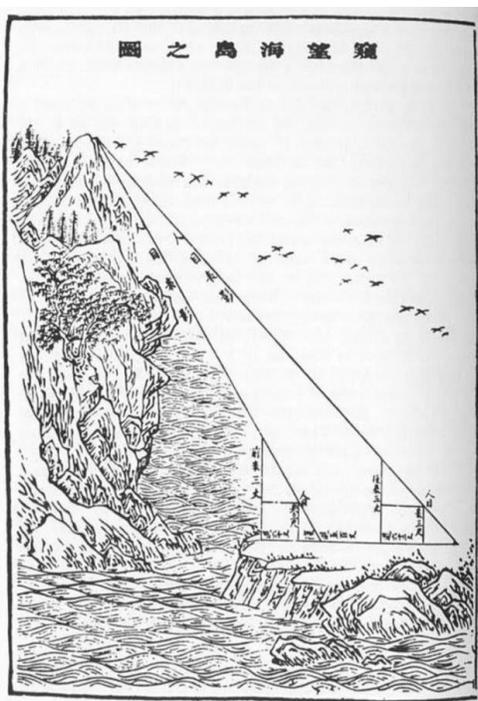




上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2022 年第 11 卷第 04 期



窺望海島之圖

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：刘梦哲

编委（按姓氏字母序）：

韩粟 纪妍琳 姜浩哲 孔雯晴 雷沛瑶 栗小妮 李卓忱 刘思璐 秦语真 沈中字 孙丹丹 汪晓勤 余庆纯

岳增成 张佳淳 邹佳晨

刊首新语

中华传统优秀数学文化融入高中数学教学的若干路径

汪晓勤

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

中国古代数学(简称“中算”)有着悠久的历史、辉煌的成就和独特的价值取向,是中华优秀传统文化不可分割的重要组成部分。要让中华优秀传统文化走进数学课堂,教师就需要将中算史料融入数学教学之中。

实践表明,用什么历史素材、如何运用历史素材乃是一线教师开展 HPM 教学实践的主要障碍。本文从新知引入、问题设计、公式推导、定理证明四个方面探讨中算史上的问题、思想、方法等在初中数学教学中的具体应用,一方面,试图为高中数学教学提供参考,另一方面,也希望借此引发更多的讨论。

1 新知引入

运用中算史料来引入新课的方式有问题引入、法则引入、方法引入等。

以汉代《九章算术》为代表的中国古代数学典籍基本上都采用了问题集的编写方式,其中含有丰富多彩、分门别类的数学问题,其中一些问题(或改编后的新问题)可以用于高中数学的新知引入。例如,《孙子算经》中的问题“今有出门望见九堤,堤有九木,木有九枝,枝有九巢,巢有九禽,禽有九雏,雏有九毛,毛有九色,问各几何”即可用于数列的引例。

汉代数学典籍《九章算术》“方程章”中提出了世界上最早的有理数四则运算法则,其中,非零两数的减法法则为“同名相除,异名相益”,非零两数的加法法则为“异名相除,同名相益”。虽然中国古代数学家没有明确提出“绝对值”的概念,但这里的“相益”说的就是绝对值相加,“相除”说的就是绝对值相减。设有两数 a 和 b , 若 $ab > 0$, 则

$$|a-b| = \begin{cases} |a|-|b|(|a|>|b|), \\ |b|-|a|(|b|>|a|) \end{cases},$$

$$|a+b| = |a|+|b|;$$

若 $ab < 0$ ，则

$$|a - b| = |a| + |b|;$$

$$|a + b| = \begin{cases} |a| - |b| (|a| > |b|) \\ |b| - |a| (|b| > |a|) \end{cases}.$$

中国古代数学家尚未将数系从有理数扩充到实数，但上述运算法则显然也适用于实数。因此，对于任意非零实数 a 和 b ，均成立绝对值不等式

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

当 a 或 b 等于零时，上述不等式显然也成立。用“正负术”来引入绝对值不等式，可谓恰如其分。

《九章算术》已经给出了多位正整数开平方和开立方的方法，到了北宋时期，数学家贾宪将开方术推广到了开高次方的情形，并给出了著名的二项式系数表，南宋数学家杨辉将其记载于《详解九章算法》，并称之为“开方作法本原图”（图 1-2），这一名称清楚地表明，今天人们所说的“贾宪三角”最初实际上源于开方，开方是二项式定理诞生的真正动因，因而可通过开方问题来引入该定理。

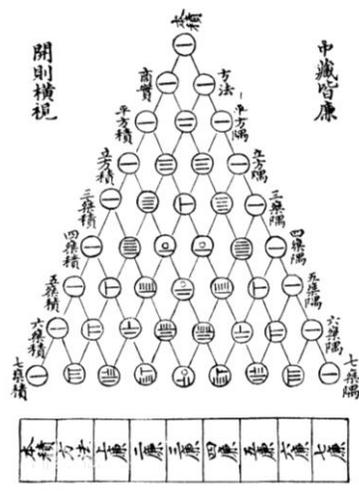


图 1 杨辉《详解九章算法》中的贾宪三角 图 2 朱世杰《四元玉鉴》中的贾宪三角

三国时代数学家刘徽在证明圆面积公式时所采用的“割圆术”，也可用于导数几何意义的教学。学生在初中学过圆的切线的静态定义，即与圆有一个公共点的直线，或过圆上一点且垂直于该点与圆心连线的直线，或到圆心的距离等于半径的直线，这是切线概念的认知起点。但

该定义并不适用于一般的曲线，通过割圆过程中正多边形一边的不断变化，可引出切线的新的动态定义，新定义适用于任意曲线（图 3）。

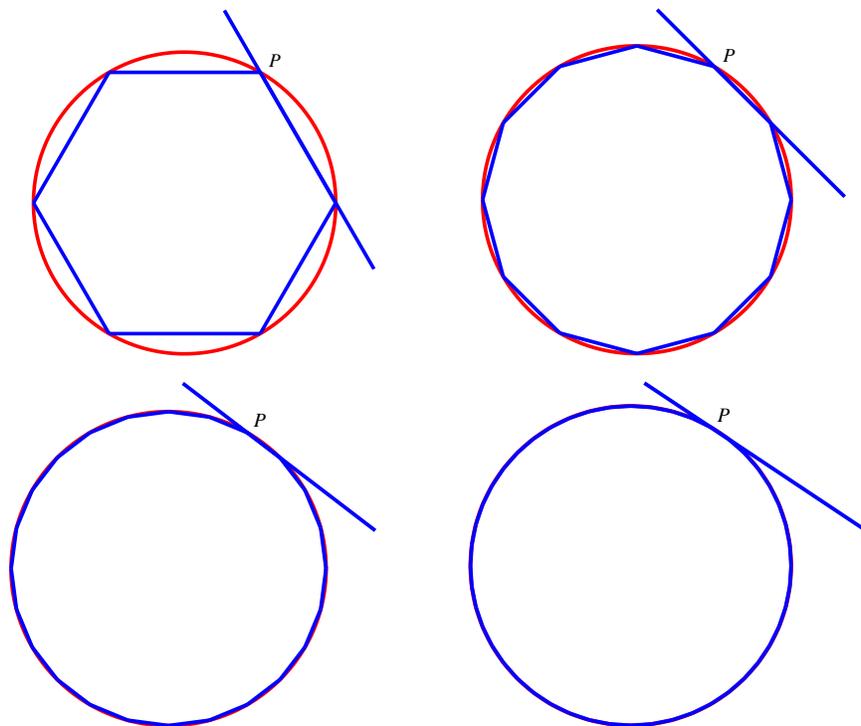


图 3 圆内接正多边形一边所在直线的变化

2 问题设计

根据数学史料来编制数学问题的策略有再现式、情境式、条件式、目标式、对称式、串联式和自由式七种。

再现式问题很多，如程大位《算法统宗》中载有以下数列问题。

- 行程减等歌：三百八十七里关，初行健步不为难。次日脚痛减一半，六朝才得到其关。

要见每朝行里数，请公仔细算相还。（在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 n 、 q 、 S_n ，求 a_1 ）

- 浮图层级歌：远望巍巍塔七层，红光点点倍加增。共灯三百八十一，请问尖头几盏灯。

（在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 n 、 q 、 S_n ，求 a_1 ）

- 八子分绵歌：九百九十六斤绵，赠分八子做盘缠。次第每人多十七，要将第八数来言。

务要分明依次第，孝和休惹外人传。（在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 n 、 d 、 S_n ，求 $a_i (i=1, 2, \dots, 8)$ ）

• 九儿问甲歌：一个公公九个儿，若问生年总不知。自长排来争三岁，共年二百七岁期。

借问长儿多少岁，各儿岁数要详推。（在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 n 、 d 、 S_n ，求 $a_i(i=1,2,\dots,9)$ ）

《九章算术》均输章载有三道数列问题，其中一题为：“今有竹九节，下三节容四升，上四节容三升。问：中间二节欲均容，各多少？”（在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 S_4 ， $a_7+a_8+a_9$ ，求 $a_i(i=1,2,\dots,9)$ ）程大位将上述问题改编为条件式问题：“竹筒量米歌：家有九节竹一茎，为因盛米不均平。下头三节三升九，上稍四节贮三升。惟有中间二节竹，要将米数次第盛。若是先生能算法，教君只算到天明。”类似地，我们可以设计更多的数列问题。

• 条件式问题

问题 1：今有竹九节，各节的容积构成等差数列。已知最下一节的容积为 2 升，最上一节的容积为半升，求各节的容积。（已知 $a_1=\frac{1}{2}$ ， $a_9=2$ ，求 $a_i(2\leq i\leq 8)$ ）

问题 2：今有竹九节，各节的容积构成等差数列，总容积为 9 升。已知最下一节的容积是最上一节的两倍，求各节的容积。（已知 $S_9=9$ ， $a_9=2a_1$ ，求 $a_i(1\leq i\leq 8)$ ）

问题 3：今有竹九节，各节的容积构成等差数列。已知最下一节的容积为 2 升，上四节的容积为 3 升，求各节的容积。（已知 $a_1+a_2+a_3+a_4=3$ ， $a_9=2$ ，求 $a_i(1\leq i\leq 8)$ ）

问题 4：今有竹九节，各节的容积构成等差数列。已知下三节的容积为 4 升，上三节的容积为 2 升，求各节的容积。（已知 $a_1+a_2+a_3=2$ ， $a_7+a_8+a_9=4$ ，求 $a_i(1\leq i\leq 9)$ ）

问题 5：今有竹九节，各节的容积构成等差数列。下四节的容积为 5 升，上五节的容积为 4 升，求各节的容积。（已知 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4$ ， $a_6+a_7+a_8+a_9=5$ ，求 $a_i(1\leq i\leq 9)$ ）

问题 6：今有竹九节，各节的容积构成等差数列，总容积为 9 升。已知上五节的容积与下四节的容积相等，求各节的容积。（已知 $S_9=9$ ， $S_5=a_6+a_7+a_8+a_9$ ，求 $a_i(1\leq i\leq 9)$ ）

• 自由式问题

上述问题中，若将所求项改为各节的总容积、公差等，就成为自由式问题了。我们还可以编制更多的自由式问题。

问题 7：今有竹若干节，各节的容积构成等差数列。已知下四节的容积为 5 升，上四节的

容积为 3 升，其余各节的容积是总容积的 $\frac{3}{11}$ ，求竹的节数。（已知 $S_4=3$ ，

$$a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=5, a_5+a_6+\cdots+a_{n-4}=\frac{3}{11}S_n, \text{ 求 } n)$$

问题 8: 今有竹五节，各节的容积构成等比数列。已知上二节的容积是下二节的 $\frac{27}{64}$ ，中间一节比最上一节多了 $\frac{2}{3}$ 升，求五节的总容积。（已知 $S_2=\frac{27}{64}(a_4+a_5)$ ， $a_3-a_1=\frac{2}{3}$ ，求 S_5 ）

问题 9: 《九章算术》给出“竹筒容积”问题中的公差为

$$d = \frac{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{9 - \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{2}\right)}$$

请用今天的数列知识来检验上述结果。若在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1+a_2+\cdots+a_m=p$ ，

$a_l+a_{l+1}+\cdots+a_n=q$ ，其中 m, l, n 为正整数， $1 \leq m < l \leq n$ ，试求公差 d 。

又如，《九章算术》“盈不足”章载有“蒲莞同长”问题：“今有蒲生一日，长三尺；莞生一日，长一尺。蒲生日自半，莞生日自倍。问：几何日而长相等？”据此可编制以下问题。

• 目标式问题

问题 1: 已知蒲第一天长 3 尺，莞第一天长 1 尺。以后每一天，蒲生长的长度是前一半，莞生长的长度是前一天的 2 倍。问：10 天后莞的总长度是蒲的几倍？

• 条件式问题

问题 2: 已知蒲第一天长 4 尺，莞第一天长 $\frac{1}{4}$ 尺。以后每一天，蒲生长的长度是前一半，莞生长的长度是前一天的 2 倍。问：经过几天后，两者总长相等？

问题 3: 已知蒲第一天长 5 尺，莞第一天长 $\frac{1}{5}$ 尺。以后每一天，蒲生长的长度是前一半，莞生长的长度是前一天的 5 倍。问：经过几天后，两者总长相等？

• 自由式问题

问题 4: 设蒲、莞的生长规律分别为 $f(x)=6\left(1-\frac{1}{2^x}\right)$ ， $g(x)=2^x-1$ ，其中 x 表示时间（单位：日），求蒲、莞同长时经过的时间。

问题 5: 已知蒲第一天长 3 尺，莞第一天长 1 尺。从第二天起，蒲生长的长度是前一天的

$\frac{2}{3}$ ，莞生长的长度是前一天的 1.5 倍。设蒲、莞经过第 n 天生长后总长度之比为 a_n ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式和前 n 项和。

中国古代多面体体积理论在世界数学史上可谓一枝独秀。《九章算术》中给出了三种最基本的立体模型：堑堵、阳马和鳖臑。如图 4 所示，正方体的对角面将正方体分割成两部分，每一部分称为“堑堵”；堑堵的对角面将堑堵分割成两部分，一为阳马，一为鳖臑。刘徽利用无穷分割求和的方法证明：阳马和鳖臑的体积之比为 2:1，从而解决了棱锥体积问题。

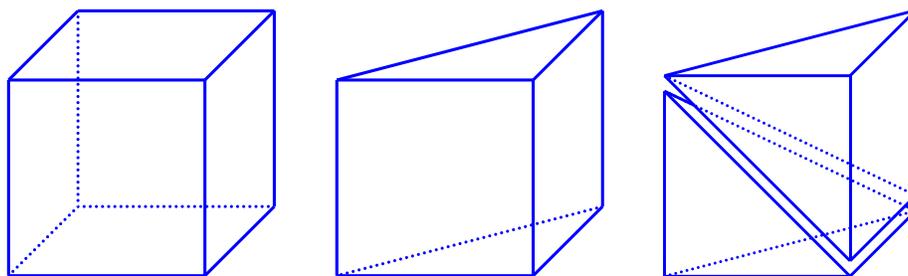


图 4 从立方体中得到堑堵、阳马和鳖臑

“鳖臑”是一个三棱锥，其底面为直角三角形，一条棱经过底面的一个锐角顶点且垂直于底面。鳖臑是三垂线的最简单的立体模型，利用该模型，可以编制许多自由式问题，我们不妨称之为“鳖臑中的问题”。

如图 5，在鳖臑 $A-BCD$ 中，底面 BCD 为直角三角形， $\angle BCD$ 为直角，棱 AB 与底面 BCD 垂直， $AB = BC = CD = 1$ ， E 为棱 AD 的中点。

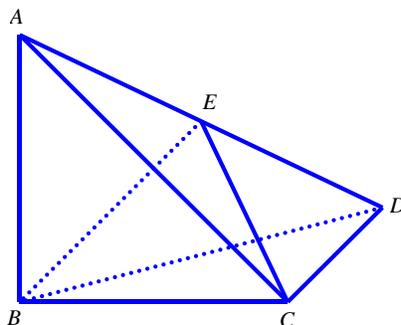


图 5 鳖臑中的数学问题

- (1) 试证明：点 A 、 B 、 C 、 D 位于同一个球面；
- (2) 求 $\angle BEC$ 的大小；
- (3) 求异面直线 AD 和 BC 之间的距离；

- (4) 分别求二面角 $B-AC-D$ 和 $B-AD-C$ 的大小;
- (5) 分别求二面角 $A-BC-E$ 和 $B-EC-D$ 的大小;
- (6) 分别求点 A 和 D 到平面 BCE 的距离;
- (7) 求 AE 与平面 BEC 所成的角的大小;
- (8) 设 P 为 AD 上的一个动点, 求 $|PB|+|PC|$ 的最小值。

类似地, 也可以编制许多“阳马中的问题”。另外, 中国古代的测量问题, 如刘徽《海岛算经》中的海岛测量问题, 也可用于三角学的教学。教师让学生用所学的解三角形知识来测量海岛的高度, 并将学生的解决方案与古代的方法进行比较。

3 公式推导

高中数学课程中的某些公式, 可以利用中算家的方法加以推导。近年来, 由于技术的运用, 祖暅推导球体积的方法不再被视若畏途, 两个底面半径相同的直交圆柱公共部分——“牟合方盖”渐渐走进高中数学课堂, 为学生所知。

杨辉在求解《九章算术》中的“二马相遇”问题时, 采用几何方法来求等差数列之和。已知良马第一天行 193 里, 以后每天都比前一天多行 13 里。为求良马 15 天的行程, 他构造图 6 所示的“良马图”: 每一长方形的宽均为 1, 长分别为各天的行程 193, $193+13$, $193+2\times 13$, \dots , $193+14\times 13$, 于是梯形的面积即为良马的 15 天行程。因此, 杨辉将等差数列求和问题转化为几何图形的面积问题。利用图 6 (b) 和 (c), 分别可得等差数列求和公式

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d,$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n。$$

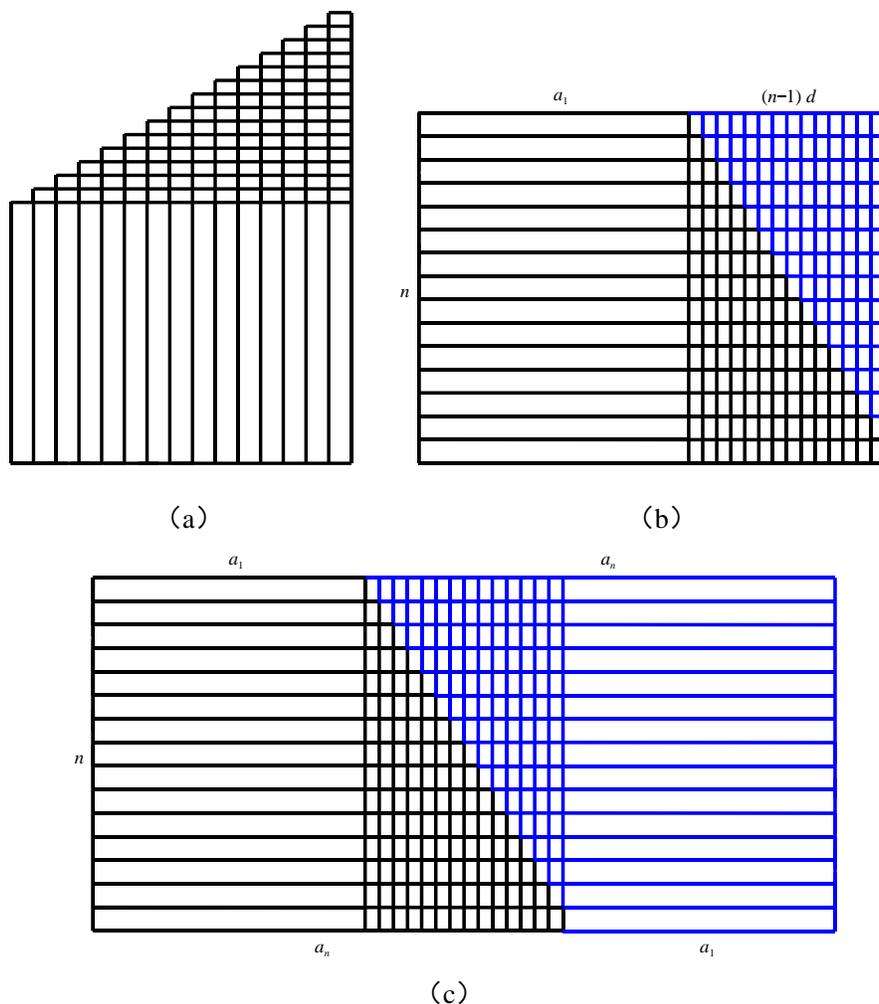


图 6 求等差数列求和的几何方法

刘徽在《九章算术》注中用两种方法推导了正四棱台（方亭）的体积公式。设正四棱台的上、下底面的边长分别为 a 和 b ，高为 h ，将正四棱台分割成 1 个长方体（体积为 a^2h ）、4 个堑堵（每一个的体积为 $\frac{1}{2} \times \frac{b-a}{2} \times ah$ ）和 4 个阳马（每一个的体积为 $\frac{1}{3} \times \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \times h$ ），则

$$V = a^2h + 4 \times \frac{1}{4} (b-a)ah + 4 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \times h = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2)h$$

或者分别考察 a^2h 、 abh 和 b^2h 中各含长方体、堑堵和阳马的个数，结果见表 1。故知 $a^2h + abh + b^2h$ 中共含 3 个正四棱台，于是得每一个棱台的体积 $V = \frac{1}{3} (a^2 + ab + b^2)h$ 。

表 1 a^2h 、 abh 和 b^2h 中各含长方体、堑堵和阳马的个数

类别	长方体	堑堵	阳马
a^2h	1	0	0
abh	1	4	0
b^2h	1	8	12
合计	3	12	12

还可以借鉴中算家的方法来推导数学公式。如图 7 所示，赵爽采用四个同样的红色直角三角形和一个以勾股之差为边长的黄色小正方形拼成一个阶梯形（可分割成分别以勾和股为边长的两个正方形），然后移动两个直角三角形，将阶梯形转化为以弦为边的正方形，从而证明了勾股定理。

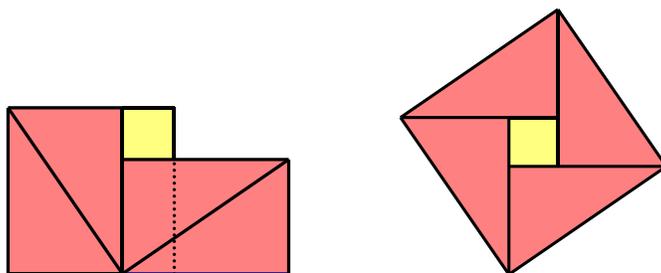


图 7 赵爽关于勾股定理的证明

借鉴上述方法，我们可以将斜边为 1、一个内角分别为 α 和 β 的两对直角三角形（图 8 (a)）拼成如图 8 (b) 所示的菱形，其面积为 $\sin(\alpha + \beta)$ ；移动菱形中的两个直角三角形，使其与同类直角三角形各组成矩形，则得到图 8 (c) 所示的阶梯形，其面积为 $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ ，于是得和角正弦公式。或者也可以通过两种方式计算菱形面积来获得该公式：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + (\cos \beta - \cos \alpha)(\sin \alpha - \sin \beta)。$$

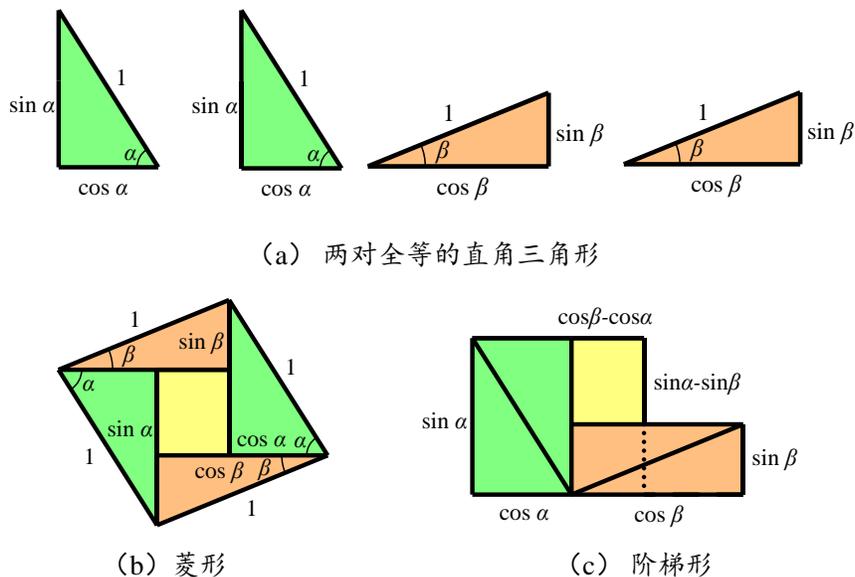


图 8 利用出入相补法发现和角公式

4 命题证明

高中数学中的一些命题，可以用中国古代数学家的方法加以证明。人们十分熟悉的赵爽的弦图常被用于基本不等式的证明，尽管弦图原来是用于勾股定理的证明。实际上，不仅仅是赵爽的弦图，刘徽的勾股容方图也有丰富的代数内涵，可用于均值不等式的推导。

《九章算术》勾股章中记载了勾股容方公式，若设直角三角形的勾和股分别为 a 和 b ，则与直角三角形具有公共直角的内接正方形边长为 $d = \frac{ab}{a+b}$ ，即两条直角边的调和中项之半。

如图 9 (a)， $FCED$ 、 $VSUR$ 分别为矩形 $ACBR$ 中的两个直角三角形的内接正方形，延长 VS ，交 FD 于点 T 。若 $a \leq b$ ，则 $TD \leq ST$ ，即

$$\frac{2ab}{a+b} - a \leq b - \frac{2ab}{a+b},$$

整理得

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \tag{1}$$

或即

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \tag{2}$$

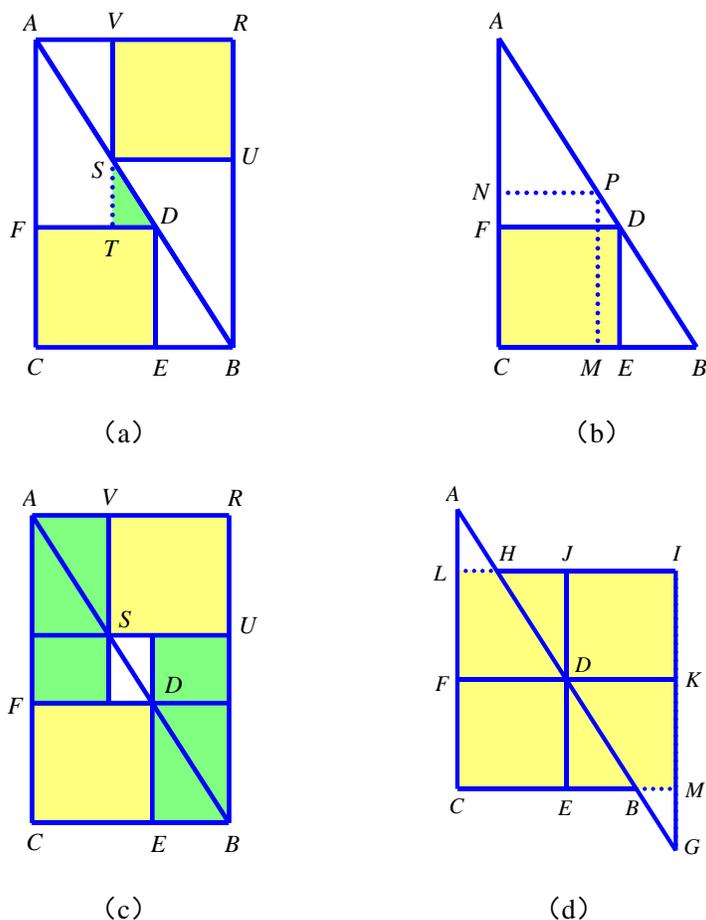


图 9 由勾股容方图推导均值不等式

如图 9 (b) 所示, 易证 $\text{Rt}\triangle ACB$ 内接长方形的最大面积为 $\frac{1}{4}ab$, 故得

$$\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \leq \frac{1}{4}ab,$$

整理得不等式 (1)。

如图 9 (c), 在矩形 $ACBR$ 中, 利用杨辉“勾中容横、股中容直”原理, 可以得到内接正方形的等积长方形, 移动后可见, 原矩形由一对小长方形、一对小正方形以及中间的一个“小洞”(当 $a=b$ 时, 这个小“洞”消失) 构成, 于是得不等式

$$4\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \leq ab \tag{3}$$

整理得不等式 (1)。

如图 9 (d), 以内接正方形顶点 D 为中心, 将直角三角形 ABC 沿顺时针方向旋转 180° , 旋转前后两个直角三角形共含四个正方形, 当 $a > b$ 时, 还多余两个小直角三角形, 当 $a = b$ 时, 两个小直角三角形消失, 故同样可得不等式 (3)。

6 结语

将优秀传统文化融入课堂教学, 不是“为文化而文化”, 而是“为教育而文化”; 教师不应以狭隘地宣扬“中国第一”为旨趣, 而应以优化教学目标、促进数学学习、落实立德树人为己任。以上我们看到, 中算史料融入高中数学教学的主要方式为复制式和顺应式。在有关概念和公式的教学中, 教师可以中国古代的数学问题直接用于新知引入、公式应用、课堂练习和作业设计, 也可以对古代数学问题进行适当的改编, 形成问题串, 实施变式教学。在有关公式的教学中, 中算家的推导方法可以直接用于公式的推导。在有关命题的教学中, 教师可以将中算史上的问题、方法、思想间接地用于命题的证明, 这种间接用法, 颇有点“无心插柳”的意味。

当然, 教师也可以采用附加式。如, 在球体积公式的教学中, 教师可以讲述中国古代数学家的故事: 刘徽孜孜以求, 发现牟合方盖与内切球体积之间的关系, 但未能求出牟合方盖的体积, 从而与球体积公式失之交臂, 刘徽的“欲陋形措意, 惧失正理, 敢不阙疑, 以俟能言者”, 体现了数学家追求真理、实事求是的科学态度; 祖暅“诣微之时, 雷霆不能入”, 反映了数学家执着、专注的探究精神。

人们曾经以为, 中算史作为一个学术研究领域已成了“贫矿”, 但当代数学史学者的研究纠正了这一误解。今天, 当我们带着 HPM 的眼光走进中算史的时候, 我们更加深刻地感受到, 该研究领域是一座巨大的“富矿”, 本文所呈现的不过是其中几片带有光泽的砾石而已。我们有理由相信, 中算史与数学教学之间的关系, 必将成为国内 HPM 研究的重要课题。

目 录

刊首新语

中华传统优秀数学文化融入高中数学教学的若干路径汪晓勤 I

实证研究

经验型教师长期参与 HPM 专业发展项目的个案研究 韩 粟 1

历史研究

美英早期解析几何教科书中的双曲线几何性质 刘梦哲 21

美英早期三角学教科书中的三角形面积公式 钱益弘 35

教学实践

经历抽象过程，感悟理性精神 蔡真逸，钱 秦，雷沛瑶 50

HPM 视角下的圆锥曲线高三单元复习课同课异构课例分析 刘梦哲，孔雯晴 63

他山之石

不同的复杂应用题需要不同的认知技能组合 韦润蓉 72

活动讯息

第九届数学史与数学教育(HPM)高级研修班暨 2021 年华东师范大学基础教育学科
教研联盟初高中数学学科学术年会隆重举行 孔雯晴，等 76

CONTENT

FOREWORD

Several Paths for the Integration of Chinese Traditional Excellent Mathematics Culture into High School Mathematics Teaching Wang Xiaoqin 1

EMPIRICAL RESEARCH

A Case Study of Experienced Teachers' Long-term Participation in HPM's Professional Development Program Han Su 1

HISTORICAL STUDY

The Geometric Properties of Hyperbola in Early American & British Textbooks on Analytic Geometry Liu Mengzhe 21

The Area Formulas of Triangle in Early American & British Textbooks on Trigonometry Qian Yihong 35

TEACHING PRACTICE

Teaching of Classical Probabilistic Models from the Perspective of HPM Cai Zhenyi, Qian Qin, Lei Peiyao 50

Teaching of the Unit Review Course of Conic Section in the Third Grade of High School from the Perspective of HPM: A Comparative Analysis of Two Lessons Liu Mengzhe, Kong Wenqing 63

LITERATURE REVIEW

Different Complex Word Problems Require Different Combinations of Cognitive Skills Wei Runrong 72

ACADEMIC INFORMATION

The 9th Advanced Seminar on History and Pedagogy of Mathematics (HPM) and the 2021 East China Normal University Basic Education Subject Teaching and Research Alliance Junior and Senior High School Mathematics Academic Annual Meeting Kong Wenqing, et al 76

实证研究

经验型教师长期参与 HPM 专业发展项目的个案研究

韩粟

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 问题提出

数学教师专业发展是 21 世纪以来数学教师教育, 乃至数学教育整个研究领域的热点议题, 如国际数学教育大会中, 相关研究主题不断涌现, 不仅在教师所教学段和职业生涯阶段上进行了精细区分, 在内容上也从专业知识、能力层面逐步拓广至专业情感、信念层面^[1-2]; 在国内, 近十年来的研究集中于数学教师专业发展的研究述评^[3-4], 专业标准的国际比较^[5-6], 专业知识^[7-8]的实证研究等。可见, 目前关于数学教师专业发展的研究呈现持续增加, 多元并存的态势, 但研究亦表明, 随着教龄增加, 数学教师专业发展意愿呈现减弱趋势^[4]; 一些大规模在职教师培训项目收效甚微, 亟待改进^[9-10]。

博尔科 (Borko) 将教师专业发展项目的研究分为三个阶段: 阶段一为单个项目的设计、执行及影响; 阶段二为多个项目的推广及规模化; 阶段三为不同项目间的比较。^[11] Sztajn 等在综述 2005 年以来的相关实证研究时发现, 阶段一的文献数量占比高达 73%^[12], 其中针对两个大型项目 CGI (Cognitively Guided Instruction, 认知指导教学项目) 和 CMIT (Count Me In Too, 把我也算在内) 的研究均表明教师长期参与专业发展项目的重要性, 引申出的差异化教师专业发展 (Differentiated Professional Development) 概念也与当前国内教师对专业发展的个性化需求不谋而合^[4], 比如职前教师更重视专业知识, 而经验型教师更重视信念对教学的影响等^[13]。

有鉴于此, 本研究以 HPM 工作室 2021 年度“正弦定理的探究式教学”课例研究作为载体, 从课例开发教师中确定一位经验型教师为研究对象, 分析该教师在长期参与 HPM 专业发展项目后产生了哪些转变? HPM 专业发展项目中促进教师转变的因素有哪些?

2 HPM 专业发展项目

图 1 展示了博尔科提出的由促进者（facilitators），专业发展项目和教师三者组成的教师专业发展系统模型，专家及其他研究者作为促进者，与教师置于同一环境（context）中，前者为后者规划学习目标，设计学习内容及制定学习模式，即设计专业发展项目^[11-12]。项目需要促进教师主动持续地学习，才能使所倡导的某一教育理念或教学方式切实影响教师的教学实践，最终促进所教学生数学思维的提升。

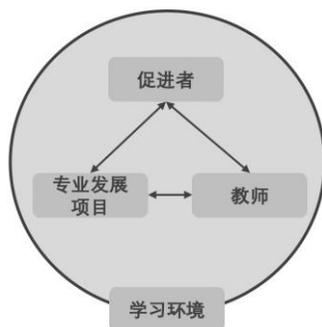


图 1 教师专业发展系统模型

HPM 工作室依托华东师范大学数学教育教学研究基地而成立，既为研究、实践和传播“数学史融入数学教育”这一学术领域，也为满足中小学数学教师专业发展的实践需要，愿意投身 HPM 实践的中小学数学教师均可报名，经专家遴选后成为工作室成员，与高校研究者形成专业共同体。

本研究中 HPM 专业发展项目被定义为由 HPM 工作室策划、组织与开展，成员教师可以参与的一切教学相关活动的合集，其中核心活动为 HPM 课例研究，流程为选题与准备、研讨与设计、实施与反馈、整理与写作^[14]；从课例研究中，衍生出教学观摩、HPM 教学研讨会、HPM 学术沙龙等系列活动。每一周期中，开发出高质量课例的教师将有机会被推至 HPM 网络研修班、HPM 高级研修班等进行课例报告。近年来，多位 HPM 工作室成员在各类数学教育学术会议（如华人数学教育大会、全国数学史与数学教育学术研讨会）作小组报告^[15-16]，成功申报各级教育教学课题，获评区（市）学科带头人、区（市）教学能手等。可见，以课例研究为核心的 HPM 专业发展项目成果斐然：在实践层面，成员们不仅进入了 HPM 教学设计与实施的良性循环，而且在多个维度实现了专业发展需要，如知识积累^[14]、能力提升^[17]和信念转变^[18]

等；在理论层面，对已开发课例的深入剖析大大扩展了 HPM 的研究范围，如数学学科德育^[19]、数学课堂评价^[20]等。

随着 HPM 专业发展项目的实践影响和学术影响的扩大，全国多地已建立起隶属于 HPM 工作室的教研基地，参照工作室的项目模式和已有经验，因地制宜地设计和执行符合基地校教师的专业发展项目。从博尔科的专业发展项目研究阶段划分来看，针对 HPM 专业发展项目的研究已经跨过阶段一，正处于阶段二的探索之中，但已有研究很少涉及不同类型教师（如职初教师和经验型教师）在项目内的差异化发展。因此，关于 HPM 与数学教师专业发展的研究还可以进一步精细化。

3 研究设计

3.1 研究对象

本研究中，经验型教师被定义为教龄在 10 年以上，具有丰富教学实践经验的教师。在报名参与“正弦定理的探究式教学”课例研究的三位工作室成员中，A 和 B 为经验型教师，她们均为工作室成立之初加入的“元老”成员，参与过三轮以上的 HPM 课例研究。由于教师 A 在未进入 HPM 专业发展项目前，曾参与过以正弦定理为课题的同课异构活动，留有原教学设计，分析该同课异构活动的教学论文也公开发表在某数学教育期刊上。考虑到课例主题的一致性和数据收集的完整性，研究者在征得教师 A 同意后，邀请其为研究对象。教师 A 的基本信息如表 1 所示。

表 1 研究对象基本信息

研究对象	学历	教龄	职称	荣誉称号	所在学校类型
教师 A	本科	27 年	中学高级	区骨干教师	市特色普通高中

3.2 研究框架

《中学教师专业标准（试行）》（下称《标准》）提出教师专业标准由专业知识、专业能力和专业理念与师德三个一级维度构成，各维度下分布有若干二级指标^[21]，但《标准》是对所有学科教师教育教学行为的全面规范，不是聚焦于数学教师的专业发展研究框架，操作性较弱。

为回答本研究问题，研究者整合 HPM 与教师专业发展的现有研究^[14, 17-18, 20]，参考《标准》，建立以专业知识、教学能力及教师信念为一级维度的数学教师专业发展研究框架，如表 2。专业知识维度的描述指标源自 MKT（Mathematical Knowledge for Teaching，面向教学的数学知识）框架^[22]；教师信念维度的描述指标为数学教师信念系统中的核心成分——数学观，数学教学观及数学学习观^[23-24]。基于教师知识、信念和教学实践“三位一体”的观点^[24]，应通过对教师课堂教学的结构化评价来刻画教师的教学能力，最终，本研究参考当前数学课堂评价的主流工具之一——TRU（Teaching for Robust Understanding，为强有力的理解而教）课堂评价框架^[25]确定了教学能力维度的 5 个描述指标。

表 2 数学教师专业发展研究框架

维度	描述指标	内涵
专业 知识	一般内容知识（CCK）	受过良好教育的成年人所具有的数学知识
	专门内容知识（SCK）	教师因教学而持有的特定数学知识
	水平内容知识（HCK）	教师关于整个数学课程中数学主题间联系的知识
	内容与学生知识（KCS）	教师对数学的理解和对学生的了解相结合的知识
	内容与教学知识（KCT）	教师对数学的理解和对教学的了解相结合的知识
	内容与课程知识（KCC）	教师关于课程标准、教科书等课程资源如何使用的知识
教学 能力	内容呈现	教师课堂教学中数学内容的准确、连贯与合理性程度
	认知需求	教师的课堂教学对学生理解和掌握数学概念的支持程度
	学习机会	教师的课堂教学对全体学生获得学习机会的支持程度
	学生表现	课堂中学生在任务完成、想法及其讨论上的贡献程度
	评价运用	教师揭示学生思维、利用学生想法或处理学生错误的程度
教师 信念	数学观	教师对数学本质的看法
	数学教学观	教师对数学怎么教的看法
	数学学习观	教师对学生怎么学数学的看法

3.3 数据收集及分析

研究过程中一共收集到 7 类主要数据：原同课异构论文、史料素材、教学设计、课堂录像、

学生学习单、研讨纪要及 HPM 网络研修班课例报告。除主要数据之外，教师 A 曾开发的 HPM 课例资料被收集为辅助数据。数据收集节点见图 2。

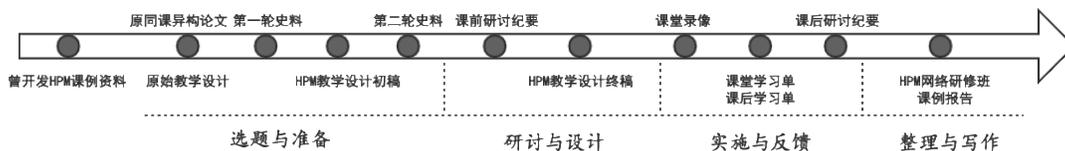


图 2 数据收集节点

史料素材分两轮推送给参与本次课例研究的所有教师：第一轮为教育取向的历史研究论文^[26-28]与已发表的 HPM 课例论文^[29]；第二轮为正弦定理及证明方法历史脉络梳理，以视频形式呈现。教学设计由教师主动提交，本研究从中选取三版，其中原始教学设计（OTD）即教师 A 在十年前的同课异构活动中所用设计稿，而 HPM 教学设计初稿（FHTD）和终稿（LHTD）分别为教师 A 在阅读第一轮史料后和课堂教学前一天所提交版本。正式教学实施后，研究者及时保存课堂录像，回收学生课堂及课后学习单，并将课前、课后的研讨录音转录为书面纪要。由于 HPM 网络研修班随后开展了以正弦定理为主题的线上研修活动，教师 A 受邀进行课例报告，所以该报告也被收集为研究数据。

数据分析采用美国学者埃里克森（F. Erickson）基于阐释主义（interpretivism）范式提出的定性方法，通过对研究数据反复执行归纳（induction）和演绎（deduction）的循环验证过程，得出研究结论^[30-31]，具体而言：研究者先研读原始数据（data），记录研读过程中产生的与本研究相关的看法、观点、论断等，生成分析备忘录（analytic memos），从中归纳得出假说；为检验假说是否成立，研究者再“携带”假说返回原始数据中，寻找支持该假说的数据并进行演绎说明；在归纳-演绎的循环中，研究者可以否定、修正或调整假说，直至得出最终结论（assertion）。

4 研究结果

4.1 专业知识：命题教学知识与课例主题教学史知识增加

4.1.1 教学设计分析

教师拥有的专业知识内容和结构影响他们将自身信念付诸教学实践的程度和方式^[24]，而在

个案研究中，学科教育研究者多从教学设计入手分析教师的专业知识^[7, 14]。表 3 简要呈现了教师 A 三稿教学设计中的教学目标和教学过程。

表 3 教师 A 的三稿教学设计

	OTD	FHTD	LHTD
教学目标	<p>(1) 知道解斜三角形的意义，理解正弦定理的推导过程，掌握正弦定理，能应用正弦定理解决三角形边角问题</p> <p>(2) 通过课前预习，提出思考问题，养成勤于思考的习惯，在小组合作中经历正弦定理的探究过程，增强合作学习的意识，激发学习热情，获得成功体验</p> <p>(3) 感受数学的对称美和谐美</p>	<p>(1) 了解研究正弦定理的必要性，知道解斜三角形的意义，充分认识正弦定理的结构特征，体会从特殊到一般的数学思想方法，掌握正弦定理，能够应用正弦定理解斜三角形</p> <p>(2) 经历正弦定理的推导过程，发展直观想象、逻辑推理、数学运算素养</p> <p>(3) 渗透数学史，感受数学文化之魅，培养浓厚的学习兴趣，体会数学背后的理性精神，培养动态的数学观</p>	基本同 FHTD
定理引入	教师根据学生预习问题整理知识框架，再由金茂大厦的测高问题引导学生找出直角三角形中的边角关系，猜想上述关系在任意三角形中成立	准备与聚焦 教师介绍三角学的发展史，让学生了解探究正弦定理的必要性，再由金茂大厦的测高问题引导学生猜想直角三角形中的边角关系，提出问题：斜三角形中是否也存在上述存在的边角关系？	师生回顾已学三角形知识，区分“定性描述”和“定量刻画”，为探究任务的引出作铺垫。接着学生代表介绍三角学的发展史，教师补充介绍测高、测距、测深等问题。最后教师从问题情境中明确探究任务：如何定量刻画“大角对大边？”

续表

	OTD		FHTD		LHTD
定理推导	教师呈现学生作业中的等面积证法，解释教材中的推导方法，然后对正弦定理进行分析说明	探索与发现	教师借助微视频等为学生搭建探究的“脚手架”，学生小组进行探究，教师巡视、指导小组探究进程		教师从探究任务、对象及方法等角度启发学生，小组合作探究，教师巡视、指导探究进程
定理应用	学生小组讨论正弦定理的应用范围，并解决相应的问题	综合与交流	小组汇报探究过程及结果，概括正弦定理的表达形式；教师结合数学史评价学生的探究过程		小组汇报探究过程及结果、概括正弦定理的表达形式；教师评价学生的探究过程，补充介绍数学史中的证明方法：纳绥尔丁同径法、韦达外接圆法以及哈里斯直角三角形法
小结思考	学生总结学习收获，教师提出拓展问题并布置学生课后思考	评估与延伸	小组继续探究正弦定理的应用范围，自编题目求解，总结学习收获；教师借助思维导图展示正弦定理的各种证明方法，并布置学生课后自主学习		小组继续探究正弦定理的应用范围，自编题目求解，总结学习收获；教师布置学生课后自主学习并完善历史上正弦定理的各种证明方法

从教学目标来看，第一，OTD 中采用时行的“知识与技能-过程与方法-情感态度与价值观”三维目标布局，而 FHTD（及 LHTD）在三维目标之上增添了核心素养立意与数学文化渗透^[32]。第二，教学目标中明显地增加了“了解研究正弦定理的必要性”及“充分认识正弦定理的结构特征”两点，这一变化萌芽于教师 A 对“真探究”与“假探究”的教学反思：

“上个学期的二项式定理，我想上成探究课的形式，但那堂课说是探究，其实是‘假探究’，学生并没有真的探究出来二项式定理。所以我想，无论如何一定要试一次，不管是作为老师还是作为学生，都要体会到这个（真探究）的过程。”

从教学过程来看，由于本次课例主题为“正弦定理的探究式教学”，教师 A 事先在教科书

的边注中看到“正弦定理是‘大角对大边’这一几何性质的定量刻画”的结论，课前研讨中专家则指出“为什么今天要探究正弦定理？本质是为了给出大角对大边的定量刻画”。修改 OTD 时，教师不仅按照探究式教学的四阶段^[26, 33]重构了定理教学环节，还在教科书的“旁白”和专家的“追问”下，将“如何定量刻画大角对大边”确定为探究任务。

此外，HPM 的介入，使得 FHTD 及 LHTD 数学内容更为丰富，学生的学习机会显著增加。从教师呈现和解释单一的等面积法，学生仅讨论正弦定理的应用范围，拓展到教师放手，由学生合作探究、分享交流定理的多种推导，教师的角色从“知识的传授者”变为“探究的引导者”，学生则从“知识的接受者”变为“探究的主人公”：

“现在这个班级中，有些孩子非常热爱数学。我始终在思考，在一个学生高中三年的数学学习当中，作为老师我应该给予他们什么？我想，在解题之外，但凡有合适的资源，如数学史等，还是应该要给他们一些自主探究的机会。上周五我们就做了一次探究，效果很好，学生在课堂中推导出了很多公式：二倍角公式、半角公式、积化和差、和差化积，等等。所以我认为对学生来说，探究成功的可能性是很大的，就更想试试看。”

4.1.2 教师 MKT 变化

在教学内容知识方面，从二项式定理的假探究、三角变换公式的试探究，到正弦定理的真探究，教学设计中教学目标和教学过程两方面的变化反映出教师 A 关于数学教学中命题教学的 KCT 和 KCS 明显增加，KCC 有所提高。特别地，虽然数学史作为一种数学课程资源（curriculum resource），能够使得探究式教学不再沦为无源之水、无本之木，但数学教师执教的是数学课，非数学史课。教师 A 在经历项目内多轮 HPM 课例开发后，已经清晰地认识到 HPM 不是“为历史而历史”，不再仅仅通过微视频和思维导图等形式附加式地介绍大量数学史，踏入从数学知识满堂灌到数学史满堂灌的误区，而是“为教学而历史”，使数学史在数学教学中物善其用，由此说明长期参与 HPM 专业发展项目能够对教师学习与掌握数学史融入数学教学的相关知识产生积极影响。

在学科内容知识方面，由于《普通高中数学课程标准》实验版和 2017 版均只要求掌握正弦定理中的 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，能够运用该式解三角形，多数版本教科书只将正弦定理中比值为三角形外接圆直径（即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ）作为推广，不要求学生掌握^[34]，甚至

连许多数学教师也不清楚比值 $2R$ 的发现与证明过程^[35]。历史上，古希腊天文学家开创了将（球面）三角形视作圆中内接三角形的先河，数个世纪后，英国数学家韦达（F. Vieta, 1540-1603）、中国数学家梅文鼎（1633-1721）等相继借助三角形外接圆推导了平面三角形的正弦定理，在正弦的线段定义下得出比值为 $2R$ ^[28]。尽管在历史视角下， $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 才是正弦定理的完整形式，但如今这一知识已不再是受过数学教育的成年人都具有的数学知识，即 CCK，所以应划分为教师因教学而特有的数学知识 SCK。同理，正弦的线段定义、正弦定理的多样证明方法等等，均属于 SCK 的范畴。

教师 A 作为经验型的骨干教师，在经历本轮 HPM 课例研究后，CCK 无明显变化，但关于课例主题，即正弦定理的 SCK 显著增加，这与现有研究^[14, 36]的结果相同，但课例研究过程中影响 SCK 变化的节点不同。对研究者提供的以“论文+案例”集的形式呈现的史料，教师 A 表示：

“从 H（研究者）发出史料开始我就在看，但可能没有很用心，导致第一遍读材料没有全读懂，所以那个教学设计（FHTD）存在比较大的问题，可能我没有完全想清楚数学史料怎么去用，只是很简单地把这个东西放进去了。”

而研究者以视频形式梳理的正弦定理及证明方法发展的历史脉络，引发了教师 A 的深入思考和教学设计的改进。一是，起初她并不能完全理解教科书为何采用解析几何方法：“我一开始想问 H，解析几何方法最大的优越点是什么”，但通过观看视频，了解欧拉（L. Euler, 1667-1719）《无穷分析引论》中的工作（图 3），她的疑惑迎刃而解：

“欧拉那个环节是非常重要的，因为它使得三角函数的定义从线段变成了比值，所以这个是一个趋势点。而为什么要建系，当回到三角函数的定义时，确实是放在坐标系当中就可以不再分锐角、钝角讨论，从而得到一般性的方法了。”



图 3 视频剪影

二是，为拓宽学生知识广度，增加深度，教师 A 能够从正弦定理证明方法的历史脉络中再精炼出一条“线”：

“从数学史的时间脉络来理的话，我为什么最后选择那三份材料（详见表 4），我自己是很清楚的，因为它们是基于正弦的线段定义，跟学生的认知不一样。所以我要拿出来，包括今天的回家作业就有一项，请根据这三份史料去完善它的证明过程。”

可见，引起教师 A 的 SCK 产生较大变化的时间节点是第二轮史料发放后，这体现了高校研究者在与中学教师合作开发 HPM 课例时的学术优势^[37]，但由于研究者忽略了呈现如正弦定理与余弦定理、三角学定理与几何学定理之间联系与区别的相关史料及分析，教师 A 的教学设计与实施中也未有体现，因此本研究中没有数据能够显示教师 A 的 HCK 的变化。

4.2 教学能力：基于数学史的探究式教学能力提升

4.2.1 课堂评价

教师 A 在同课异构活动中所教授的正弦定理一课属于常态的定理教学课（下称常态课），在参与 HPM 专业发展项目后，所开发的正弦定理课例属于 HPM 视角下的定理探究课（下称 HPM 探究课）。为着重体现 HPM 课型的教学特色，汪晓勤及其团队将 TRU 框架中课堂的数学活动对应替换为基于数学史的数学活动^[20, 38]，构建了 HPM 课堂评价框架，如：将内容呈现中“数学内容的准确、连贯与合理性程度”替换为“数学史料的准确、连贯与合理性程度”，并围绕数学史的科学性、人文性、有效性和科学性进行评价。

基于 TRU 和 HPM 课堂评价框架，研究者分别对教师 A 的正弦定理常态课和 HPM 探究课进行定性描述，尝试“还原”两节课“教什么”，教师“怎么教”及学生“怎么学”。具体如表 4 所示。

表 4 两节课的课堂评价

维度	常态课	HPM 探究课
内容	本节课的主要数学内容为：	本节课所用数学史料有：
呈现	<p>(1) 定理引入：三角形的已学知识，金茂大厦测高，直角三角形中的边角关系，正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$</p> <p>(2) 定理证明：平面几何及解析几何中的等面积法；</p> <p>(3) 定理应用：正弦定理在解斜三角形时的应用范围及对应例题；</p> <p>(4) 小结思考：课后问题</p> <p>1. 正弦定理的恒等式中是否有定值？</p> <p>2. 计算三角形面积的新公式是什么？</p> <p>3. 已知三条边或者两边及夹角，如何求解其他量？</p> <p>本节课为定理教学的第一课时，但明显偏重定理应用（用时约 18 分钟，定理证明约 5 分钟），且两道例题恰好对应正弦定理的两个直接应用范围，设计较为简单，缺少变式联系和反例。</p>	<p>(1) 三角学发展简史；</p> <p>(2) 《周髀算经》《九章算术》《实用几何学》等书中的三角测量问题；</p> <p>(3) 正弦、半弦的历史溯源</p> <p>(4) 正弦的线段定义，从线段定义到比值定义的转变；</p> <p>(5) 纳绥尔丁（Nasir-Eddin, 1201-1274）的同径法、韦达的外接圆法以及哈里斯（J. Harris, 1667-1719）的直角三角形法</p> <p>总体而言，本节课中数学史料的科学性和人文性较强，但有效性和可学性一般，比如由于课堂时间所限，教师只是草草呈现了三种正弦为线段时的证明方法（5），未充分说明各方法的步骤。</p>
认知需求	<p>本节课以学生已知的三角形知识为起点，以金茂大厦的测高问题为情境，引导学生从特殊到一般探索三角形的边角关系，得到正弦定理，通过例题操练帮助学生记忆正弦定理的应用范围。总体而言，本节课达成了课标（实验）的基本要求，但未能帮助学生理解正弦定理的数学本质。</p>	<p>本节课在探究式教学模式下，主要采用顺应式和附加式两种数学史运用方式。本节课未涉及历史上的数学问题，复制式缺位。由于三角学改头换面、今非昔比，学生对正弦定理的学习经验可能不再具有历史相似性，这是本节课未采用重构式的主要原因。</p>

续表

维度	常态课	HPM 探究课
学习机会	课堂伊始, 学生围绕教师所给关键词说出与三角形相关的结论、性质或定理; 定理应用环节, 学生分小组讨论正弦定理在解斜三角形时的应用范围; 最后, 学生自行总结学习体会, 锻炼了数学表达能力。	学生分小组进行合作探究, 教师请 3 个小组的代表上台板演探究成果。全体学生都参与到了所在小组的探究活动中。在评估与延伸环节, 学生表示: 探究让我们知其然, 历史让我们知其所以然, 希望以后能继续探究。
学生表现	从数量上看, 本节课中学生拥有较多的学习机会, 但从内容上看, 学生被限定在教师预设的学习轨迹中, 未能生成更多新的疑问和想法, 如通过等面积法可以自然地得出 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 但等号为何要继续到 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$; 平面几何和解析几何中的等面积法有哪些异同; 等等。	一位曾经介绍过“三次数学危机”的学生在本节课上自信流畅地介绍了三角学简史, 3 位小组代表也能够正确地解释本组的探究成果及思路, 其中 1 个小组利用三角形外接圆导出的辅助直径法比历史方法更简单直观, 超越了历史。
评价运用	教师利用并展示了学生的预习作业, 如平面几何中的等面积法, 也为学生布置了课后思考问题, 意在激发学习兴趣。但由于本节课偏程式化, 教师未能充分揭示学生数学思维, 故本节课在评价运用上稍显不足。	教师利用“古今联系”策略, 高度评价小组合作探究得出的辅助直径法及作高法, 并鼓励学生课后利用下发的历史资料继续探究。但本节课以教师评价为主, 缺少学生自评和同侪互评, 因此在过程评价上仍有改进空间。

4.2.2 教学能力变化

虽然两节课的主题均为正弦定理, 但一节为常态课, 一节为 HPM 探究课, 表 4 中用于评价两节课的框架各维度的内涵也不尽相同, 因此不能仅通过表 4 中的课堂评价结果便笼统地断言教师 A 的教学能力提升, 但表 4 仍显示出教师 A 在同一主题上的教学差异。

从教学实施来看, 如常态课中, 尽管教师为学生创造了一些学习机会, 但这些机会引向的是确定的结果, 学生未被赋予当堂生成的可能性, 课后探究中的 3 个问题也没有与课堂教学内容建立起实质联系。而在 HPM 探究课中, 探究任务“如何定量刻画大角对大边”, 揭示了常态

课中未提及的正弦定理的本质，即“为什么要学习正弦定理”；教师介绍的正弦、半弦的历史溯源，使学生自然地想到了三角形外接圆，从而探究出比历史方法更简单的辅助直径法，直接解决了常态课中的第 1 个课后问题。此外，常态课更重视定理的应用，约一半的时间用于例题操练，但探究课中更重视定理的发现和证明。事实上，两节课为正弦定理的第一课时，定理应用更宜作为第二课时的教学重点。可见，HPM 介入后，教师 A 不再遵从程式化的定理教学“四部曲”，而是开始引领学生经历具有历史底蕴的“探究之旅”。

从学生反馈来看，HPM 探究课的课堂学习单显示，4 个小组能够利用三角形外接圆，探究得出正弦定理及其比值；课后学习单则显示，课堂呈现的所有定理证明方法中，近一半的学生最喜欢在外接圆中作辅助直径的方法，原因是仅此法可以求出比值，还有学生诧异于三角可以与圆建立定量关系，说明学生愿意通过简单推理获得定理的完整形式，并能从定理证明的新方法中挖掘出数学不同分支间的新联系。

如上，由教师教学实施的转变和学生数学思维的延展，两方面印证了教师 A 基于数学史的探究式教学能力提升，体现为：融入历史，提高学生学习机会质量；古今联系，评价学生探究成果；等等。但无法断言教师 A 在进入 HPM 专业项目后，数学教学能力实现了全方位提升。比如，在教学设计与实施的一致性上，常态课中教师 A 基本完成了原定教学内容，但 HPM 探究课中，由于前三个环节用去了较多时间，因此评估与延伸环节被大大压缩。

4.3 教师信念：问题解决导向的教学观和数学教学观渐进形成

4.3.1 教学观变化

诸多研究表明，教师的信念与教学实践之间并不是简单的信念影响实践，或实践影响信念的关系，二者之间可能是循环影响^[24]、互动互构的^[39]。

从数学观上看，教师 A 在十年前的常态课教学中，将约一半的时间用于应用定理解特定的三角形，而“滑过”了定理的发现和证明等，体现出工具主义的数学观；刚进入 HPM 专业发展项目时，对数学史融入数学教学的理解不深，比如在其初期开发的 HPM 课例中，数学史多被借助微视频和思维导图等形式附加式地呈现给授课学生，学生仅停留在对数学发展的不易和数学家工作的艰辛等感性认识上，数学本质仍是一个由他人创造发明的世界，此阶段，教师 A 的数学观逐渐从工具主义观转向浅层的问题解决观；进入项目两年后，教师 A 从二项式定理

开始探索 HPM 视角下的探究式教学，尝试让学生以数学史为背景，从探究任务的解决中认识定理的发生发展，从古今对照中获得如数学家一般做数学的体验，但她在反思教学实施时认为自己没有做到真探究，反思促进行动，她又参与到正弦定理的课例开发中，在课后研讨和网络研修班中作课例报告时，教师 A 终于肯定地表示“正弦定理这节课实现了真正的探究，这种探究可以继续下去”，说明成功的教学实践反哺了教师 A 数学观中问题解决观的纵深发展，她也更坚定了沿着 HPM 之路继续前进的专业发展意愿。

4.3.2 数学教学观变化

4.3.1 节的分析显示了教师 A 数学教学观的变化。以往，教师 A 只教定理“是什么”，“怎么用”，而进入 HPM 专业发展项目后，在发生教学法影响下^[26]，日渐增加了对定理“为何来”，“如何证”及“何种方法更佳”的关注，这一变化实则体现出教师 A 的数学教学观从以数学内容为中心，以掌握技能为教学目标，到以数学学习者为中心，以问题提出和解决为教学目标的转向^[18]。

此外，教师 A 对数学史教育价值的认可，亦促进了学生对数学史以及对教师采用的数学史融入数学教学这一方式的认识：例如，在二项式定理和正弦定理两节课的尾声，教师都让学生围绕“知识之谐”“方法之美”“探究之乐”“能力之助”“文化之魅”“德育之效”六个核心词谈学习体会；从正弦定理的课后学习单来看，学生从本节课中认识到了正弦定理证明的多样性和正弦定理乃至数学的发展历程，正与方法之美和文化之魅相对应，而且全班学生都表示，今后愿意了解更多的数学史。有研究提出 HPM 本身可以作为数学教师的一种教学信念^[40]，这一结论还需要理论和实践的进一步检视。

4.3.3 数学学习观变化

对于教师 A 的数学学习观，研究者从数据中发现：所教班级的不同学情是她对 HPM 探究课失败或成功的外部归因之一。如 4.1 节所述，探究二项式定理时，教师 A 提到“有些东西没有真正探究出来”，她将一部分原因归结于所教班级为“文科班”，而到探究正弦定理时，她表示所教班级为“实验班”，数学基础较好，因此希望利用数学史、数学写作等途径提供他们探究数学的机会。她还意识到，教学中可以为基础好的学生适当“留白”：有一组学生在平面直角坐标系中利用两点间距离公式，推导得出余弦定理，但课后他们领悟到，要定量刻画大角对

大边，最开始便应选择角的正弦而非余弦；还有学生在比较正弦的线段定义和比值定义后，反而认为数学史上的线段定义更为简洁……由此可见，一方面，教师的数学学习观塑造了学生学习的经验空间^[24]，另一方面，不同学情学生的学习反馈，也促使教师数学学习观的动态调节。

综上，教师 A 的信念在参与专业发展项目的过程中发生了渐进式转变，表现为：数学观和数学教学观从内容为主和技能导向的工具主义观逐渐转向学生为主和问题导向的问题解决观，而数学学习观受不同阶段所教学生学情的影响，在被动顺应和自主探究间波动。

图 4 展示了支持研究者得出教师 A 在专业知识、教学能力及教师信念三个维度转变的论断的研究数据。

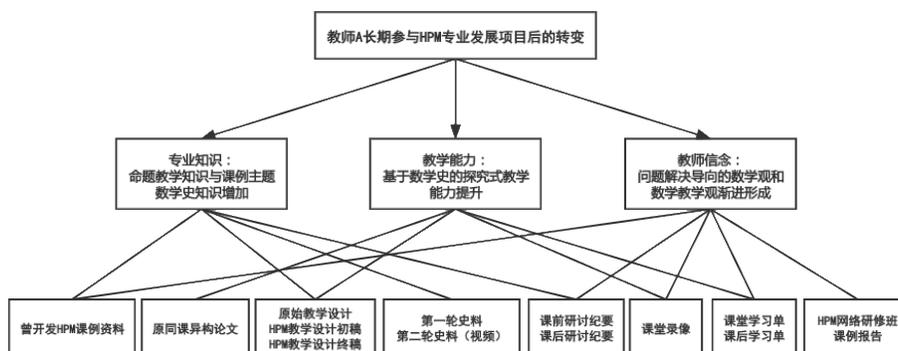


图 4 教师转变的支持数据

5 HPM 专业发展项目中促进教师转变的因素

对经验型教师 A 的个案研究表明，在其长期参与以课例研究为核心的 HPM 专业发展项目后，于数学教师专业发展的三个维度上实现了不同程度的转变，且教师表现出持续参与项目的强烈意愿，说明除教师的主观因素外，HPM 专业发展项目中具有促进教师转变的客观特征，本研究初步归纳出以下六点：

理念先进。集合论创始人，英国数学家德摩根（A. De Morgan，1806-1871）曾说：“人类数学思想的早期历史引导我们发现自己的错误；从这个方面来说，关注数学的历史是很有益的。”^[26]HPM 作为数学教育的一个学术领域，因数学史的教育价值而诞生。早期研究者多论及的“数学是一门不断演进的学科”“数学史可以增加学生的学习动机”等理论观点，在立德树人作为教育根本任务的背景之下仍然不失时代底色，实践形态的 HPM 课例更彰显着数学史具有的理性、情感、信念及品质等数学学科德育价值^[19]。

实体支撑。多数数学教师专业发展项目仅涉及数学（M，Mathematics）和数学教学（P，Pedagogy）两个实体，然后结合教育理论或堆砌时兴教育热点等形成项目，理论为上，难以应答教师在专业成长中产生的实然困惑^[41]。而 HPM 专业发展项目中具有数学史（H，History）这一实体，如图 5 所示，数学史和数学、数学教学三者作为顶点共同构成一个支撑教师专业发展的三角形，项目内一切活动必须围绕三个顶点统筹设计，且尤以数学史为主题特色，如通过史料研读以丰富教师的专业内容知识等。

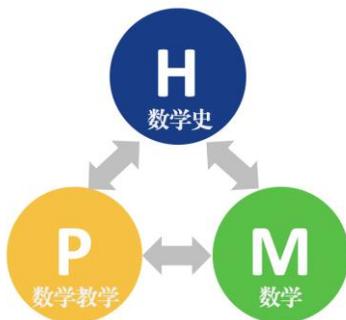


图 5 HPM 专业发展三角形

专家引领。以往数学教师能够直接接受的专家指导多来自所在校的资深教师或所在区市的教研员，他们主要基于自身丰富的实践经验以解答教师遇到的具体教学问题。而 HPM 专业发展项目中，专家由以 HPM 为研究方向的高校研究者担任，能够在高观点下引领数学教师的专业成长，如以学术讲座促理论领会，以课前研讨促设计改进，以课后研讨促教学反思，以课例整合与生成促进教师教科研能力的整体提升^[41]等。

实践驱动。关联教学实践和项目设计是有效专业发展项目的共同特征^[12]。HPM 专业发展项目以课例研究为核心，教师的教学设计需适应所教学生的学情基础，教学实施需发生在真实的课堂环境中（非模拟授课、教学片段等形式）。在多轮 HPM 课例研究的实践驱动下，教师才可能达成对 HPM 理论的融会贯通。同时，研究者也会通过课堂观察、录像分析、深度访谈等密切跟踪教师的实践变化，为教师在 HPM 专业发展项目中的进阶规划个性化方案。

团队协作。已有研究证实了高校研究者与中小学教师的关系对后者专业发展的促进作用^[42-43]，如课例研究中的异质人员参与可以深化拓展教师的 MKT^[14]等。而 HPM 专业发展项目中的研究团队成员不仅有在职和职前数学教师教育者，还有由数学教育专业的学术型硕士和教育硕士等构成的职前数学教师群体，后者作为单个课例开发的具体负责人，往往会与课例教

师进入同一诠释学循环中^[44]，于专业共同体内形成更紧密的联结，最终双方的专业发展都能从课例开发的实时协作中获益。

时间持续。如前文所述，HPM 工作室及麾下的 HPM 专业发展项目迄今已持续三年，取得了丰硕的学术成果和实践成果。事实上，对于任意一个主题式专业发展项目而言，其持续时长既影响教师主动地、长期地参与专业发展项目的学习机会，更影响教师洞察专业发展结果后的反思行动^[12]。而对研究者而言，教师能否在教学实践中持续践行项目中倡导的教学理念和教学法，以及成效如何，也为项目本身的调整或更新提供了循证依据。

6 结论与启示

基于数学教师专业发展的现有研究，本研究整合 MKT 等理论工具，初步搭建了用以分析数学教师在专业发展项目中转变的三维框架。研究者作为“正弦定理的探究式教学”课例开发的具体负责人，通过收集及“归纳-演绎”地分析经验型教师 A 在本课例研究中的多项数据，对比其未参与项目的同一主题教学及参与项目后曾开发的其余 HPM 课例，发现教师 A 在长期参与 HPM 专业发展项目后，实现了积极的教师转变，具体表现为：专业知识上，命题教学知识与课例主题数学史知识增加；教学能力上，基于数学史的探究式教学能力提升；教师信念上，问题解决导向的数学观和数学教学观渐进形成。需要说明的是，上述结论的提出取决于研究过程中研究者能够收集到的原始数据，与个案教师在项目中选择开发的课例主题密切相关，如二项式定理、正弦定理及球体积公式课例均属于数学教学中的命题教学。

基于专业发展项目的国际前沿视角，本研究首次提出将 HPM 工作室组织的一切教学相关活动统整成以课例研究为核心的 HPM 专业发展项目，根据对个案教师 A 的研究结果，结合既往研究成果，初步归纳出项目内促进教师转变的 6 点因素，分别为：理念先进、实体支撑、专家引领、实践驱动、团队协作及时间持续，进一步证实了专业发展项目中的引领和支持能够积极影响教师转变的结论^[45]。

最后，以 HPM 专业发展项目作为中国数学教师主题式专业发展项目设计、优化的“小切口”，有可能为广大数学教师的专业发展开辟“大格局”，如在教师与研究者之间形成一个深耕教育理论与扎根教学实践兼而有之的专业共同体，双方进行合作学习与研究等；将课例研究中的数据收集范围扩大到学生层面，如课前、课堂及课后学习单或测试卷等，探查数学教师的

教学改进能否影响学生学习，以从学生终端检验教师专业发展的成效。

参考文献

- [1] 吴颖康. 数学教师教育研究的现状和趋势——基于对近三届国际数学教育大会相关报告的分析[J]. 中学数学月刊, 2016, 39(06): 1-4.
- [2] 陈昊, 王建磐. 21 世纪国际数学教育在关注什么——基于 ICME 中 TSG 主题的分析[J]. 数学教育学报, 2020, 29(02): 41-48.
- [3] 徐文彬, 曹新, 王兴福. 数学课程改革与数学教师专业发展——专题研讨会综述[J]. 数学教育学报, 2013, 22(04): 90-93.
- [4] 段志贵, 秦虹, 宁连华. 从外延到内涵: 数学教师专业发展研究走向——近年来数学教师专业发展研究述评[J]. 数学教育学报, 2017, 26(06): 72-79.
- [5] 徐斌艳. 数学教师专业标准的国际比较[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2012: 1-2.
- [6] 武小鹏, 张怡. 国际比较视域下建立数学教师专业标准的构想[J]. 中小学教师培训, 2017, 34(05): 73-78.
- [7] 柳笛. 高中数学教师学科教学知识的案例研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2011.
- [8] 王改珍. 职前数学教师专业知识结构及水平的实证研究[D]. 吉林: 东北师范大学, 2021.
- [9] 黄荣金, 李业平. 中国在职数学教师专业发展的挑战与机遇[J]. 数学教育学报, 2008, 17(03): 32-38.
- [10] 王宽明. “国培计划”促进骨干教师专业发展的影响研究[J]. 现代中小学教育, 2013, 29(07): 88-92.
- [11] Borko, H. Professional development and teacher learning: Mapping the terrain [J]. *Educational Researcher*, 2004, 33(8): 3-15.
- [12] Sztajn, P., Borko, H., M. Smith, T. 数学专业发展研究[A]. 蔡金法. 数学教育研究手册（第三册）[A]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 380-437.
- [13] 黄友初. 教师专业素养内涵结构和群体认同差异的调查研究[J]. 湖南师范大学教育科学学报, 2019, 18(01): 95-101.
- [14] 栗小妮, 汪晓勤. HPM 课例研究对教师 MKT 的影响[J]. 数学教育学报, 2021, 30(03): 83-89.

- [15] 余庆纯, 姜浩哲, 沈中宇. 第三届华人数学教育大会 HPM 分论坛综述[J]. 数学教学, 2019, 65(04): 1-5.
- [16] 刘思璐, 韩嘉业, 姜浩哲. 第八届全国数学史与数学教育学术研讨会纪要[J]. 数学教育学报, 2020, 29(01): 93-97.
- [17] 岳增成. HPM 对小学数学教师教学设计能力影响的个案研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2019.
- [18] 孙丹丹. 基于数学史网络研修的在职初中数学教师观念发展研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2021.
- [19] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. 数学通报, 2020, 59(03): 7-12+19.
- [20] 刘思璐. HPM 课堂教学评价框架构建及其应用[D]. 上海: 华东师范大学, 2021.
- [21] 中华人民共和国教育部. 中学教师专业标准(试行) [EB/OL]. 教师[2012]1 号. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A10/s6991/201209/t20120913_145603.html
- [22] Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? [J]. *Journal of Teacher Education*, 2008, 59(5): 389-407.
- [23] 孙丹丹, 汪晓勤. 中国数学教师信念研究二十年[J]. 数学教育学报, 2020, 29(02): 76-83.
- [24] 张侨平, 黄毅英. 信念, 知识与教学: 华人数学教师系列研究[A]. 范良火, 黄毅英, 蔡金法, 李士錡. 华人如何教数学[M]. 南京: 江苏凤凰教育出版社, 2007: 345-374.
- [25] Schoenfeld, A. H. Video analyses for research and professional development: the teaching for robust understanding (TRU) framework[J]. *ZDM*, 2018, 50(03): 491-506
- [26] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [27] 张小明. 正弦定理的证明: 从历史到教学[J]. 数学通报, 2015, 54(07): 15-17+22.
- [28] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前的正弦定理历史[J]. 数学通报, 2016, 55(01): 1-5+27.
- [29] 张筱瑜, 汪晓勤. “正弦定理”: 用历史拓思维、润情感[J]. 教育研究与评论(中学教育教育), 2015, 7(06): 21-25.
- [30] Erickson, F. Qualitative methods in Research on teaching [A]. Wittrock, M. *Handbook of research on teaching* [M]. New York: Macmillan, 1986: 119-161.
- [31] 阎琨. 教育学定性研究特点与研究范式深析[J]. 清华大学教育研究, 2010, 31(05): 55-60.

- [32] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 2.
- [33] Siegel, M., et al. Supporting students' mathematical inquiries through reading [J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1998, 29(4): 378-413.
- [34] 徐树旺. 聚焦数学本质 凸显定位选择——“正弦定理（第一课时）”的教学思考[J]. 中学数学教学参考, 2018, 47(31): 19-22.
- [35] 杨军, 田宏根, 张静. 基于过程视角的正弦定理教学的问题分析[J]. 数学教育学报, 2012, 21(06): 31-34.
- [36] 岳增成, 汪晓勤. HPM 案例驱动下的小学数学教师专业发展——以“角的初步认识”为例[J]. 基础教育, 2017, 14(02): 96-103+112.
- [37] 陈飞. 中国特色的 HPM 理论: 将数学历史融入数学教学——汪晓勤教授访谈录[J]. 中学数学教学参考, 2019, 48(07): 7-12.
- [38] 汪晓勤. 关于 HPM 教学评价的案例分析[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 1-6.
- [39] 脱中菲. 小学数学教师信念结构及特征的个案研究[D]. 吉林: 东北师范大学, 2014.
- [40] 冯振举, 王惠扬. 职前数学教师教学设计信念转变的个案研究——以 HPM 视角下的勾股定理教学为例[J]. 数学教育学报, 2016, 25(02): 59-65.
- [41] 吴立宝, 张永健. 中小学教师教科研困境及其实践转向[J]. 中国教育学刊, 2018, 39(01): 92-97.
- [42] 徐冉冉, 裘晓丽, 姚一玲, 蔡金法. 基于教师—研究者伙伴关系的初中数学教学改进——以“一次函数”“问题提出教学”为例[J]. 数学教育学报, 2021, 30(01): 25-31.
- [43] 綦春霞, 曹辰, 张迪. 大学与中学数学教师合作促进教师发展的个案研究[J]. 数学教育学报, 2021, 30(03): 38-45.
- [44] 汪晓勤. HPM 与初中数学教师的专业发展——一个上海的案例[J]. 数学教育学报, 2013, 22(01): 18-22.
- [45] 徐晓东, 李王伟, 曹鑫. 如何在教师专业发展项目中指导教师转变? ——来自质性研究的发现[J]. 电化教育研究, 2021, 42(07): 99-105.

历史研究

美英早期解析几何教科书中的双曲线几何性质

刘梦哲

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

圆锥曲线是高中数学中的重点与难点, 从圆锥曲线的标准方程到几何性质, 其中不仅蕴含数形结合等思想, 还对学生的数学抽象素养提出了一定的要求。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》要求学生了解抛物线与双曲线的定义、几何图形和标准方程, 以及它们的简单几何性质^[1]。双曲线作为高中阶段继椭圆之后学习的另一种新的圆锥曲线, 因而有必要进一步探究双曲线的几何性质。

对于双曲线的简单几何性质, 早在古希腊时期, 阿波罗尼奥斯(Apollonius, 约前 262-约前 190) 编著了《圆锥曲线论》, 对前人的研究进行综合和创新。阿波罗尼奥斯不仅是第一个使用同一正圆锥或斜圆锥得到三种不同圆锥曲线的人, 还在卷 II 中研究了双曲线的渐近线问题, 并在命题 1 中给出了双曲线渐近线的做法和证明^[2-3]。17 世纪, 随着解析几何的创立, 不同数学家对双曲线的轨迹展开研究, 得到了双曲线的不同定义及其标准方程, 这也为双曲线的几何性质的探究奠定基础。

在现行沪教版和人教 A 版教科书中, 只需要学生掌握双曲线的对称性、顶点、范围及渐近线等简单几何性质, 而双曲线的几何性质绝不仅限于此。古今中外, 上下数千年的历史长河积淀了人类的思想精华, 形成了巨大的宝藏, 其中蕴含了取之不尽、用之不竭的教学资源^[4]。通过美英早期解析几何教科书研究可以发现, 双曲线的切线、法线、直径及渐近线蕴含着相关的角度、定值、轨迹及恒等性质, 但迄今我们对此知之甚少。鉴于此, 本文拟聚焦双曲线的几何性质, 对 19-20 世纪美英早期教科书进行考察, 试图回答以下问题: 在双曲线中包含哪些几何性质(切线、法线、渐近线等)? 如何证明这些性质? 如何将这些素材用于今日的课堂之上, 为教师提供教学设计的思路?

2 早期教科书的选取

本文选取 1826-1965 年间出版的 74 种美英早期数学教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

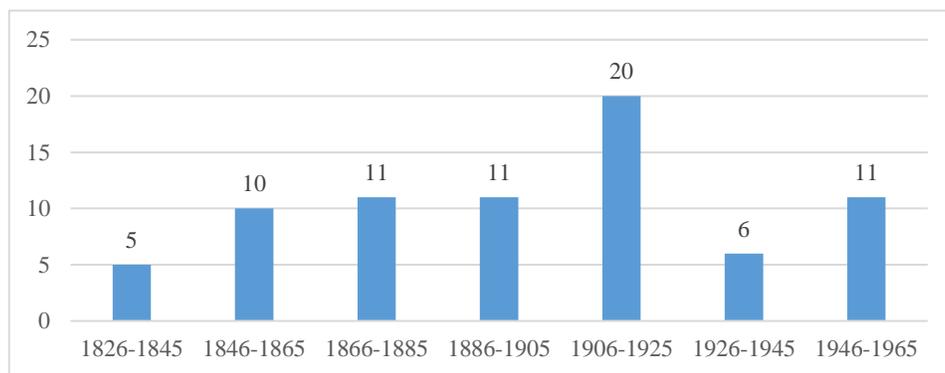


图 1 74 种美英早期数学教科书的出版时间分布

为回答研究问题 1 和 2，本文按年份依次检索上述 74 本早期解析几何教科书，从“双曲线”“圆锥曲线”“圆锥曲线的性质”等章中，分别摘录出与双曲线的切线、法线、直径及渐近线相关的性质，再经内容分析，将其归于不同类别。最后，结合所搜集的双曲线的几何性质及其不同的证明，回答研究问题 3。

3 相关的角度性质

命题 1 双曲线上任一点的焦半径的夹角被过该点的切线所平分。

在物理中，双曲线具有光学性质，即从双曲线的一个焦点发出的光线经双曲线反射后，反射光线的反向延长线都汇聚到双曲线的另一焦点，人们利用这一性质可以制作双曲面反射镜^[5]。在实际应用中，Purcell（1958）还指出双曲线的反射性质可以用来定位敌人的炮兵连^[6]。证明命题 1 的方法可以分为比例法、夹角法和反证法三类。

（一）比例法

如图 2，对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，过其上任意一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线方程为 $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ 。令 $y=0$ ，于是这条切线在 x 轴的截距为 $\frac{a^2}{x_1}$ 。由点到直线距离公式知，两条焦半径的长度为

$$|F_1P|^2 = (x_1 + c)^2 + y_1^2 = (x_1 + c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2) = \frac{1}{a^2}(a^4 + 2a^2cx_1 + c^2x_1^2),$$

即 $|F_1P| = ex_1 + a$ ，同理得 $|F_2P| = ex_1 - a$ 。因为 $|F_1T| = ae + \frac{a^2}{x_1}$ 及 $|F_2T| = ae - \frac{a^2}{x_1}$ ，则

$$\frac{|F_1T|}{|F_2T|} = \frac{ae + \frac{a^2}{x_1}}{ae - \frac{a^2}{x_1}} = \frac{ex_1 + a}{ex_1 - a} = \frac{|F_1P|}{|F_2P|},$$

故 $\angle F_1PT = \angle F_2PT$ ，即直线 PT 是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线。^[7]

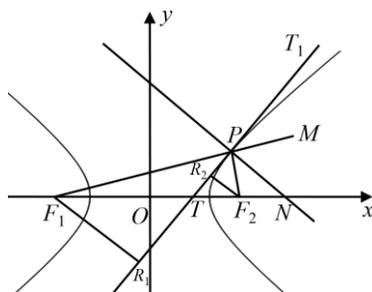


图 2 命题 1 图

Runkle (1888) 分别过双曲线的两个焦点 F_1 、 F_2 作切线的垂线，垂足为 R_1 、 R_2 (图 2)。

在 $Rt\triangle PF_1R_1$ 和 $Rt\triangle PF_2R_2$ 中，有 $\sin \angle F_1PR_1 = \frac{|F_1R_1|}{|F_1P|}$ 及 $\sin \angle F_2PR_2 = \frac{|F_2R_2|}{|F_2P|}$ 。由点到直线距离公式，

有 $|F_1R_1| = \frac{|aeb^2x_1 + a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}$ ，则

$$\frac{|F_1R_1|^2}{|F_1P|^2} = \frac{a^2b^4(ex_1 + a)^2}{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)(ex_1 + a)^2} = \frac{a^2b^4}{a^2b^2(e^2x_1^2 - a^2)} = \frac{b^2}{(ex_1 - a)(ex_1 + a)} = \frac{b^2}{rr'}$$

其中 $r = ex_1 + a$ 及 $r' = ex_1 - a$ 。同理 $\frac{|F_2R_2|^2}{|F_2P|^2} = \frac{b^2}{rr'}$ ，故 $\frac{|F_1R_1|^2}{|F_1P|^2} = \frac{|F_2R_2|^2}{|F_2P|^2} = \frac{b^2}{rr'}$ ，于是 $\angle F_1PR_1 = \angle$

$\angle F_2PR_2$ 。^[8]

Loomis (1851) 利用外角平分线，并由比例线段得到相应的线段长从而证明命题 1^[9]。延

长 F_1P 至点 M ，作 $\angle F_2PM$ 的平分线 PN ，交 x 轴于点 N ，于是 $\frac{|F_1P|}{|F_2P|} = \frac{|F_1N|}{|F_2N|}$ (图 2)。由比例的

等比性质，有 $\frac{|F_1F_2|}{|F_1P| - |F_2P|} = \frac{|F_1N| - |F_2N|}{|F_1P| - |F_2P|} = \frac{|F_1N|}{|F_1P|}$ 。因为 $|F_1P| - |F_2P| = 2a$ ， $|F_1F_2| = 2c = 2ae$ 及

$|F_1P| = ex_1 + a$ ，所以 $\frac{2c}{2a} = \frac{|F_1N|}{ex_1 + a} \Rightarrow |F_1N| = e(ex_1 + a)$ 。又因为从焦点 F_1 到过点 P 的法线与 x 轴

的交点的距离为 $e(a + ex_1)$ ，因此直线 PN 是过双曲线上一点 P 的法线。可知，过双曲线上一点 P 的法线平分由一条焦半径的延长线及另一条焦半径所夹角。由 $PN \perp PT$ 及 $\angle F_2PN = \angle NPM$ ，故 $\angle F_2PT = \angle MPT_1$ ，又由 $\angle MPT_1 = \angle F_1PT$ ，于是 $\angle F_1PT = \angle F_2PT$ 。

Puckle (1870) 从法线出发证明直线 PN 是外角平分线，通过求出法线在 x 轴上的截距，进而由比例线段完成证明^[10]。过双曲线上一点 P 的法线方程为 $y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$ ，令 $y=0$ ，

则 $x = \frac{b^2 x_1}{a^2} + x_1 = e^2 x_1$ ，可得 $|F_1N| = e^2 x_1 + c$ 及 $|F_2N| = e^2 x_1 - c$ ，于是 $\frac{|F_1P|}{|F_2P|} = \frac{|F_1N|}{|F_2N|}$ ，则 PN 是 \angle

F_2PM 的平分线，由此可以推出 $\angle F_1PT = \angle F_2PT$ (图 2)。

(二) 夹角法

Smyth (1855) 利用两条直线的夹角公式证明过双曲线上任意一点的切线与过该点的两条焦半径的夹角相等^[11]。由点 $P(x_1, y_1), F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ，直线 F_1P 和 F_2P 的斜率分别为

$k_{F_1P} = \frac{y_1}{x_1 + c}$ 及 $k_{F_2P} = \frac{y_1}{x_1 - c}$ ，过双曲线上一点的切线的斜率为 $k_{PT} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$ ，于是计算可得

$$\tan \angle F_1PT = \frac{\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} - \frac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \cdot \frac{y_1}{x_1 + c}} = \frac{b^2 x_1^2 + b^2 c x_1 - a^2 y_1^2}{a^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1 + b^2 x_1 y_1} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c x_1}{c^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1} = \frac{b^2}{c y_1},$$

$$\tan \angle F_2PT = \frac{\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} - \frac{y_1}{x_1 - c}}{1 + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \cdot \frac{y_1}{x_1 - c}} = \frac{b^2 x_1^2 - b^2 c x_1 - a^2 y_1^2}{a^2 x_1 y_1 - a^2 c y_1 + b^2 x_1 y_1} = \frac{a^2 b^2 - b^2 c x_1}{c^2 x_1 y_1 - a^2 c y_1} = \frac{b^2}{c y_1},$$

所以 $\tan \angle F_1PT = \tan \angle F_2PT$ ，即 $\angle F_1PT = \angle F_2PT$ (图 2)。Agnew (1962) 利用向量证明切线与两条焦半径的夹角相等^[12]。

(三) 反证法

如图 3, Robinson (1860) 作 $\angle F_1PF_2$ 的平分线 PT ，并在线段 F_1P 上取 $PG = PF_2$ ，连结

GF_2 (图 3)。在 $\triangle PGF_2$ 中, 直线 PT 是线段 GF_2 的垂直平分线, 即直线 PT 上任意一点到点 G 和 F_2 的距离相等。由双曲线第一定义可知, $PF_1 - PF_2 = PF_1 - PG = F_1G$, 于是 $F_1G = 2a$ 。假设直线 PT 交双曲线于另一点 E , 连结 EF_1 、 EF_2 及 EG 。因为 $EF_2 = EG$, 所以 $EF_1 - EF_2 = EF_1 - EG$ 。又因为 $EF_1 - EG < F_1G = 2a$, 所以 $EF_1 - EF_2 < 2a$, 即点 E 不在双曲线上。由点 E 的任意性可知, 直线 PT 上有且只有一点 P 在双曲线上, 则 $\angle F_1PF_2$ 的平分线 PT 是过双曲线上一点 P 的切线。^[13]

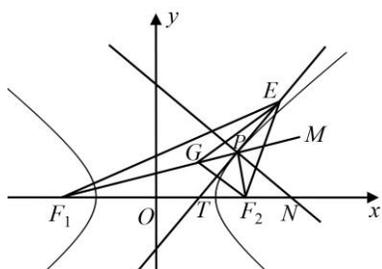


图 3 Robinson (1860) 的证明

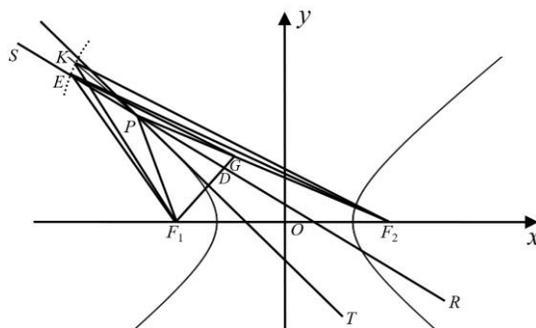


图 4 Coffin (1881) 的反证法

如图 4, Coffin (1881) 假设切线 PT 不是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线, 不妨设 RS 是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线, 有 $\angle F_1PR = \angle F_2PR$ 。因为过双曲线上同一点有且只有一根切线, 所以直线 RS 与双曲线相交。在双曲线内的直线 RS 上取一点 E , 并以 F_2 为圆心、 F_2E 为半径作 EK , 交双曲线于点 K 。在 PF_2 上取 $PF_1 = PG$, 连结 GF_1 、 GE 、 EF_1 、 EF_2 、 KF_1 及 KF_2 。在 $\triangle PF_1D$ 和 $\triangle PGD$ 中, 因为 $\angle F_1PD = \angle F_2PD$ 、 $PF_1 = PG$ 及 PD 是公共边, 所以 $\triangle PF_1D \cong \triangle PGD$, 于是 $DF_1 = DG$ 及 $\angle F_1DP = \angle GDP$ 。在 $\triangle EF_1D$ 和 $\triangle EGD$ 中, 因为 $DF_1 = DG$ 、 $\angle F_1DP = \angle GDP$ 及 ED 是公共边, 所以 $\triangle EF_1D \cong \triangle EGD$, 于是 $EF_1 = EG$ 。又因为 $\angle EF_2F_1 < \angle KF_2F_1$ 且 $EF_2 = KF_2$ 、 $F_1F_2 = F_1F_2$, 所以 $EF_1 < KF_1$, 则 $EG < KF_1$ 及 $EF_2 - EG > KF_2 - KF_1$ 。由 $KF_2 - KF_1 = PF_2 - PF_1 = PF_2 - PG = GF_2$, 故 $EF_2 - EG > GF_2$, 与事实矛盾, 显然假设不成立, 即切线 PT 是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线。^[14]

4 相关的定值

命题 2 双曲线的两个焦点与其任何切线的距离的乘积等于短半轴长的平方。

Smith, Salkover & Justice (1954) 利用点到直线距离公式, 计算两焦点 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ 到

过双曲线上一点 P 的切线 $b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$ 的距离为

$$|F_1R| = \frac{|-b^2cx_1 - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}, |F_2R| = \frac{|b^2cx_1 - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}},$$

两式相乘可得^[15]

$$|F_1R| \cdot |F_2R| = \frac{b^4c^2x_1^2 - a^4b^4}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} = \frac{b^4c^2x_1^2 - a^4b^4}{a^2b^2(e^2x_1^2 - a^2)} = \frac{b^2c^2x_1^2 - a^4b^2}{c^2x_1^2 - a^4} = b^2。$$

在双曲线中，与定值相关的性质还有很多。如图 5， F_1, F_2 是双曲线的焦点，直线 PT 是过双曲线上一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线，直线 PN_2 是过点 P 的法线。过点 F_1, O, F_2 ，作切线 PT 的垂线 F_1E_1, OQ, F_2E_2 ，垂足分别为 E_1, Q, E_2 ， PS 表示点 P 的横坐标。于是，Siceloff, Wentworth & Smith (1922) 给出如下性质：(1) 次切线长 $ST_1 = \frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$ ；(2) 次法线长 $N_2S = \frac{b^2x_1}{a^2}$ ；(3)

$$|ON_2| \cdot |OT_1| = |OF_2|^2；(4) |OS| \cdot |OT_1| = a^2；(5) |OQ| \cdot |N_2P| = b^2；(6) |OQ| \cdot |N_1P| = a^2；(7)$$

$$|N_1P| \cdot |N_2P| = |F_1P| \cdot |F_2P| = |T_1P| \cdot |PT|；(8) |T_1F_2| \cdot |OS| = a \cdot |F_2P|。^{[16]}$$

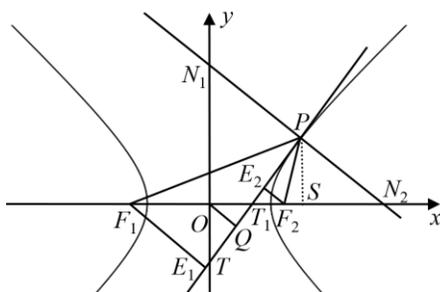


图 5 双曲线中的相关定值

命题 3 双曲线的焦点到其渐近线的距离等于短半轴长。

对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，于是双曲线的任意焦点到双曲线的两条渐近线的距离为 $d = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b$ 。^[17]

命题 4 双曲线上一点到其渐近线距离的乘积为定值。

Young, Fort & Morgan (1936) 记双曲线上任意一点 $Q(x_1, y_1)$ 到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条渐

近线 $bx+ay=0$ 的距离为 d_1 , 到另一条渐近线 $bx-ay=0$ 的距离为 d_2 . 于是有 $d_1 = \frac{|bx_1 + ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 及

$$d_2 = \frac{|bx_1 - ay_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ 则 } d_1 d_2 = \frac{|b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad [18]$$

O'Brien (1844) 采用了不同的表示方法。对于双曲线的两条渐近线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ 及 $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, 点 $Q(x_1, y_1)$ 到这两条渐近线的距离为 $d_1 = \frac{1}{c} \left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} \right)$ 及 $d_2 = \frac{1}{c} \left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} \right)$, 其中 $c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, 于是 $d_1 d_2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \right) = \frac{1}{c^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$. [19]

命题 5 双曲线的一条直径与其共轭直径长的平方差是定值。

设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与其直径的交点为 $P(x', y')$, 则其共轭直径与双曲线的交点为 $Q(\pm \frac{a}{b} y', \pm \frac{b}{a} x')$ (图 6)。由两点间距离公式, 有 $|OP|^2 = x'^2 + y'^2$ 及 $|OQ|^2 = \frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2$, 于是 $|OP|^2 - |OQ|^2 = \left(\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} \right) (a^2 - b^2) = a^2 - b^2$, 即 $|PP_1|^2 - |QQ_1|^2 = 4a^2 - 4b^2$. [20]

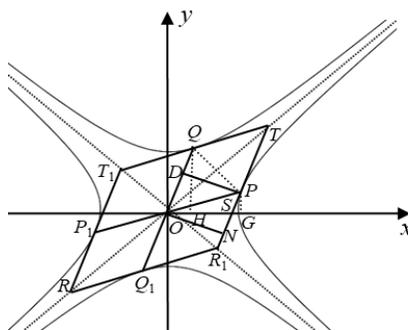


图 6 命题 5 及命题 6 图

如图 6, Hardy (1891) 依然利用 P 、 Q 的直角坐标, 但在化简方式上有所不同[17]。因为

$$|OP|^2 = x'^2 + y'^2 = x'^2 + \frac{b^2}{a^2} (x'^2 - a^2) = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x'^2 - b^2 = e^2 x'^2 - b^2,$$

$$|OQ|^2 = x''^2 + y''^2 = \frac{b^2}{a^2} x'^2 + \frac{a^2}{b^2} y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x'^2 + \frac{a^2}{b^2} \left[\frac{b^2}{a^2} (x'^2 - a^2) \right] = \frac{a^2 + b^2}{a^2} x'^2 - a^2 = e^2 x'^2 - a^2,$$

所以 $|OP|^2 - |OQ|^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow |PP_1|^2 - |QQ_1|^2 = 4a^2 - 4b^2$ 。

Schmall (1921) 利用双曲线的参数方程证明这一命题[21]。记双曲线的一条直径交双曲线

于点 $P(a \sec \varphi, b \tan \varphi)$ ，则其共轭直径交共轭双曲线于点 $Q(a \tan \varphi, b \sec \varphi)$ ，计算可得

$$|OP|^2 - |OQ|^2 = a^2 \sec^2 \varphi + b^2 \tan^2 \varphi - a^2 \tan^2 \varphi - b^2 \sec^2 \varphi = a^2 - b^2,$$

故 $|PP_1|^2 - |QQ_1|^2 = 4a^2 - 4b^2$ (图 6)。此外，运用参数方程还可以证明双曲线的一条直径 PP_1 及

其共轭直径 QQ_1 与双曲线的两个交点 P, Q 的偏心角 φ_1, φ_2 满足 $\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ 。

命题 6 过双曲线的直径及其共轭直径与双曲线的四个交点作双曲线的切线，四条切线围成的平行四边形的面积是定值。

Fine & Thompson (1914) 利用行列式计算平行四边形的面积^[20]。由 $P(x', y'), Q(x'', y'')$ 计算可得

$$S_{\square OPTQ} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = |x'y'' - x''y'| = \left| \frac{b}{a}x'^2 - \frac{a}{b}y''^2 \right| = ab \left(\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} \right) = ab,$$

则 $S_{\square TT_1RR_1} = 4S_{\square OPTQ} = 4ab$ (图 6)。Schmall (1921) 将坐标表示为参数方程的形式，可以得到同样的结论^[21]。

Boyd, Davis & Rees (1922) 计算平行四边形的底边和高从而得到其面积^[22]。过点 P 的一条直径为 $y'x - x'y = 0$ ，则点 Q 到这条直径的距离为 $d = \frac{|y'x'' - x'y''|}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{ab}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ ，又因为

$|OP| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ ，于是 $S_{\square TT_1RR_1} = 4S_{\square OPTQ} = 4 \cdot |OP| \cdot d = 4ab$ (图 6)。Puckle (1870) 通过计算 OQ 长及原点到切线 R_1T 的距离从而计算得出平行四边形的面积^[10]。

Newcomb (1884) 由命题“平行四边形的面积等于两组邻边的积乘以夹角的正弦值”来证明这一命题^[23]。如图 6，过点 P, Q 作 x 轴的垂线，垂足分别为 G, H ，设 $PP_1 = 2a', QQ_1 = 2b'$

及 $\angle POG = \theta, \angle QOH = \varphi$ 。因为 $\sin \varphi = \frac{bx'}{ab'}$, $\cos \varphi = \frac{ay'}{bb'}$ 及 $\sin \theta = \frac{y'}{a'}$, $\cos \theta = \frac{x'}{a'}$ ，故

$$\sin(\varphi - \theta) = \sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta = \frac{ab}{a'b'},$$

则 $S_{\square TT_1RR_1} = 4S_{\square OPTQ} = 4 \cdot |OP| \cdot |OQ| \cdot \sin(\varphi - \theta) = 4ab$ 。

Docharty (1865) 利用割补法计算平行四边形的面积^[24]。如图 6，因为

$$S_{\Delta OPQ} = S_{\square HPG} + S_{\Delta OHQ} - S_{\Delta OGP} = \frac{1}{2}(x' - x'')(y' + y'') + \frac{1}{2}x''y'' - \frac{1}{2}x'y',$$

所以 $S_{\square OPTQ} = 2S_{\Delta OPQ} = x'y'' - x''y' = ab$ ，即 $S_{\square TR_1RR_1} = 4S_{\square OPTQ} = 4ab$ 。

Loomis (1877) 在计算中渗透化归思想，将一些难以计算的边长转化为容易计算的边长^[25]。如图 6，过点 P 、 O 作 OQ 、 TR_1 的垂线，垂足为点 D 、 N 。由

$$S_{\square TR_1RR_1} = 4S_{\square OPTQ} = 4|OQ| \cdot |DP| = 4|OQ| \cdot |OS| \sin \angle OSN = 4|OS| \cdot |QH|,$$

因为 $|OS| = \frac{a^2}{x'}$ ， $|QH| = \frac{bx'}{a}$ ，所以 $S_{\square TR_1RR_1} = 4 \cdot \frac{a^2}{x'} \cdot \frac{bx'}{a} = 4ab$ 。

5 相关的轨迹

命题 7 过双曲线的焦点作双曲线任意切线的垂线，两个垂足均在 $x^2 + y^2 = a^2$ 上。

如图 7，过双曲线上一点 P 的切线 PT 的表达式为 $y - mx = \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ ，过焦点 F_2 作与切线 PT 垂直的直线 F_2G ，垂足为点 G ，直线 F_2G 的表达式为 $my + x = ae$ ，两式平方相加，得 $(m^2 + 1)(x^2 + y^2) = a^2m^2 - b^2 + a^2e^2 = a^2m^2 + a^2$ ，所以 $x^2 + y^2 = a^2$ ，即两个垂足的轨迹是以原点为圆心， a 为半径的圆。^[10]

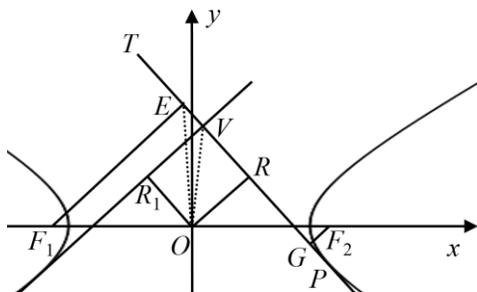


图 7 命题 7 及命题 8 图

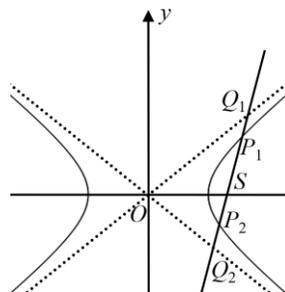


图 8 命题 9 图

Johnson (1869) 过点 F_1 、 O 作切线 PT 的垂线，垂足分别为 E 、 R (图 7)。设 $\angle EF_1O = \alpha$ ，

则 $|ER| = c \sin \alpha$ 及 $|OR|^2 = a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha$ ，于是

$$|OE|^2 = |ER|^2 + |OR|^2 = a^2 \cos^2 \alpha + (c^2 - b^2) \sin^2 \alpha = a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha = a^2,$$

即点 E 的轨迹是以原点为圆心， a 为半径的圆。^[26]

命题 8 两条相互垂直且与双曲线相切的直线的交点轨迹为 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ 。

设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一条切线的斜率为 m ，则切线方程为 $y - mx = \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ 。因为两

条直线的斜率满足 $m'm + 1 = 0$ ，于是另一条切线方程为 $y + \frac{1}{m}x = \sqrt{\frac{a^2}{m^2} - b^2}$ ，即

$my + x = \sqrt{a^2 - b^2 m^2}$ 。两式平方相加，化简可得 $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ 。[27]

Salmon (1855) 利用双曲线的切线方程 $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ，其中 $p^2 = a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha$ ，

以及与之垂直的切线方程 $-x \sin \alpha + y \cos \alpha = p'$ ，其中 $p'^2 = a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha$ 。两式平方相加，

得 $x^2 + y^2 = p^2 + p'^2 = a^2 - b^2$ 。[28]

O'Brien (1844) 将切线方程 $y - mx = \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$ 两边平方得

$$(a^2 - x^2)m^2 + 2xym - b^2 - y^2 = 0。$$

设两条切线的斜率分别为 m_1 、 m_2 ，由韦达定理知， $m_1 m_2 = \frac{-b^2 - y^2}{a^2 - x^2}$ ，又因为两条切线相互垂

直，所以 $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ 。[19]

Johnson (1869) 依然利用勾股定理，过点 O 作切线 $R_1 V$ 的垂线，垂足为 R_1 (图 7)。设

$\angle E F_1 O = \alpha$ ，则 $|OR_1|^2 = a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha$ ，于是

$$|OR|^2 + |OR_1|^2 = a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha = a^2 - b^2，$$

即 $|OV|^2 = a^2 - b^2$ ，所以两条垂直切线的交点在以原点为圆心，半径为 $\sqrt{a^2 - b^2}$ 的圆上。[26]

6 相关的恒等性质

命题 9 直线在双曲线及其渐近线之间的截线长度相等。

如图 8，直线 $y = mx + c$ 与双曲线交于点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ ，交双曲线的渐近线于点

$Q_1(x'_1, y'_1), Q_2(x'_2, y'_2)$ 。将直线与双曲线联立，得

$$\begin{cases} y = mx + c \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right)x^2 - \frac{2mc}{b^2}x - \frac{c^2}{b^2} - 1 = 0,$$

由韦达定理知, $x_1 + x_2 = \frac{2ma^2c}{b^2 - a^2m^2}$ 。同理, 将直线方程与渐近线方程联立, 并运用韦达定理, 得 $x'_1 + x'_2 = \frac{2ma^2c}{b^2 - a^2m^2}$ 。于是 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x'_1 + x'_2}{2}$, 即 P_1P_2 的中点 S 也是 Q_1Q_2 的中点。因为 $P_1S = P_2S$ 及 $Q_1S = Q_2S$, 所以 $P_1Q_1 = P_2Q_2$ 。^[29]

7 结论与启示

综上所述, 美英早期解析几何教科书中所呈现的与双曲线相关的角度、定值、轨迹及恒等性质, 为今日双曲线几何性质的教学提供了诸多启示。

其一, 注重理性思维, 发展推理能力。学习数学定理不仅应服务于数学解题, 还应重视其背后的推理过程。猜之有据, 推之有法, 是新时代走向高效教学的必由之路, 教师在教学过程中一定要让学生“知其然, 知其所以然”, 从而加深学生对定理的理解与记忆。教师在抛出双曲线中的一些几何性质后, 应留给学生思考的时间、动手的机会, 先让学生在纸上进行演算, 尝试给出定理的证明思路。与此同时, 教师还应挖掘定理证明中的数学思想, 例如, 将直角坐标转化为参数方程简化计算, 体现化归思想; 代数运算与几何证明相融合, 体现数学结合思想等。掌握这些数学思想方法, 有助于培养学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学素养, 提高整体学习能力, 培养浓厚的理性精神。

其二, 加强数学探索, 提升创新能力。建构主义学习观强调学生学习的主动建构性、社会互动性和情境性三方面。在素质教育的背景下, 教育应以学生为主体、教师为主导, 这也是新课程的基本理念。因此, 在数学定理的教学中, 课堂留白必不可少。我们相信, 每一位学生都可以探究出不同的性质及其证明, 于是教师可以让学生以小组为单位, 尝试探究双曲线中的几何性质, 然后进行小组汇报。这一过程, 不仅可以增强每一位学生的数学语言表达能力, 让学生思考起来, 并获得成就感和满足感, 还有助于培养当今社会所需的创新型人才。

其三, 强化数学应用, 促进学生理解。数学应用绝非局限在数学内部, 例如解题等, 我们还应重视数学外部的应用。数学来源于生活, 又服务于生活, 当教师成为实际生活的细心观察

者、深入思考者、耐心记录者后，自然会发现生活中处处有数学、处处可以用数学。双曲面反光镜作为一个贴近学生生活的例子，教师不仅可以和学生一起探究背后蕴含的光学性质，还可以和学生一起制作双曲面反光镜。在一看、一思、一做的过程中，学生对于双曲线的一些几何性质将会有更深入的理解，这对于未来的学习迁移也会有所帮助。

其四，关注数学文化，落实立德树人。在有限的教学时间内，教师可能无法一一列举如此之多的性质，因此教师可以借助微视频或纸质阅读材料，向学生展示各国数学家在双曲线几何性质上的研究成果，追溯知识源流，呈现多元文化。与此同时，数学家们对于数学真理的不懈追求与热爱，有助于激发学生学习数学的兴趣，体会数学背后的理性精神，最终达成立德树人根本任务。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 44.
- [2] 秦语真. HPM 视角下高三双曲线复习课教学案例研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2021: 36-37.
- [3] 阿波罗尼斯(朱恩宽, 等, 译). 圆锥曲线论[M]. 陕西: 陕西科学技术出版社, 2007: 103-104+106.
- [4] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 167.
- [5] Lambert, P. A. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1897: 117.
- [6] Purcell, E. J. *Analytic Geometry*[M]. New York: Appleton-Century-Crofts, 1958: 113.
- [7] Dowling, L. W. & Turneure, F. E. *Analytic Geometry*[M]. New York: Henry Holt and Company, 1914: 121-122.
- [8] Runkle, J. D. *Elements of Plane Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1888: 251-252.
- [9] Loomis, E. *Elements of Analytical Geometry and of the Differential and Integral Calculus*[M]. New York: Harper & Brothers, 1851: 87.
- [10] Puckle, G. H. *An Elementary Treatise on Conic Sections and Algebraic Geometry*[M]. London: Macmillan, 1870: 189-190+213-214.
- [11] Smyth, W. *Elements of Analytical Geometry*[M]. Boston: Sanborn, Carter and Bazin, 1855: 113-114.
- [12] Agnew, R. P. *Calculus: analytic geometry and calculus, with vectors*[M]. New York: McGraw-

- Hill, 1962: 387.
- [13] Robinson, H. N. *Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Ivison, Blakeman, 1860: 70-71.
- [14] Coffin, J. H. *Elements of Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Collins, 1881: 49.
- [15] Smith, E. S., Salkover, M. & Justice, H. K. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1954: 142-143.
- [16] Siceloff, L. P., Wentworth, G. & Smith, D. E. *Analytic Geometry: Brief Course*[M]. Boston: Ginn & Company, 1922: 126.
- [17] Hardy, A. S. *Elements of Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1892: 140+154.
- [18] Young, J. W., Fort, T. & Morgan, F. M. *Analytic Geometry*[M]. Boston: Houghton Mifflin Company, 1936: 152-153.
- [19] O'Brien, M. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry*[M]. Cambridge: Deightons, 1844: 138+146.
- [20] Fine, H. B. & Thompson, H. D. *Coordinate Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1914: 111-112.
- [21] Schmall, C. N. *A First Course in Analytic Geometry, Plane and Solid*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1921: 206.
- [22] Boyd, P. P., Davis J. M. & Rees, E. L. *A Course in Analytic Geometry*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1922: 185-186.
- [23] Newcomb, S. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. New York: Henry Holt and Company, 1884: 182.
- [24] Docharty, G. B. *Elements of Analytical Geometry, and of the Differential and Integral Calculus*[M]. New York: Harper & Brothers, 1865: 69-70.
- [25] Loomis, E. *The Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Harper & Brothers, 1877: 153.
- [26] Johnson, W. W. *An elementary Treatise on Analytical Geometry*[M]. Philadelphia: J. B. Lippincott & Co., 1869: 179-180.

- [27] Hann, J. *A Rudimentary Treatise on Analytical Geometry and Conic Sections*[M]. London: John, 1850: 91-92.
- [28] Salmon, G. *A treatise on conic sections: containing an account of some of the most important modern algebraic and geometric methods. 2d ed., rev. and enl*[M]. Dublin: Hodges and Smith, 1850: 195.
- [29] Riggs, N. C. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1911: 210-211.

美英早期三角学教科书中的三角形面积公式

钱益弘

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

三角形是平面几何最基本的图形之一, 如何计算三角形的面积从我们小学就开始学习, 对于这个问题的研究也有着十分悠久的历史。早在古埃及和巴比伦时期, 为了土地的划分和测量而产生了几何, 也就产生了三角形面积的测量和计算问题, 但是他们还没有得出三角形面积的准确公式^[1]。后来, 古希腊数学家海伦 (Heron, 约 10-约 75) 在他的《测地术》中给出了著名的已知三边求三角形面积的海伦公式, 中国古代数学家刘徽 (约 225-约 295) 利用出入相补的原理, 将三角形割补成一个长方形, 得到三角形的面积是底乘高的一半。伴随三角学的发展和成熟, 关于三角形面积公式及其变形越来越多, 三角形面积公式的证明与推导方法也各有不同。

通过梳理三角形面积公式的历史脉络, 我们将对求解三角形面积的不同已知条件及公式进行总结和分类, 对不同情况下三角形面积公式进行推导证明, 将三角形面积公式与三角学知识点联系起来, 为教学实践提供指导和建议。将数学史融入教学, 对学生核心素养的培养、知识运用能力的提升和数学思想的体会都有巨大的意义和作用。

鉴于此, 本文拟聚焦三角形面积公式, 对美英早期三角学教科书进行考察和研究, 试图回答以下问题: 三角形面积公式及其推导证明的方法有哪些? 三角形面积公式的应用有哪些? 这对素材我们今日的教学有何启示?

2 教科书的选取

本文选取了 1816-1955 年间出版的 108 种美英早期三角学教科书, 对于同一作者再版的教科书, 若无显著变动, 则视为同一本教科书, 选取最早的一本, 若有显著变动, 则视为不同的教科书。以 20 年为一个时间段, 教科书的分布如图 1 所示。

在涉及三角形面积的教科书中, 三角形的面积主要位于“解三角形”“斜三角形”“平面三

角形的面积”等章，部分教科书也会将此内容放在“测量”“实际应用”等章中介绍。

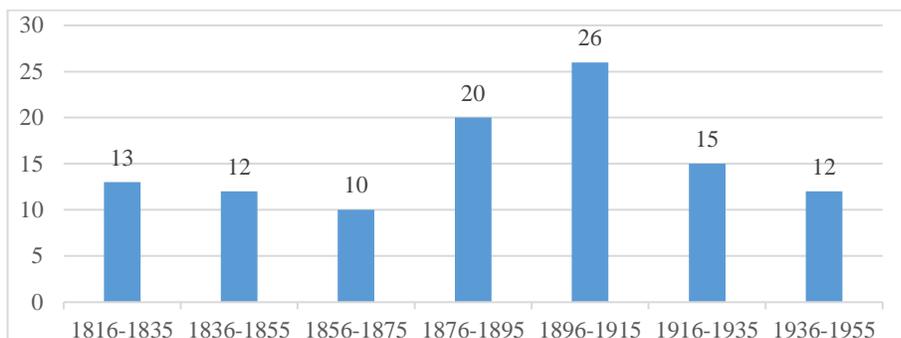


图 1 美英早期三角学教科书出版时间分布

3 三角形面积公式

经考察，美英早期三角学教科书中三角形面积公式的形式多种多样，主要情况可以分为以下六种。除了海伦公式涉及四种方式的证明以外，其他公式的证明方法都基本统一。

3.1 已知底边与高

在美英早期三角学教科书中，三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ch$ 常作为几何中的已知结论直接给出，但也有教材对其作了证明，例如，Harding & Turner (1915) 从矩形面积出发，推导出任意三角形的面积公式。^[2]如图 2，在三角形 ABC 的底边 AB 上作矩形 $ABEF$ ，记三角形 ABC 的面积为 S ，易知

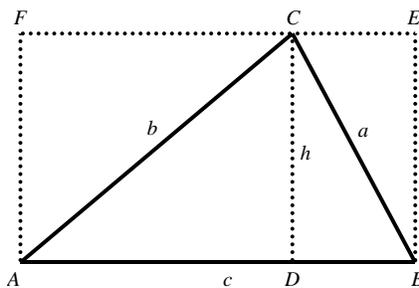


图 2 已知底边与高

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}S_{\square ADCF} + \frac{1}{2}S_{\square DBEC} = \frac{1}{2}S_{\square ABEF} = \frac{1}{2}ch \quad (1)$$

上述公式已出现在古巴比伦、中国、印度的数学文献之中。

3.2 边角边

仍如图 2，由正弦定义知 $h = b \sin A$ ，代入 (1) 得：

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A \quad (2)$$

同理可得

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C。$$

上述公式最早出现在 15 世纪德国数学家雷吉奥蒙塔努斯 (Regiomontanus, 1436-1476) 的《论各种三角形》中。

3.3 角边角或角角边

由正弦定理知 $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$ ，代入 (2) 得：

$$S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin(A+B)} \quad (3)$$

同理可得

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin(A+C)}。$$

3.4 边边边

已知三边，三角形面积为

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (4)$$

其中 $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 。公式 (4) 最早出现在古希腊数学家海伦的《测地术》中，海伦又在

《测量仪器》和《度量数》中对其加以证明，故后人称之为海伦公式。

在早期三角学教科书，关于海伦公式的证明主要有四种。

证法 1：利用勾股定理

Day (1815) 在他的《平面三角学》中用几何学知识详细证明了海伦公式。^[3]如图 3，设 $AD = d$ ，由勾股定理，有

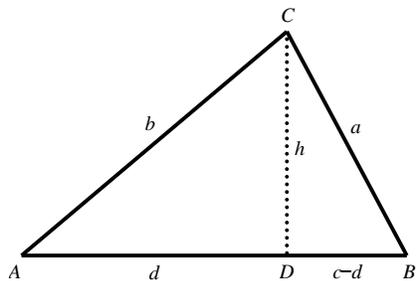


图 3 海伦公式证法 1

$$a^2 = h^2 + (c-d)^2 = (b^2 - d^2) + (c-d)^2 = b^2 + c^2 - 2cd,$$

于是得

$$d = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

再利用勾股定理得

$$h^2 = b^2 - d^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2},$$

化简得

$$h = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2c},$$

代入 (1) 得

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

令 $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, 即得公式 (4)。

上述证明并未用到三角学的相关知识, 只是反复利用勾股定理和底-高面积公式, 故很少为早期三角学教科书所采用, 到了 20 世纪, 彻底被教科书所抛弃。

证法 2: 利用半角公式和余弦定理

Rothrock (1910) 在《平面与球面三角学原理》中的证明可以作为这种证明方法的典型, 他在半角公式的论述中利用余弦定理引入了半周长的概念, 进而简洁地证明了海伦公式。^[4] 美英早期大部分教科书都选用这种证明方法。

由倍角公式, 有

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \quad (5)$$

因 $0^\circ < A < 180^\circ$, $0^\circ < \frac{A}{2} < 90^\circ$, 故 $\sin \frac{A}{2} > 0$, 由半角公式和余弦定理, 有

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad (6)$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad (7)$$

代入 (5), 即得公式 (4)。

证法 3: 利用余弦定理

Smail (1952) 在他的《平面和球面三角学》中选择从性质出发, 直接利用余弦定理证明海伦公式。^[5]

将 (2) 两边平方得

$$S^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 A = \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 A) = \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 + \cos A)(1 - \cos A),$$

由余弦定理得

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4} b^2 c^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\ &= \frac{1}{16} (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\ &= p(p-a)(p-b)(p-c), \end{aligned}$$

故得公式 (4)。这里, 教科书实际上得到了用三边表达的正弦公式

$$\sin A = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}。$$

较之证法 2, 证法 3 本质上也是用三边表示出 $\sin A$, 只是推导过程略有不同, 但采用的教科书较少, 因为大多数教科书在面积公式的内容前都涉及半角公式, 而很少利用余弦定理直接推导 $\sin A$ 的表达式。

证法 4: 利用半径正切公式

Kenyon & Ingold (1913) 在《三角学》中利用分割法得到关于内切圆半径的三角形面积公式, 进而推导出海伦公式。^[6]这种证明方法主要出现在 20 世纪的美英教材中。

如图 4, 作三角形 ABC 的内切圆 O , 过内心 O 作三边的垂线, 垂足分别为点 D , E 和 F 。

设 $AE = AF = x$, $BD = BF = y$, $CD = CE = z$, 内切圆半径为 r , 则有

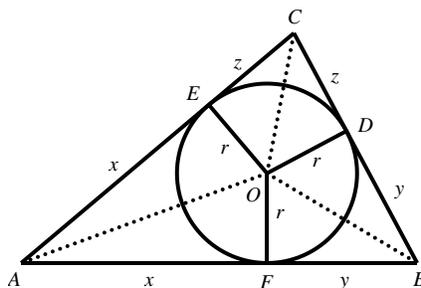


图 4 海伦公式的证法 4

$$x + y + z = p,$$

$$x = p - (y + z) = p - a,$$

由图 3 可知

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{r}{x} = \frac{r}{p-a} \quad (8)$$

由半角公式, 有

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}},$$

由 (6) 和 (7) 得

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{1}{p-a} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad (9)$$

比较 (8) 和 (9) 得

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad (10)$$

于是有

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3.5 三角或三边与外接圆半径

Seaver (1889) 在推导出公式 (3) 后, 进一步对其进行变形。^[7]由正弦定理, $c = 2R \sin C$, 代入 (3) 得

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \quad (11)$$

从而得到以三个角与外接圆半径表达的面积公式。

类似地，他还将 $\sin A = \frac{a}{2R}$ 代入公式 (2)，得到以三边和外接圆半径表达的面积公式

$$S = \frac{abc}{4R} \quad (12)$$

3.6 半角

Miller (1894) 利用半角公式的特点，给出了具有对称性质的三角形面积的三个公式。^[8]

类似于公式 (6)，我们还可以得到

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

于是得

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \\ &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}, \end{aligned}$$

由海伦公式，有

$$S^2 = pabc \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (13)$$

类似地，可得

$$S = \frac{abc \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{p} \quad (14)$$

$$S = p^2 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \quad (15)$$

4 三角形面积公式的应用

美英早期教科书并没有对三角形面积公式的应用做出总结和归纳，主要在计算其他图形面积和三角形相关量时用到了三角形面积公式。

4.1 其他图形的面积

在计算其他多边形面积时，经常使用的方法就是将图形分割成若干个三角形，然后利用三角形的面积公式分别进行计算后再求和，由此可以得到一些特别的面积公式。

例如 McCarty (1920) 在《平面三角学原理》中利用三角形面积公式推导了一般正多边形的面积公式。^[9]如图 5，对于正 n 边形，连结中心和 n 个顶点将它分割成 n 个全等的等腰三角形。设正 n 边形的外接圆半径为 r ，面积为 S ，则由三角形面积公式知

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}r^2 \sin \frac{360^\circ}{n},$$

求和得

$$S = nS_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}r^2 n \sin \frac{360^\circ}{n} \quad (16)$$

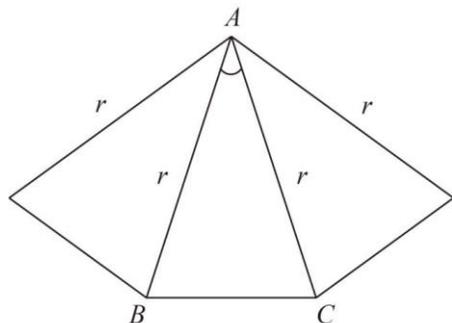


图 5 正多边形面积

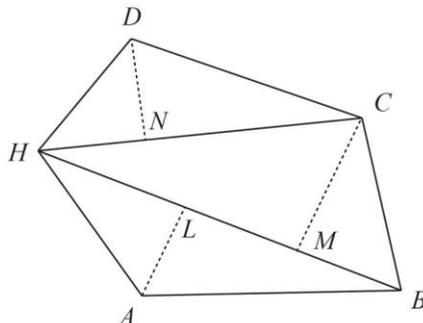


图 6 分割法求不规则图形面积

Day (1815) 在《平面与球面三角形原理》中利用三角形面积公式计算不规则图形的面积。^[3]通过连结对角线的方法，将不规则多边形分成若干个三角形，则此图形的面积等于若干个三角形面积的和。如图 6，对于多边形 $ABCDH$ ，连结对角线 CH ， BH ，以 A ， C ， D 为顶点分别作高 AL ， CM ， DN 。由三角形底-高面积公式，有

$$S = \frac{1}{2}HC \times DN + \frac{1}{2}HB(AL + CM)。$$

但是这种方法不太便于实际的测量和计算，Oliver, Wait & Jones (1881) 使用了极坐标系计算不规则图形的面积。^[10]如图 7，有多边形 $A_1A_2 \cdots A_n$ ，点 A_1, A_2, \dots, A_n 的极坐标分别是 $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2), \dots, (r_n, \theta_n)$ 。记不规则图形的面积为 S ，由等面积法，有

$$S = \frac{1}{2}(r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \cdots + r_n r_1 \sin(\theta_1 - \theta_n)) \quad (17)$$

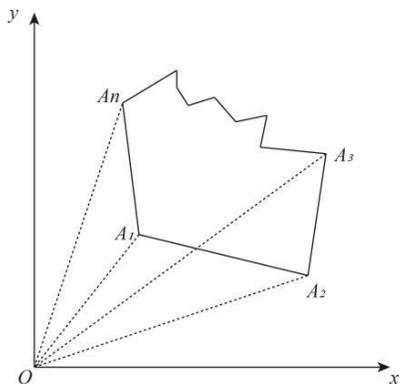


图 7 极坐标求不规则图形面积

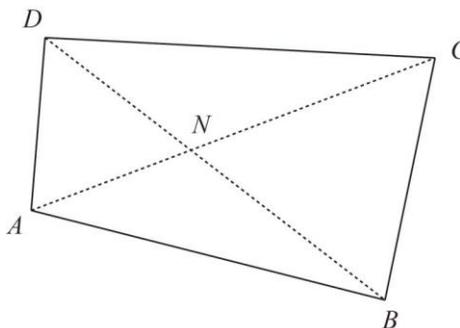


图 8 一般四边形面积

对于四边形，Day（1881）指出可以利用对角线的长度计算它的面积。^[3]如图 8，对于四边形 $ABCD$ ，连结对角线 AC 、 BD ，交点为 N ，相交所得的锐角或直角记为 $\angle N$ ，记四边形面积为 S 。由三角形面积公式可知，可以用两边长与夹角表示三角形的面积。而同角、补角的正弦值都相等，则有

$$S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} AN \times BN \times \sin N ,$$

同理可得

$$S_{\triangle BCN} = \frac{1}{2} BN \times CN \times \sin N ,$$

$$S_{\triangle CDN} = \frac{1}{2} CN \times DN \times \sin N ,$$

$$S_{\triangle DAN} = \frac{1}{2} DN \times AN \times \sin N ,$$

则有

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle ABN} + S_{\triangle BCN} + S_{\triangle CDN} + S_{\triangle DAN} \\ &= \frac{1}{2} (AN \times BN + BN \times CN + CN \times DN + DN \times AN) \times \sin N \\ &= \frac{1}{2} (BN \times AC + DN \times AC) \times \sin N \\ &= \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin N \end{aligned} \tag{18}$$

更特别的，对于圆的内接四边形，Lock（1885）在《初等三角论》中利用三角形面积公式和余弦定理推导出类似于海伦公式的面积公式。^[1]如图 9，四边形 $ABCD$ 是圆的内接四边形，四条边长依次记为 a ， b ， c ， d ，连结 BD ，记四边形的面积为 S 。由三角形面积公式，有

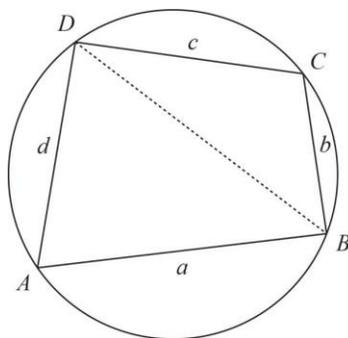


图 9 圆的内接四边形面积

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ad \sin A,$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}bc \sin C,$$

则有

$$S = \frac{1}{2}(ad \sin A + bc \sin C) = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin A \quad (19)$$

利用余弦定理, 求得

$$\sin A = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad + bc} \quad (20)$$

其中, $p = \frac{1}{2}(ad + bc)$ 。将 (20) 代入 (19) 得

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(ad + bc) \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad + bc} \\ &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \end{aligned} \quad (21)$$

4.2 三角形的高

Chauvenet (1851) 在《平面与球面三角形论》中利用面积公式给出了三角形高的计算公式和一些性质。^[12] 设 h 是三角形 ABC 边 c 上的高, 由三角形关于底与高的面积公式, 知

$$h = \frac{2S}{c} \quad (22)$$

再由海伦公式知, 三角形高的公式还可表示为

$$h = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} \quad (23)$$

设三角形三边上的高分别为 h_1, h_2, h_3 , 由公式 (22) 可得

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{p}{S} \quad (24)$$

4.3 相关圆的半径

同样地, 我们可以通过三角形面积公式反过来推导相关圆的半径公式, 主要包括内切圆半径、外接圆半径与旁切圆半径。比如 Hall & Frink (1910) 的《平面与球面三角学》, 先利用其他方法证明海伦公式, 再结合 $S = pr$, 反过来推导三角形内切圆半径 r 的公式^[13]

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad (25)$$

或者, Chauvenet (1851) 结合了 $S = pr$ 和公式 (15), 得到了不一样的内切圆半径公式^[12]

$$r = p \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} \quad (26)$$

对于三角形外接圆半径 R , 由公式 (12) 反向推导得

$$R = \frac{abc}{4S} \quad (27)$$

对于公式中的面积 S , 可以带入不同的公式从而得到不同的半径公式。例如 Chauvenet (1851) 进一步结合公式 (14), 得到^[12]

$$R = \frac{p}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \quad (28)$$

对于旁切圆的半径, Murray (1906) 在《给大学生和中学生的平面三角形》中利用等面积法推导出旁切圆的半径。^[14]如图 10, 三角形 ABC 与 BC 相切的旁切圆半径记为 r_a , 从圆心 Q 作三边或其延长线的垂线 QL, QM, QN 。记三角形 ABC 的面积为 S , 则有

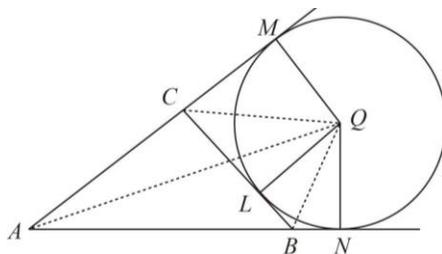


图 10 旁切圆半径

$$S_{\triangle ABQ} + S_{\triangle ACQ} - S_{\triangle BCQ} = S,$$

由三角形面积公式, 有

$$\frac{1}{2}r_a c + \frac{1}{2}r_a b - \frac{1}{2}r_a a = S,$$

$$\frac{1}{2}(b+c-a)r_a = S,$$

$$(p-a)r_a = S,$$

则有

$$r_a = \frac{S}{p-a} \quad (29)$$

同理可得

$$r_b = \frac{S}{p-b},$$

$$r_c = \frac{S}{p-c},$$

则有性质

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p}{S} \quad (30)$$

5 结论与启示

综上所述, 美英早期三角学教科书关于三角形面积公式大致可以分为六种, 分别是底边与高、边角边、角边角或角角边、边边边、三边或三角与外接圆半径、半角。特别地, 已知三边情况下的三角形面积公式称为海伦公式, 这种公式的证明方法主要分成四种。关于三角形面积公式的应用, 主要集中在计算其他图形的面积、计算三角形的高的表达式、计算相关圆半径的表达式三个方面。

现行人教 B 版教科书在正弦定理的内容里证明了公式 (2), 并在拓展阅读模块讲述了秦九韶的“三角求积术”(化简后也称海伦公式)。与美英早期三角学教科书不同的是, 人教版教科书没有提前引入半周长的概念, 所以对于秦九韶“三角求积术”的证明采用的也是对公式 (2) 两边平方后利用余弦定理将 $\sin A$ 用三边表示的方法, 并且也没有化成海伦公式那样简单的形

式。

现行沪教版教科书中三角形面积公式的内容基本与人教版一致，在学习正弦定理时证明了公式 (2)，并在探究与实践补充了“海伦公式与‘三斜求积’公式”，稍有不同的就是沪教版给出了海伦公式的相关内容。从这两版教科书和美英早期三角学教科书的对比中我们也能发现，美英早期三角学教科书更关注公式的分类是否全面，而现行的教材更关注公式的应用价值，所以舍弃了繁琐的公式，在解三角形的过程中发现求解三角形面积的情形都是可以相互转化的，所以学生不需要记住所有的三角形面积公式，而是要了解其推导的过程和公式的本质是什么。

美英早期三角学教科书中三角形面积的内容为今日的教学提供了丰富的材料和思想启迪。

(1) 将数学史融入课堂教学。通过梳理关于三角形面积的发展脉络，关键的人物、公式与著名的定理都能引起学生探究和学习的兴趣，在历史上不同时期有很多数学家从不同的角度用不同的方法对公式进行证明，从而提出了很多不同的公式，但也有很多公式却因应用范围限制或者形式太过复杂而被舍弃。教师可以借助微视频或讲述的方式，让学生了解这一段探索改进、创新发展的历史，让学生感受到数学的思想与精神。此外，从概念图中可以看出（图 11），三角形面积公式能在学习了正弦余弦及其相关定理以后变得更加丰富起来，形式更加多样。学生在学习不同三角学公式的过程中提高对三角学知识的理解与应用能力。

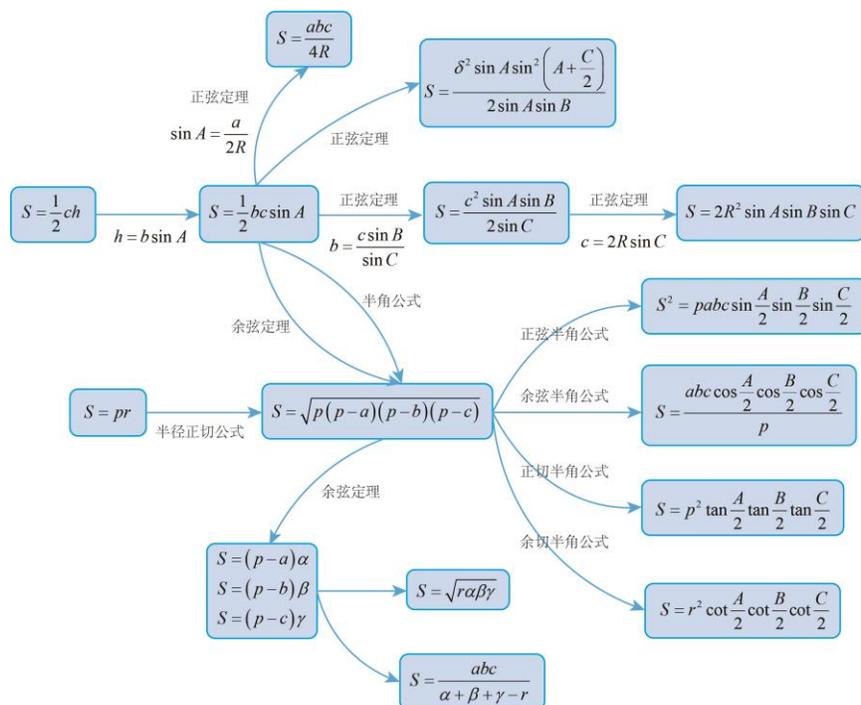


图 11 三角形面积公式概念图

(2) 将公式分类思想运用于教学实践。在探究三角形面积公式时，可以在学习了正弦定理和余弦定理的基础上，先让学生自发地探究，然后教师再对学生发现的公式进行总结与补充。比如学生没有对已知三边的情况进行探究，就可以从边和角的角度去提示学生如何对公式所对应的情况进行分类：已知两条边及其夹角的情况和已知两个角和一条边的情况都已经推导出来了，那么还有没有更多的情况？等，这一过程有助于培养学生的逻辑思维能力和分类讨论的思想方法。

(3) 将几何学与三角学相联系。对于海伦公式的证明，教师可以利用两种不同的证明方法。几何证明可以让学生感受到其推导证明过程的本质就是勾股定理的应用，运用熟悉的知识可以让学生更好的掌握公式和应用公式；利用三角学的知识进行证明可以将教材的前后知识进行联系，形成一个整体，有助于体现三角学中定理的应用价值。与几何法相比，后者的证明思路更加清晰和明确，有利于培养学生的逻辑推理能力，锻炼学生应用公式和定理的能力，能让学生体会到三角学存在的价值和意义。

参考文献

- [1]王治盟, 高桂凤. 三角形面积的发展过程[J]. 中学数学研究, 2020(10): 37-41.
- [2] Harding, A. M. & Turner, J. S. *Plane Trigonometry*[M]. New York: G. P. Putnam's Sons, 1915: 5-6.
- [3] Day, J. *A Treatise of Plane Trigonometry*[M]. New Haven: Howe & Spalding, 1815: 127-129.
- [4] Rothrock, D. A. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Co., 1910: 77-81.
- [5] Smail, L. L. *Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1952: 177-179.
- [6] Kenyon, A. M. & Ingold, L. *Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Co., 1913: 42.
- [7] Seaver, E. P. *Elementary Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York & Chicago: Taintor Brothers & Co., 1889: 143-145.
- [8] Miller, E. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1894: 36-37.

- [9] McCarty, R. J. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. Chicago: American Technical Society, 1920: 51.
- [10] Oliver, J. E., Wait, L. A. & Jones, G. W. *A Treatise on Trigonometry*[M]. Ithaca: Finch & Apgar, 1881: 81.
- [11] Lock, J. B. *A Treatise on Elementary Trigonometry*[M]. London: Macmillan & Co., 1885: 236-237.
- [12] Chauvenet, W. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Philadelphia: Hogan, Perkins & Co., 1851: 75-76.
- [13] Hall, A. G. & Frink, F. G. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1910: 55-56.
- [14] Murray, D. A. *Plane Trigonometry for Colleges & Secondary Schools*[M]. New York: Longmans, Green & Co., 1906: 120.

教学实践

经历抽象过程，感悟理性精神

——HPM 视角下的《古典概率模型》教学设计

蔡真逸¹，钱秦²，雷沛瑶³

(1. 上海市曹杨中学, 上海 200333; 2. 华东师范大学教师教育学院, 上海 200062;

3. 华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

著名数学家、数学教育家弗赖登塔尔 (H. Freudenthal, 1905-1990) 认为, 数学是现实世界的抽象反映和人类经验的总结, 应该通过真实问题抽象出相关数学教学内容^[1]。对于《古典概率模型》一课, 在传统的教学中, 教师更多关注古典概型的特征阐述和计算结果, 对其模型的构建过程及集合语言描述往往一带而过。在学科育人的视角下, 这些教学方式较难使学生主动经历数学抽象过程, 较难帮助学生系统性认知概率, 不利于培养数学抽象、数学建模等核心素养。回溯概率论的发展历史, 我们发现概率的发展史与人们从直观感知到理性抽象的数学化的过程不谋而合。鉴于此, 我们尝试从 HPM 视角组织古典概率模型的教学, 借助历史相似性, 引导学生经历数学抽象的过程, 体会概率论发展的历程与意义, 发展模型思想, 逐步感悟数学中的理性精神^[2], 发挥学科德育功效。

1 教学内容分析

1.1 教材分析

本课时是沪教版新教材第 12 章《概率初步》的第 2 节“古典概率”的第 1 课时。在前一节“随机现象与样本空间”中, 学生学习了随机现象、随机试验, 用集合语言理解样本空间、基本事件与事件的概念。

本节课基于对基本事件的个数与出现可能性的探究, 抽象出一类重要的概率模型; 重点学习古典概率模型的概念与概率计算, 理解古典概率模型的特征与概率性质, 发展集合语言的表达能力, 加深对随机现象的认识, 提升数学抽象与数据分析等核心素养, 为进一步学习概率

打下基础。

其次，本章首语指出“在这一章中，我们将理解概率的意义，……，和学习以往的内容不同，不仅要换一种思路，而且要换一套语言。”其中，“思路”指的是概率论是研究不确定现象的数学分支；结合概率的公理化定义，可以知道“语言”是指用集合语言对概率中相关要素进行表述。因此，从集合视角描述概率是高中阶段学习概率单元的学习暗线，为大学阶段进一步抽象概率提供了学习基础。

1.2 教学史料分析

梳理概率论的历史发现^[3-5]，人们对于概率的认知历程大体可以划分为以下三个阶段。

第一阶段是基于掷硬币、掷骰子等机会游戏的直观感知阶段。古典概率最直接起源于人们对机会游戏的研究和思考。机会游戏是所谓靠运气取胜的游戏，如掷骰子、玩纸牌等。希罗多德（Herodotus, 公元前 5 世纪）在《历史》中记载着：早在公元前 1500 年，埃及人为了忘却饥饿，经常聚集在一起掷骰子。大约从公元前 1200 年起，人们把纯天然的骨头改进成了立方体的骰子，它就是游戏中常用的随机发生器。现在常见的相对面点数之和为 7 的骰子大约产生于公元前 1400 年的埃及。《神曲》“炼狱篇”（1307-1321）中记录了这样一个游戏：一人同时掷三个骰子，另一人猜点数和（3-18）。这个游戏常令佛罗伦萨贵族们感到困惑，因为他们认为 9、10、11、12 都有六种组合，可实际进行游戏的过程中，得到 10 和 11 的次数总是超过 9 和 12。

第二阶段是对概率模型的抽象阶段。1525 年卡丹（G. Cardano, 1501-1579）的《机会游戏之书》标志着第一次对概率进行纯数学的处理和思考。他将“机会”定义为有利场合数与所有可能的结果数之比，但没有对适用的情形进行归纳。1652 年，法国贵族、赌博专家德·梅赫（de Mere, 1607-1684）向当时著名的数学家帕斯卡（B. Pascal, 1623-1662）询问了著名的赌徒分金问题：甲乙两人玩一种游戏，事先约定先赢三局者胜。但当甲赢了 2 局，乙赢了 1 局时，游戏中止了。试问此时赌金该如何分配？1654 年费马（P. de Fermat, 1601-1665）和帕斯卡通信讨论并各自用不同的方法解决赌徒分金问题。费马假设赌局继续进行，列出所有可能出现的情况进行讨论，帕斯卡的解法则应用了期望值的思想。概率史界认为，帕斯卡与费马的通信标志着概率论的诞生。1657 年，荷兰数学家惠更斯（C. Huygens, 1629-1695）出版了第一部概率论著作《论赌博中的计算》。该书第一次将概率论建立在公理、命题和问题上而构成一个较完整

的理论体系，第一次对以前概率论知识进行系统化、公式化和一般化地处理。1812 年拉普拉斯 (P. S. Laplace, 1749-1827) 在《概率的分析理论》明确给出古典概率模型的定义：事件 A 的概率等于一次试验中事件 A 的可能结果数与该事件中所有可能结果数之比。在 16-18 世纪，许多著名的数学家都对概率论给予了极大的关注，如伯努利 (J. Bernoulli, 1654-1705)、贝叶斯 (T. Bayes, 1702-1761)、勒让德 (A. M. Legendre, 1752-1831)、棣莫弗 (A. de Moivre, 1667-1754)。这一阶段众多数学家从不同角度对相关概率问题进行计算，归纳计算的前提假设，抽象出相关概率模型。

第三阶段为概率的公理化阶段。1933 年柯尔莫格罗夫 (A. N. Kolmogorov, 1903-1987) 提出了概率公理化定义。他将概率定义为在样本空间的某些子集组成的事件域 Γ (事件域满足： $\Omega \in \Gamma$ ；若 $A \in \Gamma$ ，则 $\bar{A} \in \Gamma$ ；若 $A_n \in \Gamma$ ， $n=1,2,\dots$ ，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma$) 上的函数，且满足：非负性： $P(A) \geq 0$ ；正则性： $P(\Omega)=1$ ；可列可加性：若 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 两两互斥，则 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ 。

基于概率的发展历程，笔者尝试以“直观感知——模型建构——集合语言描述”作为本节课“古典概率模型”的教学主线，帮助学生逐步体会从几千年前的“机会游戏”到 1812 年拉普拉斯归纳出卡丹所定义的“机会”计算的假设前提特征，并给出古典概率模型的思考过程。感受概率研究从直观感知走向理性分析的抽象过程，同时为大学阶段的概率论学习打下基础。

2 教学设计与实施

2.1 教学目标

- 1、借助具体实例，归纳并理解组成古典概率模型的两个基本条件，进一步理解基本事件与样本空间的概念，发展数学抽象能力；
- 2、借助集合语言，从特殊到一般，概括出古典概率模型中概率计算公式，应用此公式计算简单的概率问题，发展数据分析能力；
- 3、结合数学史料，体会概率的应用性，逐步感悟概率思想。

2.2 教学重难点

- 1、教学重点：古典概率模型概念的理解与计算；
- 2、教学难点：古典概率模型概念的归纳与辨析。

2.3 教学过程与课堂实录

（一）创设情景，引入课题

[活动 1] 在下列游戏中，你更愿意与老师玩哪一项游戏，请进行讨论并说明理由。

- （1）抛掷一次均匀质量的硬币，若掷出正面朝上，则你胜；
- （2）掷一颗均匀质量的骰子，若掷出的点数是合数，则你胜；
- （3）掷两颗均匀质量的骰子，若向上点数之和为 7 点，则你胜。

生 1：我们是准备计算三个游戏的获胜可能性，即获胜概率，来选择与老师玩哪一个游戏。

师：很好，大家是通过获胜概率的计算来进行判断。第三个游戏也是卡丹在《机会游戏之书》中记载的游戏。那么这三个游戏的获胜概率分别是多少呢？我们计算的理论依据又是什么呢？这就是我们今天所要学习的内容。

【设计意图】 借助游戏的讨论引入课题，引导思考两个游戏中的获胜概率，激发学习兴趣。

（二）形成概念，理解辨析

[活动 2] 从随机现象角度分析，这第一、第二个游戏均是一个随机试验，请说出这两个随机试验的基本事件和样本空间。

生 2：第 1 个游戏的基本事件为正面朝上、反面朝上，样本空间为这两个基本事件所组成的集合；

生 3：第 2 个游戏的基本事件为点数出现 1、质数、合数，样本空间为这三个基本事件所组成的集合；

生 4：第 2 个游戏的基本事件为点数出现 1 点、2 点、……、6 点，样本空间为这六个基本事件所组成的集合。

师：在第二个游戏中，同学们基于不同的观察角度给出了不同的基本事件和样本空间，这都是正确的，但哪一个样本空间便于我们计算呢？请大家讨论一下两个问题。

[问题 1] 基于经验，能否说出这两个游戏的获胜概率？

[问题 2] 请相互讨论，思考在运算中你的前提假设是什么？能否归纳出这两个随机试验的基本事件具有怎么样的共同特征？

生 5：概率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$ 。

生 6：我的计算假设是所有的基本事件是等可能发生的。

生 7：我觉得应该还要加上基本事件个数是有限的，否则在计算时，分母就没有办法确定了。

生 8：我们认为这两个随机试验的基本事件具有有限性与等可能性。

师：很好，这样我们就将满足这两个特征的随机事件抽象成一个数学模型，即古典概率模型。

定义：如果一个随机试验满足下面两个条件：（1）包含有限个可能出现的结果（基本事件）；（2）这些结果出现是等可能的，那么这样的随机试验称为古典概率模型。

[问题 3] 古典概率模型的样本空间具有怎样的性质？

生 9：古典概率模型的样本空间是一个有限且等可能的集合。

师：这里需要说明的是，现实生活中硬币的两面和骰子点数朝上出现不一定是等可能的，必须要求硬币和骰子均匀质地，且投掷过程充分随机，但这是理想化的，因此不要轻易答应别人进行打赌。在数学环境下，我们都假设抛掷硬币和骰子结果是等可能的。

【设计意图】从集合语言进一步剖析两个游戏中的概率模型，基于直观的概率运算，组织学生讨论说出运算假设前提，用数学语言解释直觉，总结出两个游戏中基本事件的共同特征，归纳出古典概率模型的定义，逐步从直观感知走向理性分析，发展数学抽象能力。

[问题 4] 基于古典概率模型的定义，判断以下随机现象是否为古典概率模型，并说明理由。

- （1）连续掷一颗骰子，直至点数 6 出现；
- （2）明天上海是否下雨；
- （3）向一面墙随机掷飞镖。

【设计意图】通过辨析活动，进一步辨析认识古典概率模型组成的两个条件，并了解并不是所有概率模型都是古典概率模型，体会抽象出古典概率模型的意义。

[活动 3] 基于活动 2，如何计算古典概率模型中随机事件 A 的概率 $P(A)$ ？

生 10: $P(A)$ 为随机事件 A 中所含的基本事件数与样本空间中所含的基本事件数之比。

小结: 古典概率模型中随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, 其中 $|A|$ 为事件 A 中的基本事件数, $|\Omega|$ 表示样本空间中的基本事件数。

师: 同学们基于讨论, 总结归纳出了古典概率模型中的概率计算公式。回顾历史, 实际上在 1525 年卡丹就在其《机会游戏之书》中给出了“机会”的定义, 与我们所归纳出的计算公式不谋而合, 但是直至 1812 年拉普拉斯在《概率的分析理论》中才给出古典概率模型的定义, 并指出只能在古典概型中才能使用这一公式。这就是数学家们数学抽象的过程, 这是从直观感知逐步到理性分析的过程, 是用数学眼光、数学语言观察与表达客观世界的过程。今天同学们也是凭借自己的能力走过了数学家们百年的思考过程, 值得点赞。

[问题 5] 必然事件和不可能事件的概率分别为多少?

[问题 6] 设 A 是一个事件, 则其概率 $P(A)$ 的取值范围是什么?

生 11: 令 $A = \Omega$, 则必然事件的概率为 1; 令 $A = \emptyset$, 则不可能事件的概率为 0。

生 12: 由于 $A \subseteq \Omega$, 所以 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

概率性质 1: 必然事件的概率为 1, 不可能事件的概率为 0, 即 $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$ 。

概率性质 2: 设 A 是一个事件, 则 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

师: 在概率学习中, 某事件的出现是不确定的, 但是它出现的可能性是确定的。因此, 概率论能帮助我们在自然科学、社会科学、选举、审判等方面进行决策, 更加理性地观察并思考世界, 拉普拉斯就说过“生活中最重要的问题, 其中绝大多数在实质上只是概率问题”, 这就是研究概率的意义与价值。

【设计意图】 基于活动 2 的概率运算, 从特殊到一般, 逐步归纳出古典概率模型中的概率计算公式, 并应用公式得到两个概率性质; 结合数学家的工作, 感悟数学研究的方法与思想, 体会数学抽象的意义, 感知概率在现实生活中的应用价值。

(三) 例题讲解, 巩固新知

例 1: 掷一颗均匀的骰子, 计算下列事件的概率

- (1) 出现的点数大于 4;
- (2) 出现 7 点;
- (3) 出现的点数小于 7。

小结：在计算概率时，首先判断是否为古典概率模型，其次计算出样本空间和事件中所含的基本事件数。

例 2：同时掷两颗均匀的骰子，求

- (1) 所得点数相等的概率；
- (2) 所得点数都是偶数的概率；
- (3) 所得点数之和为 7 的概率。

[问题 7] 掷两颗均匀质量的骰子，点数之和为多少时出现概率最大？请说明理由。

追问 1：那么我们能否用点数之和组成的样本空间进行计算？为什么？

追问 2：在引入的第二个游戏中，我们能否选取 1、质数、合数组成的样本空间进行计算？为什么？

【设计意图】通过例 1、例 2 的分析，从一维向二维发展，进一步掌握古典概率模型的概念与概率计算公式，在枚举的过程中，发展数据分析能力。结合问题 7 及两个追问，呼应活动 1，进一步认识等可能性的样本空间。

例 3：概率论起源于两位数学家费马与帕斯卡“赌徒分金问题”的讨论，他们思考如果 A、B 两人下棋，每局两人获胜的可能性一样。若有一个两人进行一次三局两胜制的比赛，胜者赢得 100 元的奖金。但当第一局 A 取胜后，因有要事退出并终止了比赛，那么如何分这 100 元才公平呢？

生 13：设 A、B 胜分别记为 A、B，则后两局的样本空间是 $\Omega = \{A, BA, BB\}$ ，但我无法判断它是否是等可能的。

生 14：我认为生 13 的所写的样本空间中的基本事件不是等可能的，因为 A、B 两人的获胜可能性一样，那么第二局 A 获胜的可能性为 50%，如果进入到第三局，那么再是 A 获胜的可能性是在第二局中 B 获胜的 50% 中的 50%，显然 A 与 BA 不是等可能的。

生 15：我和生 14 的想法一致，既然看最后两局，那么就模拟他们进行了两局游戏，从而我写出的样本空间是 $\Omega = \{AA, AB, BA, BB\}$ ，这样这四个基本事件就是等可能的了，从而整盘游戏 A 获胜的概率为 $\frac{3}{4}$ ，所以将 100 元按 A、B 获胜的概率分配，也就是 A 分 75 元，B 分 25 元比较公平。

小结：在研究古典概率时，我们所写的基本事件必须是等可能的。

师：大家的解法也正是数学家费马研究此问题时所给出的解法。实际上，费马、帕斯卡、惠更斯等数学家从不同角度研究均得到了这一答案，该问题背后的规律拉开了概率论的研究。

【设计意图】回答本单元第一节所提问题，复制式运用数学史料，进一步体会等可能性，并抛出概率中还有其余模型，引发学生后续学习的兴趣。

（四）课堂小结，作业布置

课堂小结：本节课我们从具体实例入手，归纳得到了古典概率模型的定义以及概率计算公式，了解了其样本空间是有限且等可能的，并用集合语言进行描述。

作业：练习 12.2（1）

课后拓展：

（1）意大利著名诗人但丁（A. Dante, 1265-1321）在《神曲》的“炼狱篇”中提到了流行于意大利的一种机会游戏：一人同时掷三个骰子，另一人猜点数和。佛罗伦萨贵族们认为 9, 10, 11, 12 都有六种组合。你觉得对吗？请说明理由。

（2）请查阅相关资料，了解概率论的发展史，选取一则或多则概率历史名题，对其解法及影响进行鉴赏，谈谈自己对概率的认识与感悟。

【设计意图】通过总结，回顾本节课的两个主要学习内容，并结合历史困惑，顺应给出拓展任务，激发部分学生的数学探索欲望，也为后续学习等可能性（续）、频率与概率、独立事件等内容做铺垫。

2.4 课后反馈

课后，我们通过问卷的形式进一步收集到全班 43 名学生的反馈信息。知识掌握上，所有同学均表示“听懂了这节课的内容”。关于古典概型的概念辨析的三个问题，75.1%的同学的判断完全正确。错误的回答大部分也提到了古典概型的两个特点，说明绝大多数的同学已经理解等可能性和有限性的特点，可结合问题情境进行辨析时存在困难。86%的同学能够利用计算公式、遵循规范的步骤，顺利地解决问题。97.7%的同学认为课堂中融入的数学史，有助于古典概型的理解。从反馈结果来看，本节课的教学目标基本实现，但对于样本空间的构成和事件的等可能性等单元教学的难点，后续还需持续关注。

当问及“你喜欢这节数学史融入课堂教学的课吗？”时，高达 88.4%的学生表示非常喜欢。

93.4%的学生希望老师可以在今后的数学课堂中融入数学史。我们也考察了学生在这节课印象最深的部分，学生的典型回答如下：“课堂开始时，老师和我们玩的游戏，拉近了师生距离，新颖又有趣。”、“历史上的数学名题，因为这使我对数学的发展有了进一步的认识。”有学生受到数学家启发并写下：“数学家们提出的问题使我印象深刻，例如意大利数学家卡丹在问题中思考，从而形成了概率论的初步知识。如果我们也可以平时多思考，给自己提提问题，说不定将来就成为数学家呢？”可见，大部分学生都展现出了对数学史的积极态度。

3 教学反思

在教学中，我们不仅要让学生掌握相关数学知识，还要培养学生的数学核心素养，提升整体学习能力^[6]。基于 HPM 课例评价框架^{[7][8]}，从内容呈现、认知需求、学习机会、学生表现、评价运用和育人价值等角度对本节课进行分析。

3.1 内容呈现与认知需求

数学史材料的选取需综合考量知识的逻辑顺序与历史顺序的相统一，符合学生的认知学习规律。同时，数学史料需要自然融入，满足学生学习需求，达成教学目的，起到润物无声的效果。表 1 给出了史料的使用情况。

表 1 本节课中史料的使用情况

教学活动	史料	融入方式	达成效果
活动 1	卡丹《机会游戏之书》	顺应式	直观感知概率的计算
活动 2、 问题 1-4	古典概率模型的抽象过程	重构式	提炼活动 1 中概率计算的两个前提 假设“有限性”与“等可能性”，抽象出古典概率模型
活动 3	拉普拉斯《概率的分析理论》及其相关工作	附加式	体会抽象出古典概率模型的必要性 体会概率学习的意义以及概率的决策性作用
例 3	分金问题	复制式	借助古典概率模型，经历分金问题的解决过程，体会“等可能性”
课后拓展	但丁《神曲》	复制式	体会“等可能性”

课后拓展 收集历史名题

复制式

梳理概率论的发展，满足个性化学习需求

学生经历活动 1 的三个游戏，直观上给出了概率计算方法，与卡丹的“机会”计算法则不谋而合，体现了历史相似性。但直观感知的结论不一定正确，这就为我们后续的抽象数学模型提供了契机。活动 2、活动 3 及问题 1 至问题 4，学生在交流中总结基于直观得出的概率计算的前提假设，提炼两个随机试验的共同特征，从而归纳古典概率模型及古典概率计算公式，基本经历了古典概型的抽象过程。例 3 的分金问题帮助学生深入理解古典概型中“等可能性”这一特征。但由于课堂时间的限制，不能完全彰显不同数学家对分金问题的思考以及他们对概率论发展所作的贡献，因此在小结中创造“留白”空间，在课后作业中提供“补白”载体。进一步，参照柯尔莫格罗夫提出的概率公理化定义，本课时在提出古典概率模型后需要在集合角度下再进行审视，突出集合语言对于研究概率的重要性。

本节课所用史料清晰直白，学生较易理解史料所阐述的情境，并进行思考探索，各环节过渡自然，没有造成额外负担。

3.2 学习机会与学生表现

本节课借助数学史料通过分组探讨、生生交流、师生互动形式等充分给予学生表达、质疑、展示的机会，学生的相关表现也符合甚至超出了课前教师的预设期望。基于课后研讨，笔者从教师的 HPM 教学理念、教学设计与组织形式、学生的认知基础进行讨论小结。

第一，HPM 是以沟通历史与现实、融合数学与人文、体现是人在创造历史的教学活动，让学生经历数学知识的发生与发展的过程。本节课以“直观感知——模型建构——集合语言描述”的教学主线，将历史发展重现于课堂，符合学生从直观感知到理性抽象的认知规律，因此学生能较易结合生活经验与学习经验，沿着历史的轨迹开展探究。

第二，基于数学史的任务探究设计，为概念学习提供了具体情境。例如，例 2 中的骰子问题与例 3 中的分金问题，情境简单深刻，为学生对“等可能性”的深度理解提供了素材。在教学实践中，教师采用分组探讨、生生交流等方式组织学习，给予每一位学生表达的机会。如在活动 2 中，生 3 认为掷一颗骰子的样本空间为 1、质数与合数所组成的集合，教师并没有评判其对错，而是在问题 7 中进行追问，让学生经过反馈交流，自行说出该样本空间不具有等可能

性。

第三，学生的认知基础基于生活实际和初中认知。本节课中的相关问题设计具有思考性和挑战性，需要学生在充足的时间中通过相互交流予以解决，构建知识体系。如在活动 1 中，基于生活实际，大部分学生仅能得出前 2 个游戏的获胜可能性，较难算出第 3 个游戏的获胜可能性，因此，此时不宜询问如何求解，之后学生经过例 2 的学习体验便能对此问题进行解答。

3.3 评价运用

本节课中，教师采用了“古今联系”、“同伴互评”、“论文撰写”等策略对学生活动进行评价。

第一，在“古今联系”中激发学习自信。学生在活动 2 和活动 3 中抽象出古典概率模型及其计算公式后，教师呈现了拉普拉斯等数学家们的工作成果；在例 3 完成后，教师简介了费马等数学家的工作。此外，让学生在穿越时空中感知自己也能完成数学家们的工作，激发创造性和学习欲望。在课后反馈中也可看出学生对于自己采用与数学家一样的思想完成问题感到自豪。

第二，在“同伴互评”中深化知识理解。在 3 个活动及 7 个子问题的交流中，教师均是让学生充当质疑者和评判者，充分给予学生试错、疑错、纠错的机会，将课堂的中心聚焦于学生，使之成为学习的主体。课后反馈中可以发现，通过生生不同观点的碰撞，学生对古典概型中有限性和等可能性的理解较为深刻。

第三，在“论文撰写”中提供补白契机。由于概率论的发展史源远流长，一节课内让学生全部经历这一过程是不可能的任务。本节课在例 3 的小结中进行“留白”，在课后作业中进行“补白”，将课堂思考延续到了课后，形成单元性作业。鼓励学生通过对历史名题及其解法的梳理与思考，自行构建概率单元的知识框架和发展历程，满足学生个性化学习需求。教师借助数学小论文撰写形式，评价学生能否基于单元视角理解学习内容，以便有效制定后续学习计划。

3.4 育人价值

数学史的教育价值包括“知识之谐”、“方法之美”、“探究之乐”、“能力之助”、“文化之魅”、“德育之效”^[9]。由上述讨论中可以发现，借助游戏开启对古典概型的抽象体现了“知识之谐”；基于直观感知提炼出古典概率模型的两个特征的活动体现了“探究之乐”；查询并鉴赏

历史名题，撰写数学小论文，感受数学的人文魅力，体现了“能力之助”和“文化之魅”。接下来将重点讨论如何促成“德育之效”。

其一，基于古典概型中“等可能性”的理解，古典概型仅是一个数学理想模型，希望同学们不要被生活中的骰子、硬币所欺骗，不要轻易参加机会游戏，希望学生能更为客观地分析周边世界。

其二，基于概率的概念，随机事件的出现与否是偶然的、不确定的，但是其出现的可能性却是必然的、是确定的。因此结合拉普拉斯的话语，希望学生能借助概率这一数学工具，对已有数据进行理性分析和决策制定，培养理性精神。

其三，基于历史相似性，运用史料引导学生经历概率论真实脉络，以直观感知出发，逐步分析出直观计算背后的共性特征并予以归纳，构建数学模型；经历集合语言描述古典概率模型及推导概率性质的过程，为后续学习埋下伏笔，感受数学系统内部的概率发展过程。整个学习过程沿着概率论的发展史，抽象于现实，应用于现实，落实了数学学科理性育人的目的。

但在梳理中，我们也发现本节课对于“方法之美”的价值彰显不够，主要原因是现阶段学生对于概率的理解仅停留在运用枚举法、列表法进行古典概率的计算，对其余概率的模型与计算基本没有认知，因此在本节课中暂时较难使用多样的方法让学生进行多角度理解，这将是后续的概率论史料查阅与实践运用的难点突破口。

参考文献

- [1] 郑玮, 郑毓信. HPM 与数学教学中的“再创造”[J]. 数学教育学报, 2013, 22(3): 5-7.
- [2] 李进东. 从两个数学历史名题看古典概型的教学引入[J]. 数学通报, 2015, 54(01): 27-28.
- [3] 李霞. 中学生对概率的错误理解: HPM 的视角[D]. 上海: 华东师范大学, 2018: 36-47.
- [4] Debnath, L. & Basu, K. A short history of probability theory and its applications[J]. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 2015, 46(1): 13-39.
- [5] Vasudevan, A. Chance, determinism and the classical theory of probability[J]. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 2018(67): 32-43.
- [6] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. 数学通报, 2020, 59(03): 7-12+19.

- [7] 汪晓勤. 关于 HPM 课堂教学评价的案例分析[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 1-6.
- [8] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——“以三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(01): 35-41.
- [9] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与高中数学教学理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 20-52.

HPM 视角下的圆锥曲线高三单元复习课同课异构课例分析

刘梦哲, 孔雯晴

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

“圆锥曲线”是我国高中数学教学的重难点之一,也是历年高考必考的知识点之一,这一章集中、完整地阐述了解析几何的主要问题和思想方法。《普通高中数学课程标准》(2017 年版 2020 年修订)指出,通过圆锥曲线与方程的学习,帮助学生了解圆锥曲线的实际背景,感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用;掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质;了解抛物线与双曲线的定义、几何图形和标准方程,以及它们的简单几何性质;体会数形结合的思想^[1]。

已有的教学设计中,教师多以试题为导向,通过归纳用圆锥曲线定义解决的几类问题,引导学生用圆锥曲线的定义解题^[2]。然而,在提倡将数学文化融入数学教学、实施数学学科德育、落实立德树人的今天,以传统机械式的题海战术来训练学生已不能满足时代对人才的要求。鉴于此,HPM 专业学习共同体开展了圆锥曲线高三单元复习课的课例研究,帮助高三学生重新认识椭圆、双曲线和抛物线的定义,了解圆锥曲线的起源,建立三者的内在联系,发挥数学史的多元教育价值。来自上海市和江西省的两所不同学校的教师 A 和教师 B 各自实施了“圆锥曲线高三单元复习课”的教学。教师 A 和教师 B 使用的教材分别是沪教版(2008 年版)和北师大版(2006 年版)，“圆锥曲线”分别位于沪教版高二第二学期第十二章和北师大版选修 1-1 第二章。

课例研究前期,HPM 网络研修班中的高校研究者提供给各位教师关于圆锥曲线的历史史料,首先,教师 A 和教师 B 对这些内容进行研读。其次,教师需要对这些史料进行裁剪和加工,并结合教材和学情,各自完成教学设计。再次,经过 HPM 学习共同体的网络研讨,两位教师对教学设计进行修正。最后,基于教师和学校实际情况,教师 A 开展了两轮试讲,教师 B 开展了一轮试讲,根据两位教师试讲的效果,HPM 学习共同体对教学设计给出修正和完善的建议,两位教师再实施正式教学。

本文通过分析两位教师的展示课，试图回答以下问题：两位教师所用数学史在高三复习课中发挥了哪些教育价值？两节课对今日圆锥曲线高三复习课的教学有何借鉴意义？

2 教学设计与实施

2.1 教学目标

教师 A 和教师 B 拟定的教学目标基本相同，具体如下：

(1) 经历从几何模型中抽象出圆锥曲线轨迹定义的过程，知道圆锥曲线的定义，把握椭圆和双曲线第一定义以及抛物线定义的定值问题；

(2) 利用椭圆和双曲线第一定义以及抛物线定义提高学生的解题能力，发展学生的直观想象、数学抽象和数学运算的数学核心素养。

在面临高考的背景下，两位教师均非常关注学生的数学素养及解题能力的培养，希望通过本课时的学习，强化学生对于椭圆、双曲线和抛物线的定义的理解和记忆，并用以辅助学生的解题。此外，教师 A 增加了一个目标：了解圆锥曲线的历史背景，建立圆锥曲线的内在联系；教师 B 增加了一个目标：复习椭圆、双曲线和抛物线的定义及其标准方程。虽然教师 A 和教师 B 增加了不同的教学目标，但这两位教师在教学过程中均有涉及这两项教学目标的内容。

教师 A 和教师 B 的教学重、难点也相似。教师 A 的教学重点为复习圆锥曲线的定义和应用；体会数形结合的思想。难点为从几何模型中抽象出代数表达。教师 B 的教学重难点皆为使用旦德林双球模型验证椭圆和双曲线的第一定义及抛物线的定义；利用椭圆和双曲线第一定义以及抛物线定义解题。

2.2 教学过程

在教学过程中，教师 A 和教师 B 的教学过程均由温故知新、再探定义、实践应用和课堂小结四个环节组成，具体见表 1。

表 1 教师 A 和教师 B 的教学过程比较

环节	教师 A	教师 B
温故知新	<p>(1) 根据椭圆、双曲线和抛物线的定义, 让学生判断动点的轨迹。</p> <p>(2) 问题: 为什么椭圆、双曲线和抛物线统称为圆锥曲线?</p> <p>(3) 让学生运用平板电脑, 改变平面与圆锥母线的夹角, 并总结出圆锥曲线的截线定义。</p> <p>(4) 介绍阿波罗尼奥斯对圆锥截线的研究。</p>	<p>(1) 问题: 为什么椭圆、双曲线和抛物线统称为圆锥曲线?</p> <p>(2) 介绍古希腊截线定义的历史, 并用 FLASH 动画动态展示梅奈克缪斯三线。</p> <p>(3) 用 FLASH 动画动态展示平面截对顶圆锥的过程, 并总结圆锥曲线的截线定义。</p> <p>(4) 学生填写椭圆、双曲线和抛物线的定义及标准方程; 复习“圆柱中的双球模型”及“园艺师画法”。</p>
定义再探	<p>(1) 先引导学生运用旦德林双球模型, 将椭圆的截线定义和第一定义联系起来, 再通过类比, 让学生自己证明双曲线的第一定义。</p> <p>(2) 借助微视频, 了解圆锥曲线的起源和发展史。</p>	<p>先引导学生运用旦德林双球模型证明椭圆的第一定义, 再让学生通过小组讨论的方式, 依次证明双曲线的第一定义和抛物线的定义。</p>
实践应用	<p>例题 1: 计算截口曲线上任意两点间的最长距离。</p> <p>例题 2: 用平行于圆锥母线的平面截圆锥, 得到抛物线, 计算此抛物线焦点到准线的距离及圆锥母线与轴的夹角。</p>	<p>例题 1: 判断截口曲线的形状、计算曲线上任意两点间的最长和最短距离。</p> <p>例题 2: 计算旦德林双球模型中椭圆的离心率。</p>
课堂小结	教师和学生一起从知识拓展、方法总结、思想提炼以及素养提升四个维度总结本节课学到的内容。	回顾这节课所学习和掌握的知识, 思考如何利用所学来解决高考当中的圆锥曲线问题。

从表 1 可以看出, 教师 A 和教师 B 均从 HPM 的视角实施课堂教学, 且两位教师的教学设计呈现出异曲同工之妙。

在温故知新环节, 两位教师均设置了复习旧知和探究圆锥曲线的截线定义内容, 只是在内容安排上有所不同。教师 A 首先让学生回忆满足条件的动点的轨迹是椭圆、双曲线还是抛物

线，然后提出问题：为什么椭圆、双曲线和抛物线统称为圆锥曲线？其次，学生通过操作平板改变平面与圆锥母线的夹角，从定量和定性的角度总结圆锥曲线的截线定义，教师通过将学生给出的结论与阿波罗尼奥斯的研究成果进行对照，实现古今对话。教师 B 首先开宗明义，直接提出和教师 A 一样的问题，随后运用 FLASH 动画帮助学生直观地理解历史上梅奈克缪斯三线和阿波罗尼奥斯的研究。其次，教师带领学生一起复习高二阶段所学的圆锥曲线的轨迹定义、圆柱中的双球模型和园艺师画法。

再探定义环节则是本节课的重点和难点所在，教师 A 和教师 B 均以旦德林模型为主线，先引导学生证明椭圆的定义，随后，通过类比，教师 A 让学生自己证明双曲线的定义，并利用平板拍照上传证明步骤及分享，此外，该教师还借助微视频系统介绍圆锥曲线的起源和发展史；教师 B 让学生以小组为单位，证明双曲线和抛物线的定义，并邀请学生到讲台上分享证明步骤。

当然，运用旦德林双球模型证明椭圆、双曲线和抛物线的定义的过程并不是一帆风顺的。鉴于此，教师 B 先带领学生一起回顾圆柱中的双球模型，为进一步探究圆锥中的双球模型搭建“脚手架”，再让学生围坐一圈，以小组为单位，共同探究双曲线和抛物线的定义的过程（图 1）。我们看到，学生讨论的气氛热烈，且每位学生都能表达自己的想法，这有利于激发学生的创新意识，体会数学探究与发现所带来的乐趣，并加强知识的纵横联系。



图 1 教师 B 课堂中的小组探究

在实践应用环节，两位教师借用历史上的“截口曲线”或“旦德林模型”来编制数学问题，从而提升学生运用定义解题的能力。在课堂小结环节，教师 A 先让学生谈谈本节课的收获，随后教师从知识拓展、方法总结、思想提炼和素养提升四个维度总结本节课学到的内容；教师 B 与学生一起总结了本节课学习到的数学知识、涉及到的思想方法。

3 数学史的教育价值

数学史的融入为高三复习课注入了更多的活力，具体而言，这两节课发挥了深化概念理解、加强知识联系、促进问题解决和渗透思想方法四种价值。

3.1 深化概念理解

复习课的关键在于找到学生的困惑，进而解决学生的困惑，而这些困惑往往可以从历史中找到答案。于是，在复习课的教学中，教师需要追本溯源，找准数学知识产生的源头，再利用好这个源头，让学生经历数学知识发生发展的过程，从而深化对数学知识的本质理解。表 2 给出了教师 A 和教师 B 在各教学环节所用数学史素材的比较。

表 2 教师 A 和教师 B 所用数学史素材的比较

环节	教师 A	教师 B
温故知新	阿波罗尼奥斯对圆锥截线的研究。	(1) 梅奈克缪斯三线；阿波罗尼奥斯对圆锥截线的研究。 (2) 圆柱中的双球模型；园艺师画法。
再探定义	椭圆和双曲线的旦德林双球模型；圆锥曲线的起源和发展史。	椭圆、双曲线和抛物线的旦德林双球模型。

两位教师均以学生已有的困惑“为什么椭圆、双曲线和抛物线统称为圆锥曲线？”为起点，借助梅奈克缪斯（Menaechmus, 约前 380-约前 320）或阿波罗尼奥斯（Apollonius, 约前 262-约前 190）对圆锥截线的研究，和学生一起经历历史上数学家对圆锥曲线的截线定义的探索过程，从“形”的角度加强学生对圆锥曲线的本质理解。教师 A 让学生借助平板电脑，亲自动手改变圆锥截面的位置，从直观上感受三条圆锥曲线的形成过程，并归纳出圆锥曲线的截线定义；教师 B 借助 FLASH 动画，动态展示梅奈克缪斯三线及阿波罗尼奥斯的研究，学生通过观察，同样可以归纳出圆锥曲线的截线定义。

当然，学生在高二阶段已经学习了圆锥曲线的轨迹定义、标准方程及各种性质，故而在本节课中，两位教师所设计的教学目标倾向于让学生了解圆锥曲线的“形”，但不能忽视的是，历史上数学家对圆锥曲线的“数”也有深入研究。解析法的出现为数学家研究圆锥曲线的方程和性质提供了极大的便利，于是，历史上出现了椭圆、双曲线和抛物线的标准方程的不同推导

方法和各种性质，这些内容同样精彩纷呈，然而两位教师却未涉及此方面的内容，因此她们对圆锥曲线教学内容的设计还有待完善。

3.2 加强知识联系

复习课的目的是把平时在教科书中所学到的零碎知识系统起来，让学生从整体上把握所学的内容。

从历史上看，圆锥曲线概念经历从“截线定义”到“轨迹定义”的过程。古希腊时期，梅奈克缪斯、阿波罗尼奥斯等数学家率先对圆锥曲线的截线进行了研究，由此产生了圆锥曲线的截线定义^{[3][4]}。随着解析几何的创立，数学家纷纷从代数的视角去研究圆锥曲线的定义、方程和各种性质，其中拉希尔（P. de Lahire, 1640-1718）在《圆锥曲线新基础》一书给出的圆锥曲线的轨迹定义，正是今天教科书中所耳熟能详的^[3]。然而，截线定义与轨迹定义在很长一段时间内都缺乏统一，直到 19 世纪，伴随旦德林模型的出现，最终才填平了两者之间的鸿沟。

上课伊始，师生共同归纳总结出了圆锥曲线的截线定义，但是，仅从直观想象的角度说明某一曲线是椭圆、双曲线或抛物线并不能让学生信服，教师需要对此进行逻辑证明。于是，两位教师为学生留下思考的时间和思维的空间、留出“发现之白”和“论证之白”，学生可以在发现知识和证明结论的过程中，逐步建立起圆锥曲线的不同定义的联系。

可见，两位教师以史为鉴，从圆锥曲线的截线定义入手，以旦德林双球模型为主线，采用“引导-探究”的教学模式，让学生通过类比，并利用初等几何、立体几何等知识，由此搭建起两方面的联系，一是帮助学生建立起圆锥曲线的截线定义和学生已学过的轨迹定义之间的联系，二是让学生体会椭圆、双曲线第一定义和抛物线定义之间的内在联系。

3.3 促进问题解决

对于复习课，更重要的是强化基础知识运用，掌握基本解题方法，训练解题技能技巧，提高实际应用能力。在 HPM 视角下的数学教学中，数学问题乃是数学史的最重要的载体，与此同时，随着高考数学卷中频繁出现数学文化问题，基于数学史的问题也逐渐成为教师关注的焦点^[5]。在这两节课中，两位教师均尝试根据历史材料编制数学问题，教师 A 运用截口曲线、教师 B 运用截口曲线和旦德林双球模型设计例题，让学生解决一类与截线定义有关的问题。以教

师 A 设计的一道截面曲线问题为例。

历史上，许多人研究过圆锥的截面曲线。如图 2，在圆锥中，母线与旋转轴夹角为 30° ，现有一截面与圆锥的一条母线垂直，与旋转轴的交点 O 到圆锥顶点 M 的距离为 1，求截面曲线上任意两点间的最长距离。

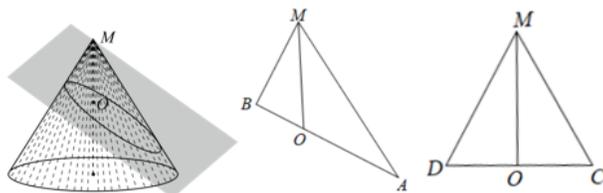


图 2 截面曲线问题

这道例题其实就是一个平面斜截一个圆锥的问题，若教师在圆锥曲线的教学中介绍过旦德林双球模型，此题便可迎刃而解。教师通过引导学生画出轴截面的图象，并根据先前所学习的圆锥曲线的截线定义，容易分析出这一截面与圆锥的交线是椭圆，再运用解直角三角形的知识，即可计算出椭圆的长轴长。

以史为源设计例题，不仅可以帮助学生深入理解圆锥曲线的起源以及圆、椭圆、双曲线、抛物线这四种曲线的内在关联，同时，还可以让学生综合运用平面几何、立体几何、解三角形等知识解决数学问题，以此更好建立完整的知识体系。当然，此类问题还有很多，隐藏于解决数学问题的知识、思想、方法背后的数学史对于熟练学生解题有着积极的意义。

3.4 渗透思想方法

数学教材的每一章、每一道题都体现数学知识和数学思想方法这两个方面的有机结合，对于学生而言，往往数学知识易于接受，但是掌握数学知识背后的数学思想方法较为困难。日本数学家米山国藏说过：“作为知识的数学出校门不到两年都忘了，唯有深深铭记在头脑中的数学精神、数学思想、研究的方法和着眼点等，这些随时随地发生作用，使人终身受益。”因此，教师在日常教学中应重视提炼数学思想方法，使学生逐步体验、逐步理解、逐步学会应用数学思想方法，进而培养学生的数学高层次思维，提升数学核心素养。

具体而言，教师 A 在课堂小结环节，先让一些学生谈了自己在上完本节课后的收获和理解，随后，教师和学生一起从知识拓展、方法总结、思想提炼以及素养提升四个维度总结本节课学到的内容。其中，知识拓展涉及圆锥曲线的起源和内在联系；方法总结涉及定义法、解析

法；思想提炼涉及转化与化归的思想、类比迁移能力、综合分析问题及解决问题能力；素养提升涉及直观想象、数学建模等数学核心素养（图 3）。



图 3 教师 A 的课堂小结内容

教师 B 则让学生回顾本节课学习到的知识，然而却忽视了对本节课数学思想方法的提炼。可见，教师 A 的课堂小结到位、思路清晰，教师从多个视角概括性的总结了本节课的重点和难点，使学生真正感受到“课已尽而意无穷”的效果。

4 结论与启示

综上所述，两节课充分展现数学史在深化概念理解、加强知识联系、促进问题解决和渗透思想方法上发挥的教育价值。通过同课异构的课例比较与分析，我们得到以下启示。

其一，数学史的融入为高三复习课注入新的内涵。

从数学知识层面看，在今天的数学课程中，圆锥曲线是作为解析几何概念登场的。教材的处理偏重从代数的角度呈现圆锥曲线的知识，却不太关注作为几何概念的圆锥曲线的起源，从而忽视了知识之本源。因此，在学生已有的轨迹定义的基础上，复习课中还需呈现古希腊的截线定义，并运用旦德林双球模型建立起两者之间的联系，这将有助于学生厘清圆锥曲线的“纯几何身份”，丰富学生对圆锥曲线的本质理解。

从学科德育层面看，数学史揭示了圆锥曲线的源流，一方面让学生感受不同文化背景下的数学家对圆锥曲线的研究，展示多元文化，另一方面引导学生跨越时空、穿越课堂，与古代数学家对话，了解古人在圆锥曲线上的研究成果，从而让学生亲近数学，增强学习数学的自信心，培养动态的数学观，体会数学背后的理性精神。此外，通过课堂留白，知识不再是教师原原本本地讲授给学生，而是学生通过探究发现新知、通过类比发展知识，即知识是通过每一位学生的探究“再创造”出来的，提高了学生学习数学的兴趣，这也契合 HPM 基本教学理念^[6]。因此，数学史的融入可以为高三复习课中落实学科德育、达成立德树人根本任务发挥独特的价值。

其二，信息技术的使用为 HPM 的课堂插上腾飞的翅膀。

随着信息技术日新月异的发展，电教媒体正逐步走入课堂，把信息技术与数学教学有机结合起来，可使教学形式更加形象化、多样化、视觉化，有利于展示数学概念的形成过程和数学思维的发展过程，使数学教学起到事半功倍的效果。以圆锥曲线为例，几何画板及 GeoGebra 的使用能让学生直观的感受几何图形，运用畅言智慧课堂等智慧课堂软件辅助教学，有助于增加学生的实际体验、活跃课堂气氛、及时展示学生反馈，微视频的应用让千百年来数学的发展生动的展示在学生面前。积极推动信息技术与教育融合创新发展，将为数学教学开拓出更广阔的前景。

其三，学生本位的教学理念为学生的数学素养、数学思维的发展提供契机。

教学过程应始终坚持以学生为中心，把学生作为师生活动的重心，将全面提升学生的数学素养、数学思维作为教学活动的出发点和归宿。教学不是教师一个人的“舞台秀”，而是学生展现自我的平台。一方面，教师应给予学生思考问题的时间和空间，给予学生表达自己想法的机会，另一方面，教师还应科学设置学习小组，开展合作探究活动，让每一位学生都能参与到课堂活动中来，学生由被动变为主动，更能突出学生的主体地位，培养主动参与的意识，激发学生的创造潜能，实现数学学习从感性到理性的飞越。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 43-44.
- [2] 刘文清. 高三数学复习中概念教学的思考——以“圆锥曲线定义”为例[J]. 福建中学数学, 2017(01): 18-20.
- [3] 汪晓勤. 椭圆第一定义是如何诞生的?[J]. 中学数学月刊, 2017(06): 28-31.
- [4] 秦语真. HPM 视角下高三双曲线复习课教学案例研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2021.
- [5] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020,59(05): 9-15.
- [6] 汪晓勤. 关于 HPM 课堂教学评价的案例分析报告[J]. 数学通报, 2021, 60(10): 1-6.

他山之石

不同的复杂应用题需要不同的认知技能组合

韦润蓉

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

在过去的 50 年里, 应用题一直是数学教育研究的焦点, 随着数学作为一门学校学科, 其目标已经转向现实世界的应用、推理、数学建模和非常规思维, 复杂的应用题在数学教育中的重要性也可以说有所增加。复杂应用题将数学问题嵌入到现实的情境中, 并通过额外的文本和视觉表征对其进行完善。因此, 复杂应用题也被认为是数学技能的综合指标, 例如, 在国际学生评估项目中, 用来评估数学素养。由于任务特点和所需技能的多样性, 成功解决复杂应用题反映了学生与任务之间的多方面互动。然而, 以往的研究往往侧重于这两种视角中的一种, 要么是只研究学生特征而不系统地调查任务特征, 反之亦然。因此在本研究中, 作者试图通过探索性地比较六种复杂应用题的任务特征, 从语言、算术、空间和一般推理技能的影响来研究差距。具体包括, 调查这些技能是否在不同的任务中产生不同的影响, 并深入探究这种差异来源于任务中的哪些特征。

在本次研究中, 语言技能被认为是一组成功解码和理解文本的技能, 包括技术性阅读技能和文本理解能力。算术技能是解决数学应用题的基本前提, 算术技能称为通过计算来正确解决算术任务的能力。空间技能是解决几何问题所必需的, 指在空间环境中检索和处理视觉信息的能力。一般推理技能指的是抽象的、逻辑的推理和推断的思维过程。

这项研究共有六个作者, 分别是 Anselm R. Strohmaier¹, Frank Reinhold, Sarah Hofer, Michal Berkowitz, Birgit Vogel-Heuser 和 Kristina Reiss, 其中 Michal Berkowitz 来自苏黎世联邦理工学院, 其余作者均来自德国的不同大学或研究中心。研究是在慕尼黑工业大学为一年级工程专业学生举办的定期讲座上进行的。参与者为 1282 名学生 (25.6%为女性), 平均年龄 19.98 岁 ($SD=2.73$)。这项研究是根据 2017 年《心理学家伦理原则》和《美国心理协会行为准则》进行的。伦理审批不需要机构指导方针或国家法规的要求, 且开展研究前均征得实验者同意。在材料选择方面, 复杂应用题从国际学生评估项目公布的数学项目中选取了题目 (这六道题目分

别编码为：富士山、赛车、春游会、水箱、卖报纸、旋转门问题)。答案按照 PISA 编码手册进行编码。认知技能的评估都以单项选择的形式进行。如语言技能是通过语言类比量表来衡量的。

在实验过程中，所有题目都以纸质形式进行。学生收到一本 40 页的小册子，其中包含了所有的调查问卷、量表和任务，并且分部分完成。在完成每个部分之前，学生被要求阅读具体的任务介绍。同时，规定了各类任务的完成时间，复杂应用题——8 分钟，算术技能测试——10 分钟，一般推理能力测试——12 分钟，空间技能测试——6 分钟，语言技能测试——7 分钟，整个过程中不允许使用计算器。为了评估认知技能在六项任务中解决复杂应用题的效果，作者对每个复杂应用题分别进行了回归分析。模型以算术技能、语言技能、空间技能和一般推理能力的标准化总分为自变量，以解决问题的概率（正确解决问题的可能性）为因变量。性别被纳入控制变量。系数以 odds ratios (OR) 表示，它是预测自变量中每产生一个标准差变化而导致的问题解决概率变化大小的指标（例如，在一项任务中，算术技能的 OR 为 1.40，这意味着在算术技能测试中得分高于平均水平一个标准偏差的参与者比普通参与者解决这个任务的机会高 40%）。为了检验这些影响是否在不同任务之间有显著差异，作者使用卡方和 AIC 模型进行模型拟合比较。

表 1 给出了四种不同一般认知技能之间的相关性。结果均具有统计学意义，显著性 < 0.001，相关性在 0.22-0.30 之间。表 2 给出了六道复杂的应用题的解题率（所有参与者给出正确答案的百分比）之间的相关性。总量表的 ICC（总体相关性）为 0.15。任务的解决率在 23% 到 78% 之间变化。

表 1 认知技能之间的相关性

认知技能	(1)	(2)	(3)
语言技能	-	-	-
算术技能	0.22	-	-
空间技能	0.29	0.22	-
一般推理技能	0.28	0.30	0.30

表 2 复杂应用题的解题率和相关性

任务	解题率	相关性				
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)旋转门	23.31					
(2)卖报纸	49.18	0.16				
(3)春游会	49.13	0.16	0.32			
(4)赛车	69.15	0.11	0.11	0.06		
(5)富士山	69.93	0.12	0.13	0.15	0.11	
(6)水箱	78.01	0.15	0.14	0.13	0.18	0.15

注：N=1284，所有系数均显著相关

每个任务和所有认知技能的优势比在图 1 中给出，可见语言技能是唯一显著影响所有任务解决概率的预测因子，优势比在 1.24 到 1.44 之间。算术技能的优势比在 0.95 和 1.40 之间变化，其中一半任务的优势比与 1.00 没有显著差异 ($p>0.05$)。空间技能的优势比在 1.12 和 1.39 之间变化，只对一项任务没有显著影响（富士山，OR=1.12， $p=0.110$ ）。对于一般推理技能，除春游会外的所有任务（OR=1.13， $p=0.065$ ）的优势比具有统计学意义，这种技能的优势比在 1.13 到 1.47 之间变化。总的来说，所有认知技能在所有任务中的比值比在 0.95 到 1.47 之间变化。

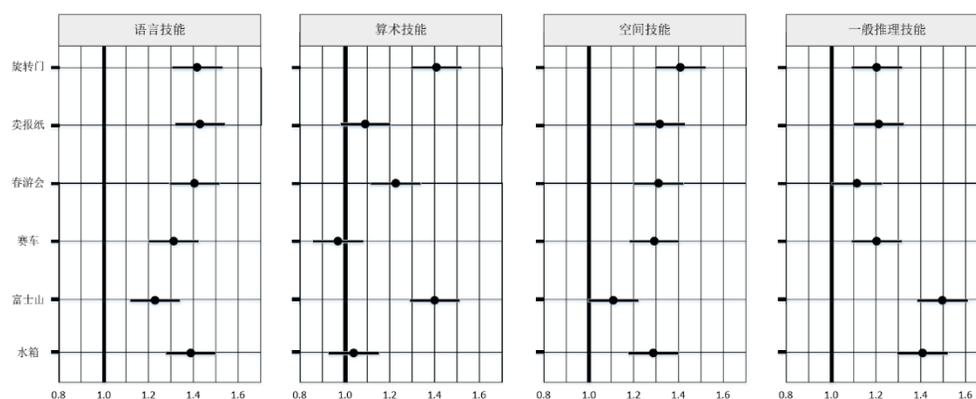


图 1 六种不同复杂应用题的解决概率的优势比

对于算术能力较高的学生来说，有三个任务的解题概率显著较高：旋转门、富士山和春游会。在前两个任务中，算术能力高于平均水平一个标准差的学生正确解决问题的概率大约是平均水平的 1.4 倍。这些任务需要一个开放的数字答案，由适当的计算得出，而其它三个不需要

计算的任务，计算技能对解决问题的概率没有显著影响。空间技能与所有任务的解决概率都相关，除了富士山，该任务是唯一不包含任何形式的视觉表征的任务。一般推理技能显著预测了除春游会外所有任务的解题概率。影响最强的两个任务是富士山和水箱，这两个任务明显不包含冗余信息。

综上所述，作者得出结论：语言技能是所有任务解决概率的一致预测器，这强调了语言和数学之间的紧密联系。如果应用题在语言特征如文本长度或代词的使用方面存在差异，则问题的解决概率可能和语言能力的高低有更强的相关性。在需要计算的开放式问题中，算术技能的影响最强。当不需要计算时，算术技能对复杂应用题的解决概率没有影响。空间技能是处理复杂应用题的视觉表征的独特要求。然而，这些任务中的所有可视化表示对于他们的解决方案都是必要的或有帮助的，且空间技能并不局限于空间和形状的内容领域。一般的推理能力与简单的应用题的关系更密切。此外，推理能力的高低对解决包含不相关和冗余信息的问题有更大的影响。在局限性和展望部分，作者提出，还需要验证更多的任务的特征来解决普遍性问题，此外，在下一步的研究中，应该确定特定的原因，即为何具有特定技能的学生在复杂应用题方面有着更高的解题能力，或者是什么特定的缺陷导致了错误的答案。这将有助于更好地理解报告结果背后的过程，以及基本认知技能和复杂应用题解决背后的影响机制。

参考文献

- [1] Strohmaier, A.R., Reinhold, F., Hofer, S. et al. Different complex word problems require different combinations of cognitive skills[J]. *Educ Stud Math*, 2022, 109(3): 89–114.

活动讯息

第九届数学史与数学教育(HPM)高级研修班暨 2021 年华东师范大学基础教育学科教研联盟初高中数学学科学术年会隆重举行

孔雯晴, 王智洋, 刘梦哲, 杨舒捷, 韦润蓉, 钱 秦, 苏福梅, 刘叶青

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

2022 年 4 月 12 日, 第九届数学史与数学教育 (HPM) 高级研修班暨 2021 年华东师范大学基础教育学科教研联盟初高中数学学科学术年会隆重举行。根据目前疫情防控的要求, 本次大会全员线上举行, 由华东师范大学教育集团、华东师范大学教师教育学院、上海市立德树人数学教育教学研究基地共同主办, 华东师范大学松江实验高级中学承办。华东师范大学教师教育学院副院长汪晓勤教授, 华东师范大学教师教育学院数学教育研究所首席专家、上海市特级教师、正高级教师晋元高级中学王华老师, 华东师范大学松江实验高级中学校长高德品校长出席开幕式。来自浙江、江苏、江西、海南、安徽、广东、内蒙古、上海等 15 省区市的联盟成员校、HPM 工作室、教研基地、网络研修班以及相关单位和学术组织, 共计 2300 余位高校学者、研究生、教研员和一线中小学教师参加会议。华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师主持开幕式 (图 1)。



图 1 第九届数学史与数学教育 (HPM) 高级研修班

【开幕式】

大会伊始, 华东师范大学松江实验高级中学高德品校长致辞 (图 2)。高校长首先对参与本次会议的嘉宾表示热烈欢迎, 对华东师范大学基础教育集团、华东师范大学教师教育学院的

指导与支持表示衷心感谢，对各地支援上海的医务工作者表示衷心感谢。高校长指出，华实高中自成立以来，始终秉持勤朴和美的教育理念，致力于打造一所负责任、有追求、有温度的普通特色高中，将着力培养学养丰润、感知敏锐、道义担当的新时代青年。华实高中作为数学史与数学教育（HPM）工作室的教研基地，教师们积极参加了数学史与数学教育的实践活动，这些都助推了华实高中数学学科的发展，也为学校在双新背景下的教学改革探出一条实践的新路。最后，高校长预祝本次会议取得圆满成功。



图 2 高德品校长致辞

【大会报告 I】

浙江省义乌中学的王芳老师作了主题为“基于专业学习共同体的高中数学序言课教学研究”的大会报告（图 3）。王芳老师从参编《浙江省普通高中数学学科教学指导意见》说起，谈及对序言课教学的启思和探微，并介绍了 HPM 专业学习共同体对序言课的研究和实践，在此基础上展望推进 HPM 课程群的研究，为与会教师们提供了 HPM 学术研究的新思路。

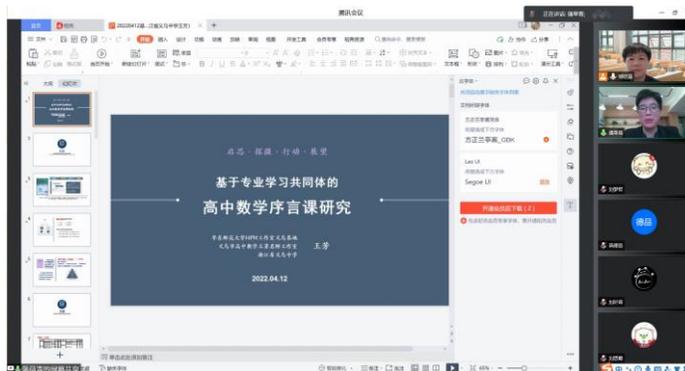


图 3 王芳老师作大会报告

浙江省桐乡市凤鸣高级中学的沈金兴老师作了主题为“HPM 单元主题教学：三新背景下的学科德育实践探索”的大会报告（图 4）。报告中，沈老师首先从理论方面介绍了 HPM 单元

主题教学的实践及数学学科德育的内涵，随后谈及浙江省在新课标、新教材、新高考，即三新背景下学科德育的实践，最后对数学课堂落实 HPM 单元主题教学、实现数学课程思政进行了展望。

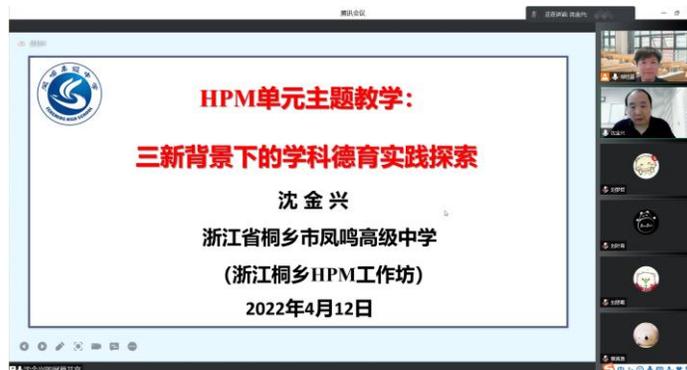


图 4 沈金兴老师作大会报告

【工作坊】

第一个工作坊由华东师范大学博士生雷沛瑶主持，主题为后疫情时代的 HPM 高中课例展示。

首先，华东师范大学教师教育学院硕士生蔡春梦对“古典概型”这一主题进行了历史探源（图 5）。她重点讲解了早期机会游戏、赌徒分金问题以及概率论的诞生，这些史料符合史实、条理清晰，为 HPM 视角下“古典概型”课例的开发提供了丰富的素材和思想启迪。



图 5 蔡春梦介绍史料



图 6 雷沛瑶介绍 HPM 专业学习共同体

接下来，工作坊主持人雷沛瑶以 HPM 视角下的“古典概型”课例形成之路为例，对 HPM 专业学习共同体（HPM 工作室、HPM 网络研修班）的学习模式进行了介绍（图 6）。每一个 HPM 课例都要至少经过史料研读、小组研讨、集体研讨、课例研磨四个环节，在课例研讨过程中，不断碰撞思维，产生出精彩的火花，最终形成一个优秀的 HPM 课例。

之后，来自上海市曹杨中学的蔡真逸老师（图 7）和上海市奉贤中学的张益明老师（图 8）

分享了 HPM 视角下“古典概型”同课异构的经历。蔡老师结合沪教版新教材的特点及对史料的分析，总结出这节课的重点，即经历抽象过程，感悟理性精神。在教材分析和史料研读的基础上，蔡老师进行了初步设计，经过研讨，明确了史料的选择和相应的教育价值，进一步打磨课例。蔡老师希望经过本节课的学习，学生能够用数学的眼光观察世界、用数学的思维思考世界、用数学的语言表达世界。张老师先分享了他的各版教学设计，展示了 HPM 视角下的教学设计在研讨中逐渐完善的过程。最终，张老师基于数学史、基于学情、基于教材、基于数学德育给出了一份精彩的教学设计，让“古典概型”这节课发挥出独特的育人价值。



图 7 蔡真逸老师进行课例分享



图 8 张益明老师进行课例分享

第二个工作坊由华东师范大学博士生刘思璐主持，主题是“教育取向的历史研究”。

首先，华东师范大学教师教育学院硕士生王智洋通过对历史文献的考察（图 9），发现“比”的概念主要源自于描述和测量的需要、物物交换的需要、合成与分配的需要以及蕴藏于自然与美学之中，并结合材料分享了教学启示。

接着，华东师范大学教师教育学院硕士生孔雯晴从相似三角形的历史展开（图 10），介绍了用矩之道、重差术、海岛测量、晷尺测高等古书中的测量问题和神奇的萨摩斯隧道背后的奥秘，并从问题之源、探究之乐、文化之魅和德育之效四个方面剖析了数学史的教育价值。



图 9 王智洋介绍史料



图 10 孔雯晴介绍史料

最后，工作坊主持人刘思璐从早期的函数思想、函数概念的诞生、函数概念的演进、函数一词在中国四个部分介绍了函数概念的历史（图 11）。她还指出，根据函数概念的历史，至少

可以得到提升学生的核心素养、理解学生的认知障碍、发挥数学文化价值三个方面的教学启示。



图 11 刘思璐介绍史料

【大会报告 II】

江苏省无锡市蠡园中学的姜鸿雁老师作了主题为“研修·实践·成长——一位 HPM 网络研修班学员的视角”的报告（图 12）。姜老师从课堂教学、专业阅读、专业写作、教材建设四个角度出发进行分享。在 HPM 理论和实践的指导下，姜老师的教学观念不断更新，教学设计拓宽加深，教学语言更加丰盈，阅读的范围更广、更深，能够静下心来写作反思。姜老师表示 HPM 的理念对教师专业发展能够起到良好的促进作用。



图 12 姜鸿雁老师作大会报告

江苏省苏州市阳山实验初级中学的胡永强老师的报告主题为“数学遇见话剧——初中学段的实践探索与价值分析”（图 13）。在双减背景下，胡老师在学校组建了“数学史与数学文化社团”，每周五开展数学话剧的创作与排演工作。话剧的准备与实施阶段分为五个步骤：学生分小组选择剧本，确定演职人员，准备服装道具，修改与完善话剧剧本，排演话剧、推广和演出。经过实践与反思，胡老师发现数学话剧让学生对数学家的认识变得更加丰富、立体、全面，更加尊敬数学家及其工作，也让学生体悟出数学研究应该遵循的原则，以及研究者需要具备的品质。



图 13 胡永强老师作大会报告

广东省湛江市第二中学的吴秀燕老师作了题为“数学文化校本课程的开发与实践”的报告（图 14）。吴老师从课程内容、课程目标（拓宽视野、深化理解、文化熏陶、立德树人）、实施原则、实施策略和实施过程五个方面进行介绍，其中实施原则包括四点：一是有效性（教材延伸、促进学习），二是趣味性（材料适切、激发兴趣），三是科学性（源于文献，符合史实），四是可学性（难度适中，适合学习）。实施过程包括：收集文献、选择史料、设计教学、集体研讨、改进设计、课堂实践、学生反馈和整理反馈。最后，吴老师以“几何原本”这节课为例，分享了学生的数学写作和前后测的情况，说明数学文化校本课程取得了良好的成效。



图 14 吴秀燕老师作大会报告

北大附属嘉兴实验学校王勤老师作了主题为“研修·融汇·生长——初中网络研修班学员感悟”的报告（图 15）。王老师回顾了 HPM 网络研修班的学习之旅，在经历各类优秀课例的滋养以及学以致用的实践尝试后，大家在专业知识、团队合作、教学设计等方面都有了长足进步。她充分肯定了 HPM 网络研修班对一线教师的巨大帮助，并给大家“宁拙勿巧，拼尽全力齐奋斗；去芜存菁，不敢懈怠共追求”的激励共勉。



图 15 王勤老师作大会报告

【HPM 展示课】

下午的会议由 6 节精彩的 HPM 展示课开启。

华东师范大学松江实验高级中学的陈睿滢老师带来了“导数的几何意义”在线教学展示课（图 16）。陈老师在教学中结合学生的课前学习单，以问题串的形式引导学生一步一步改进曲线切线的定义，然后介绍了历史上数学家们给出的几种切线定义，与学生给出的定义一一对应。接着陈老师将课堂任务推进到计算曲线在某点处的切线方程，运用GeoGebra让学生感受趋近的过程，引导学生得到了导数的几何意义即切线的斜率。最后播放微视频，回顾曲线切线的发展史，进行课堂小结。

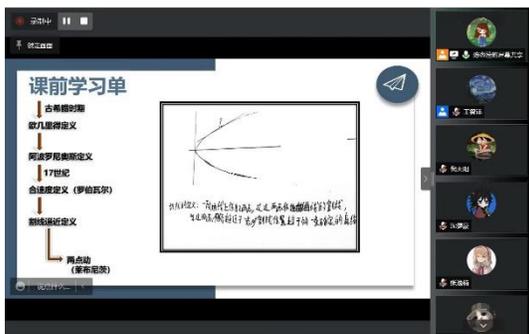


图 16 陈睿滢老师在线上教学



图 17 陈睿滢老师汇报教学设计

在线教学后进入交流点评环节。陈睿滢老师首先汇报了本节课的教学设计和课后感悟（图 17），她表示课堂中除了课本上包含的知识点以及数学思想作为明线外，同时加入了切线数学发展史这一条暗线。以学生课前学习单成果作为依托，将重要节点进行串联，进而突破切线定义和导数几何意义这一难点，学生在掌握知识的同时，感悟历史发展进程，进一步提升数学文化素养和人文素养。

上海市特级教师、正高级教师，来自晋元高级中学的王华老师对本节课进行了点评，提出

两点肯定和一个建议（图 18）。其一，学生在课堂小结中提到数学史的发展与生活息息相关，体现了事物的发展规律，这样的体会是难能可贵的，得益于 HPM 视角下的数学教学。其二，陈老师把各个小组学生给出的曲线定义与历史发展的曲线定义形成对应，使得课堂进程非常自然。最后，王老师指出如果在割线趋近的过程给予学生更多思考和展示的机会，更加充分地留白，课堂呈现的效果应该会更好。



图 18 王华老师评课

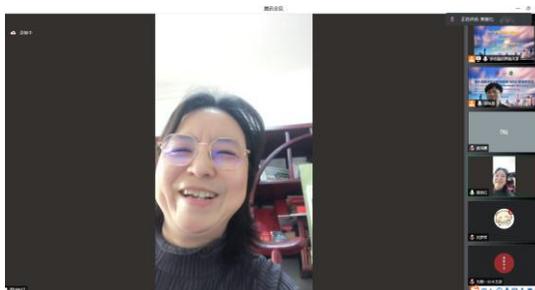


图 19 黄继红老师评课

随后，上海市特级教师、正高级教师，来自松江二中的黄继红老师表示陈睿滢老师这节课的教学非常精彩，可以总结为“立意高、思辨强、互动好”九个字（图 19）。一是立意高，从单元的角度进行设计，从圆的切线到圆锥曲线、三角函数、幂函数，不断寻找和推广切线的定义；二是思辨强，课堂上学生需要运用导数的概念，将数和形不断转化，挑战性很大，但学生的表现非常惊艳；三是互动好，课堂以数学史为线索，利用学生认知的历史相似性，结合技术实现可视化，突破重点、难点，提高效率。最后黄老师从自身出发，分享了她的两点思考和建议。其一，求切线方程时，是否可以让学生从两种不同的角度求，实现统一，加深学生的印象。其二，渗透先猜后证的意识，从过两点的直线斜率出发引出导数的几何意义是学生可以理解的，这样引入能够加快课堂进度。

江苏省无锡市第一女子中学的王剑老师从史料选取（其中包括等周问题、均值不等式、勾股容方）、教学准备、设计框架三个方面分享了“从基本不等式到勾股容方——HPM 视角下的高三‘基本不等式’复习课”教学（图 20）。王老师通过教学设计中具体的例子介绍了数学史的运用方式，并展示了相关的课堂片段。



图 20 王剑老师作教学展示

华东师范大学第二附属中学蔡东山老师进行了“点到直线距离”的教学分享（图 21）。蔡老师详细介绍了教材分析、教学目标、教学重难点、文献调研，数学史的运用方式以及学生表现。本节课中数学史的价值主要体现在推导点到直线距离公式的不同方法，学生的方法与历史上数学家的方法形成了古今对照。最后蔡老师播放了相关课堂片段，并详细分享了本节课的教学反思。



图 21 蔡东山老师作教学展示

上海市新杨中学的李德虎老师分享的课例主题是：**HPM 视角下的项目化中学数学教学设计——以“长方体直观图的画法”的教学为例**（图 22）。李老师在课堂上构建了“就题论题”“就题论法”和“就题论道”三个层次，践行数学教育家弗赖登塔尔的数学教学原则，从学生的“数学现实”出发，引导学生体验“数学化”活动，在合作探究中进行“再创造”，整节课贯穿数学“思想实验”原则。李老师运用重构式开展教学，让学生经历“斜二测”画法的产生过程，构建了知识之谐；借助“古书修订”任务驱动学生开展讨论，营造了探究之乐；通过数学与艺术的联系、长方体直观图鉴美的活动，展示了文化之魅；呈现古今长方体直观图画法的演进，帮助学生形成动态数学观，达成德育之效。



图 22 李德虎老师作教学展示

华东师范大学第二附属中学附属初级中学的陈慧老师分享了“分数的除法”的教学课例（图 23）。陈老师首先从斐波那契求树高的历史名题引入整数除以单位分数，引导学生们得出倒数的定义。接着，陈老师通过与斐波那契相关的问题串，进一步带领学生探讨分数除以整数、分数除以分数的分数除法，发现除以一个不为零的数等于乘以它的倒数这一规律，鼓励学生进行小组讨论，进一步验证这个法则。之后，陈老师播放了历史上分数除法发展的微视频。她将学生的方法和历史上的方法进行比较，发现学生的方法与历史上数学家的方法的相似性，而且还出现了新的方法，随后总结了分数除法的运算法则“颠倒相乘”。为了促进学生对该法则的理解与运用，陈老师随之列举了一些例题，并鼓励学生自己编题，向斐波那契提问。最后，陈老师带领学生对这节课进行了总结与回顾。



图 23 陈慧老师作教学展示

上海民办华二初级中学的王苗老师分享的课例主题为“三角形的中位线”（图 24）。王老师采用“问题驱动”的方式，从数学角度提出问题、分析问题，通过“活动探究”和“演绎推理”构建数学知识，完成定理证明，总结和归纳问题的数学本质，在新的问题中进行变更和推广。从三角形的分割入手，自然引出中位线的概念，体现知识之谐；从特殊到一般、从静态到动态的各种方法的精彩演绎，展现方法之美；通过活动探究，引导学生掌握定理证

明方法，获取成功体验以达成探究之乐；引导学生分享交流不同的方法，提升逻辑思维和语言表达能力，实现能力之助；微视频和例题让学生感受文化之魅；古今方法对比，帮助学生获取数学学习的自信，拉近与数学家的距离，从而达到德育之效。



图 24 王苗老师作教学展示

【大会报告 III】

华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授作了题为“中学数学教学中融入中华优秀传统文化的若干策略”的大会报告（图 25）。汪老师从新知引入、问题设计、概念辨析、定理证明、公式推导五个方面呈现中算史上的概念、问题、思想、方法等在初中数学教学中的具体应用，最后从德育实施的角度呈现人物故事在课堂上的应用，为一线教师提供了将中算史素材融入课堂教学的具体路径。



图 25 汪晓勤教授作大会报告

汪老师的报告既帮助一线教师解决了“巧妇难为无米之炊”的问题，又为教师开启了应用中华优秀传统文化的新篇章与新视野。他指出，教育取向的中算史研究、中算史融入数学教学的实践和评价等是未来 HPM 研究的重要课题。

【大会总结、闭幕式】

安徽省淮南第二中学的戴泽莉老师作为参会代表分享了收获与感悟。戴老师提到，上午场

中各位老师积极学习，不断实践，在 HPM 领域取得的丰硕成果对自己触动很大，尤其是课例论文方面，自己今后也要加强实践，不断总结，及时撰写课例论文；下午的 6 节 HPM 展示课非常精彩，收获良多，特别是汪老师报告中提到的各个策略，应用性非常强，今后在教学中要坚持“以史为基，多题同源”，注重数学思想方法的渗透。

最后，邹佳晨老师对大会做了回顾与总结，本次大会共有 7 个大会报告、2 个工作坊和 6 节 HPM 展示课，聚焦教育取向的数学史研究、HPM 课例研究与实践、HPM 网络研修与教师专业发展、中华优秀传统文化进数学课堂等 HPM 领域的研究热点，6 节观摩课体现了 HPM 教学理念在中小学课堂的实践与研究：古今对话，从历史到课堂；课堂留白，从探究到创获；文化育人，从核心素养到立德树人，充分展示了 HPM 工作室、各教研基地、网络研修班、华东师大基础教育学科教研联盟成员校等专业学习共同体的最新研究与实践成果。在目前全国疫情防控的严峻时期，本次大会的筹备异常艰难和反复，感谢全体报告人认真的准备和精彩的分享，感谢会议组织人员、志愿者、保障人员的坚持与辛勤工作，感谢来自全国各地的同仁对 HPM 高级研修班的持续关注、理解与支持，正是我们大家的共同努力，使得身处大疫之时的我们，依然能线上相聚、交流学术、碰撞思想、滋养心灵、创造历史（图 26）！



图 26 报告嘉宾及工作人员合影