教师留下发现之白：“如果已知的三角形不是直角三角形，

且在其三边上所作的图形不是正方形，结果会如何？”学生通过补白，发现余弦定理，这种教学方式是是培养学生创新能力的需要，是“留白创造式教学”[6]的应有之义。

其三，从历史到课堂。作为一个学术领域，HPM（数学史与数学教育之间的关系）在今天已经受到普遍关注，但历史知识的缺失仍然是“HPM 视角下的数学教学”的主要障碍之一。本文的讨论表明，虽然人们对《几何原本》并不陌生，但以教学为目的重新研读这部数学经典，仍然是很有意义的。教育取向的历史研究揭示了一个道理：言“有”易，说“无”难。欧几里得的许多命题看上去稀松平常，其实都为后人留了“白”，正弦定理的几何形式不过是其中一例而已。

参考文献

[1] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前的余弦定理历史[J]. 数学通报, 2015, 54(8): 9-14.

[2] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* (Vo. I & II) [M]. Cambridge: The Cambridge University Press, 1908.

[3] 汪晓勤, 等. 美英早期三角学教科书研究[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[4] 汪晓勤. 数学史上的留白与创新[J]. 中学数学月刊, 2023(4): 1-4.

[5] 汪晓勤. 从克拉维斯《几何原本》注看数学家的创新[J]. 数学通报, 2023, 62(6): 1-6, 30.

[6] 王华, 等. 中小学数学留白创造式教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

勾股定理历史上的留白与创新

赵哲栋

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

1 引 言

创新意识的培养在学生的全面发展中占据重要地位。《普通高中数学课程标准（2017 版 2020 年修订）》提出，高中数学课程的目标之一是提升学生的创新意识[1]。教师的留白是学生创新的必要条件[2]。留白创造式教学是以学生为中心，立足育人目标，为学生学习留下充分的思维空间与探究机会，让学生在已有的知识基础上，主动学习、解决问题、创获新知、陶熔品行的教学方式[3]。那么，教师如何给学生留白、引导学生创新、实施留白创造式教学呢？历史上数学工作者的留白与创新为留白创造式教学提供了素材及思想启迪，是留白创造式教学的思想源泉。勾股定理是人们熟悉的例子，对这一主题，不同时空的数学家做了很多留白与补白的工作。本文以勾股定理的推广为例，分析数学工作者在提出新命题和发现新方法时所运用的策略，并结合历史上勾股定理的推广方式给出了留白与补白建议，希望能为教师的留白创造式教学提供启示。

2 勾股定理及推广

2.1 《几何原本》中的勾股定理

《几何原本》卷一命题 47 给出："在直角三角形中，直角所对的边上的正方形等于夹直角两边上的正方形的和。"欧几里得的证明可以概述如下：

如图 1，在 Rt$\triangle ABC$ 的三边上分别作正方形 $BDEC$、$AGFB$ 和 $AHKC$。过点 A 作 $AL\perp DE$，垂足为 L，交 BC 于点 M。连结 AD 和 FC。易证$\triangle ABD\cong\triangle FBC$，从而 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle FBC}$。进行面积转化，可证 $S_{\square BDLM}=2S_{\triangle BDA}=2S_{\triangle BCF}=S_{\square AGFB}$。类似可证 $S_{\square CELM}=S_{\square AHKC}$。故 $S_{\square BDEC}=S_{\square BDLM}+S_{\square CELM}=S_{\square AGFB}+S_{\square AHKC}$。

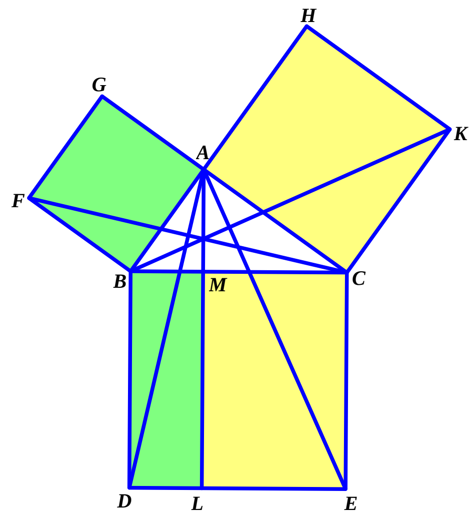


图 1 欧几里得对勾股定理的证明

2.2 欧几里得关于勾股定理的推广

欧几里得在《几何原本》中，从两个方向对命题 I.47 进行了推广，一是改变三角形的形状，二是改变三边上所作的图形形状。

若改变三角形的形状，则可以得到余弦定理的几何形式：

命题 II.12：在钝角三角形中，钝角所对的边上的正方形比夹钝角的二边上的正方形的和还大一个矩形的二倍。即由一锐角向对边的延长线作垂线，垂足到钝角之间一段与另一边所构成的矩形。

命题 II.13：在锐角三角形中，锐角对边上的正方形比所夹锐角二边上正方形的和小一个矩形的二倍。即由另一锐角向对边作垂直线，垂足到原锐角顶点之间一段与该边所构成的矩形。

若改变三边上所作的图形形状，如图 2 所示，可以得到所作的图形面积之间的关系：

命题 VI.31：在直角三角形中，对直角的边上所作的图形等于夹直角边上所作与前图形相似且有相似位置的二图形的和。

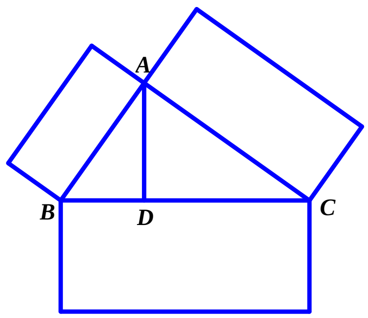


图 2 直角三角形三边上作相似矩形

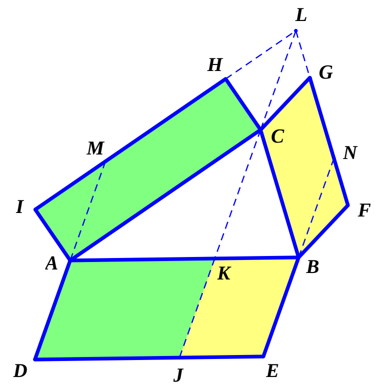


图 3 帕普斯命题

2.3 帕普斯关于勾股定理的推广

古希腊数学家帕普斯（Pappus, 3 世纪末）同时改变三角形形状和三边上所作的图形，提出了新命题[4]：如图 3，在任意△*ABC* 的边 *AC* 和 *BC* 上分别作▱*ACHI* 和▱*BCGF*，延长 *IH* 和 *FG* 交于点 *L*，在 *AB* 上作▱*ADEB*，使得 *AD* 平行且等于 *LC*。延长 *LC*，分别交 *AB* 和 *DE* 于点 *K* 和 *J*，则 $S_{\square ABED}=S_{\square AIHC}+S_{\square BFGC}$。

证明过程沿用了欧几里得的面积转化思想，如图 3，借助▱*AMLC* 和▱*BNLC* 的过渡，$S_{\square AIHC}=S_{\square ADJK}$，$S_{\square BFGC}=S_{\square BEJK}$，从而证明了命题。

2.4 兰特内对勾股定理的推广

通过改变《几何原本》命题 I.47 中三角形的形状，且在三边上作菱形，18 世纪法国数学家兰特内（M. Lantenée, 1679-1750）发现了类似于余弦定理的一个新命题[5]。针对钝角三角形的情形，兰特内的证明如下：

如图 4，在 *BC* 上作菱形 *BD*，使得∠*BCD*＝∠*BAC*，且在 *BA*、*AC* 上作菱形 *ABMG* 和 *ACKF*，使得∠*ABM* = ∠*ACK* = ∠*BAC*。顺时针旋转 *BC* 至 *BE*，使得∠*CBE* = ∠*BAC*。过点 *A* 作 *BE* 的平行线，分别交 *BC* 和 *ED* 于点 *H* 和 *P*，又过点 *A* 作 *CD* 的平行线，分别交 *BC* 和 *ED* 于点 *L* 和 *I*。此时，*CA* 和 *AG*、*BA* 和 *AF* 分别位于同一条直线上。可证，△*ABE*≌△*MBC*（SAS）。类似于勾股定理的情形，可证 $S_{\square BEPH}=S_{\square AGMB}$。同理，$S_{\square CDIL}=S_{\square AFKC}$。过点 *H* 作 *HS*//*CD*，交 *ED* 于

点 S，则 $S_{\square BTSH}=S_{\square BEPH}$。故整个菱形 $BTDC$ 的面积比两个菱形 $AGMB$ 和 $AFKC$ 的面积之和还多了 $\square HSIL$ 的面积。这可视作余弦定理的一种几何表达方式。当钝角变成直角时，就得到了勾股定理。

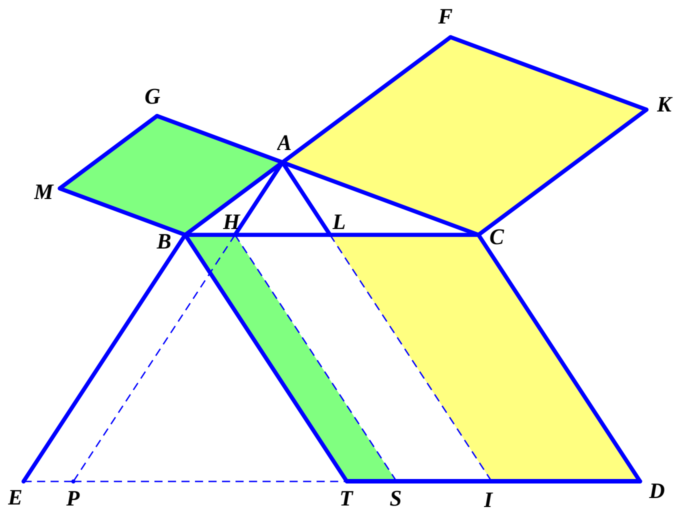


图 4 兰特内对勾股定理的推广

求出 $\square HSIL$ 的面积，即可得余弦定理的结论。实际上，改变某个菱形钝角的位置，也能够得到余弦定理的新证法。

如图 5，易证：$\triangle ABE\cong\triangle MBC$，$\triangle ACD\cong\triangle KCB$，$S_{\square BEIH}=S_{\square AGMB}$，因 $\triangle KCA$ 和 $\triangle FAB$ 的高之和等于 $\triangle KCB$ 的高，且三个三角形底边长度相同，所以 $S_{\triangle KCB}=S_{\triangle KCA}+S_{\triangle FAB}$，从而 $S_{\square CDIH}=2S_{\triangle CDA}=2S_{\triangle KCB}=S_{\square ACKF}+2S_{\triangle FAB}$。用代数式表达各面积，即

$$c^2\sin C=a^2\sin C+b^2\sin C+2\times\frac{1}{2}ab\sin(2\pi-2C),$$

注意 $\sin C\neq 0$，化简即得余弦定理。

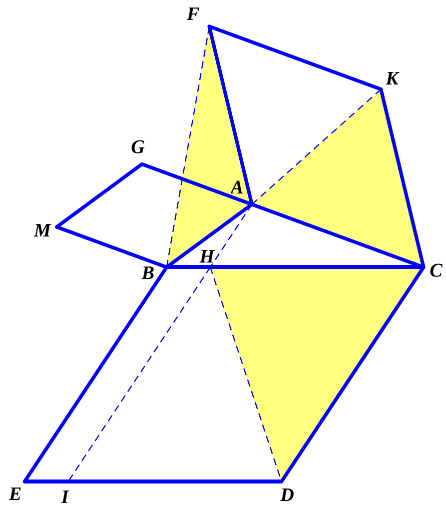


图 5 余弦定理的一种证明

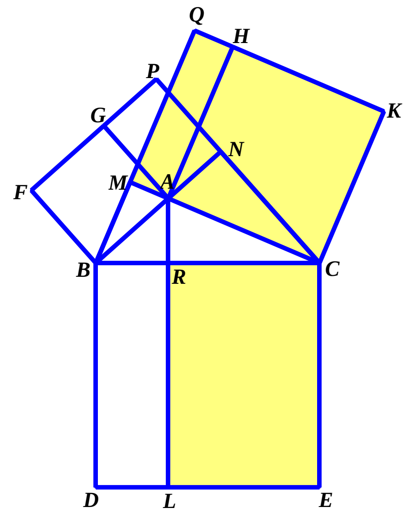


图 6 钝角三角形情形的余弦定理

3 新方法的运用

3.1 格雷戈里对余弦定理的新证明

17 世纪荷兰数学家格雷戈里（Gregory of Saint-Vincent,1584-1667）将欧几里得证明勾股定理的面积方法用于斜三角形，得到了余弦定理[6]。如图 6，在钝角△*ABC* 的三边 *BC*、*CA* 和 *AB* 上分别作正方形 *BCED*、*CAHK* 和 *ABFG*。过三个顶点分别作对边的垂线，垂足分别为 *R*、*M*、*N*；与 *DE*、*FG* 的延长线和 *KH* 的延长线分别交于点 *L*、*Q* 和 *R*。则有 $S_{\square BDLR}=S_{\square BFPN}$ 和 $S_{\square CELR}=S_{\square CKQM}$。于是，*BC* 上正方形的面积比 *BA* 和 *AC* 上正方形面积之和还大了矩形 *AGPN*、*AHQM* 的面积之和。利用△*BAH* ≌△*GAC* 和面积转化的方法，可证这两个矩形的面积相等。

3.2 克拉维斯对勾股定理和帕普斯命题的新证明

16 世纪德国数学家克拉维斯（C. Clavius, 1538-1612）在直角三角形同侧作三个正方形，给出了勾股定理的新证明[7]：

如图 7，分别在直角三角形的两条直角边 *AB* 和 *AC* 上作正方形 *ABFG* 和 *ACKH*，延长 *FG* 和 *KH*，交于点 *M*。连结 *MA* 并延长，交 *BC* 于点 *N*。分别过点 *B* 和 *C* 作 *BC* 的垂线，交 *FM* 和 *KM* 于点 *D* 和 *E*，连结 *DE*。可证：Rt△*FBD* ≌ Rt△*GAM* ≌ Rt△*ABC*， Rt△KEC≌Rt△HMA≌Rt△ABC，故知四边形 $BDEC$ 为正方形，且 $BD//NM//CE$，从而可得

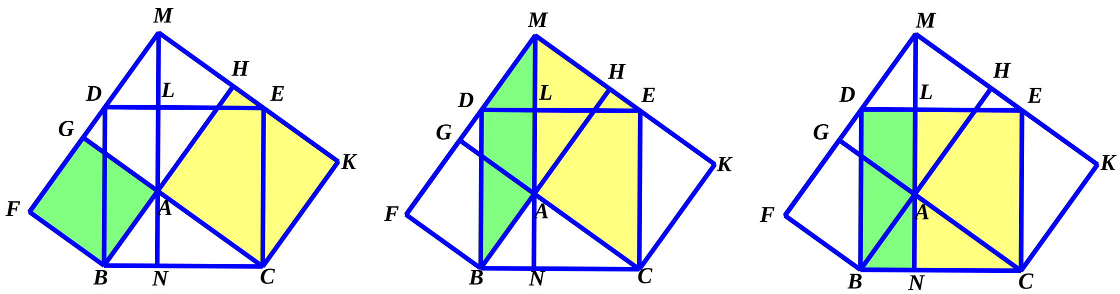


图 7 克拉维斯的勾股定理新证

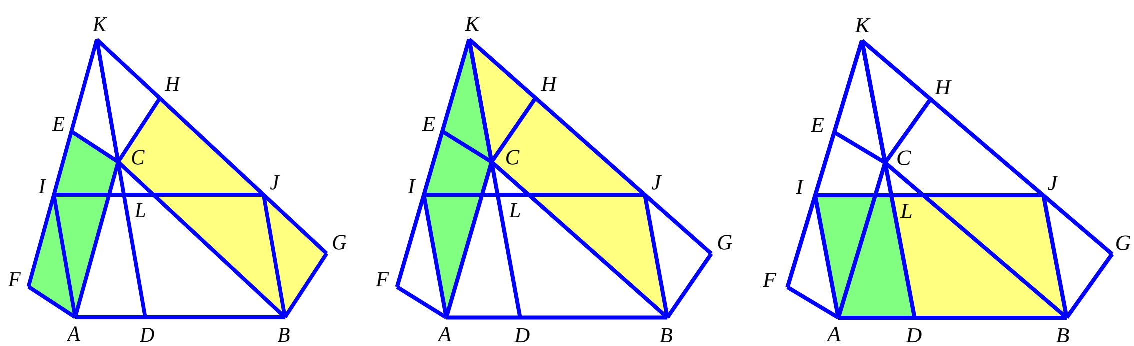
$$S_{\square BFGA}=S_{\text{▱} BDMA}=S_{\text{▱} BDLN},$$

$$S_{\square CKHA}=S_{\text{▱} CEMA}=S_{\text{▱} CELN},$$

故得 $S_{\square BFGA}+S_{\square CKHA}=S_{\text{▱} BDLN}+S_{\text{▱} CELN}=S_{\square BDEC}$。

克拉维斯还用同样的方法对帕普斯命题进行了证明：

如图 8，分别在任意三角形的两边 AC 和 BC 上作正方形 $ACEF$ 和 $BCHG$，延长 FE 和 GH，交于点 K。连结 KC 并延长，交 AB 于点 D。分别过点 A 和 B 作 DK 的平行线，交 FE 和 GH 于点 I 和 J。借助▱$AIKC$ 和▱$BJKC$ 的过渡，分别建立了▱$ACEF$ 和▱$AILD$、▱$BCHG$ 和▱$BJLD$ 之间的等面积关系，从而证明了命题。



（1）　　（2）　　（3）

图 8 克拉维斯的帕普斯命题新证

4 欧几里得的留白与后世数学家的创新

《几何原本》命题 I.47 留下了发现之白和方法之白：斜三角形三边上的正方形存在怎样的关系？是否还有别的证明方法？

欧几里得本人和后世数学家在推广勾股定理过程和运用新方法证明定理时所使用的策略，可以总结为美国学者布朗（S. I. Brown, 1938- ）和华尔特（M. I. Walter, 1928-2021）提出的“否定属性法”[8]。“否定属性法”包含选取研究对象、列举属性、否定属性、提出新问题等几个步骤。其中关键步骤“否定属性”的做法为：（1）对某个属性，问“若非该属性，则如何？”（2）列出同类型的多个新属性来代替原有属性。其流程如图 9 所示。

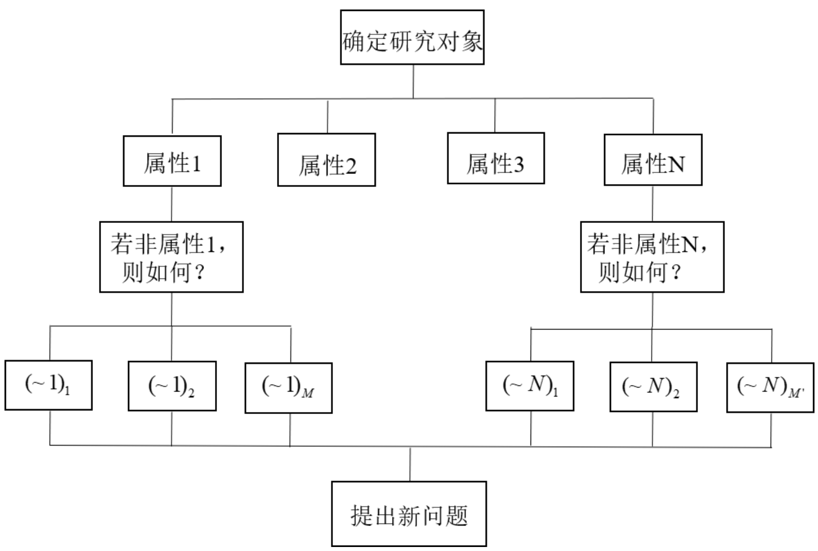


图 9 “否定属性”的流程

使用“否定属性”来分析本文中数学家的基于勾股定理创新策略。首先以勾股定理为研究对象，可以列举勾股定理的属性如下：（1）勾股定理处理三边上的正方形；（2）勾股定理是一个等式关系；（3）勾股定理处理的是面积（平方）关系；（4）勾股定理是对直角三角形而言的……

然后，否定一个属性之后列出替代属性。如，否定属性 1，可以列出属性 $(\sim 1)_1$：在三边上作菱形；$(\sim 1)_2$：在三边上作平行四边形；$(\sim 1)_3$：在三边上作相似图形……否定属性 2，可以列出属性 $(\sim 2)_1$：勾股定理表达式左边与右边是不等关系（大于、小于、大于等于……）；

$(\sim 2)_2$：勾股定理表达式左边与右边是整除关系；$(\sim 2)_3$：表达式左边与右边互素……又如，否定属性 4，可以列出属性 $(\sim 4)_1$：研究的是等腰三角形；$(\sim 4)_2$：研究的是任意三角形；$(\sim 4)_3$：研究的是四边形……

最后，结合替代的属性和保留的属性，问题的提出就自然而然了。对于每一个属性的否定方式有很多种，不同的否定方式会导致不同的问题，即使否定和替代的属性都相同，也有不同的提问方式。否定少数几个属性，就能提出很多新问题。

表 1 给出了本文涉及的数学家所否定的若干属性。

表 1 数学家否定的勾股定理的属性

数学家	否定属性	替代属性	新的问题
欧几里得	1	$(\sim 1)_3$	在直角三角形的三边上作相似图形，它们的面积之间有什么关系？
帕普斯	1，4	$(\sim 1)_2$，$(\sim 4)_2$	在一般三角形的三边上作什么样的平行四边形才能满足两个平行四边形的面积等于第三个？
兰特内	1，2，4	$(\sim 1)_1$，$(\sim 2)_1$ $(\sim 4)_2$	在一般三角形的三边上作菱形，它们的面积之间有什么关系？
格雷戈里	2，4	$(\sim 2)_1$，$(\sim 4)_2$	在一般三角形的三边上作正方形，能否得到余弦定理的证明？
克拉维斯	正方形在斜边异侧	正方形在斜边同侧	若斜边上的正方形与直角边上的正方形位于斜边的同侧，结果会如何？

4.1 帕普斯的补白策略

帕普斯用一般三角形替代直角三角形，结果两边上的正方形的面积之和不等于斜边上正方形的面积（由勾股定理逆定理得到）。这说明仅否定一个属性是不够的。一种办法是，通过否定两种属性的组合来生成新问题。于是可以提出问题，在什么条件下可以保留类似勾股定理的结论？

提出问题之后，需要分析问题并尝试解决问题。帕普斯继续用“在三边上作平行四边形”这一属性替换“在三边上作正方形”这一属性。否定一个属性的方式不止一种，需要经历大量尝试才能得到合理的替代属性。在帕普斯命题中，任意平行四边形太过一般，这些平行四边形

必须满足一定的条件才能满足面积的等式关系。在不断尝试之后，帕普斯最终得到了等式关系成立时平行四边形需要满足的条件，补好了发现之白。

4.2 兰特内的补白策略

兰特内将直角三角形变为任意三角形，且在三边上作菱形。为了能够利用全等三角形进行面积转化，兰特内让菱形的一个角与三角形的一个角相等。受古人的启发，一个自然的问题是，这三个菱形的面积之间有什么关系？

在提出问题后，兰特内对勾股定理进行了耐心地观察和思考。对勾股定理的深入理解是进行推广的基础。作平行、找全等、面积转化的方法为兰特内的推广提供了有益的思路。考虑已知的相关命题不仅在问题提出方面有重要意义，对于新命题的解决同样具有指导作用。新命题的解决往往与已知命题的解法相对应。正如波利亚在《怎样解题》中指出的："好的思路来源于过去的经验和以前获得的知识。"[9] 兰特内最终得到了勾股定理的推广，补好了欧几里得留下的一项发现之白。

在对兰特内证明的变式中，改变了某个菱形钝角的位置。此外，还使用面积公式对菱形、三角形的面积进行了表达，从而用代数的方法得到余弦定理。

4.3 格雷戈里的补白策略

格雷戈里将勾股定理直角三角形的属性替换为任意三角形，而保留了在三边上作正方形这一属性，提出了问题：在任意三角形的三边上作正方形，能否得到余弦定理的新证明？

在回顾勾股定理的证明过程之后，就有了证明的模板可以遵循，只要看看欧几里得的证明，不难模仿相应的过程，比如等积转换的过程。格雷戈里的想法是，直接利用勾股定理的证明过程而非勾股定理本身来得到余弦定理另外的证明。解决一个问题时运用另一个相关问题的方法是对方法进行创新的重要策略。实际上，这也包含了新问题解决的重要步骤：（1）从新问题 X 中分离出已知情形 x；（2）用方法 A 解决已知情形 x；（3）尝试用方法 A 解决整个问题 X。在（2）和（3）中，采用的是相同的方法 A，依据就是问题 x 的大部分属性也存在于问题 X 中，支配问题 x 的大部分规则也同时支配着问题 X，因此解决的方法应该也是一一对应的。

格雷戈里的证明赋予了余弦定理更清晰的几何意义，在证明的过程中，没有运用到任何代

数公式，对欧几里得留下的方法之白进行了补白。

4.4 克拉维斯的补白策略

克拉维斯得到新方法的策略也可以归结为“否定属性”，但他否定的属性并不是勾股定理表述中的属性，而是欧几里得证明步骤的属性，即否定“在三角形斜边两侧作正方形”的属性，而在三角形斜边同侧作正方形。否定命题的属性可以得到新命题，否定证明步骤的属性可以得到新方法[7]，得到的新方法可能会有更广泛的应用。在看到勾股定理的证明后，克拉维斯提出了问题：在三角形的同侧作正方形，可以得到勾股定理更好的证明方法吗？

克拉维斯的证明中将直角边上正方形的面积转化为矩形的面积时，只使用了一个过渡的平行四边形，简化了勾股定理的证明过程，对欧几里得留下的方法之白进行了补白。美国数学家古德尔（S. Gudder, 1937- ）说过：“数学的本质不是把简单的事情复杂化，而是把复杂的事情简单化。”[10]从数学思想与价值观的层面来看，对真善美的追求和对满足好奇心的需要是数学家能够在面对过去命题的证明时想到新方法的精神前提。

5 教学启示

历史上数学家推广勾股定理、发现新方法的策略为留白创造式教学提供了参照。后世数学家对欧几里得的留白进行了补白，但仍有更多的白有待后人去填补。教师可以通过留发现之白、方法之白、论证之白、问题之白等方式，将高中数学中的几何与代数模块的知识与勾股定理相联系。在留白与补白的过程中，学生得以总结知识的发展路径，掌握知识的来龙去脉，建构知识的网络体系。

（1）发现之白

教师可以从发现之白的角度挖掘证明勾股定理或余弦定理的示意图中的教学价值。例如，如图 10 所示，在任意三角形 ABC 三边上分别向外作正方形，连结外部的顶点。用 a,b,c 表示三角形三边长，x,y,z 表示连结线段的长度，可以得到一个巧妙的发现：$x^2+y^2+z^2=3(a^2+b^2+c^2)$。[11]这里添加了新辅助线，否定了直角三角形的属性以及三边关系的目标。

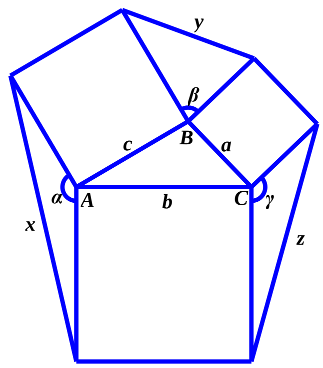


图 10 $x^2+y^2+z^2=3(a^2+b^2+c^2)$

这个命题可以利用余弦定理证明。对α,β,γ角分别在相应的三角形中运用余弦定理，有$x^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$，$y^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta$，$z^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$。三式相加得$x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(bc\cos\alpha+ca\cos\beta+ab\cos\gamma)$。对$\triangle ABC$的三个角分别运用余弦定理，并将得到的三式相加可得$2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)=a^2+b^2+c^2$。注意到$\alpha=\pi-A,\cos\alpha=-\cos A$，同理可得$\cos\beta=-\cos B,\cos\gamma=-\cos C$。综合以上可得$x^2+y^2+z^2=3(a^2+b^2+c^2)$。

如果注意到A和α，B和β，C和γ的互补关系，利用三角形面积公式容易发现另一个结果，外面的三个三角形每个都与$\triangle ABC$有相同面积。

（2）论证之白

本文中部分命题只给了锐角或钝角三角形其中一种情形的证明，可以留作“论证之白”。令直角三角形的斜边为1，一个锐角为α，可以得到同角三角函数关系$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$。否定$\alpha$为锐角的属性，可以让学生论证$\alpha$为任意角时该关系是否成立，留论证之白。

勾股定理的面积证法对于学生来说并不熟悉，在可学性上较弱[12]。教师可以基于加菲尔德（J. Garfield, 1831-1881）证法（总统证法）的示意图，以形证数，引导学生使用新方法证明余弦定理，降低学生探究余弦定理的思维难度，为学生创新创造有利条件。如图 11，由$AD=b\sin\alpha$，$DC=b\cos\alpha$，$BE=a\sin\beta$，$CE=a\cos\beta$，可以得到$AF=DC+CE=b\cos\alpha+a\cos\beta$，$BF=BE-AD=a\sin\beta-b\sin\alpha$。在$\mathrm{Rt}\triangle AFB$中，$AF^2+BF^2=AB^2$，利用同角三角函数关系与两角和的余弦公式可得，

$c^2=a^2+b^2+2ab\cos(\alpha+\beta)$，再利用 $C=\pi-(\alpha+\beta)$，即得余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。该证明仅保留了两个相邻直角三角形这一属性，证明的过程和总统证法差异较大，其本质上是投影的思想。总统证法示意图还可为基本不等式、柯西不等式、两角和的正弦公式、辅助角公式、正弦定理、三角形面积公式的证明带来全新视角[13]。

（3）问题之白

《普通高中数学课程标准（2017 版 2020 年修订）》提出，能够在综合的情境中用数学的眼光提出有意义的数学问题是高水平逻辑推理素养的表现之一[1]。教师可以基于勾股定理为学生留下问题之白。如，否定勾股定理处理二维的面积关系这一属性，可以提出问题：勾股定理是否存在高维的推广？2003 年全国高考文史类给出了一个高维的推广：“设三棱锥 $A-BCD$ 的三个侧面 ABC、ACD、ADB 两两垂直，则 $S^2_{\triangle ABC}+S^2_{\triangle ACD}+S^2_{\triangle ABD}=S^2_{\triangle BCD}$。”

继续否定三个侧面两两垂直这一属性，提出新问题：如果是一般的三棱锥会怎样？由此可得余弦定理的三维类比[14]，如图 12 所示，设二面角 $A-BC-D$，$A-CD-B$，$A-DB-C$ 的大小分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，二面角 $C-AB-D$，$D-AC-B$，$B-AD-C$ 的大小分别为 β_1,β_2,β_3，则有 $S^2_{\triangle BCD}=S^2_{\triangle ABC}+S^2_{\triangle ACD}+S^2_{\triangle ADB}-2S_{\triangle ABC}S_{\triangle ACD}\cos\beta_2-2S_{\triangle ACD}S_{\triangle ADB}\cos\beta_3-2S_{\triangle ADB}S_{\triangle ABC}\cos\beta_1$。共有四个这样的公式。

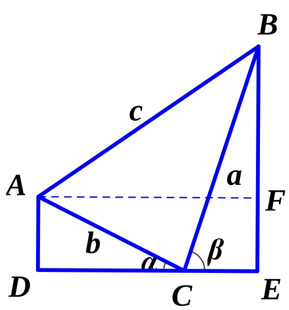


图 11 基于总统证法的余弦定理证明

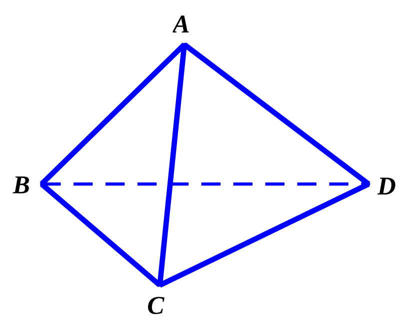


图 12 余弦定理的一个三维类比

（4）超越之白

理解勾股定理及其推广的这段历史，有助于学生知识体系的形成以及知识框架的建构，有助于发展学生举一反三的能力。经过不断地留白与补白，学生可以理解转化思想在《几何原本》中的运用，“等积变换”的想法贯穿于勾股定理及其推广的证明过程中，对于一般的数学问题

也有启发。因此，数学知识的教与学，重要的是将新知识与原有知识相联系，掌握数学问题研究方法，形成数学思维方式。这正回应了美国数学家舒尔茨对创新的论述："数学学习的结果应是能力的发展，而非事实的获取。只有能够明智地应用这些事实，能够发现全新的事实以及能够重构已经遗忘的事实的人，才是好的数学家。"[15]

此外，对于勾股定理，不同时空数学家从不同角度进行推广，用不同的方法加以解决，这正是数学的魅力之所在。如果历史上的留白与补白激发了学生的创新精神、使学生对于"何为证明"有了更深刻的认识，那么便是补了一项"超越之白"。

由上可见，留白与补白的过程是无止境的，白不会越补越少，只会越补越多。在补"问题之白"后，学生又需要论证提出的问题，思考新方法，探究新问题，从而留下了新的"发现之白""论证之白""方法之白""问题之白"。学生在不断补白的过程中，体会古人的思想方法，与自身的知识体系融会贯通，补好"超越之白"。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 版 2020 年修订）[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 汪晓勤. 数学史上的留白与创新[J]. 中学数学月刊, 2023(4): 1-4.

[3] 汪晓勤, 邹佳晨, 王华. 数学史与留白创造式教学[J]. 数学通报, 2023, 62(3): 1-6.

[4] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[5] Le Ratz De Lantenée M. *Élémens de géométrie: ov, Principes de le mesure de l'etendue. Expliqués très-clairment, par des démonstrations la plûpart nouvelles, & sur-tout sans le secours des proportions* [M]. Paris: A Paris, Chez Gissey, 1738.

[6] Heath, T. L. *The Thirteen Books of Euclid's Elements* [M]. Cambridge: The University Press, 1908.

[7] 汪晓勤. 从克拉维斯的《几何原本》注看数学家的创新[J]. 数学通报, 2023, 62(6): 1-6, 30.

[8] Brown, S. I. & Walter, M. I. *The art of problem posing* [M]. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

[9] 波利亚. 怎样解题[M]. 冯承天, 涂泓, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2011.

[10] Gudder, S. *A Mathematical Journey* [M]. New York: McGraw-Hill, Inc, 1994.

[11] Maor, E. 勾股定理：悠悠 4000 年的故事[M]. 冯速, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2010.

[12] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与高中数学教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020.

[13] 郭跃灵, 徐章韬. 教材分析从理解走向探究之“半赵爽弦图”[J]. 数学通讯, 2022(14): 34-37.

[14] 何苗. 从勾股定理到余弦定理及其在空间的拓广[J]. 中学生数学, 2022(693): 4-7.

[15] Schultze, A. *The Teaching of Mathematics in Secondary Schools* [M]. New York: The Macmillan Company, 1912.

专题研究

以问留白：数学留白创造式教学中的问题设计

杨家政[1]，张 静[2]，周太平[3]，汪晓勤[4]

（1. 上海市闵行区教育学院, 上海 200241; 2. 上海中医药大学附属闵行晶城中学, 上海 200237; 3. 嘉兴市秀洲区教育研究和培训中心, 嘉兴 314001; 4. 华东师范大学数学科学学院, 上海 200241）

1 引 言

拔尖创新人才的培养是国家和社会发展的迫切需要。义务教育数学课程标准将“创新意识”列为数学核心素养之一，如何在数学教学中培养学生创新意识和创新能力是一线教师需要面对的重要课题。另一方面，人工智能也对数学教学提出了挑战，传统的知识传授可以被人工智能所取代，课堂转型已成为时代的需求。在此背景下，人们开始提倡“留白创造式教学”[1]，即以学生为中心、为学生留出足够的思维空间和探究机会、让他们创获新知和陶熔品性的教学方式。这种教学方式要求教师在课堂上留白，包括陈述之白、发现之白、论证之白、方法之白、问题之白和超越之白[2]，而留白的关键是设计高质量的问题。美国著名数学家哈尔莫斯（P. R. Halmos, 1916-2006）曾指出：“问题是数学的心脏”，他希望教师“在课堂上、在讨论班里、在所撰写的著作和论文中越来越多地强调问题的重要性，并将学生训练成更好的问题提出者和问题解决者”[3]。

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》强调：“基于数学学科核心素养的教学活动应该把握数学的本质，创设合适的教学情境、提出合适的数学问题，引导学生思考与交流，形成和发展数学学科核心素养。”[4]留白创造式教学的目的是促进学生探究、发现和创造，因此，与常规教学相比，教师需要为学生提供更大的思维空间。为此，问题设计必须以增加学生思维的高度、广度、深度和长度为目标，相应地，所设计的问题需要具备引领性、开放性、跨越性、发展性等特征。本文拟通过若干典型例子来呈现留白创造式教学中的问题设计策略，为教学提供参考。

2 引领思维，以史设问

以史设问，可以留出陈述之白、发现之白、论证之白或方法之白。将学生置于知识发生、发展的过程之中，让学生站在古人的肩膀上思考问题，可以增加思维的高度。

例 1：等腰三角形的性质。

在学生利用角平分线或高线方法证明“等边对等角”之后，教师提出：这种方法实际上用到了“边边边”和“边角边”定理两个判定定理，而古希腊数学家欧几里得仅仅用到了“边角边”定理，你能复原欧几里得的方法吗？

例 2：一元二次方程的配方法。

先呈现古代两河流域的一个土地面积问题：“一块矩形土地，面积为 55，长比宽多出 6，问：这块土地的宽是多少？”教师提出：古人没有符号代数，只能用几何方法来解决上述问题，你能复原古人的方法吗？在学生用几何方法（图 1）完成求解之后，教师进一步提出：你能用今天的代数语言来表示上述几何解法吗？

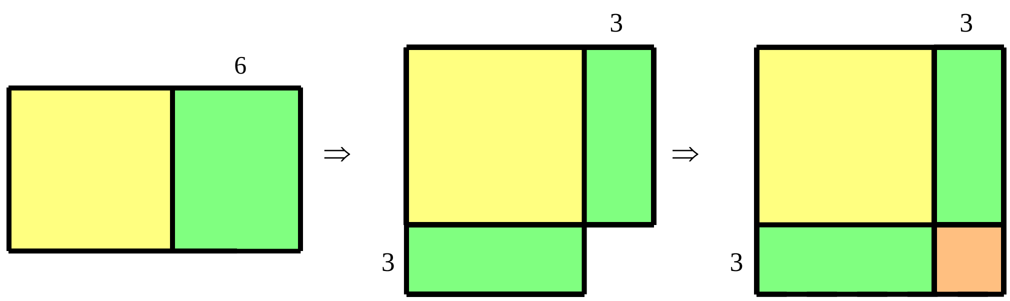


图 1 土地面积问题

例 3：对数的概念。

教师首先呈现宇宙星辰环绕、大海远航的图片，并说明早在 15、16 世纪，人们在天文、航海及工程实践中，需要对一些很大的数进行繁杂的计算，为了得到一个结果，常常需要花费几个月的时间。能否找到一种快速简便的计算方法？对数发明者、苏格兰数学家约翰·纳皮尔（J. Napier, 1550-1617）为了简化大数运算而发明了对数，并于 1614 年在爱丁堡出版了《奇妙的对数定律说明书》。[5]由此，教师引入下表，并提出以下问题：

…	−2	−1	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
…				2	4	8	16	32	64	128	256		1024	2048	

13	14	15	16	17	18	19	20	21	…
8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576	2097152	…

问题 1：利用数表计算：（1）128×4096；（2）524288÷1024。

问题 2：类比问题 1 的规律，如何利用数表，计算试计算 1 光年的公里数 299792.458×31536000，并寻找简化运算的一般规律。

问题 3：以 2 为底数，299792458 和 31536 对应的指数是否存在？

问题 4：以 $a(a>0$，$a\neq 1)$ 为底数时，正数 N 对应的指数是否存在？

以上三例均通过数学史来设计问题。例 1 参照方程求解的历史，引领学生像古巴比伦祭司或古代中国和阿拉伯数学家那样，从几何的视角来探究问题的解法；例 2 依据《几何原本》中的逻辑体系，引领学生像古希腊欧几里得那样仅利用“边角边”判定定理来证明“等边对等角”；例 3 借鉴对数概念的历史，引领学生将一个正整数化成某个特定底数的幂、将两个正整数化成同底数的幂以简化计算。这些例子中，问题将学生的思维引向有关主题的历史发展轨道，“留白”不“白留”，探究有方向，思维增高度。

2 开放思维，超限设问

超限设问，可以为学生留下发现之白、方法之白、问题之白或超越之白。从学生的最近发展区出发，运用“否定属性”策略，提出“若不是这样，则将会怎样”的问题，可以增加思维的广度。

例 4：同底数幂的除法。

问题 1：同学们已经学习了同底数幂的乘法法则。现在，请计算 $a^5\div a^2$（$a\neq 0$）。你能猜想出同底数幂的除法法则吗？

问题 2：你能导出同底数幂的除法法则 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ （$a\neq 0$）吗？其中的 m、n 需满足什么约束条件？

问题 3：上述法则对于 $m\leq n$ 的情形是否依然成立？

问题 4：你能给指数为另或负整数的幂下一个定义吗？

问题 5：关于同底数幂的除法法则，你还想提出什么问题？

例 5： 分式的概念。

在分式概念的教学中，教师利用现实生活中的例子来引导学生发现新知：周老师从家出发开车到宁波市文锦书院来上三江名师展示课，已知从家到书院的路程为 114 公里。

问题 1：你能否补充条件，提出一个数学问题？

预设学生回答有：

• 若汽车的平均速度为 60 公里/小时，周老师需要多长时间才能到达目的地？

• 若路程前半段汽车的速度为 50 公里/小时，后半段汽车的速度为 60 公里/小时，则整段路程中汽车的平均速度为多少？

问题 2： 如果后半段的速度是前半段的 1.5 倍，则整段上的平均速度是多少？

预设学生回答为：设前半段的速度为 x，则整段上的平均速度为 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{3x}}=\dfrac{6x}{5}$，即前半段速度的 1.2 倍。

问题 3： 如果周老师中途休息了一会，后半段用时比前半段多用了半小时，则整段上的平均速度是多少？

预设学生回答为：设前半段用时为 x，则整段上的平均速度为 $\dfrac{114}{2x+0.5}$。教师帮助化简为 $\dfrac{228}{4x+1}$。

问题 4： 如果后半段的速度比前半段快了 5 公里/小时，则整段上的平均速度是多少？

预设学生回答为：设前半段的速度为 x，则整段上的平均速度为 $\dfrac{114}{\dfrac{57}{x}+\dfrac{57}{x+5}}$。教师帮助化简为 $\dfrac{x^2+5x}{2x+5}$。

问题 5： 请对以上得到的三个式子 $\dfrac{6x}{5}$，$\dfrac{228}{4x+1}$ 和 $\dfrac{x^2+5x}{2x+5}$ 进行分类。

问题 6： 你能给分式下一个定义吗？

例 6： 正弦定理。

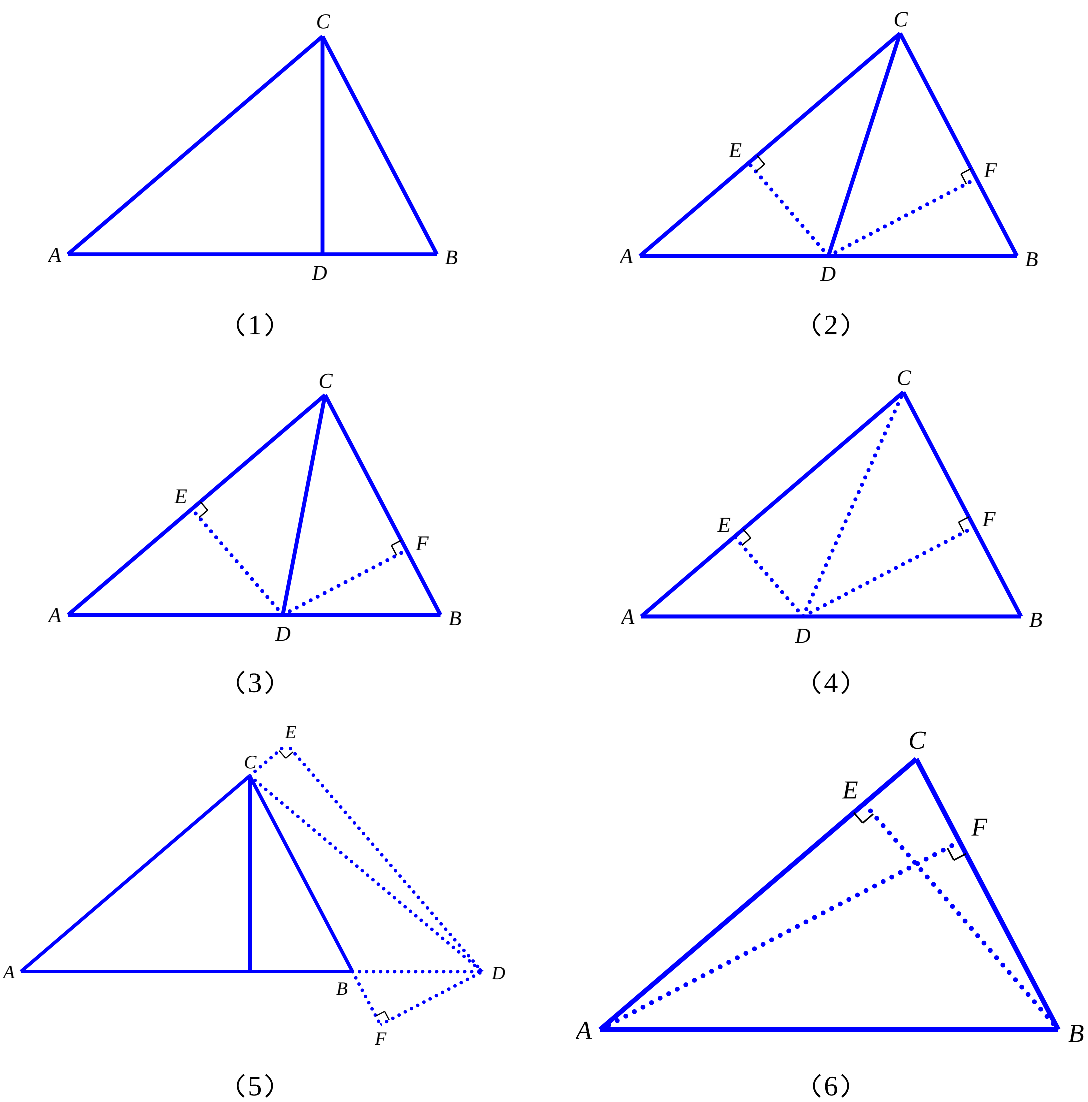
在正弦定理的教学中，教师根据直角三角形边角关系得出等式 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ $\left(C=\dfrac{\pi}{2}\right)$，由此引出关于一般三角形边角关系的猜想。如图 2（1），学生往往会利用作高法证

明该猜想：由 $CD=b\sin A=a\sin B$ 得出 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，同理得出另两个等式。在此基础上，教师利用否定属性策略提出如下问题。

问题 1 如果不作 AB 上的高 CD，而是作 AB 上的中线 CD（图 2（2））或角平分线 CD（图 2（3）），你能否证明正弦定理？

问题 2 如果在线段 AB 上任取一点异于端点 A 和 B 的点 D（图 2（4）），连结 CD，你能否证明正弦定理？

问题 3 如果在 AB 或 BA 的延长线上任取一点异于端点 A 和 B 的点 D（图 2（5）），连结 CD，你能否证明正弦定理？



（1）（2）（3）（4）（5）（6）

图 2 正弦定理的证明

问题 4 如果从 AB 的端点 A 和 B 处分别作 BC 和 AC 的垂线，垂足分别为 E 和 F（图 2（6）），你能否证明正弦定理？

实际上，利用三角形面积关系，学生完全可以突破“高线”这一局限，得到更为一般的证明。例如，对于问题 3，如图 2（4），过点 D 分别作 AC 和 BC 的垂线，垂足为点 E 和 F，则有

$$\frac{AD}{DB}=\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle BDC}}=\frac{AC\times DE}{BC\times DF}=\frac{AC}{BC}\times\frac{DE}{DF},$$

故得

$$\frac{AC}{BC}=\frac{\dfrac{DF}{DB}}{\dfrac{DE}{AD}}=\frac{\sin B}{\sin A}。$$

例 4 通过不断否定幂指数这一属性，促进学生发现同底数幂除法运算的一般法则以及零指数和负整数指数幂的这两个新概念；例 5 通过否定汽车速度和开车时间这两个属性，促进学生发现分式的概念；例 6 则通过不断否定三角形顶点和底边上一点连线这一属性，促进学生发现正弦定理的新证法。这些例子中，问题让学生的思维突破局限，走进新天地，接触新概念，发现新方法，收获新结果。

4 跨越思维，依图设问

以图设问，可以为学生留出陈述之白、发现之白和论证之白。教师通过图形的呈现，让学生读出图形中隐含的信息，形成完整的论证过程，最终发现新知，或让学生自己构造图形来呈现某个数学主题，实现表征转换，学生于无声处进行补白，可以增加思维的深度。

例 7：均值不等式。

在均值不等式的教学中，教师提供下图[5]，让学生根据图 3 回答：（1）说明“等周长方形中，正方形的面积最大”；（2）写出一个不等式。

例 8：同角三角函数的关系。

在同角三角函数的教学中，教师让学生根据图 4 尽量多地写出同角三角函数关系式[6]，并让学生自己构造一幅关于同角三角函数关系的“无字证明”。

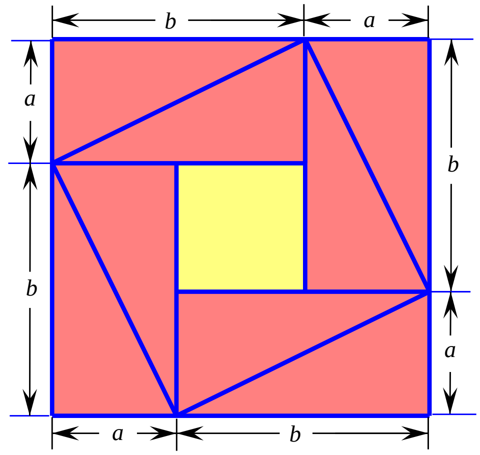


图 3 均值不等式的教学之一

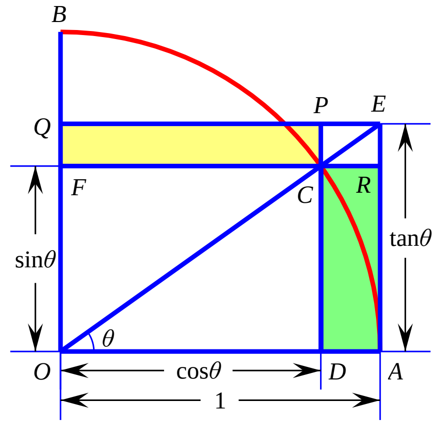


图 4 同角三角函数的教学

例 9：两角差的余弦公式。

在差角余弦公式的教学中，教师在引导学生利用解析几何方法推导公式之后指出：这个方法虽好，但不够直观，能否从一幅图形中一眼就看出这个结论呢？教师呈现图 5，进而提出问题。

问题 1：能否利用面积关系来推导呢？

如图 6，在△*ABC* 中，启发思考给定两条边长和两个锐角以及分割的三角形面积之间关系，考虑到△*ABC* 的面积=△*BCD* 的面积+△*ACD* 的面积。

问题 2：如何用 a、b、x、y 表示△*ABC* 的面积、△*BCD* 的面积、△*ACD* 的面积？

引导学生讨论发现 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}-x+y$， $CD=b\sin x=a\cos y$ 。

问题 3：当两角是任意锐角时，如何推导公式？

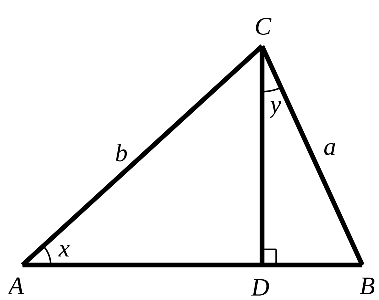


图 5 差角余弦公式的教学

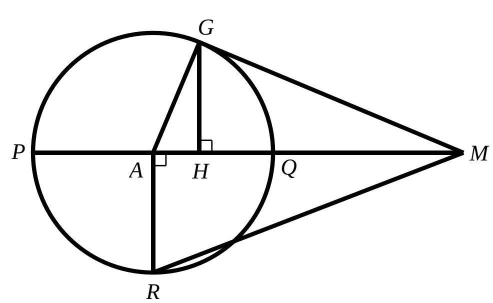


图 6 均值不等式的教学之二

例 10：均值不等式串。

虽然现行数学课程不要求掌握调和平均数和平方平均数，但四种均值的大小关系能很好

地体现不等式单元的教学目标，和基本不等式一起构成了一个完整的知识结构，有利于学生对基本不等式的深刻理解和掌握。教师呈现图 6，其中 $PM=a$， $QM=b$， $a>b>0$，引导学生用 a 和 b 表示图中不同线段的长。

问题 1：图中哪些线段长分别表示 $\left(\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1}$、$\sqrt{ab}$、$\dfrac{a+b}{2}$、$\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$？

问题 2：在直角三角形中，因为直角边长小于斜边长，不难得出 $HM<GM<AM<RM$，能否给出完整的证明过程？

例 7 中的大方图蕴含了四个长方形面积与大正方形面积之间的关系，将这一信息用符号语言表达出来，就得到均值不等式的等价形式；进一步解读大方图，可得“和定积最大”的结论。例 8 中的四分之一单位圆蕴含了一些线段或面积的关系，用三角函数来表示这些线段，利用线段或面积关系，可得同角三角函数的若干关系式。例 9 中的三角形蕴含了三个三角形面积关系以及两个直角三角形的边角关系，用符号表达出来，利用诱导公式，可得差角余弦公式。例 10 中的图形蕴含了一些线段之间的大小关系，用符号表示出这些关系，可得两个正数的四种平均数之间的大小关系。四例中的问题让学生的思维实现跨越，于图中寻白，透过表象看到本质；为图形补白，借助直观发现新知。

5 发展思维，回应设问

留白创造式教学对教师的最大挑战在于对学生补白结果的即时反馈。为了引发学生的创造，当学生解决一个问题超出预设时，教师需要相应提出更具挑战性的问题。回应设问，可以为学生留出方法之白、论证之白、问题之白和超越之白。学生在补白之后的进一步补白，可以延伸思维的长度。

例 11：实数的概念。

在实数概念的教学中，教师以正方形面积为主线，设计以下问题串。

问题 1：面积为 4 的正方形的边长是多少？

问题 2：面积为 2 的正方形存在吗？你能构造出来吗？

学生可能会在面积为 4 的正方形中构造一个面积为 1 的正方形，或将其二等分，再将其中

一部分进行分割组合，得到面积为 2 的正方形，如图 7 所示。

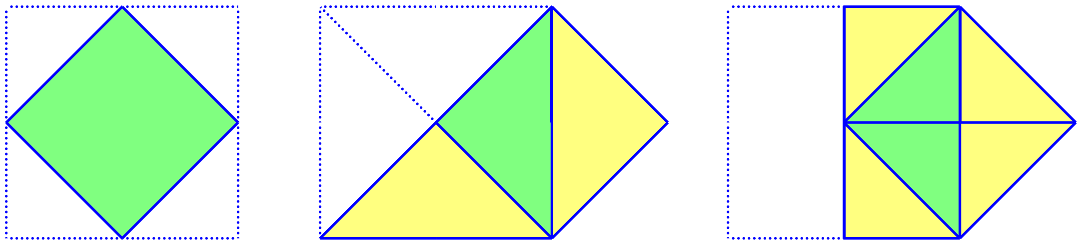


图 7 实数概念的教学

问题 4：面积为 2 的正方形的边长究竟是多少？

教师引导学生先估计边长的范围，学生用逼近法逐步发现这个正方形边长在 1~2 之间、在 1.0~1.5 之间、在 1.25~1.45 之间…；随着数据计算量变大，用计算器继续进行探究发现这个数的大致的范围。在这个过程中，学生猜想：面积为 2 的正方形的边长是一个无限不循环小数。教师引入其符号表示，并从数系扩充的角度说明 $\sqrt{2}$ 是一种不同于有理数的新数。

问题 5：是否还有其他无限不循环小数？

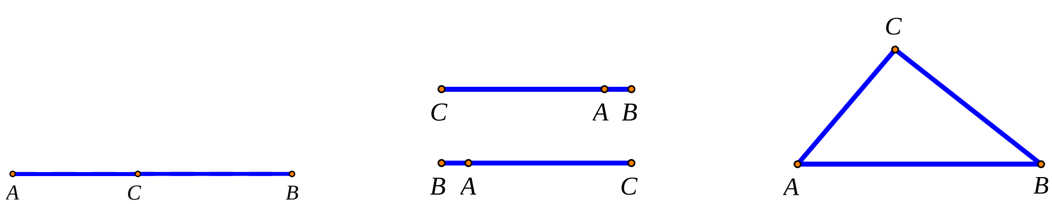
在学生构造出 0.123456789101112…后，教师进一步提出

问题 6：$\alpha = 0.123456789101112\ldots$，如何说明$\alpha$是无理数？

例 12：余弦定理。

问题 1：我们每个同学从家到学校的距离不等，假设甲、乙同学的家（用 A、B 表示）和学校（用 C 表示）都是在同一个平面上，如果甲、乙同学两家到学校直线距离分别是 3 公里、4 公里，那么甲、乙两家直线距离是多少呢？

在学生通过分类讨论得出结论：当甲、乙两家与学校共线时（图 8（1）（2）），两家的直线距离为 1 公里或 7 公里；当甲、乙两家与学校不共线时，根据平面几何中的命题“三角形两边之和大于第三边”和“三角形两边之差小于第三边”，两家的直线距离在 1 公里和 7 公里之间。



（1）　　（2）　　（3）

图 8 余弦定理的教学

问题 2：如图 8（3）所示，A、B、C 三点不共线时，它们是一个三角形的三个顶点。在△ABC 中，$AC = 3$，$BC = 4$，请添加一个条件，使得 AB 的大小可以确定。

学生通过添加$\angle C = 90°$、$\angle C = 60°$、$\angle C = 45°$等条件，利用平面几何知识，得到 AB 的大小。

问题 3：在△ABC 中，已知 a，b 和$\angle C$，求 c。

通过$\angle C = 60°$和$\angle C = 45°$等特殊情形中的作高法，利用勾股定理，可推导出余弦定理的结论。

问题 4：前面大家在讨论甲、乙两家的直线距离时，利用过平面几何中的命题“三角形两边之和大于第三边”。现在，利用余弦定理，你能证明这个命题吗？三角形两边之和究竟比第三边大多少呢？

事实上，由 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$，可得

$$a + b - c = \frac{2ab}{a+b+c}\left(1+\cos C\right) > 0;$$

问题 5 利用余弦定理，你能证明平面几何中的命题“三角形中大角对大边”和“三角形中大边对大角”吗？两边之差和两角之差之间究竟有何定量关系呢？

事实上，由余弦定理、正弦定理和射影公式可得

$$\begin{aligned} c^2 - a^2 &= b^2 - 2ab\cos C \\ &= b\left(b - 2a\cos C\right) \\ &= b\left(c\cos A - a\cos C\right), \end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned} c - a &= \frac{b}{c+a}\left(c\cos A - a\cos C\right) \\ &= \frac{b\sin\left(C-A\right)}{\sin C + \sin A}, \end{aligned}$$

因此，若 $c > a$，则 $\sin\left(C-A\right) > 0$，$C > A$；反之亦然。

问题 6：图 9 给出了余弦定理与其他定理之间的联系，请你课后用某一个定理或公式（如正弦定理、海伦公式、射影公式）来推导余弦定理。

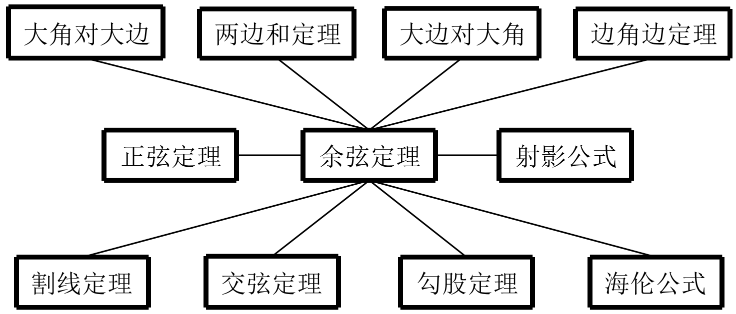


图 9 余弦定理与其他定理之间的联系

问题 7：从问题 4 和 5 中，你能得到什么启示？

在例 11 中，当学生构造出面积为 2 的正方形后，教师接着提出该正方形的边长大小问题；当学生构造出一个无限不循环小数后，教师接着提出证明问题。在例 12 中，当学生补充两边的夹角，相应求得第三边时，教师接着提出更一般的边角边问题；当学生推导出余弦定理的结论后，教师接着提出如何用该定理证明平面几何中的有关定理，并进一步提出“建立余弦定理和更多定理之间的联系”的任务。当学生解决了一个问题之后，教师在学生所获结果的基础上，适时提出新的问题，学生在补白之旅中，不断从一个“站点”走向另一个“站点”，延伸思维，行稳致远。

6 结 语

善留白者必善问。以问留白，问必有方。留白即是为学生留出思维空间，以史设问，可以提升思维高度；超限设问，可以拓宽思维广度；依图设问，可以增加思维深度；回应设问，可以延伸思维长度，故四种策略均可用于留白。

以问留白，对教师提出了较高的要求。

其一，教师应该有历史意识。只有深入了解所教授主题的历史发展过程，方能以某个特定的历史阶段为出发点，或以某个数学家的思想高度为参照，或以主题历史发展的关键步骤为主线来设计问题。

其二，教师应该有问题意识。掌握“否定属性策略”的问题提出策略，力求能够从某个问题、命题、图形或情境出发，不断改变旧的属性，提出丰富多彩的新问题。

其三，教师应该有转化意识。图中有“白”，一幅特定的图形（包括无字证明）可能蕴含

着一个代数、三角公式或命题，为学生有效补白提供了线索。以形御数、数形转化是留白创造式教学设计不可或缺的策略。

其四，教师应该有联系意识。只见树木，不见森林，将知识碎片化，往往导致无“白”可留。不同数学知识之间有着普遍的联系，建立这种联系，方能对教学内容有深刻理解，从而让留白游刃有余。

参考文献

[1] 王华, 汪晓勤. 中小学留白创造式教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023.

[2] 汪晓勤, 邹佳晨, 王华. 数学史与留白创造式教学[M]. 数学通报, 2023, 62(3): 1-6.

[3] Halmos, P. R. The heart of mathematics[J]. *American Mathematical Monthly*, 1980, 87(7): 519-524.

[4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[5] 汪晓勤. HPM 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[6] 汪晓勤. 构造无字证明, 设计留白教学. 数学通讯, 2024(1), 38-41.

教学实践

HPM 视角下的平方差公式教学

司 睿

（上海市洋泾菊园实验学校, 上海 200120）

1 引 言

平方差公式是沪教版七年级上册“乘法公式”的第一节课，教材是根据数学的逻辑序编排的，首先提供几个整式乘法的式子，由计算结果直接总结规律，然后提供几何图形让学生思考如何通过面积来说明平方差公式。学生掌握平方差公式并不难，但若仅关注计算而忽视公式的由来，便如同无源之水，停留于知识表面。若仅进行计算的技能训练，便等同硬记公式，无法更好地提升学生的能力，与新课标中落实学生数学核心素养的相关要求相悖。

翻开历史的画卷才知晓，平方差公式的出现是为了简化计算。在字母表示数之前，历史上对平方差的公式的证明是通过几何的方法。从 HPM 视角设计本节课主要是基于以下两点思考。其一，落实数学核心素养的培养。《义务教育数学课程标准（2022 年版）》提出要发展学生的几何直观[1]：“分析图形的性质，建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型。”借助历史中平方差公式的几何模型设计探究活动，从数和形两个角度验证平方差公式，学生在活动中自主地将代数与几何建立联系。其二，培养学生的表征转换能力。从一种表征转换为另一种表征是建构数学概念与数学思想的基本能力[2]。使用多元表征并且在各个表征之间灵活转换，是表达数学思想十分重要的途径[3]。本节课聚焦符号表征与图形表征之间的转换，同时融入文字表征，引导学生将平方差公式的代数表示与几何意义相联系。通过裁剪拼接，培养几何直观；借助代数计算，强化说理论证；经历公式总结，锻炼语言表达。多元的表征方式以及不同表征之间的转换有助于深化学生对数学概念的理解。

2 教学设计与实施

本节课的定位是探究课，重在平方差公式的发现和探究。通过创设海岛的面积情境，引导

学生发现平方差公式的规律；然后从代数角度和几何角度分别验证平方差公式。通过裁剪拼接的探究活动，引导学生运用出入相补的原理验证 $(a+b)(a-b)$ 和 a^2-b^2 两个代数式所表示的图形面积相等，这正是历史上数学家们研究和证明平方差公式所使用的方法。学生在合作探究的过程中不仅能积累数学活动经验，改善实践和创新能力，而且能体会数学文化的魅力，增强文化自信。以下从创设情境、验证猜想、总结公式、学以致用、课堂小结几个教学环节展开。

2.1 创设情境

情境：从前，一个岛主准备把自己的两个海岛租出去。他坐着小船绕岛一周发现这两个岛的周长是一样的，所以认为面积也相等。第一个近似是边长 20m 的正方形， 第二个近似是长为 20.2m、宽为 19.8m 的长方形。租客觉得两个岛的面积并不相等。那么到底谁在说谎？

问题 1：利用图形，如何判断这两个海岛的面积是否相等？

生 1：正方形海岛的面积更大，我们以前学过正方形和长方形周长相等的情况下，正方形的面积最大。

生 2：我是用割补法做出来的（图 1）。沿着宽在右边割出一个长为 19.8 米、宽为 0.2 米的小长方形，然后把它旋转后补到下边。这样就会发现第二个海岛比第一个海岛少一块边长为 0.2 米的小正方形。

教师补充从第一块正方形海岛入手（图2），可以通过割补法将其转化为长方形，发现比第二个海岛多了一块边长为 0.2 米的正方形。从不同的角度和方法让学生充分感知几何直观，进一步强化学生对割补法的认识，为后续平方差公式几何解释的探究奠定基础。

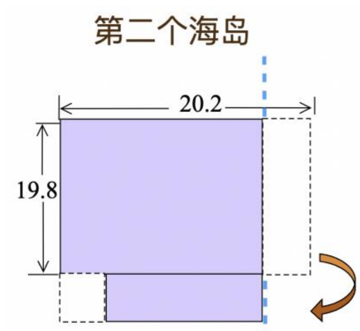


图 1 割长方形海岛

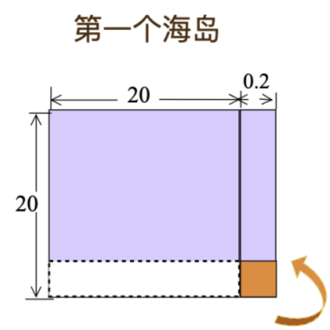


图 2 割正方形海岛

问题 2：通过计算，如何比较面积的大小？

生 1：第一块海岛的面积是 $20\times20=400$，第二块海岛的面积是 $20.2\times19.8=399.96$。

师：第二块海岛面积你是直接乘的吗？有没有简洁的方法呢？

生 2：我想到了把 20.2 转化为 $20+0.2$，把 19.8 转化为 $20-0.2$，$(20+0.2)(20-0.2)$ 的括号展开发现中间两项抵消了，就剩下 $20^2-0.2^2$。

问题 3：如果用字母表示数，猜想是否可以得到更一般的规律？

生 3：我发现用字母表示，可以写出 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

2.2 验证猜想

在发现平方差公式的规律后，趁热打铁追问学生如何验证猜想。

问题 4：你能从代数角度解释这个等式为什么成立吗？

问题 5：能否从几何角度解释呢？

对于问题 4，学生根据上一节课学习的多项式乘法，展开后很容易得到等号左右两边相等。但是对于问题 5，用几何的方法说明代数问题一向是学生的薄弱点，所以在学生动手操作剪拼纸片前需要搭建脚手架，引导学生一步一步地将代数式与几何图形对应起来。于是先设置几个小问题。

（1）a^2-b^2 所代表的几何意义是什么？

（2）$(a+b)(a-b)$ 所代表的几何意义是什么？

（3）等号左右两边相等，从形的角度需要验证什么?

在上节课学习多项式乘法的几何意义的基础上，学生能够正向迁移，回答出“a^2-b^2 可以表示边长为 a 的正方形与边长为 b 的正方形的面积之差”，“$(a+b)(a-b)$ 可以表示长为 $a+b$、宽为 $a-b$ 的长方形的面积”。进而明确要从几何的角度证明猜想成立，其实是证明长方形的面积与矩尺形（大正方形去掉小正方形后剩余的图形）的面积相等。（图 3）

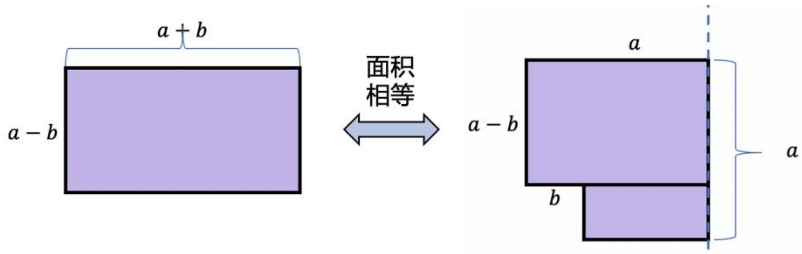


图 3 几何法验证的目标

给学生提供了图 3 所示的左边的长方形纸片，通过裁剪拼接得到右边的矩尺形。以小组为单位汇报方法。

小杨：我们小组的方法是（图 4），沿着长边裁出宽为 b、长为 $a-b$ 的小长方形，然后拼到下边。缺的一个角就是边长为 b 的正方形。

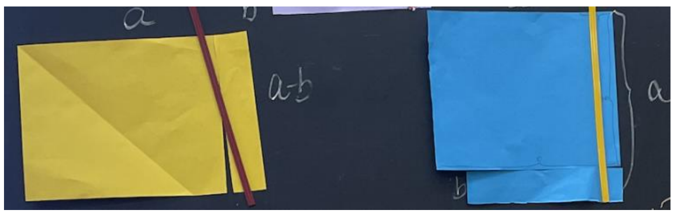


图 4 第一种拼法

小张：我是沿着两个对角裁剪出两个上底为 a，下底为 b，高为 $a-b$ 的梯形，然后沿着梯形的斜边拼成矩尺形。（图 5）

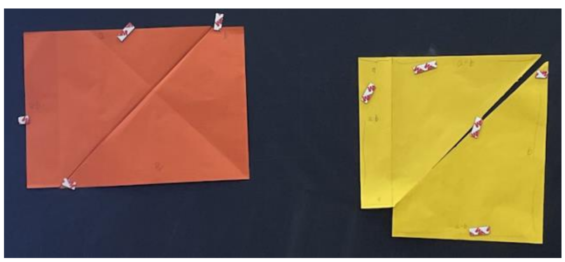


图 5 第二种拼法

小李：听了大家的方法后我觉得我的方法有些多此一举，但是我认为也算是一种方法。

师：好的，那你来展示一下。

小李：我是先在这个长方形里折出一个最大的正方形，根据折纸的经验，它的边长为 $a-b$，剩下部分的宽是 $(a+b)-(a-b)=2b$。剩下的长方形再对折，裁剪出两个宽为 b，长为 $a-b$ 的长方形。其中一个长方形补在左边，另一个长方形补在下边。这样也可以得到面积为 a^2-b^2 的矩尺形（图 6）。

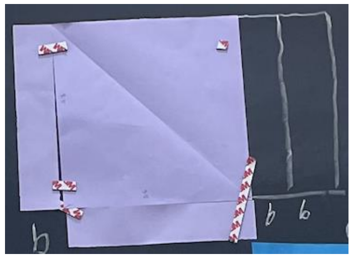


图 6 第三种拼法

台下掌声阵阵，对小李投来赞许的目光。教师抓住学生同伴评价的契机，对学生的精彩探究给予高度赞扬“大家的方法和历史上数学家们的方法不谋而合，而且比数学家的方法还要多，小李同学的创新精神非常值得大家学习！”

2.3 总结公式

经历了代数和几何两个角度验证猜想后，同学们对于 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 的成立必然是心服口服。

师：数学中，我们把上述的猜想叫做平方差公式。平方差公式如何用文字语言表述呢？

生 1：a 加 b 的和乘 a 减 b 的差等于 a 的平方减 b 的平方。

师：已经很接近了，但是能不能不使用字母呢？

生 2：两数的和乘以两个数的差，等于两个数的平方差。

师：那如果我说的是 $a+b$ 和 $c-d$，也是两个数的和与两个数的差，但是不符合今天所学习的平方差公式，是不是不太严谨呢？

生 3：两个同样的数的和乘以两个同样的数的差等于这两个数的平方差。

此时教室里笑声阵阵，第三位同学的表达比较冗余，但是显然他明白了老师的意图。平方差公式概念的文字表述，应该注意的是和与差应该是相同的两个数。前面两位同学，一个是没有将文字与字母分开，一个是没有注意到相同的两个数。由于学生尚未想到更简洁的方式，于是让学生填写学习单，加深印象，充分体会数学中语言表述不仅要严谨清晰而且要简洁，即“两个数的和与这两个数的差的乘积，等于这两个数的平方差。”

师：我们通过代数验证和几何验证得到了平方差公式，需要注意一下，这里的字母 a 和 b 可以表示任意的数或者式子。老师还有一个小问题。几何的方法和代数的方法相比，是否存在局限性？

生 4：我认为几何的方法不能证明 a 和 b 为负数的情况。

师：非常好，因为我们用的长方形和正方形的纸片的边长都是正数，无法用图形说明负数，但是代数的方法就可以弥补这个不足。平方差公式的前世今生又有什么渊源呢？我们通过一段微视频来了解平方差公式的历史。

微视频按照时间顺序讲述了三千多年的历史长河中，平方差公式的发展、证明和运用等，带领同学们体会古人的智慧与数学的多元文化。

2.4 学以致用

两个例题都直接选用沪教版教材中的题目，第一个例题是公式的直接应用，通过具体的计算让学生熟悉平方差公式的特征，找出相同项和相反项。第二个例题是 102×98 和 59.8×60.2 这两个计算。学生先通过计算体会平方差公式能够简化有理数计算，然后进一步挖掘背后的原理和依据。

简化运算的规律其实是平方差公式的一个变形，即 $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$，这是《几何原本》第II卷命题 5 的等价形式[4]。为了引导学生发现这个规律，先设置“两个平方数与原来两个因数之间有什么关系？”这个问题作为铺垫。关于这个规律的代数验证和几何验证作为课后探究作业。

2.5 课堂小结

以学生总结为主、老师补充为辅的形式，学生自己总结本节课所学的知识、方法与思想等，以此锻炼和提升他们的数学语言表达能力。

师：这节课大家收获了什么？

生 1：我学习了平方差公式，还知道了它的来历。

生 2：我学会了用符号语言和几何图形来表示平方差公式，还学到了梯形的拼法（几何验证的第二种方法）。

生 3：我学习到了平方差公式的多种表达方式。

生 4：图形方法和代数方法相比，欠缺的地方是图形无法表示负数。

生 5：通过平方差公式验证的方法，以后再验证公式的时候可以采用数形结合。

师：大家都总结得很好，接下来老师汇总一下（图 7）。这节课我们学习了一个什么？

生齐：平方差公式。

师：用了数和形两种视角，还涉及了三种语言，那三种呢？

生齐：文字语言、符号语言和图形（几何）语言。

师：最后，老师送给大家四点启示。第一，大道至简，数学追求的本质是简洁，平方差公式帮助我们极大地简化运算。第二，古今方法的对照，让我们体会到代数语言的优越性。第三，东西方文明的邂逅，让我们体会到数学文化的多元性。第四，大家再现数学家们的方法，并且创新了数学家都没有想到的方法，说明大家都有成为小小数学家的潜质。

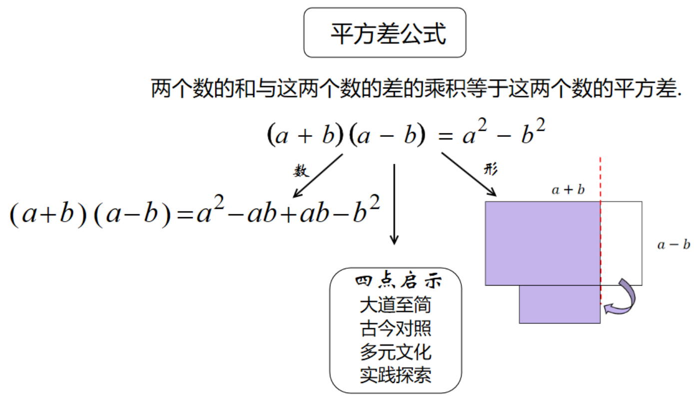


图 7 课堂小结

3 学生反馈

本节课通过海岛的情境引入和拼图的探究活动强化平方差公式的图形表征。为了检验学生是否领会了本节课探究的数形结合的思想方法，设计了用代数以及几何的方法验证公式 $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ 的探究作业，要求其根据所给材料并结合课堂上的内容进行数学写作。

3.1 探究作业

从回收的 35 份有效作业中发现，95%的学生都可以用代数的方法验证上述公式，一种是逆向运用平方差公式（图 8），另一种是运用完全平方公式将括号展开（图 9）。

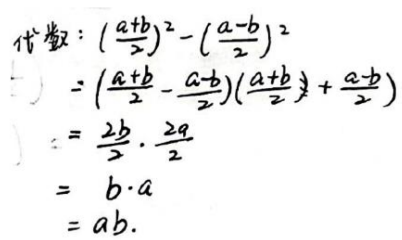


图 8 逆向运用平方差公式

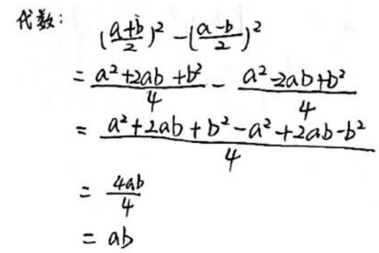


图 9 运用完全平方公式

大约 34.3%的学生能够用几何的方法验证，其中 20%的学生是迁移了课堂上的方法。先沿着宽找出边长为 b 的正方形，长边剩余的线段的长为 $a-b$，对折便可以得到 $\dfrac{a-b}{2}$（图 10）。

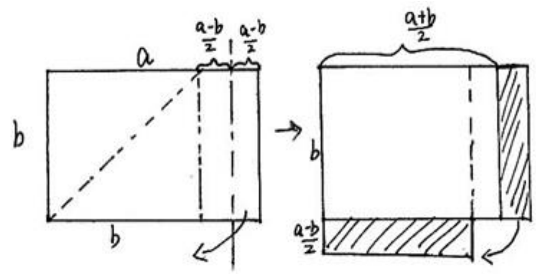


图 10 课上方法迁移

而另外 14.3%的学生则是另辟蹊径，将长为 a、宽为 b 的矩形平均分成 4 份，得到了四个完全相同的长为 $\dfrac{a+b}{2}$、宽为 $\dfrac{a-b}{2}$ 的矩形，然后再拼接出一个边长为 $\dfrac{a+b}{2}$ 的正方形，中间的空隙是边长为 $\dfrac{a-b}{2}$ 的正方形（图 11）。

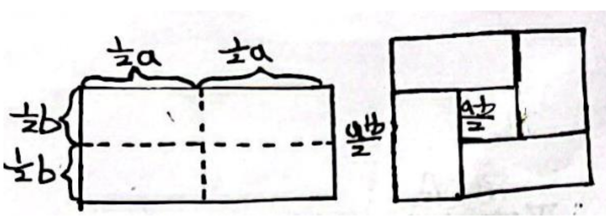


图 11 不同的拼法

3.2 数学写作

数学写作给学生提供了两个主题，一个是“解答古希腊人对周长相同的长方形面积却不同的困惑[5]”，另一个是“从本节课涉及的平方差公式的文化谈谈自己的感想和启发”。

第一个主题，部分学生能够模仿课堂上学习的方法，尝试运用图形来解释。不止一位学生分割长方形和正方形，尽管学生可能并未意识到，但他们实际上已经巧妙地运用了微元的思想

（图 12 和图 13）。

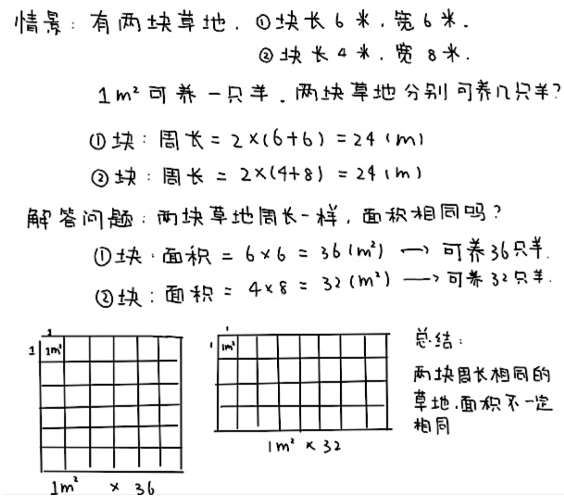


图 12 学生解答范例 1

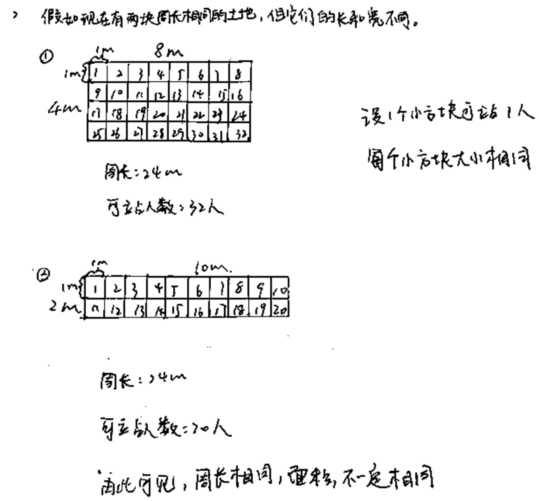


图 13 学生解答范例 2

有一位学生先假设长和宽都是正整数，分别取不同的数字举例说明，他还由此得出一个猜想“周长相同时，长方形的长和宽差距越小，面积就越大”，然后运用面积割补法证明了自己的猜想（图 14）。学生在分析问题的过程中发现新的规律，并运用所学的方法进行深入探究，这恰恰体现了本节课学习平方差公式的核心思路。数学教学的一个重要目标就是使学生真正掌握学习方法，并具备自我探索数学规律的能力，做到自主发现问题、分析问题和解决问题。

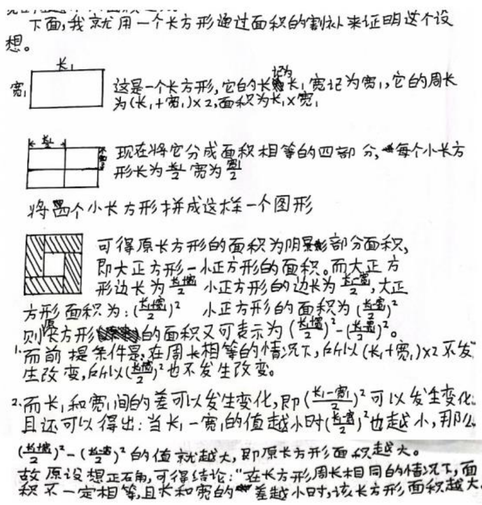


图 14 学生解答范例 3

第二个主题，部分学生展现了对公式推导方法的深入思考，对数学家品质的认同，并树立了以数学家为榜样的远大志向。

生 1：亲自动手推导公式，让我体会到了数学家为何如此热爱数学，从几何的角度证明公

式让我体会了数学的对称美，我开始对公式如何推导产生了浓厚的兴趣。只要我们勤于思考、认真感悟，就能有所发现。正如高斯所言：“如果别人思考数学的真理像我一样深入持久，他也会找到我的发现。”

生 2：数学家赵爽虽然家庭条件不好,每天都要靠打柴来生活，可这并没有打消他对数学的热爱，他仍然把心血倾注数学上，为数学问题不辍耕耘。他就像一缕韶光，照亮了中国古代的数学之路，他用黄明的光驱散黑暗，在人生的漫漫长路上留下了一个个深深的脚印。而我们现在生活在一个安居乐业的环境中，应该学习杰出的数学家，认真为祖国出一份力量。

生 3：我从数学家身上学到了三点。第一，坚持不懈的重要性：数学家为解决数学问题三天三夜不出房门，这样的毅力是我们学习的榜样。在生活中不管遇到多大的挑战，坚持不懈地努力才能取得真正的成功。第二，充分利用时间：赵爽在空闲时间研究《周髀算经》，教育我们要充分利用空闲时间，追求自己的兴趣和目标。我们经常抱怨自己没有足够的时间，但是如果像古代数学家一样善于时间管理，也可以实现自己的抱负。第三，坚韧的精神：数学家展现的坚忍不拔的精神，无论是面对苦难还是问题都毫不气馁，为了解决问题而付出连续辛勤努力，这种坚韧的精神是解决任何困难挑战的关键。

学生通过课堂上的探究活动感悟并理解数学学习需要积极的思维，并且需要深入持久地思考数学的真理，这种反思和体会对于提高学生的素养和能力都是很有帮助的。而数学史的融入让学生领会到了数学家坚韧不拔、坚持不懈、永不言弃的重要品质和价值观，对于他们以后的成长和发展有重要的启示。

4 评价与启示

4.1 评价与反思

借助 HPM 课堂教学评价新框架[6]，从内容呈现、认知需求、学习机会、学生表现、评价运用几个方面对本节课进行评价与反思。

内容呈现，主要是数学史料的科学性、可学性、有效性和人文性。其一，本节课引入部分的海岛面积问题其实来源于 18 世纪欧洲的数学文献，改编自古希腊的等周不等积的问题。几何方法的验证来源于公元 3 世纪中国古代数学家赵爽的“面积割补法”，出自赵爽的《周髀算

经注》。微视频中呈现的古巴比伦的“和差法”、欧几里得在《几何原本》的第II卷命题 6 给出的等价命题、印度数学家婆什迦罗（Bhaskara, 1114-1185）利用平方差公式进行简便计算等均出自权威的数学史资料。因此，本节课涉及的史料都具备科学性。其二，古希腊的问题改编为符合学生认知的海岛面积问题，几何的方法通过探究活动融入课堂，微视频也是学生喜欢的形式，所以具备可学性。其三，引入部分从几何和代数两个角度引导学生解决问题并且发现平方差公式，为后续的探究埋下伏笔。几何方法的验证对应的是平方差公式的探究过程，学生在此过程中积累数学活动经验，改善实践与创新能力。微视频呈现数学文化的多元性与丰富性，符合教学目标，因此具备有效性。其四，在课堂上没有针对史料中历史人物的精神品质加以评价，且微视频中的内容呈现又过于简短粗略，如果能抓住一个人物故事和人物思想，则能让学生深入感悟数学文化的魅力，所以人文性稍有欠缺。

认知需求，是指数学史的应用对学生理解和掌握数学概念的支持程度。本节课主要采用重构式设计平方差公式的发现和数形角度的验证。“创设情境”环节从几何的角度引导学生发现平方差公式。“验证猜想”环节通过探究活动重现历史上的方法，其中对学生古今方法对照的评价属于顺应式。“学以致用”环节，简便运算背后规律的总结引出《几何原本》的等价命题也属于顺应式。HPM 微视频的运用属于附加式。整体来说，满足学生对平方差公式本源的理解和探究。

学习机会，是基于数学史的学习活动对全体学生获得学习机会的支持程度。本节课精心设计了层次分明的问题，确保全体学生都能获得充分的学习机会。教师以学生为中心，鼓励他们积极表达自己的观点。此外，小组合作探究模式进一步提升了学生的参与度，组内的深入讨论与交流展示为学生提供了更多表达和学习的空间。不过，青年教师往往过于关注教学内容的传授，而忽视学生的反馈和需求，课堂上存在倾向于提问个别学生导致某些学生被忽略的现象。在小组合作探究中，没有做好详细的分工，导致个别学生没有参与到探究活动中。总体来说，有多数学生参与到数学学习活动，但在及时反馈与机会均等方面，还需要努力。

学生表现，是指基于数学史的数学活动中，学生在任务完成、想法及其讨论上的贡献程度。本节课的每一个环节都设置了不同层次的问题，有个别回答和集体回答。在探究活动中学生呈现了三种不同的几何证明方法，并且具有一定的创造性。在课堂小结环节，学生从知识概念、推导方法以及数学思想等各方面进行了总结。该维度整体而言水平较高。

评价运用，是指教师能揭示学生思维、利用学生想法或者处理学生错误的程度。教师在课堂上对学生的回答论证能给予简单的回应和评价，采用古今联系的策略来评价学生的探究成果“不仅重现了历史上的方法而且有自己的创新”，是对学生探究成果的肯定，更是激发他们持续创新的动力源泉。青年教师往往对学生的表达能力持怀疑态度，倾向于抢先表达自己的观点。所以课堂上存在教师抢先补充学生没有回答完整的观点，这导致学生大胆表达的机会受到限制。然而，如果给予学生更多时间，他们有可能回答得更准确更清晰。因此，青年教师在教学中应充分信任学生的表达能力，给予他们更多的思考与表达时间，以促进学生思维能力的发展。所以在评价运用上还有很大的进步空间。

4.2 启示与展望

整体而言，这节探究课在设计、实施和效果方面都有一定的借鉴意义，但是也存在学生学习机会不均等、数学公式背后的人文性不够、教师评价缺乏针对性和情感支持不足等遗憾。通过本次课例获得以下四点启示，希望能和大家共勉。

第一，关注数学基本概念和公式学习的必要性。基础知识在数学体系中举足轻重，不仅要知其然，更要知其所以然，关注知识之源，关注概念之间的联系，关注数学在其他学科和实际生活中的应用。这样才能更好地厘清深层次的知识，厚积薄发，为数学素养和能力的提升奠定坚实的基础。没有扎实的基础，就如无根之木，很难有质的飞跃。

第二，设置聚焦核心能力培养的数学活动。数学教学中基础知识的夯实和探究活动的设置一直是大家困惑和讨论的热点，好的探究活动让学生亲身体验知识的生成过程，不仅能激发学生的学习兴趣，而且能培养他们的创新思维和问题解决能力。但是浮于表面的探究活动会喧宾夺主，分散学生的注意力。因此真正有效的探究活动应该明确探究目标、提供适时指导、不断反思总结，做到数学思想有土壤，学生操作有意义，数学思维有发展。

第三，寻找落实数学核心素养培养的抓手。数学史作为一座宝藏，蕴含着丰富的资源和价值。通过对历史上数学概念公式的演变、多元方法和丰富问题的研究，可以为课程设计提供有力支持。知识发生和发展的再现有助于培养学生的应用意识。数学公式推导或问题解决的多种方法，能有效培养学生的推理能力和创新意识。通过探究多种方法，学生可以学会从多个角度思考问题，培养他们的逻辑思维和创新能力。数学史上公式诞生的缘由和如今的实际问题情境

相联系，是培养学生模型观念和数学应用能力的有效途径。通过将实际问题抽象为数学问题，学生可以更好地理解数学知识的应用价值，提高问题解决能力。探寻算理的本源并且由学生自主得到，是提升运算能力的关键。理解数学规则的来源和本质，掌握正确的运算方法和技巧，运算能力的提升必然事半功倍。

第四，鼓励学生表达，实现立德树人。立德树人是教育的根本任务，借助基于数学史的数学学科德育内涵[7]，可以在课堂活动中贯彻这一任务。通过自主推理探究数学法则的合理性可以培养学生的理性品质与批判性思维。从不同的视角解决同一个问题，辨析数学家的方法，是对学生信念和独立思考能力的培养。数学史和数学家的故事能够激发学生的动机和兴趣，使其感受数学的魅力和价值，是对情感的培养。课堂上倾听同伴的声音，并积极主动地表达和交流自己的观点，是对尊重、包容、自信等品质的培养。

随着教育改革的深入推进，数学史在数学教育中的作用将得到更加广泛的认可和重视。展望未来，通过不断地实践和研究，相信数学史会为数学教学注入更多的活力和内涵，为学生的核心能力发展提供更加丰富和有益的资源。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 8.

[2] Subanji, Subanji. Process of mathematical representation translation from verbal into graphic[J]. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2018(12): 367-381.

[3] Bal, Pinar A. Skills of using and transform multiple representations of the prospective teachers[J]. *Procedia -Social and Behavioral Sciences*, 2015(197): 582-588.

[4] 汪晓勤, 张安静. 平方差公式的历史[J]. 中学数学教学参考, 2010(11): 64-66.

[5] 李玲, 顾海萍. “平方差公式”：以多种方式融入数学史[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2014(11): 43-47.

[6] 汪晓勤. 关于 HPM 课堂教学评价的案例分析[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 1-6.

[7] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. 数学通报, 2020, 59(03): 7-12+19.

会议综述

第十一届数学史与数学教育（HPM）高级研修班综述

刘倩雯，钱骏霖，赵哲栋

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

数学史与数学教育（HPM）研究是 21 世纪数学教育研究的重要领域之一[1][2]， 2002 年，张奠宙先生在《数学教学》上开辟“数学史与数学教育”栏目，致力于构建富有中国特色的 HPM 理论。在张先生的引领下，国内 HPM 研究不断深入。HPM 高级研修班自 2014 年以来，聚焦 HPM 领域的研究热点、动向及最新研究成果，以建设 HPM 学习共同体为目标，为高校研究者与中小学一线数学教师搭建学术交流、实践分享的平台，业已成为全国数学史与数学教育领域的重要学术活动[3]。

2023 年 12 月 2 日-5 日，第十一届 HPM 高级研修班于云南昆明召开。来自云南、浙江、上海、河北、陕西、广东、贵州和福建等 23 个省份的 156 家单位，共计 420 余位高校学者、研究生、教研员和一线中小学数学教师参与本次会议。

本次研修班设有 4 个大会报告与 1 场圆桌论坛、52 个分组报告及 6 节展示课，涉及 HPM 理论研究、教育取向的数学史研究、教学实践与课例开发、HPM 与教师专业发展与教材研究等主题。本文对此次会议内容进行综述与分析，总结现阶段国内 HPM 研究特点，以期为 HPM 的理论与实践研究提供借鉴与启示。

1 报告内容

1.1 HPM 理论探讨

在 HPM 理论方面，2 个大会报告聚焦数学史的教育价值以及数学史在数学教学中的运用方式，探讨关于“为何”和“如何”的问题。

华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授作了题为“从历史到课堂：数学史融入数学教学的若干方式”的大会报告，报告阐述了数学史与数学教育（HPM）的缘起和研究进展，介绍了

指导 HPM 实践研究的理论框架（图 1），并结合开发的教学案例重点论述了数学史融入数学教学的四种方式，包括：附加式，复制式，顺应式和重构式。[4]报告呈现了丰富的教学案例，如“角的认识”“平面几何序言课”“指数函数的概念”等，涵盖小学、初中、高中各学段，涉及概念课、拓展课、序言课等各课型。

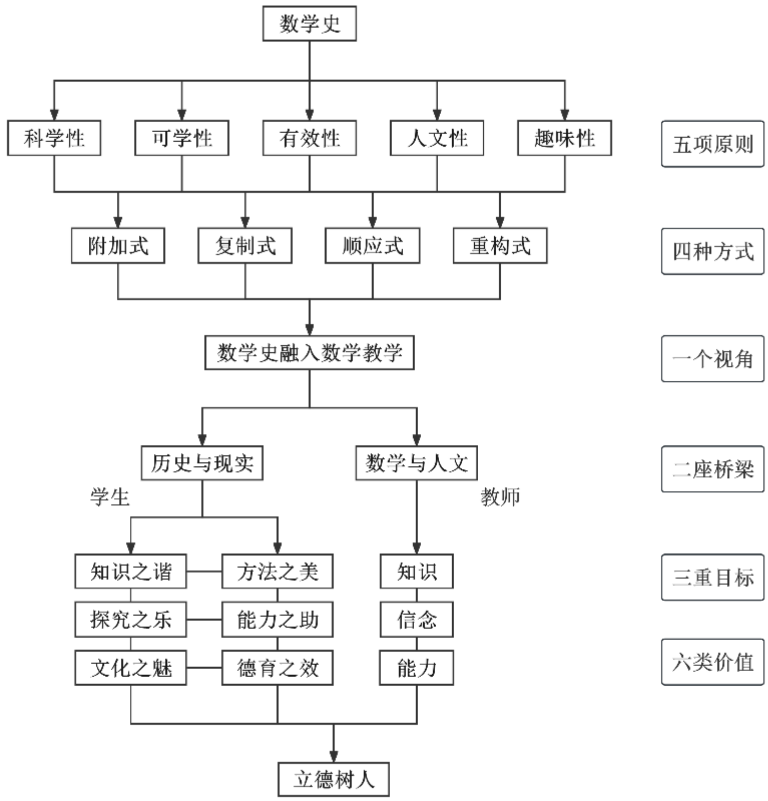


图 1 指导 HPM 实践研究的理论框架

云南师范大学初等教育学院吴骏教授的大会报告介绍了“数学文化视角下的课程育人”相关内容。报告首先阐释小学数学文化的内涵及融入方式，而后探析课程思政和学科德育的关系，并提出研究展望：可以深入挖掘数学史、数学知识以及数学问题情境中的思政教育元素。同时，报告以苏教版小学数学教材为例，从价值导向、文化传承、科学精神和品德养成等方面分析了教材中的课程思政元素，并展示“圆的认识”“轴对称图形”“平均数”等融入数学文化的课程育人教学案例，以及案例开发的基本流程。

1.2 教育取向的数学史研究

由华东师范大学教师教育学院研究生带来的 3 个分组报告聚焦相关数学史料，为数学课堂的教学提供素材和教学启示。

其中，王德凯考察了历史上三角形内角和定理、中位线定理、等腰对等角定理的多种证明方法，从运动的观点揭示了不同证明方法之间的联系，为指向数学思维培养的初中平面几何教学提供了素材。赵哲栋分析了欧几里得对勾股定理的留白和后世数学家补白所使用的“否定属性”策略，按课堂留白的类型提出了基于数学史的留白方法，为勾股定理的留白创造式教学提供借鉴。朱峻驻对不同历史时期正弦定理和余弦定理之间的关系作了深入探析，追溯了正弦定理与余弦定理在古希腊的起源，而三角学与代数学的发展使得两者由“形同陌路”走向“亲如一家”。

1.3 HPM 与教师专业发展

1 个大会报告和 1 个分组报告研究数学史对数学教师专业发展的影响。

杭州市萧山区夹灶小学李建良老师以自身为例，分享了在 HPM 教研驱动下的专业发展过程。报告人阐述了“自发关注 HPM—深入学习—正式设计与实施 HPM 视角下的教学”的历程，展示了由高校研究者与一线教师构成的 HPM 学术共同体不断研讨而开发出的“圆的认识”“多边形面积”等课例，并分享了 HPM 课例开发的经验与感悟。

扬州大学数学科学学院李卓忱博士通过个案研究法，聚焦于小学数学教师，探究在 HPM 课例研究中数学史料内容对数学教师的内容与教学知识（KCT）的影响。报告指出，数学史对个案教师 KCT 的发展在不同的阶段中产生了不同的影响，整体趋势是先有消极影响，而后转为了积极影响。

1.4 教学实践与课例开发

HPM 教学实践与课例开发是此次会议最热门的主题，共有 33 个分组报告关注数学史融入数学课堂教学的实践，包括 HPM 课例的设计、实施与评价等。

（1）一般数学史融入教学的实践

本次会议共有 19 个分组报告关注一般数学史融入教学的实践主题。

2 个报告分享 HPM 实践的开展现状与成果，其中，河北省唐山市迁安市教研训中心的崔国军老师分享了以关注“人、课堂、课程”为基础，通过“专家引领、整体推动、校本研修、课题研究、资源建设、课例实践”等路径落实 HPM 理念的“迁安实践”，为提升教师专业素养的区域探索提供了一条可借鉴之路。

5 个报告探讨将数学史融入教学的具体路径，包括课堂留白、情境创设、史料欣赏等。例如，华东师范大学教师教育学院研究生刘梦哲从课堂留白的角度分析了“异面直线间的距离”的同课异构课例，阐述了 HPM 视角下的留白创造式教学理念，并提出了鉴史留白、放手留白、问题留白、总结升华等教学启示。

有 3 个报告探讨技术如何辅助数学史融入课堂教学，例如，安徽省淮南第二中学的戴泽莉老师介绍了实物模型、软件模拟等实验教学方式，结合开发的“球的体积公式与表面积公式”“圆锥曲线实验探究”“一元线性回归模型及其应用”“复数的概念”课例，指出基于数学史设计数学实验并融入高中数学课堂教学能使课堂更有深度、趣味和活力。

此外，有 9 个报告聚焦教学设计或问题编制的具体实践与评价，例如，云南师范大学教育学部研究生邢会超介绍了二元一次方程组的史料选取依据，以及运用古法今观、古今联系、借鉴和重构历史等方式设计的教学活动过程，并从内容呈现、认知需求、学习机会、学生表现、评价运用五个维度对该课例进行了评价。

（2）中华优秀传统文化融入教学的实践

14 个分组报告主要从路径探讨、案例设计和民族数学文化三个方面分享了对中华优秀传统文化融入数学教学的认识。

4 个报告讨论了中华优秀传统文化融入教学的具体策略。其中，云南师范大学教育学部研究生肖唐娜结合具体案例提出了基于中华优秀传统文化落实小学数学学科德育的策略，如依托学习共同体，建立中华优秀传统文化资源库；探寻内在关联，整体呈现数学课程的育人价值等。云南师范大学数学学院研究生沈爱桐提出传统文化融入中学数学教学的三条实践路径：古为今用，乐学好学；邂逅诗歌，思维碰撞；传承思想，经世致用。

共有 9 个报告分享了中华优秀传统文化在教学中的运用。苏州大学数学科学学院沈中宇老

师从留白与创新的角度分析中国古代数学史中勾股定理的发展过程，深入探讨了《周髀算经》和《九章算术》对勾股定理的留白以及后世数学家对勾股定理的创新过程和创新路径，为基于数学史的留白创造式教学的开展提供借鉴。桐乡市凤鸣高级中学孙冲老师、饶彬老师和沈金兴老师小组报告了祖暅原理探究、从“垛积术”到中国古代数学家求数列和的方法两个课例，以及对“中华优秀传统文化进课堂”的展望。

1 个报告聚焦极具特色的民族数学文化。其中，华东师范大学教师教育学院研究生王兆春围绕民族数学文化在小学数学教育中如何运用的研究问题，从运用方向、运用方法、运用载体三个维度建构研究框架，并加以探析。同时以纳西族数学文化为例，分析了民族数学文化在小学数学教育中的具体应用。

1.5 教材研究

10 个分组报告探析相关数学教材，具体主题包括教材分析与教材比较。

4 个报告分析了教科书所蕴含的丰富中华优秀传统文化元素，1 个报告关注了《义务教育数学课程标准（2022 年版）》中的数学文化内容，1 个报告研究了人教 A 版数学教科书正文栏目的留白类型。其中，云南师范大学初等教育学院研究生吴长美从内容性质、内容领域、功能定位和呈现方式四个维度对人教版小学数学教科书中的中国元素进行了分析。

4 个报告聚焦不同数学主题如“小数的认识”“分数”等，对不同版本的教科书进行比较。例如，云南师范大学初等教育学院研究生耿溪比较了人教版、北师大版和浙教版三版小学数学教科书中“出入相补”原理，认为人教版和北师大版的内容编排逻辑严谨且符合学生认知规律，但呈现的图形转化方法不够多样，而三版教科书在情感态度与价值观的培养方面均有待增强。

1.6 其他相关主题

本次会议中有 1 个大会报告、5 个分组报告关注数学史以外的其他教育主题，包括留白创造式教学、数学写作、研学课程、深度学习等。其中，上海市晋元高级中学特级教师、正高级教师王华老师作了题为“汲取优秀文化之根，培育留白教学之林”的大会报告。报告阐述了“留白创造式教学”的文化之根及评价体系。结合上海数学基础教育改革的现状，报告指出留白创造式教学的意义在于确立一种信念、树立一种理念和变革教学观念，然而实施留白创造式

教学存在“观念转变、教师素质、教学质量”三方面的难点。最后，报告指出，“留白”中的“白”的含义、数学史融入留白创造式教学的方式等问题仍有待深入探究。

2 教学展示

本次会议共安排了 6 节精彩的展示课，内容涵盖小学、初中和高中三个学段，其中，小学与初中学段采取同课异构的形式。

云南师范大学附属小学唐丽老师和杭州市萧山区夹灶小学李建良老师执教 “三角形面积”主题的观摩展示课。

唐丽老师通过农耕时代三角形土地面积的测量问题引入教学主题，基于前测问卷请学生展示“倍拼法”和“折叠法”，并设置问题串引导学生推导三角形面积公式。而后，学生以小组形式探究“割补法”，发现割补前后的图形联系，感悟“出入相补”原理。最后，课堂以微视频收尾，介绍割补法的历史和三角形面积公式的应用，让学生进一步了解我国古代数学成就，并体会数学来源于生活，又服务于生活。

李建良老师在课前设置悬念，以校徽图片为线索引入主题，并带领学生回顾长方形面积求法。而后，基于《九章算术注》中“以盈补虚”的思想，课堂引导学生展示等腰三角形转化为长方形的多种方法，并发现转化前后的图形联系，进而推导等腰三角形面积公式。进一步，李老师引导学生用“出入相补”方法探求一般三角形面积公式，让学生经历由特殊到一般的抽象过程，理解转化思想。最后，师生共同证明《几何原本》中“等底等高的三角形面积相等”的命题，并综合利用转化思想计算正六边形面积，以巩固知识。

现场观摩后的研讨环节中，评课专家指出，唐丽老师借前测数据推进课堂教学，以几何直观助力学生推理能力发展，且在课堂中有效融入了相关史料，整节课充分体现了素养导向。李建良老师重构式地将数学史融入实践教学，设置开放任务引导学生探索三角形面积的转化方法，在探究过程与古今对照中借几何直观发展了学生的推理能力，渗透了数学思想。

“勾股定理”课题由云南民族大学附属中学的谢春祎老师和上海浦东新区民办远翔实验学校的贾彬老师执教。

谢春祎老师播放“怒江溜索”视频引出溜索长度的求解问题，进而引入教学主题。而后，通过观察地砖、验证方格纸中正方形面积关系、动画演示等活动，引导学生归纳直角三角形的

三边关系并进行检验，同时播放微视频展示勾股定理的发现过程，介绍定理的人文背景。进一步，学生先用四个全等直角三角形拼摆正方形，再利用所拼图形完成勾股定理的证明。最后，师生学以致用，解决课堂伊始的溜索长度问题，并从数学活动、知识体系、数学方法三个方面进行课堂小结。

贾彬老师通过微视频提出“如何平分直角三角形水塘边正方形稻田面积”的问题，而后带领学生先探究方格纸中直角三角形三边上的正方形面积关系、再考虑方格纸外的一般情形。进一步，通过讲述赵爽的故事，带领学生解读赵爽弦图等相关证明，理解正方形的转化方式。最后，贾老师引导学生从数和形两方面描述勾股定理，利用所学知识解决古巴比伦泥版记载的问题，并从数学知识和思想方法的角度总结。

在评课环节，评课专家指出，谢春祎老师借助云南本土特色溜索引出勾股定理，从特殊的直角三角形过渡到一般的直角三角形，利用网格图和拼图的方式，还原了勾股定理的发展过程和古人的思考方式，且课堂以溜索长度问题结尾，形成课堂的教学闭环。贾彬老师结合数学内外的情境引出课题，利用面积关系证明勾股定理，渗透数学史。同时，贾老师循循善诱，耐心引导学生自我纠正，展现了扎实的教学水平。

云南师范大学附属中学宝晓东老师执教主题为“弧度制”的观摩展示课。宝老师首先让学生分享角度制的历史，并通过秦始皇统一度量的故事、定义三角函数关系时的困难和渔船绕小岛运动的情境，揭示弧度制引入的必要性和可能性。其次，学生探究角度与实数间的关系，提出“用弧长”“用弧长与半径比值”等多种度量角度的方案，并共同分析，生成弧度制的定义。而后，宝老师介绍弧度制历史，渗透数学文化，并通过例题引导学生巩固角度制与弧度制之间的换算。最后，宝老师从过程体验、核心素养和数学文化三个维度进行课堂小结。

“圆锥曲线的统一性”由上海市回民中学徐洁岚老师执教。徐老师先让学生回顾三种圆锥曲线的探究过程和内容，明晰其第二定义的统一性，进而让学生思考标准方程的内在一致性。进一步，徐老师从抛物线方程的几何意义出发，让学生证明满足该几何意义的点的轨迹是抛物线。通过类比，学生继续探究椭圆和双曲线标准方程的几何意义，发现了三种圆锥曲线的统一性。最后，徐老师将学生的发现与古希腊数学家的研究成果进行古今对照，鼓励学生站在巨人的肩膀上不断创新。

对于高中的两节展示课，评课专家指出，宝晓东老师带领学生回顾弧度制的发展历程，将

数学史自然地贯穿于课堂教学中，体现了知识的应用价值，利用数与数的矛盾和形与形的矛盾创造了学习动机，成功呈现了引入弧度制的必要性。徐洁岚老师梳理了几何从古希腊到笛卡尔的发展脉络，运用面积贴合理论探究圆锥曲线的统一性，帮助学生建立知识之间的联系，有利于学生核心素养的提升，有效达成了教学目标。

3 若干特点

根据上文对会议内容的综述与分析，可以总结出现阶段国内 HPM 研究具有如下特点。

（1）重视教学实践

歌德（J. W. von Goethe, 1749-1832）曾说，不能产生行动的思想是一种疾病。HPM 相关理论只有切实指导实践、推动数学教育的发展才是有意义的。在此次会议中，有过半的报告围绕 HPM 视角下的数学教学实践研究，是本次会议的热点。这些研究普遍基于 HPM 相关理论框架进行教学设计、实施与评价，开发出精彩的 HPM 课例，分享了丰富的 HPM 实践方式与教学经验。6 节观摩课展示了融入数学史的探究过程，充分体现了学生的主体地位，在精彩的教学活动中贯彻了 HPM 理念。可见，国内 HPM 正以发展着的理论指导着教学实践，并以教学实践为重。此外，有部分报告展示了历史素材、HPM 理念和信息技术在课例形成过程中的创新应用，这也表明 HPM 学习共同体正以创新的精神不断探索改善 HPM 教学效果的新途径。

（2）聚焦传统文化

中华优秀传统文化是中华民族的“根”和“魂”，本次会议有 14 个报告聚焦中华优秀传统文化融入数学教学。这些报告既有对教学中运用中算史的策略和路径的理论探讨，也有对丰富精彩的教学案例的分享，为中小学一线教师在数学教学中融入中华优秀传统文化提供了借鉴。此外，关注地方特色数学文化也是本次会议的特点之一，相关报告涉及良渚文化、纳西族文化在相应地区数学教学中的运用，展现了独具中国特色的 HPM 研究成果。

（3）研究成果丰硕

本届 HPM 高级研修班首次走进云南，与会者共计四百余人，规模空前。会议设有多个议程，包括大会报告、分组报告、观摩展示课、交流会与青年学者论坛等。同时，本次会议呈现出丰硕且优质的研究成果。具体而言，会议中报告总数共 56 个，数量众多；报告涉及 HPM 理论探讨、教育取向的数学史研究、HPM 与教师专业发展、教学实践与课例开发等 5 类主题，内

容丰富；相关研究涉及小学、初中、高中 3 个学段，课型覆盖概念课、定理课、序言课、复习课等多种课型。这也在一定程度上反映出当前国内 HPM 研究不断趋于成熟的特点。

4 结论与启示

根据上述分析，本次会议总体上呈现出重视教学实践、聚焦传统文化、研究成果丰硕的特点，也带来了如下思考与启示。

（1）加强理论探讨，重视教育取向的数学史研究

目前，HPM 研究以理论指导实践，并在实践中反哺理论，此次会议呈现出理论与实践相结合且重实践的特点。在理论探讨方面，围绕“数学史融入数学教学”的视角，HPM 专业学习共同体已构建起较完备的理论框架（图 1），未来可继续推动理论研究的纵深发展，如对六类教育价值做进一步阐释与探析。

同时，数学史（History）是 HPM 研究的基础，不同于为历史而历史，教育取向的数学史研究不仅能够为 HPM 研究注入源头活水，还能厘清相关数学主题的历史脉络与演进过程，从而有助于开发出精彩的 HPM 课例。未来应继续注重教学中数学专题背后的历史研究，更进一步，可以有效利用数学经典著作，如《几何原本》、《计算之书》等，深入挖掘数学名著蕴含的深刻内涵与教育价值。此外，聚焦相关数学主题，历史上数学家们的留白与创新也值得进一步分析与探索。

（2）关注实证研究，推进相关评价理论与工具开发

综述本次会议相关内容，可以看出当下国内 HPM 研究以课例研究为主，关于 HPM 的实证研究相对较少。然而，开展 HPM 相关的实证研究极其重要，相较于思辨或经验总结类的研究，实证研究基于事实与数据、强调规范的程序与研究方法，故而结论更具客观性。未来可围绕数学史融入课堂教学的效果、HPM 对数学教师专业发展的影响、数学理解的历史相似性等开展实证研究。

值得注意的是，目前关于 HPM 对学生数学学习、教师专业发展等的评价方法仍以质性分析为主。研究者可进一步研究测评框架，开发和使用评价量化工具， 推动更规范、更具信度的评价研究。

（3）拓宽研究视野，将数学史与其他理论联结

此次会议中，部分报告关注了基于数学文化的数学学科课程育人案例开发，以及国内数学教育领域学习进阶文献计量分析，但相关报告数量较少，且与 HPM 关联度不强。未来应在立足于 HPM 不动点的同时与时俱进，将 HPM 与跨学科、人工智能赋能、学科核心素养、学习进阶等研究热点相结合，进一步拓广 HPM 的研究方向。此外，数学史也能成为部分理论的抓手，例如，以数学史为思想主线开发大单元教学；将数学史与问题提出融合，开展基于数学史的问题编制；将数学史与留白创造式教学结合，探索 HPM 视角下的“留白创造式”教学研究与实践案例等。

第十一届 HPM 高级研修班聚焦 HPM、注重实践、简约高效、规模空前、成果丰硕，呈现了现阶段国内 HPM 研究的丰富而广泛的研究主题，为与会者打开了一扇名为“HPM”的窗，看向更美好的数学教育。最后，期待第十二届 HPM 高级研修班上的再次相聚！

致谢：此文得到汪晓勤教授、邹佳晨老师的指导，华东师范大学研究生秦语真、刘梦哲、唐都宁、王德凯、于博、朱峻驻，云南师范大学研究生金晶、王佳文、徐初梅、徐嘉寅、杨小玲、张婧、钟惠斯共同参与了资料整理，谨此致谢。

参考文献

[1] 沈中宇, 邹佳晨, 汪晓勤. ICME-13 之 HPM 专题研究综述[J]. 数学教育学报, 2017, 26(5): 71-76.

[2] 刘思璐, 汪晓勤. 基于国际视角的数学史与数学教育研究现状分析——ICME-14 之 HPM 专题综述[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 98-102.

[3] 刘帅宏, 陈莎莎, 王鑫, 李婷. 聚焦数学史与数学教育领域的研究热点——第四届 HPM 研讨会综述[J]. 新教育, 2017(5): 4-8.

[4] 汪晓勤, 栗小妮. 数学史与初中数学教学: 理论、实践与案例[M]. 上海：华东师范大学出版社, 2019: 60-67.

他山之石

提出初等数学问题的框架（F-PosE）：支持教师评估和选择初等数学问题

吴 越

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引 言

提出问题是解决问题的基础，它关注的是问题本身，而不是问题的解决方案。传统上，问题提出被认为是构想一个新问题或一个给定问题到一个新问题的重新表述。经过几十年专注于问题解决的研究，研究人员和实践者已经认识到，“在教育上，发展提出数学问题的能力与发展解决问题的能力同样重要”。

数学问题的特征会影响学习者对数学本身性质和概念的理解和掌握。当一个学习者接触封闭的、低认知需求的问题，他们可能会把数学看作是一个静态系统，仅仅专注于回忆事实和执行程序。相比之下，涉及推理、猜想和寻找解决策略的开放式问题，不仅关注学生数学学习的结果，更加关注数学学习的过程与方法。因此，当提出问题时，教师需要从问题中所蕴含的可取特征的角度来分析数学问题。发展这样的分析技能有助于发展教师的问题提出能力，并提升教学知识，从而提高课堂上的学习效果。

因此，本文开发了一个初等数学问题的评估框架，以支持职前教师识别、分析和修改小学（5-12 岁儿童）课堂中使用的数学问题的特征。现有的框架是为比五年级学生（10-11 岁）大几岁的中学生开发的，提供了有关问题特征的有价值的指标。本研究的问题框架由教育工作团体合作完成，该团体由在职教师、五年级儿童和数学教师教育工作者组成，以支持职前教师学会提出数学问题。

2 研究设计

本文的框架开发遵循了三阶段设计研究法，包括初步、原型和评估三个阶段，具体内容如表 1 所示。

表 1 研究设计框架

阶段	目标	方法
初步阶段	确定有价值的数学问题的特征，以指导数学问题的分析、设计和选择。	准实验前/后测设计，涉及 415 名小学职前教师和 2 名数学教师教育者。
原型阶段	在课堂环境中测试和改进初步阶段开发的有价值的数学问题的特征。	5 个问题提出的微循环，涉及 2 名数学教师教育者、3 名小学任课教师、28 名小学职前教师和 56 名五年级学生。
评估阶段	开发提出初等数学问题的框架(F-PosE)。	对原型阶段收集的数据进行回顾性分析。

2.1 初步阶段

初步阶段的重点是生成一个适合职前教师使用的数学问题特征列表。采用准实验性的单组前测/后测研究方法，以收集 415 名一年级小学职前教师对于问题提出技能的见解。实验的前测要求职前教师为小学生提出了一个“好”的数学问题，通过问题的分析提取出他们认为有价值的数学问题的特征，并进行一个为期 3 周的问题提出和问题解决的教学单元作为实验的干预项目，而后研究干预后职前教师提出的问题特征的变化。最终得到可以支持职前教师提出有价值的数学问题特征的原始列表（见表 2），初步阶段的局限性在于结果（问题特征列表）没有在课堂上测试。

表 2 有价值的数学问题特征

指标	特征
指标 1	位于课程链内
指标 2	问题类型（文字类、计算类、探究类、难题类）
指标 3	单个或多个切入点
指标 4	单个或多个解决步骤
指标 5	一个或多个解决方案
指标 6	关注程序或概念
指标 7	认知需求水平

2.2 原型阶段

原型阶段共分为 12 周，前三周数学教师教育工作者概述了提出问题和解决问题的内容，并进行一个预调查，在第 4、5、6、7、9 和 10 周实施问题提出的微循环（见图 1）。第 8、11 和 12 周是对提出问题活动的补充，以及对提出问题的反思和反馈。在第 12 周进行了一项调查，以评估研究完成时小学职前教师对一个有价值的数学问题的看法。

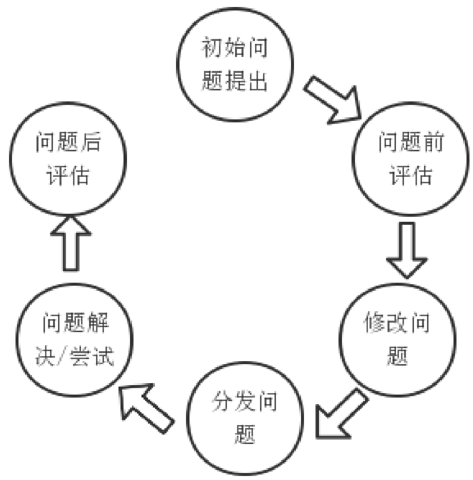


图 1 问题提出的微循环

其中，问题提出的微循环（图 1）是由职前教师为每个五年级学生设计一个原始的数学问题或修改一个来自其他地方的问题而发起的，职前教师通过完成问题前评估表来预测他们的两个五年级学生将如何与他们的问题互动。然后使用初步阶段的“数学问题的特征”（表 2 ）分析了问题的特征，并做出修改以提高问题的质量。完成后，所有问题的副本被送到三位老师手中，他们将这些问题分发给五年级的目标学生。每个学生都在课堂上解决了他们的问题。在每个微循环后，任课教师向职前教师提供反馈，并将其附在已完成的问题上。最后，职前教师分析每个学生的反应，教师的反馈，并完成问题后评估，主要反思问题的预测和学生实际表现之间的差距。

2.3 评估阶段

本研究使用扎根理论方法对数据进行分析。数据集包括微循环中提出的问题、每个问题的问题前和问题后评估、学生作业的副本、任课教师的反馈等。比较猜想与问题特征的原始列表，

出现三种模式（见表 3）。这一阶段的成果是由 8 个质量指标组成的初等数学问题的评估框架（F-PosE）。

表 3 三种问题模式与内涵特征

模式	内涵	特征
肯定的猜想	与原始列表中问题特征一致的猜想，并进一步细化为新的质量指标	位于课程链内、单步或多步骤问题、单个或多个解决方案、认知需求水平
新的猜想	数据中普遍存在的但没有出现在问题特征的原始列表中的四个猜想	激励性和有吸引力的情境的使用、语言和文化背景的清晰性、多种解决策略、成功的机会
不支持的问题特征	三个在原始列表中的但没有在数据中出现的问题特征	问题类型、单个或多个切入点、关注程序或概念

3 研究发现

开发出来的初等数学问题的评估框架（F-PosE）包含了在选择、设计或修改一个初等数学问题时应该考虑的特征。该框架有八个指标，每个指标代表一个高质量数学问题的特征。

3.1 激励性和有吸引力的情境的使用

背景的使用建立了数学和现实世界之间的联系。利用现实背景并考虑学生经历的问题成功地支持并激励了学生。许多激励性的背景具有新颖性，如使用类比（将负数与一条鱼在海平面以下不同距离游泳联系起来），分析实际数据（找到被捕获的口袋妖怪的平均数量），以及使用文化艺术品（餐厅菜单）等。表 4 列出了在考虑数学问题的第一个指标和以及支持该指标的指导性问题。

表 4 激励性和有吸引力的情境的使用

指标 1			激励性和有吸引力的情境的使用		
评估	较低	一般	足够	较好	非常好
提出的问题是否					
在数学和学生的现实或想象世界之间建立联系？					
允许学生利用他们的个人经验和知识来理解情境？					
提出一个有意义、有说服力的背景？					
吸引并激励所有学生？					

3.2 语言和文化背景的清晰度

有时，语言和术语会给理解具体问题带来挑战，对于第二语言学习者和有阅读障碍的人来说，这种情况更加严重。在采用其他国家的问题时，问题所处的文化背景以及学生的数学文化体系都会影响问题的易懂性。表 5 列出了提出的数学问题的第二个指标和以及支持该指标的指导性问题。

表 5 语言和文化背景的清晰度

指标 2			语言和文化背景的清晰度		
评估	较低	一般	足够	较好	非常好
提出的问题是否					
使用的语言和术语在学生的阅读水平之内？					
反映学生的数学文化体系？					
测量和货币系统与学生的一致吗？					
使用所有学生都能理解的文化背景？					

3.3 课程连贯性

适合年级水平和遵守课程标准是教师提出问题的基本考虑因素。当职前教师关注其他理想的问题特征时，就会出现对课程的忽视，例如纳入激励背景，在这种情况下，教师优先考虑的是背景而不是课程的连贯性，导致提出的问题对学生的挑战不足。同样，缺乏课程连贯性有时会导致过度认知的问题，使学生无法解决问题。表 6 列出了提出的数学问题的第三个指标和以

及支持该指标的指导性问题。

表 6 课程连贯性

指标 3			课程连贯性		
评估	较低	一般	足够	较好	非常好
提出的问题是否					
要求使用适合该年级水平理解的数学内容（由当地或国家课程标准决定）？					
要求学生参与数学过程（例如，理解、联系、交流、推理、应用和解决问题），以支持数学能力的发展，从而找到解决方案？					

3.4 认知需求的关注

根据学习者在解决问题时利用特定技能和过程的程度对认知需求进行分类。低认知需求问题：依赖于日常程序的回忆、记忆和执行。在某些情况下，这种问题要么没有背景，要么背景与概念没有建立深层的联系。高认知需求问题：需要建立与基本概念和数学意义的深层联系，需要复杂的思考和推理策略，如分析、证明、推测、推理和问题解决等。表 7 列出了提出的数学问题的第四个指标和以及支持该指标的指导性问题。

表 7 认知需求的关注

指标 4		认知需求的关注	
评估	低	中	高
提出的问题是否			
解决方案和解决策略都不明显？			
需要的不仅仅是回忆、记忆或执行常规程序去解决问题？			
要求学生联系基本概念和数学意义？			
需要学生参与复杂的思考和推理策略，如元分析、论证、猜测、推理和问题解决？			

3.5 适当数量的解决步骤

新手教师和许多传统教科书提出单步问题，这些问题仅仅是需要应用常规程序的简单的数字运算，虽然单步问题能够发展学生的技能，但需要两步或两步以上的问题通常具有更高的认知需求水平，并需要更高的数学水平。重要的是，我们不能将这个指标过分简化为关注步骤的

“数量”，有一小类问题，由于其性质无法确定解决问题所需的步骤数。因此，这一关键指标不要求教师确定所需的确切步骤数，但需要考虑每个步骤所涉及的推理的性质。表 8 列出了提出的数学问题的第五个指标以及支持该指标的指导性问题。

表 8 适当数量的解决步骤

指标 5		**适当数量的解决步骤**
评估	单步	多步
提出的问题是否		
解决问题的步骤是否显而易见？		
需要不止一个步骤才能找到解决方案？		
超过涉及有理数或整数的常规操作程序？		
需要学生进行数学推理？		

3.6 多种解决策略

支持多种解决策略的问题为学生解决问题提供了多种途径，不仅能够培养学生的发散性推理，还提高了学生思维的流畅性和灵活性，满足了不同学习者的需求。表 9 列出了提出的数学问题的第六个指标和以及支持该指标的指导性问题。

表 9 多种解决策略

指标 6		**多种解决策略**
评估	是	否
提出的问题是否		
问题的解决策略是否明显？		
需要学生找到解决策略去解决问题？		
可以使用多种方法解决，或者在某些情况下是明确需要的。		

3.7 多种解决方案

多解问题有不止一个正确的答案，其与常规的封闭性问题形成鲜明对比，也称为开放式问题，更加具有挑战性。表 10 列出了提出的数学问题的第七个指标和以及支持该指标的指导性

问题。

表 10 多种解决方案

指标 7		多种解决方案
评估	是	否
提出的问题是否		
有不止一个正确的解决方案吗？		
鼓励学生寻求正确的替代方案？		

3.8 成功的机会

虽然文献中一致认为问题应该具有足够的挑战性，但相反，较少研究关注了学生解决问题时体验成功的机会。然而，学生的幸福感在准教师和任课教师的反馈中占据显著地位。对幸福感的关注集中在为学生提供积极的数学体验，从而促进他们作为数学学习者的自我效能感和自信心。因此，问题不仅要有挑战性，还要为学生提供体验成功的机会。教师可以通过纳入成功的机会这一因素去修改先前的问题。表 11 列出了提出的数学问题的第八个指标和以及支持该指标的指导性问题。

表 11 成功的机会

指标 8			成功的机会		
评估	较低	一般	足够	较好	非常好
提出的问题是否					
通过图表来表示问题，给学生一个培养数学学习自主意识的机会？					
提供了低认知复杂性的“热身”问题？提供了问题的更简单版本？					
如果学生遇到了问题没有任何产出，是否提供支持或暗示？					

4 结 论

本文使用设计研究方法开发提出初等数学问题的框架（F-PosE），在初步阶段通过先前研究的综合分析以及小学职初教师的试点研究，确定初等数学问题特征的初始框架。在原型阶段系统地测试和改进这些问题特征，了解框架中的指标如何支持分析、设计和修改课堂环境中使

用的问题。最后在评估阶段对整个数据集进行回顾性分析，以评估初始问题特征的效能，并从学生、小学职前教师、任课教师的反馈中提炼出新的问题特征。这些阶段最终将有关数学问题设计的理论知识转化为可供未来小学教师课堂测试和使用的框架。

这项研究的一个有价值的方面是参与性研究部分。它通过教师、研究人员和五年级学生的合作，使用问题前和问题后评估的形式，分析持续的反馈循环和每个问题的微循环，为有价值的数学问题特征的推测提供了有针对性的支持。第二个方面是实践性和真实性，本研究的问题测试是在真实课堂环境中实施的，解决了以往教育研究与实践联系薄弱的问题。

参考文献

[1] Leavy, A. & Hourigan, M. The Framework for Posing Elementary Mathematics Problems (F-PosE): Supporting Teachers to Evaluate and Select Problems for Use in Elementary Mathematics [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2022, 111(1): 147-176.

活动讯息

立足文化视角，探索数学教学

——“数学文化视角下的初中数学教学”2023 沪苏双城联合教学展示与研讨活动

戴阳，方成，朱彦婕，王萌

（苏州大学数学科学学院，苏州 215006）

2023 年 12 月 26 日，以“数学文化视角下的初中数学教学”为主题的沪苏双城联合教学展示与研讨活动在苏州市阳山实验初级中学校隆重召开。参与活动的有华东师范大学教师教育学院副院长、教授、博士生导师汪晓勤老师，《数学通报》编辑郑亚利教授，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师，苏州大学数学科学学院沈中宇老师，苏州市教科院初中数学教研员陆红力主任，苏州高新区初中数学教研员刘志昂老师，苏州高新区初中数学学科研究中心成员，苏州高新区金鹏名师工作室成员，常州市金坛区良常中学潘霞校长及其团队，苏州学府中学蒋惠丽老师，苏州阳山实验初级中学校领导及数学教师，华东师范大学 HPM 方向的研究生，苏州大学数学教育方向的部分研究生和本科生。

【数学文化视角下的初中数学汇报课及课后交流研讨】

活动的第一项议程是两节数学文化视角下的初中数学汇报课，分别为李欣欣老师的“平行”以及史益婷老师的“分式方程”。

李欣欣老师基于生活实例引导学生探索平行的概念，通过数学文化微视频让同学们清晰了解平行的概念和符号表示的演变历史，运用数学实验的方式引导同学们积极探索网格中平行线的多种画法，并在此基础上形成平行相关的基本事实。

史益婷老师采用信息技术带领同学们走进“数学博物馆”，运用《计算之书》中的问题及其变式引入分式方程，并通过带领学生辨析历史上数学家对分式方程的不同定义，引导其深入理解概念本质。除此以外，史老师还介绍了解分式方程的方法的历史演变，并引导学生总结解分式方程的一般步骤。

图 1 李欣欣老师的课堂教学

图 2 史益婷老师的课堂教学

课后，参加活动的老师与研究生对两节汇报课进行研讨。首先，李欣欣老师和史益婷老师简要分享了汇报课设计思路。

蒋惠丽老师认为，李欣欣老师的情景真实有效，准确把握了学生的认知起点和知识基础。融入数学文化让人眼前一亮。史益婷老师以数学史为主线，贯穿教学始终，并熟练地运用了信息技术手段辅助教学。

图 3 蒋惠丽老师评课议课

图 4 潘霞校长评课议课

潘霞校长从整体出发评议了两节汇报课，强调课堂中要给学生时间进行探究。潘校长还认为，教师应当思考学生想法的来源，认识到在课堂中学生不同解法的出现都有其知识生长点。

沈中宇老师从“留白创造式教学”的角度进行点评，表示两位老师都给学生足够的“方法之白”，这是两节汇报课的亮点。在此基础上，还可以更多地给学生留下“陈述之白”和“问题之白”。

图 5 沈中宇老师评课议课

图 6 汪晓勤教授评课议课

苏州大学研究生团队代表方成同学表述了自己的收获，对李欣欣老师的课堂气氛调动能力以及史益婷老师“数学博物馆”的信息技术创新表示敬佩。华东师范大学研究生团队代表于博同学也表达了自己的感受，认为李欣欣老师在课堂上给学生自己创造平行符号的机会，有利于培养学生的创造力；史益婷老师对数学工具和数学文化运用熟练，数学活动也充满趣味性。

华东师范大学汪晓勤教授从 HPM 的六维度价值出发，提出可以更加注重学生自己对平行概念的认识，注意“为什么学习平行的概念”的知识之源。最后，汪晓勤教授提出两个课题中的“德育之效”还有待更深入地挖掘。

【数学话剧展示及报告】

活动的第二项议程为数学话剧展示及报告，由邹佳晨老师主持。

图 7 邹佳晨老师主持

图 8 王华新书记致欢迎词

首先，由苏州市阳山实验初级中学校王华新书记致欢迎词。

苏州市阳山实验初级中学校崔群老师作了题为“初中数学实验工具开发与利用”的报告，展示并介绍了他开发的初中数学实验工具。同时，他表示“乐于挖掘，实验素材无处不在；动脑动手，实验工具应有尽有”。

图 9 崔群老师报告

图 10 刘腾琦同学报告

苏州大学数学科学学院研究生刘腾琦同学作了题为“初中生对‘负负得正’的理解：历史相似性研究”的报告，从历史相似性、“负负得正”法则、测试结果、研究结论与启示等方面进行了完整的报告。

苏州市阳山实验初级中学校赵小花等老师带领学生进行数学话剧展示演出，包括《祖冲之传》与《华蘅芳传》。学生表演绘声绘色，感染力强，台下掌声阵阵。

图 11 话剧《祖冲之传》剧照

图 12 话剧《华蘅芳传》剧照

苏州市阳山实验初级中学校胡永强老师对数学话剧《祖冲之传》和《华蘅芳传》作出总结，接着以“数学话剧：一种新的数学学习方式”开展主题报告，指出话剧创编过程中需要关注数学内容，并剖析了数学话剧的价值和具体实施路径，最后强调数学话剧对学生的影响需持续研究。

图 13 胡永强老师报告

图 14 姚雪凌同学报告

华东师范大学教师教育学院姚雪凌同学作了题为“中华优秀传统数学文化与初中数学留白创造式教学”的报告。报告分为“古名今辩与陈述之白”“古法今用与发现之白”“古题今解与方法之白”“古术今推与推理之白”“古问今编与问题之白”和“古算今思与超越之白”六个部分，以中算史中的若干主题为例，探讨了中算史在初中数学留白创造式教学中的应用。姚雪凌同学最后指出，教师需要深入学习将中算史融入课堂教学的六种方式，在实践中逐渐掌握适合于自己学生的教学策略，并感受中华优秀传统文化巨大的教育价值。

苏州大学沈中宇老师作了题为“中华优秀传统数学文化视角下的初中数学学科德育”的报告。报告分析了研究背景、德育策略和德育价值总体框架。当下，学科德育受到高度重视，且中华优秀传统文化中蕴含丰富的德育价值，采用“利用古今对照”“结合信息技术”“融入问题提出”“布置数学写作”等策略，有助于激发学生的积极情感，树立正确信念，形成理性思维，培养学生的优秀品质。

图 15 沈中宇老师报告

图 16 汪晓勤教授报告

华东师范大学汪晓勤教授作了题为“数学文化视角下的初中数学教与学”的报告。 报告主要通过具体案例展示知识源流、学科联系、社会角色、审美娱乐、多元文化等不同类型的数学文化与初中数学教与学的融合。

北京师范大学《数学通报》编审郑亚利教授作了题为“数学论文写作与投稿”的报告，表示写作要务实，文章要落实在数学学科上，不要怕问题小，一定要挖得深。

图 17 郑亚利教授报告

图 18 陆红力主任报告

苏州市教育科学研究院陆红力主任分享学习心得，以“初中数学教学的思考”为题开展了报告。

最后，主持人邹佳晨老师对本次活动进行总结。

图 19 研讨会合影

一天的研讨交流活动顺利结束。通过课堂观摩、研讨交流和聆听报告，我们对数学文化视角下的初中数学教学有了进一步的了解与认识。同时，精彩绝伦的报告让我们收获颇丰。接下来我们将在学习和实践中努力尝试、不断探索，为传承中华优秀传统文化、共创数学教育美好未来作出自己的贡献！

2023 留白与创造：交流·回顾·展望

——中小学数学留白创造式教学课题组 2024 年第一次全体会议举行

朱轶萱，赵哲栋

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2024 年 1 月 24 日下午，中小学数学留白创造式教学课题组“2023 留白与创造：交流·回顾·展望”会议于华东师大中北校区教院楼一楼会议室举行，来自上海普陀、静安、闵行、黄埔、长宁、徐汇、宝山、浦东等八区，以及华东师范大学教师教育学院的二十余名课题组成员、开课教师和部分数学教育方向的研究生参与了本次会议。会议由上海市晋元高级中学特级教师、正高级教师、华东师范大学教师教育学院数学教育研究所首席专家王华老师主持。

中小学数学留白创造式教学课题组 2024 年第一次全体会议

首先，王华老师致开幕词，并介绍会议议程。接下来进入学术报告环节，华东师范大学教师教育学院副院长、博士生导师汪晓勤教授带来第一场学术报告，主题为“2023 年留白创造式教学研究概述”。汪老师从留白创造式教学的理论探讨、中华优秀传统数学文化与留白创造式教学、西方数学史与留白创造式教学、数学教科书中的留白、留白创造式教学课例分析五个方面概述了课题组 2023 年的部分研究成果。同时，汪老师指出：“留白创造式教学是一种符合时代需求、前景广阔、魅力和挑战性兼具的教学方式，在未来必将成为数学教育领域的一个研究方向，课题组大有可为；留白创造式教学研究需要走自下而上的路径，课题组需要以追求美好

的数学教育为己任，开发系列课例、实现理论与实践的良性互动；课题组需要更多成果的发表，才能助力留白创造式教学理念的推广和传播。”

华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师作了题为“数学课例研究的设计与实施”的学术报告。邹老师先从寻找特色、课例研究、团队建设三个方面阐释了教师专业发展共同体建设的路径，而后从“选题与准备、研讨与设计、实施与反馈以及整理与写作”等方面详细阐述了 HPM 课例研究的流程，并强调留白创造式教学的课例研究应关注课堂留白的设计、留白问题反馈的资料收集、留白的评价。最后，邹老师展望了课题组 2024 年即将实施的课例。

王华老师带来题为“2024 年留白创造式教学研究展望”的学术报告。王老师首先指出本年度的研究目标是完成《从留白到创新：数学教育新探索》（暂定名）的编写和中小学数学留白创造式教学实践的分段案例与论文撰写。其次，从课题实验学校合作、学术年会、论文撰写、专题研究、课题参与教师研修，以及例会制度等方面展望了课题组 2024 年的工作安排。最后，王老师指出留白创造式课题组要进一步扩大影响，提升教师专业发展水平，为上海中小学数学教育做出一份贡献。

学术报告后，课题组各位老师就专著撰写进行研讨。首先，王华老师介绍了各章节的分工。接着，汪晓勤老师结合论文“数学史上的留白与创新”讲解了第三章的写作思路，为其他章节的写作提供参考。杨家政老师指出第五章“留白创造式教学中的问题设计”以“案例+议论”的形式写作，并强调留白创造式教学与传统教学中问题设计的不同点在于我们追求“知其所以然”，问题串之间要留有空间。

最后，与会老师们对 2024 年即将实施的课例展开了商讨，包括执教教师、实施时间地点的初步确定，教学思路的交流等等。在大家的热烈讨论中，本次会议圆满结束。期待中小学数学留白创造式教学课题组新的一年继续守正创新、砥砺前行，在理论探索与教学实践中收获丰硕成果。