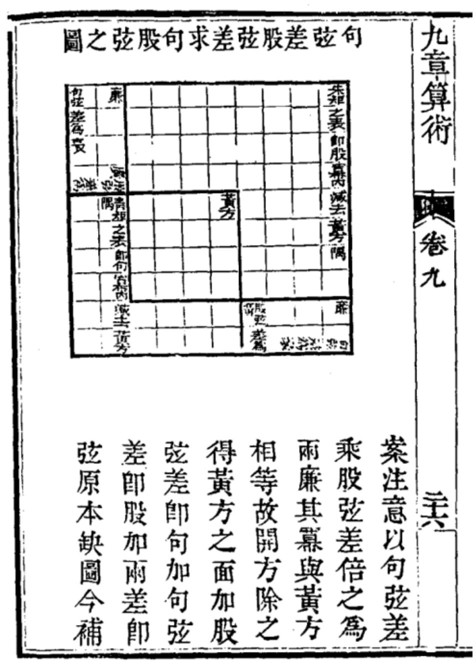
上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2024 年第 13 卷第 02 期



句弦差股弦差求句股弦之圖

案注意以句弦差乘股弦差倍之為兩廉其冪與黃方相等故開方除之得黃方之面加股弦差即句加句弦差即股加兩差即弦原本缺圖今補

《九章算术》（武英殿聚珍版）中的“勾弦差股弦差求勾股弦之图”

《上海 HPM 通讯》编委会名单

刊首新语

巴黎数学文化掠影

沈中宇

（苏州大学数学科学学院, 苏州 215006）

巴黎是法国的首都和最大城市，也是西欧的政治、经济和文化中心，更是举世闻名的浪漫之都。巴黎拥有悠久的历史，建都已有 1400 多年，漫步在巴黎街头，时刻能够感受到其浓郁的文化氛围，其中让人尤为惊叹的是无处不在的博物馆。据统计，巴黎市内正式注册的博物馆有 52 家，加上艺术馆共 140 余家，接待访客数量位居全球之首，其中包括著名的卢浮宫、奥赛博物馆和凡尔赛宫等。当然，巴黎本身就是一座流动的博物馆，其中的一栋楼房、一条街、甚至一个无名的角落，都可能带着沉甸甸的历史印记。难怪著名作家海明威（E. M. Hemingway, 1899-1961）曾留下名言："假如你有幸年轻时在巴黎生活过，那么你此后一生中不论去到哪里她都与你同在，因为巴黎是一席流动的盛宴"。

在如此浓厚的文化氛围中，数学文化更是不可忽略的重要组成部分。实际上，法国在数学领域人才辈出，诞生了如笛卡儿（R. Descartes, 1596-1650）、费马（P. de Fermat, 1601-1665）、帕斯卡（B. Pascal, 1623-1662）、拉格朗日（J. Lagrange, 1736-1813）、蒙日（G. Monge, 1746-1818）和庞加莱（J. H. Poincaré, 1854-1912）等无数名闻遐迩的数学大师。其中，巴黎更是法国数学的中心，从 1666 年，法国的国王路易十四建立巴黎科学院（如今的法兰西科学院）之后，无数欧洲的数学青年才俊汇聚巴黎研讨和交流数学成果，使得法国成为了当时的世界数学中心。至今，法国也是世界上赫赫有名的数学强国，被誉为数学界的诺贝尔奖的"菲尔兹奖"每隔 4 年授予一次，法国在这一奖项上连续获奖达 20 年以上，其获奖人数仅次于美国，如果从人口比例来算，法国绝对是世界第一。因此，法国人曾说"数学是我们传统文化中最优秀的部分。"

2024 年 1 月-2 月期间，笔者有幸来到巴黎，亲身体验这座城市中蕴含的数学文化。接下来，将从地理之趣、建筑之用和艺术之美等方面与读者分享见闻体会。

1 地理之趣

当你初到巴黎，打开巴黎的地图，就会有一个有趣的发现，如图 1 所示，巴黎市区一共被划分为 20 个区，其分布在塞纳河两岸，以卢浮宫所在的第 1 区为中心，顺时针展开。其各区中心点的连线近似于数学中一条优美的螺旋线。

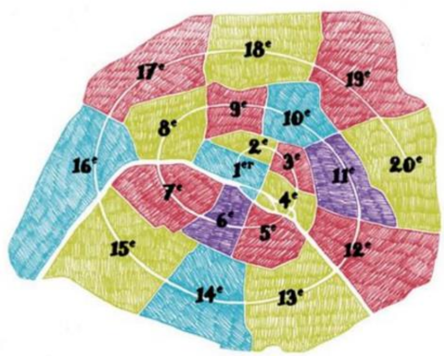


图 1 巴黎市区地图中的螺旋线

当你走在巴黎的城市中，可以发现，巴黎的很多街道，都与数学家有关。其中包括笛卡儿街、拉格朗日街、拉普拉斯街、伯努利街等（如图 2）。

图 2 部分以数学家命名的巴黎街道

同时，巴黎的很多广场也以数学家的名字命名，如蒙日广场、达朗贝尔广场和莱布尼兹广场等（如图 3）。

图 3 部分以数学家命名的巴黎广场

在巴黎的很多地铁站名称中，也有数学家的身影，如蒙日广场站，拉普拉斯站等（如图 4）。

图 4 部分以数学家命名的巴黎地铁站

据统计，巴黎现在有 100 多条街道、广场，还有车站，是以数学家的名字命名的，这些数学家虽不全都是法国人，但是也都作为纪念名列其中。

此外，巴黎的大学中，也随处可以发现数学家的元素。比如巴黎第五大学，又名笛卡儿大学（如图 5）。

图 5 笛卡儿大学

同时，巴黎还有著名的数学研究机构庞加莱研究所（Institut Henri Poincaré，简称 IHP）（如图 6）。值得一提的是，庞加莱研究所的现任所长为菲尔兹奖章获得者、法国数学家塞德里

克·维拉尼（Cédric Villani, 1973- ），其对数学教育十分关心，是当前法国中小学数学教育改革的核心人物，曾受邀在上海举办的第 14 届国际数学教育大会上作题为《社会中的数学》的大会报告。

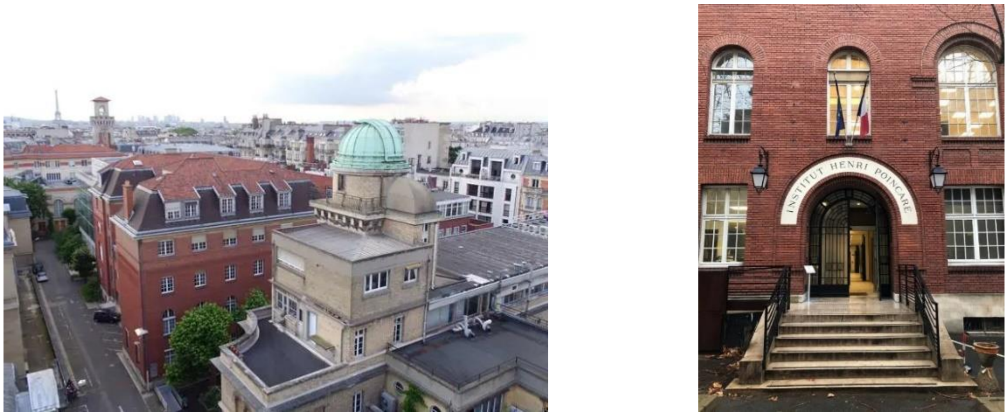


图 6 庞加莱研究所

在庞加莱研究所的对面，是 2023 年开放的巴黎数学博物馆，也被称为庞加莱之家（Maison Poincaré），该博物馆是塞德里克·维拉尼的心血结晶，这座数学博物馆由七个空间组成，围绕一个永久展览而构建，其原创的博物馆计划结合了操作、互动设备、视频、收藏品，甚至是沉浸式混合现实体验（如图 7）。它还会围绕一些主题提供一系列活动、研讨会和临时展。在笔者参观之际，其正在开设一场以“人工智能中的数学”为主题的临时展。

图 7 巴黎数学博物馆

一些大学也会以数学家的名称作为其数学系所在建筑的名称。如巴黎西岱大学（Université Paris Cité）数学系所在建筑的名称为苏菲·热尔曼大楼，笔者有幸参观此楼，其中的数学氛围浓郁，数学学术活动频繁，楼中图书馆所收藏的数学、数学史与数学教育书籍非常丰富，让人流连忘返。

图 8 巴黎西岱大学的苏菲·热尔曼大楼

在巴黎市中心塞纳河左岸，坐落着一座永久纪念法国历史名人的圣殿先贤祠（Le Panthéon），其中安葬着伏尔泰、卢梭、雨果等 72 位对法兰西作出非凡贡献的人。在这些先贤中，也不乏数学家的身影，安葬在其中的法国数学家有拉格朗日、蒙日等（如图 9）。

图 9 巴黎先贤祠中的数学家

2 建筑之用

除了以上显性的数学文化元素之外，巴黎的各类著名建筑中也融入了较多隐性的数学文化元素，其多与数学中的对称、比例和各类几何图形有关，接下来，就让我们一起欣赏一下巴黎建筑中的数学文化。

第一站，我们可以来到位于巴黎市中心城区，地处塞纳河中央西堤岛上的巴黎圣母院（如图 10），这是欧洲最著名的哥特式大教堂，因雨果的同名小说而闻名全世界。

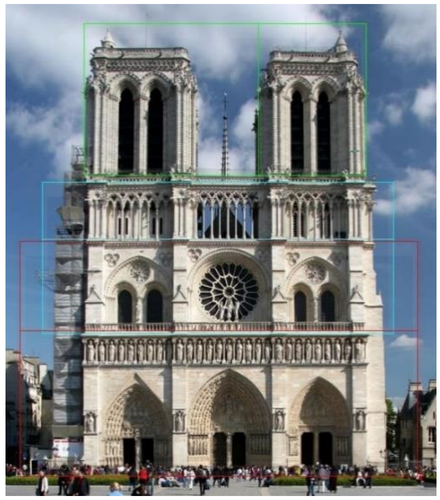


图 10 巴黎圣母院

初临巴黎圣母院，就会被其美感所吸引，这与其中蕴含的众多黄金比例有关。首先，巴黎圣母院的正面高度和宽度之比接近 0.618，其次，立柱和装饰带将里面又分成了 9 块小的黄金比例矩形，然后，它的每一扇窗户的长宽比，同样也使用了 0.618 这个比值，更为让人惊叹的是，第一层顶部和第二层顶部的垂直高度（图中 2 个红色矩形的高）、第二层顶部和第三层顶部的垂直高度（图中 2 个蓝色矩形的高）和左上半部分和右上半部分的水平宽度（图中 2 个绿色矩形的水平宽度）之比均为黄金比例。

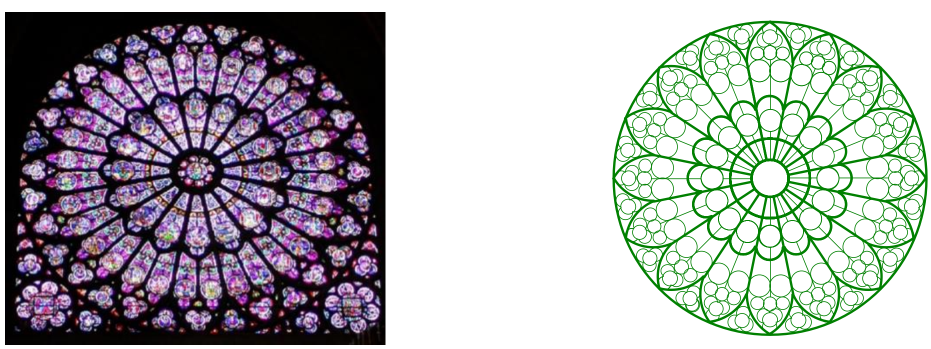


图 11 巴黎圣母院玫瑰窗

走进巴黎圣母院内部，其中蕴含的几何元素更是琳琅满目。最具特色的是玫瑰花窗，如图 11 所示，这一复杂的图形由三叶草、四叶草、玫瑰花结、球形三角形等不同的几何图形组成，而这些几何图形均是通过大小不同的圆所组合而成。值得一提的是，巴黎圣母院附近的圣礼拜教堂的花窗也十分精美，值得欣赏品鉴。由于受到 2019 年一场大火的影响，这座教堂正在重建中，相信在不久的将来，大家又能前往其中亲身体会其中蕴含的数学之美。

第二站，我们可以前往与巴黎圣母院隔河相望的卢浮宫。作为世界四大博物馆之首，卢浮

宫是世界著名的艺术殿堂，以收藏丰富的古典绘画和雕塑而闻名于世。

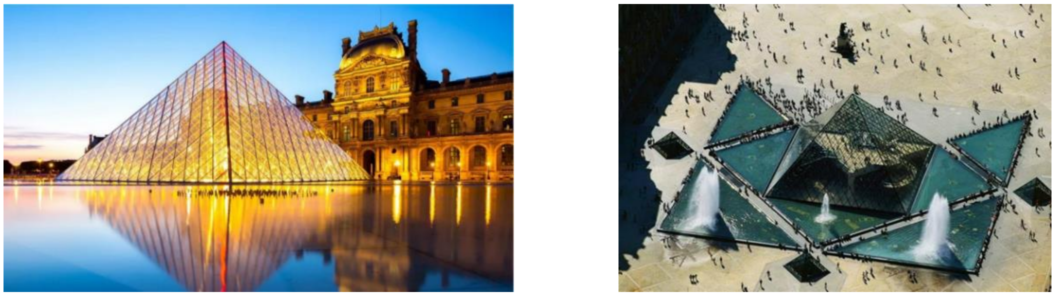


图 12 卢浮宫的玻璃金字塔

卢浮宫的入口是一座玻璃金字塔（如图 12），这一金字塔由著名华人建筑师贝聿铭所设计，他在设计中借鉴了古埃及的金字塔造型，采用了数学上的正四棱锥结构。同时，玻璃金字塔由 603 块玻璃菱形面板和 70 块玻璃三角形面板组成。更有意思的是，在这座大型玻璃金字塔的南北东三面还有三座五米高的小玻璃金字塔作点缀，与七个三角形喷水池汇成平面与立体几何图形的奇特美景。

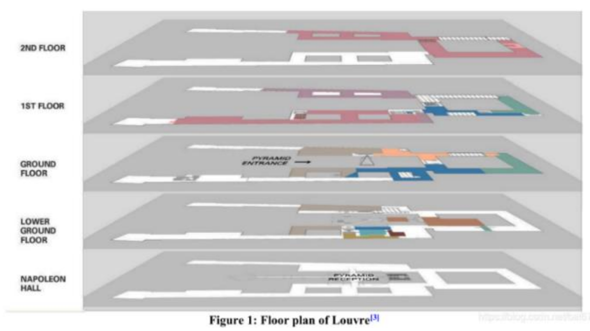


图 13 2019 年美国大学生数学建模竞赛中的卢浮宫

进入卢浮宫之后，可以感觉到其内部空间非常庞大，其整体形状呈一个倒“U”字型，总共有五层（包括地下两层），比较有趣的是，2019 年美国大学生数学建模竞赛 D 题的赛题就以卢浮宫为主题（如图 13），要求参赛者设计出卢浮宫的紧急疏散计划。

第三站，让我们前往矗立在法国巴黎市战神广场上的埃菲尔铁塔，其建成于 1889 年世界博览会期间，用以庆祝法国大革命胜利 100 周年。

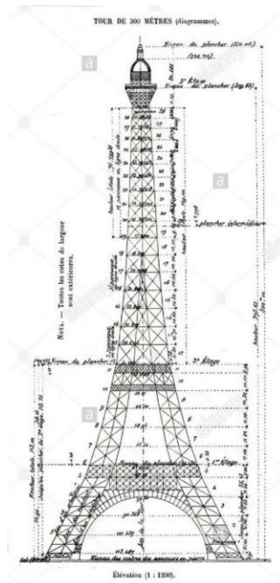


图 14 埃菲尔铁塔示意图

埃菲尔铁塔的外观就蕴含了丰富的数学元素，如图 14 所示，首先，埃菲尔铁塔高 300 米，共有三个观景平台，分别在离地 57 米、115 米和 276 米处，第二层平台接近整座铁塔的黄金分割点。其次，塔的周长和高度之比，近似等于圆周率的近似值 3.14159。最后，塔梁是根据斐波那契数列来设计的。

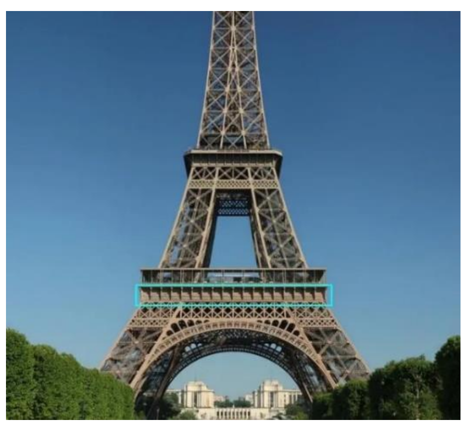


图 15 埃菲尔铁塔

埃菲尔铁塔上的数学元素也相当多，如图 15，在埃菲尔铁塔第一个平台下方四周的壁面上，共刻有 72 个法国科学家、工程师、数学家与其他知名人士的名字，以此来铭记他们做出的贡献，其中入选的法国数学家为数众多，包括有彭赛列、拉格朗日、贝朗热、拉普拉斯、勒让德、柯西和傅里叶等。

3 艺术之美

巴黎是艺术之都，坐落着众多的博物馆，收藏着数不胜数的顶尖艺术珍品。在这些精美的艺术品中，也无处不藏着数学文化的踪影，让人流连忘返，以下试举几例。

在前文中提到的卢浮宫中，有三大镇馆之宝，分别为萨莫色雷斯的胜利女神、米洛的维纳斯和蒙娜丽莎，均为欧洲古典艺术的巅峰之作，我们艺术中的数学文化之旅就从这三宝开始。

图 16 卢浮宫三宝

其中，年代稍早的是《萨莫色雷斯的胜利女神》（图 16 左），为约公元前 200 年被创作出的大理石雕塑，从中可以看到和感受到胜利女神展翅欲飞的雄姿。这种动态的感觉是怎么来的呢？首先，雕像是三角形构图，但是跟古典主义的正三角形构图不一样，而是斜的三角形，给人向前冲锋的感觉，其次，胜利女神的肢体、衣纹等曲线，全都具有一种向前、向上运动的节奏，最后，翅膀下方有两根羽毛翘了起来，似乎在风中抖动。

创作于约公元前 150 年的《米洛的维纳斯》也同样具有动态感（图 16 中），其整体是菱形，全身形成自然的“S”形曲线，那维纳斯之美，美在哪里呢？其与数学中的比例有关，以肚脐作为分界线，她身体的比例约为 0.618 : 1（2019 年高考数学全国 I 卷第 4 题以此为背景），脑袋和身体的比例是 1：8，也就是人们经常说的九头身。

《蒙娜丽莎》是意大利文艺复兴时期画达芬奇创作的油画（图 16 右），其中同样蕴含着黄金比例，蒙娜丽莎的下颌作为分界线，较小部分与较大部分的比值为黄金比例。蒙娜丽莎搭起的双手撑起画底，与头部构成了一个黄金三角形。同时，其中还蕴含了对数螺线，从而使得画面的和谐与从容由此而生。最重要的是，达芬奇精准地运用了透视原理和构图技巧，蒙娜丽莎的轮廓线和头部位置位于画面的中心，而背景则以错落有致的景物构成，增加了画面的深度和层次感。

除蒙娜丽莎外，卢浮宫中大量的画作运用了透视法，使得画作中的远近景观和人类的真实视觉体验一致，用数学的眼光去观赏这些画作，能够使游览更有趣味。值得一提的是，由绘画中发源的透视法其后在数学中发扬光大，形成了射影几何这一重要的数学分支。

在古典主义之后，引领世界美术界潮流的是印象主义流派，而这一流派正是产生于 19 世纪 60 年代的法国巴黎，印象派的代表性画家包括莫奈（C. Monet, 1840-1926）、德加（E. Degas, 1834-1917）和梵高（V. W. van Gogh, 1853-1890）等。那么，印象派的画作中隐藏着哪些数学元素呢？让我们以收藏于巴黎博物馆中的三幅印象派画作为例说明。

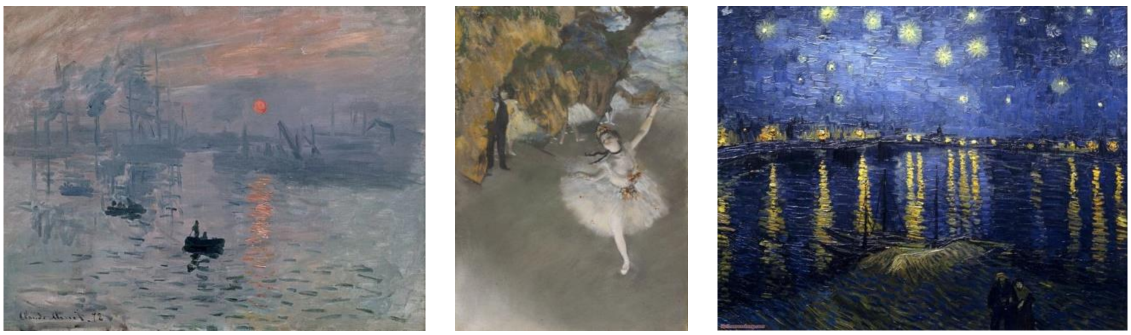


图 17 印象派画作

《日出·印象》是莫奈于 1872 年在勒阿弗尔港口创作的一幅油画。该画描绘了晨雾笼罩中的日出港口景象（图 17 左），在这幅画中，那轮红红的朝阳及其在水面的光影正好在画面的黄金分割位置，同时，在这幅画中，除了一个可辨的小船轮廓，海港和岸边的细节不再清晰，给人一种整体模糊的感觉，这正是印象派的主要特征，通过对象并不清晰的姿态和其微妙细腻的光线变换表现更丰富的情感内涵和层次，从而使其作品有了更强烈的感染力。用数学语言表述，就是通过作者把古典空间映射推广到广义空间，将现实物体与情绪感觉建立起了联系。

对于古典艺术中的动态感，印象派有不同的理解，《舞台上的少女》是德加的名作之一（图 17 中），其画了一位跳芭蕾的少女在单腿旋转的一刹那。在这幅画中，人物的表情不再清晰，那模糊的舞台背景，飘逸的舞裙，飞扬的发辫，迷幻的颜色给人以眩晕的感觉。画家巧妙地画出了旋转的印象，让整个画面舞动了起来。在印象派画作中，艺术家不再满足于只刻画某个时间界面的一瞬间，而要刻画无穷小时间段，用数学的话说，他们放大了无穷小时间到一个差分的微小时间，用 Δt 替换 $\mathrm{d}t$，并在 Δt 里研究运动物体的变化状态。

说到印象派，就不得不提到梵高，《罗纳河上的星空》是梵高极富盛名的星空三部曲之一（图 17 右），画中天空的星光与岸边灯光的倒影，互相呼应，夜晚的星星被它们自己的光晕环

绕成圆形。比较有意思的是，画面中不同形状的线条显示了不同的场景，天空的笔触是横竖交错的短线条，显示出天空的空阔。海水的笔法是横向的短线条，显示出海水的动感和方向感。近景的沙滩笔法是倾斜的短线，显示出沙滩的凌乱。不得不说，梵高是几何线条运用大师，欣赏梵高的作品总是会被其线条运用的丰富多样与恰当合理所惊叹。

最后，谈谈现代艺术与数学之间的联系，法国是现代艺术的发源地之一，尤其是现代艺术中的野兽派艺术就流行于法国巴黎，当代西方影响最为深远的艺术家毕加索（P. Picasso, 1881-1973）在巴黎创造了立体派风格，巴黎的蓬皮杜艺术中心是世界著名的现代艺术馆，其中大量展出了抽象艺术的作品。以下分别从野兽派艺术、立体派艺术和抽象艺术谈谈现代艺术与数学的联系。让我们以收藏于巴黎的三幅现代艺术作品为例说明。

图 18 现代艺术

野兽派画家热衷于运用鲜艳、浓重的色彩，往往用直接从颜料管中挤出的颜料，以直率、粗放的笔法，创造强烈的画面效果，充分显示出追求情感表达的表现主义倾向。马蒂斯（H. Matisse, 1869-1954）是法国著名的画家，也是野兽派的创始人和主要代表人物。《奢华、宁静和愉悦》是马蒂斯的代表作之一（图 18 左），这幅画运用了小点子，红和绿、黄和紫等互补色，虽然色彩完全脱离了真实感，但却有很强的表现力。马蒂斯对于绘画对象特征性的元素，用强烈的色彩强调，而对于非特征的元素干脆忽略不计。这正是 19 世纪末到 20 世纪初科学的迅速发展和数学的广泛普及中“抽象”对他的影响。

立体主义的艺术家致力于以许多的角度来描写对象物，将其置于同一个画面之中，以此来表达对象物最为完整的形象。其中的代表性作品包括毕加索的《母与子》（图 18 中），这个时期毕加索的绘画首先打破了传统绘画中只能按照一个固定视点观察事物和表现事物的传统方法，把三度空间的画面归结成平面。因为把不同视点所观察和理解的形诉诸于画面，从而表现出时间的持续性。毕加索在艺术创作手法上的突破，如同数学上非欧几何的研究打破经典欧氏几何

的垄断地位，揭示了并非只有一种艺术表现方法能够准确地描绘现实世界。

抽象艺术是指任何对真实自然物象的描绘予以简化或完全抽离的艺术，它的美感内容借由形体、线条、色彩的形式组合或结构来表现。康丁斯基（W. Kandinsky, 1866-1944）的《黄 ·红·蓝》可谓是其抽象艺术的代表作（图 18 右），这幅饱含规则形状、直线以及几何图形的画作巧妙地结合了作者热烈释放的情感，结合的方法是在几何结构与造型中配上明亮的光与柔和的色彩，使抽象的线条绘画富于激情和浪漫。抽象艺术展现的不是事物的表面，而是更深层次的宇宙结构，在此背景下，数学的思维方式就成为了艺术创作的基础。在蓬皮杜艺术中心里面就展出了很多用几何元素构成的画作。

4 若干启示

通过以上对巴黎地理、建筑和艺术中数学文化的简要介绍，相信各位读者可以感受到巴黎浓厚的数学文化氛围，实际上，海明威的那句名言完全可以改述为：“巴黎是一席流动的数学文化盛宴”。同时，以上数学文化的内容也可以给中小学数学教育带来若干启示。

首先，笔者在巴黎的各个博物馆经常能看到法国中小学教师带着学生外出游学，通过现场讲解，学生得以身临其境地感受文化的魅力，这与从书本上学习是完全不同的感受。巴黎丰厚的文化资源固然让人艳羡，这种沉浸式学习的方式则更值得借鉴，在国内，研学旅行受到了越来越多的关注，而以数学文化为主题的研学旅行还并不多见。在此方面，还有较多研究空间。

其次，五育融合是当今教育教学中的热点话题，其中，数学与美育之间的联系还探讨不多。从以上的介绍中可以看出，生活中并不缺少美，而是缺乏从数学的视角发现美的眼睛，在巴黎的不少著名景点、博物馆的纪念商店中都有一些书籍，从数学的角度介绍这些建筑的特征和赏析艺术品，其中黄金比例、透视等数学元素更是经常出现。在中小学的数学课堂教学中，如何恰当地选取合适的素材，从而渗透数学学科美育，还有待深入探索。

最后，从上文的介绍中可以发现，数学与艺术有着紧密的联系，数学与艺术就像硬币的两面，两者之间不可分割。从某种程度上来说，数学研究也需要丰富的想象力，其与艺术家所需要的想象力接近，甚至更为丰富。同时，艺术创作更是与数学密不可分，无数艺术家从数学中获得灵感，从而取得创作上的突破。在跨学科融合愈加强调的今日，随着从 STEM 到 STEAM 的转变，相信数学与艺术的跨学科融合将会为数学教学带来更多精彩。

目 录

CONTENT

历史研究

美英早期平面几何教科书中的多边形外角和定理

李 栋，沈中宇

（苏州大学数学科学学院, 苏州 215006）

1 引 言

多边形在现实生活中普遍存在，它是初中数学图形与几何领域的重要内容。著名数学家陈省身（1911-2004）先生曾说过："多边形外角和性质是一个比内角和性质更好的结论。"本文对多边形外角和定理进行研究。《义务教育数学课程标准（2022 年版）》要求初中阶段的学生"了解多边形及多边形的顶点、边、内角、外角与对角线等概念"并"探索掌握多边形的外角和公式"[1]。苏科版与人教版教科书都不约而同地从三角形知识引入，先学习平行线的相关知识、三角形、多边形内角和公式，人教版更是将三角形与平行线知识独立成两章。可以认为多边形的外角和公式是对三角形及多边形相关知识的进一步拓展，也为之后探究多边形镶嵌、正多边形与圆的关系等内容奠定了基础。除此以外，沪科版将三角形内外角和相关内容归属于命题与证明这一小节中，并运用信息技术，结合几何画板对三角形外角和定理进行实验性证明。

事实上，无论教科书的编排顺序如何，多边形外角和知识始终是初中数学的重点几何内容。目前，大多数教科书上采用逻辑推理的方法得到多边形外角和定理，从现有文献来看，教师多采用书上的证明方法进行教学设计[2-4]，但也有少数教师结合了历史上的证明方法进行教学[5-6]。此外，教师在教学过程中时常出现对定义理解不够深刻、忽视外角和定理证明方法多样性等问题。

有鉴于此，本文聚焦多边形外角和定理，对 19 世纪初期至 20 世纪初期出版的美英平面几何教科书进行考察，尝试回答以下问题：早期美英平面几何教科书中，外角的定义有哪些？多边形外角和定理如何证明？多边形外角和定理的应用有哪些？

2 研究对象

基于此，笔者翻阅了1829-1925年间的69本英美平面几何教科书，其中61本出版于美国，8 本出版于英国，年代分布表如图 1 所示。对于出自同一作者且内容无明显差异的教科书，视为同一种，并以出版最早的版本为准。

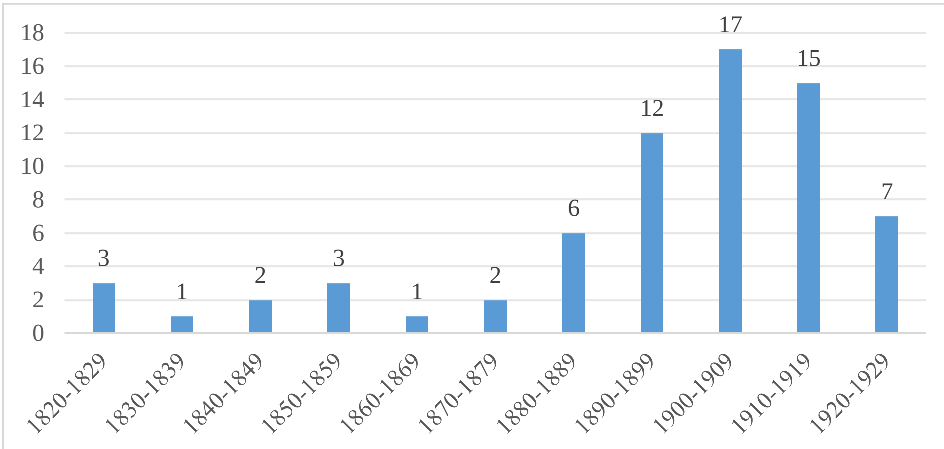


图 1 69 种英美几何教科书的时间分布

本文将分为三个部分对多边形外角和进行探讨，首先对于问题 1 和问题 2，笔者按照顺序进行教科书原文的检索，分类出不同的定义方法以及不同的证明方式，并找出最原始出现的版本，接着利用数据图统计频率与年代分布，观察它们随着年代分布的研究演变趋势，从而回答问题。最后，对于问题 3，笔者按顺序检索教科书中的习题，探讨该定理在数学学习中的不同应用方式。

3 外角的定义

研究多边形外角和定理时首先需要考察研究对象即多边形的外角，从外角的定义出发考察，发现69种英美教科书中对外角的定义分为以下四种情况。如图2，基于延长线的外角定义有61种教科书出现，最为常见。基于平行线的外角定义有 42 种教科书出现，居第二。另外，在这69本教科书中，有两种教科书出现了基于区分的外角定义，有一种出现了基于方向的外角定义。从出现次数来看，基于延长线的外角定义与基于平行线的外角定义处于主流地位。

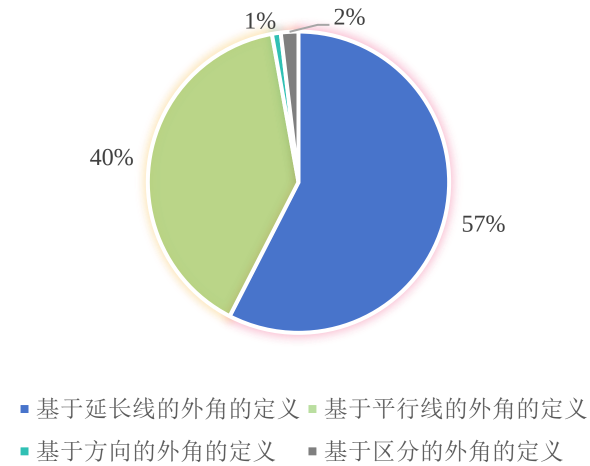


图 2 外角的定义分类统计

3.1 基于延长线的外角定义

61 本教科书利用延长线的方法给出了外角的定义。

基于延长线的外角定义是教科书中对于外角的定义出现最早的，也是到现今为止最为常用的一种定义方法。Walker 给出如下定义：如图 3 中左图所示，通过延长多边形的一条边，从而该延长线与相邻边产生的新的角称为外角[7]。

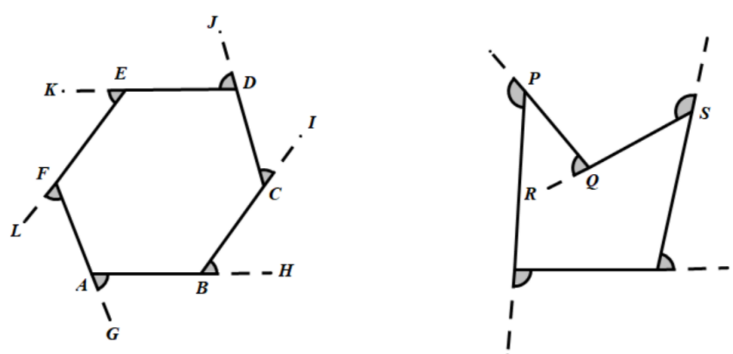


图 3 基于延长线的外角

需要注意的是，19 世纪前期的教科书中研究多边形外角时大多是在凸多边形中考虑的，但 Newcomb 提醒读者与教师，如图 3 中右图所示，多边形的外角根据延长线的定义方式其延长线可能会伸入图形内部[8]，从此教科书开始关注凹多边形中外角的定义。虽然定义方式依然一样，但在学习过程中需注意多边形的凹凸性。

3.2 基于平行线的外角定义

42 种教科书根据角在平行线中的位置来定义外角与内角。

其中， Benjamin 最早给出了平行线中外角与内角的定义：如图 4，如果一条直线 *EF* 与一组平行线 *AB*、*CD* 相交，会产生 8 个角，那么 $\angle 2, \angle 3, \angle 5, \angle 8$ 则称为外角[9]。

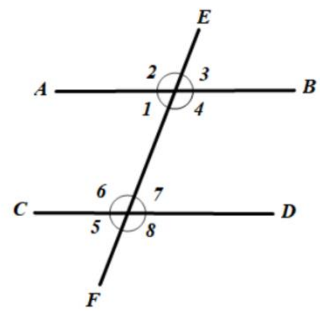


图 4 平行线中产生的角

另外，在给出外角与内角的定义之后，他还进一步给出了平行线中某两个角之间的关系的概念，比如内错角、同位角、同旁内角等。

从以上定义中可以看出，这种定义方式是位于教科书平行线的相关知识部分，利用截取平行线得到不同的角给出一般外角的定义，没有与多边形进行结合。

3.3 基于区分的外角定义

2 种教科书中通过区分内角与外角的方式给出了外角的定义。

其中，如图 5，Young 给出了一个角的外角的定义：当两条射线从同一顶点出发形成两个角，为了区分这两个角，我们称其中任意一个为内角，另一个则称为外角[10]。

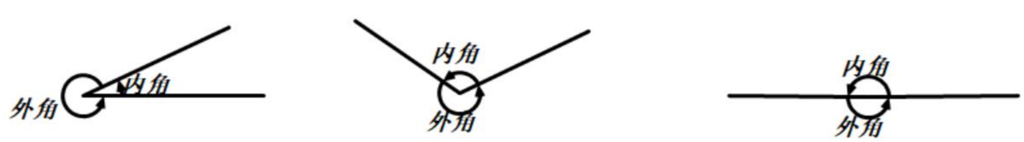


图 5 基于区分的内角与外角

从以上定义可以看出，基于区分的外角定义也没有与多边形进行结合，是纯粹从角的概念出发，角由一个顶点与两条射线组成，自然将平面划分为两个部分，从而会产生两个角，为了

研究方便，对这两个角进行区分才有了该种定义方式。

3.4 基于方向的外角定义

1 种教科书中出现了新颖的定义方式，即利用方向的改变定义外角。

Walker 给出了三角形外角的定义[7]，即基于延长线的方法给出的外角定义。从那以后大多数教科书都沿用该种静态定义方法，但在 1895 年教科书中出现了动态定义的方法[11]：将线段按一定顺序标注，顶点处线段方向的改变即为三角形的外角。如图 6 所示，给线段标注上方向，再统一利用逆时针改变方向，线段 AB 最初为 ST 方向，在顶点 B 处改变了方向，变为 BC 方向，由此在 B 点处由于方向的改变产生了 $\angle 1$，从而该角称为三角形的一个外角。

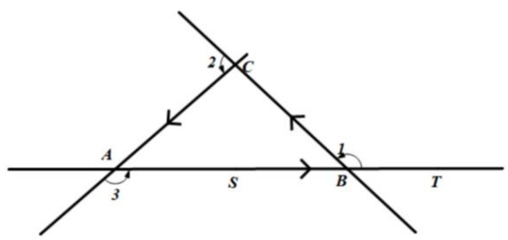


图 6 基于方向的外角

从以上定义可以看出，它将线段与方向进行结合，让学生初步感受有方向的线段，也是对后续学习向量的一个启蒙。同时，这种动态定义在每个顶点处只产生一个外角，而一般的静态定义，即基于延长线的定义方式在每个顶点处会有两条延长线从而会产生两个外角，该种动态定义的方式规避了这种现象的产生。

3.5 讨论

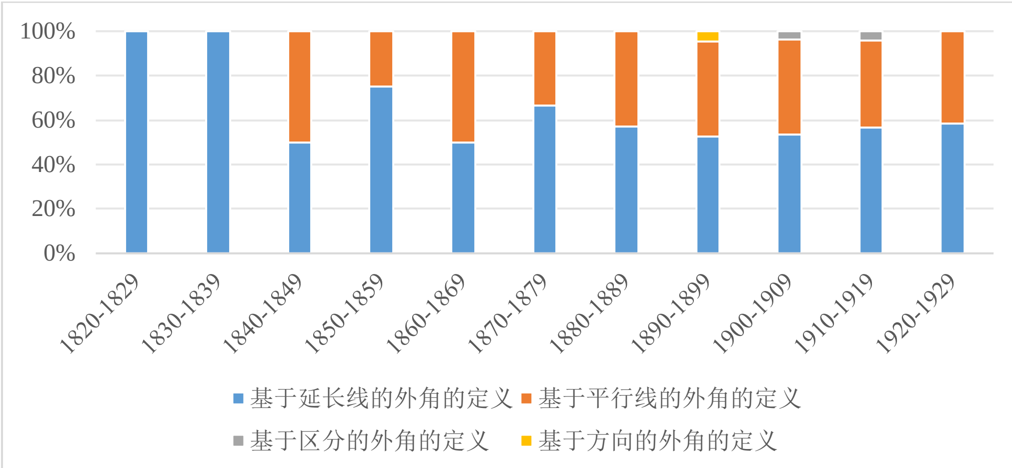


图 7 外角的不同定义的演变趋势

由图 7 可知，19 世纪初期，基于延长线的外角的定义占据全部教科书，也是最早出现的一种定义方法，一直延续到 20 世纪初期，即使在其他方法出现之后它仍处于主流地位，笔者猜测该种方法是在研究多边形外角和时最为简洁的数学方法，所以为了研究的方便性以及数学学习的简洁性，该种方法直到今天仍然广受推崇。

另外，19 世纪中期出现了基于平行线的外角的定义，并且在之后的一百年间仍然存在且逐渐与主流地位的基于延长线的外角的定义占比相同。它所给出的外角的定义是在平行线中产生的，主要是为平行线的有关性质服务，在截取平行线之后赋予每个角一个名字，再去考虑两两之间的关系，比如内错角、同位角、同旁内角等。这种外角的定义与多边形外角联系较少，仅仅局限于平行线中，所以笔者猜测由于它的局限性其最终没有得到广泛推崇。

最后，通过图表可发现，在 20 世纪初期还涌现出两种新方法，分别是基于区分的外角定义以及基于方向的外角定义。这两种新的定义方式另辟蹊径，尤其是基于方向的定义，给予线段以方向，很好地体现了数学的动态魅力，使数学学习变得更加生动。由此可见，许多新方法的出现会给予数学无穷的生机，因此仍有更多的方法等待着我们去发掘。

4 多边形外角和定理的证明

统计发现 69 种英美教科书中多边形外角和定理的证明分为以下三种情况，如图 8 所示。

其中，基于内角和定理的证明出现频率最高，高达 52 种。基于平行线的证明次之，有 17 种。另外，有一种教科书中出现了基于方向的证明。可见，基于内角和定理的证明也就是纯粹等式推导的证明最为广泛且被大众所接受。

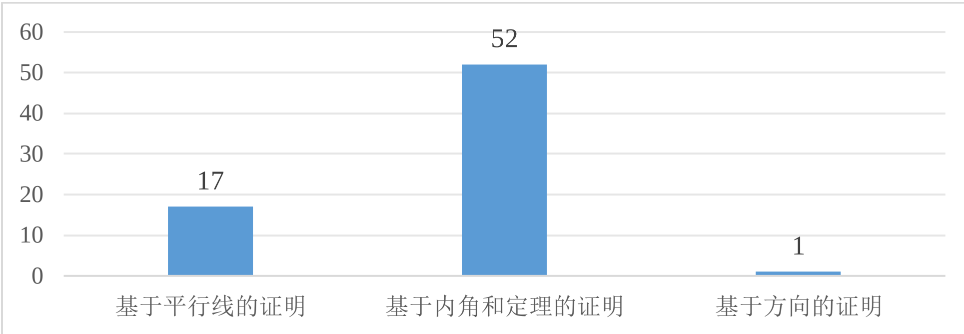


图 8 多边形外角和定理的不同证明出现频率

4.1 基于内角和定理的证明

52 种教科书通过内角和定理进行证明，我们推测作者可能受到了古希腊数学家普罗克拉斯（Proclus, 约 411-约 485）的影响。该种证明方法最先由古希腊数学家毕达哥拉斯（Pythagoras of Samos, 前 570-前 490）发现，之后古希腊数学家亚里士多德（Aristotle, 前 384-前 322）在著作中两次引用，最终由普罗克拉斯（Proclus, 411-485）给出完整证明。

Playfair 给出了一种证明方法，这种方法也是普罗克拉斯使用的方法[12]。如图 9 所示，多边形的每一个顶点处都产生一个平角即 2 个直角，因此内角和与外角和之和为 $2n$ 个直角，再利用前面所学习过的多边形内角和公式：$180°\times(n-2)$，因此用内外角之和减去内角即可得到外角和为 $360°$,也就是四个直角。

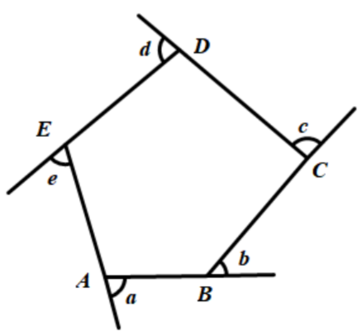


图 9 基于内角和定理的证明（1）

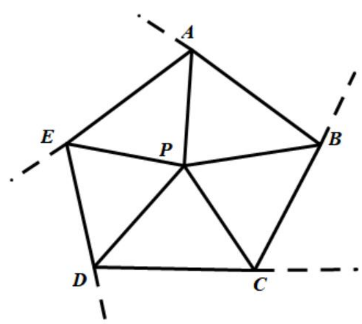


图 10 基于内角和定理的证明（2）

另外，该种证明方法还有另一种思路：从多边形内部任取一点，将多边形分割为 n 个三角

形，由于三角形内角和为180°可知多边形内角和与 P 点处的所有角总和为 n 个平角，而通过延长边构造出外角，如图 10 所示，内角和与外角和总和也为 n 个平角，因此可知外角和刚好就是 360°。[13]

从以上方法可知，利用内角和定理去证明外角和定理体现了数学学习的循序渐进，并且这种方法很好地体现了等式的性质，利用两个等式相消是研究数学的常用手段。这是一种纯粹数学推理的过程。

4.2 基于平行线的证明

17 种教科书基于平行线的性质给出了定理的证明。

Hayward 所著的教科书中出现了一种与上述不同的证明方法[14]。表述如下：从平面内任一点出发作各边的平行线，将所有外角围绕在同一个顶点处，如图 11 所示，可发现外角之和刚好是四个直角。

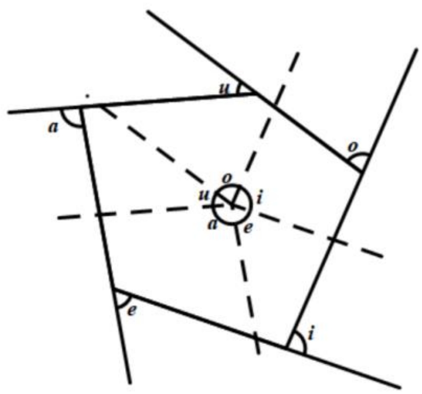


图 11 过平面内一点作平行线

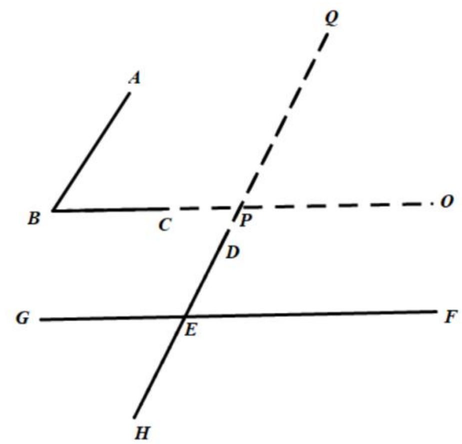


图 12 平行线所成角

该种方法的严格证明需要利用同一平面内平行线的性质，Durell 给出了严格证明[15]。表述如下:如果两个角的两边分别互相平行，则两角相等或者互补。如图 12，$AB /\!/ DH, BC /\!/ GF$，延长 BC 与 HD 相交于点 P，利用平行线的性质即可证明。

另外，Lyman 给出了实验的验证方法[16]，将多边形的外角裁剪下来，放在同一顶点处发现刚好为 360°。这种方法是基于平行线的方法实现的，同一平面内，分别平行的两组直线所产生的夹角相等或互补，利用该性质将所有角的顶点放在同一位置。此种方法只能作为验证定理的一种手段，作为证明手段来说繁琐且不够严谨。内角和定理证明过程中会用到毕达哥拉斯的

方法即利用平行线的性质进行角度转化，同样在学习外角和过程中教师提醒给出思路学生思考完成该种方式的证明，因此不失为一种很好的拓展延伸方法。

4.3 基于方向的证明

一种教科书上给出了基于方向的证明，我们猜测其受到了德国数学家提波特（Thibaut, 1775-1832）的证明方法的影响。

在 1829 年之后的很多年间，教科书上基本都采用以上两种方法进行证明。终于在 1895 年的教科书中出现了动态定义的方式，同时它也采用动态定义的方法来进行证明[11]。早年，提波特（Thibaut, 1775-1832）也使用了这种旋转方式给出了粗略证明，如图 13 所示。具体表述如下：线段沿着逆时针方向进行旋转，最初是 AB 方向，最后又回到初始 AB 方向，因此认为旋转角度刚好是一周 360°，而总旋转的角度在动态定义下即为每个角的外角之和，因此得到该定理。

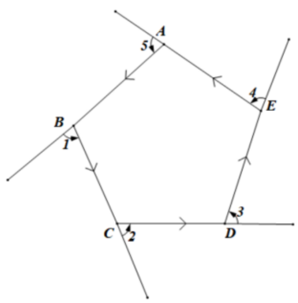


图 13 给定方向的五边形

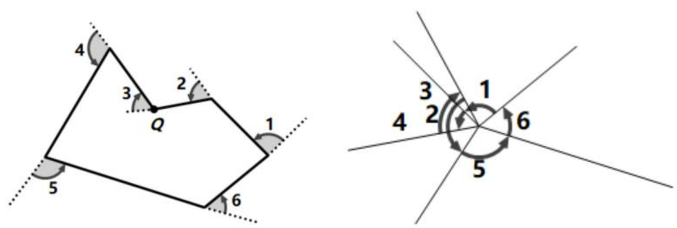


图 14 凹多边形的情形

从以上证明可知，该种证明给线段标以方向，与基于方向的外角定义密不可分。这种方法比基于平行线的证明以及基于内角和定理的证明更加直观，体现数学的动态美。

下面我们作为一个拓展来对凹多边形进行讨论。首先认定一个事实，多边形外角和为360°该定理对于任何多边形都成立，也就是说对于凹多边形同样成立。考察发现在调查的 1829-1925 年间的 69 本教科书中一共有两本出现了凹多边形情况的证明，他们的证明方式都采用动态定义的方式，最早出现在 1885 年的美国教科书中，具体表述如下：根据动态定义的方式，如图 14，在 Q 点处依然可以找到其对应的外角，只不过此时延长线伸入了图形内部，根据方向示意可知其旋转方向与其他角相反，因此我们给他取名为“负角”，这里负的含义有两层：一是指与规定方向相反，二是计算时带上负号。我们同样利用基于平行线的证明方法，画出示

意图如下，依然可得 $\angle 1+\angle 2+(-\angle 3)+\angle 4+\angle 5+\angle 6=360°$ 。[17]

4.4 讨论

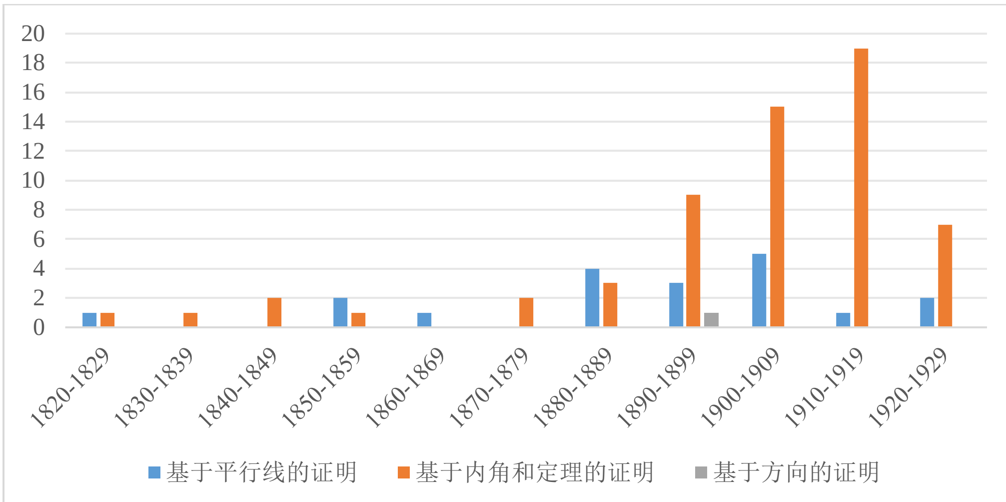


图 15 不同证明的年代分布情况

由图 15 可知，基于内角和定理的证明使用频率最广泛，且随着时代进步，出现的频率也逐渐增加。基于平行线的证明方法出现的频率较少些，在 19 世纪末 20 世纪初期时使用频率达到高峰，笔者认为其方法相较于利用内角和定理的证明方法来说较为繁琐，因此使用不够广泛。而基于方向的证明方法很少出现，这种方法具有一定创新性，可见虽然在经典方法盛行的情况下，依然有人思考创新型方法，值得我们学习。最后根据年代分布图可以看出，随着现代化进程的推进，证明方法出现多元化，也有待我们去探索更多新型的方法。

5 多边形外角和定理的应用

在考察中发现多边形外角和定理的应用多局限于数学内部，大致分为下面三种情形。

5.1 多边形内角和定理的证明

3 种教科书给出了利用外角和证明内角和定理的练习。

数学是融会贯通的，在学习完外角和定理后我们可以实现内外角和定理的互推，不管是在苏科版教科书中还是早期教科书中，都在先学习了多边形内角和定理，再学习多边形外角和定

理，通常我们利用内角和定理的结论来证明外角和定理，在 1885 年的美国教科书中就已经出现了要求学生利用外角和定理去证明内角和定理的习题[17]，证明方法依然采用内外角和减去外角和的方式，帮助学生进一步巩固多边形的内外角和定理之间的联系。

5.2 正多边形中的计算

31 种教科书给出了利用外角和证明内角和定理的练习。

多边形外角和是一个定值的性质是一个非常好的性质，特别是在计算中更为方便，教科书中给出了与其相关的命题与练习[18-20]。大致分为三种类型，第一种是有关正多边形边数与内角、外角的题目。有以下几种命题方式：

命题 1：正多边形每个外角度数为$\frac{360°}{n}$（n 为边数）。

命题 2：正多边形每个内角度数为$180°-\frac{360°}{n}$（n 为边数）。

例题 1（存在性）：正多边形的外角有可能是 70°,72°,75°,120° 吗？

例题 2：正多边形的一个外角等于直角的三分之一，那么该多边形是几边形？

第二种类型是有关中心角与外角的关系，比如下面的命题。

命题 3：正多边形的每个中心角度数等于一个外角的度数，如图 16 所示$\angle a=\angle x$。

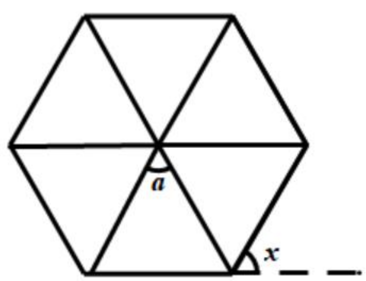


图 16 正多边形的中心角与外角

第三种类型是从内角与外角的角度关系出发讨论，有如下例题：

例 3（求角度关系）：

正七边形的每个外角等于内角的多少分之一？

正 n 边形的每个外角等于内角的多少分之一？

（如果 $n=3,4$ 看看找到的结果是否为真）

上述的例题在教学过程中可以分难度、分层次进行教学设计，帮助学生理解、巩固所学内容。

5.3 一般多边形中的计算

多边形中利用外角和定理进行计算的习题多是利用内角与外角之间的角度关系，笔者将其分为和差关系以及倍数关系。和差关系的问题一般有：内角和减去外角和为540° 的多边形是几边形？倍数关系的有：内角和等于外角和的多边形有几条边？如果内角和是外角和的两倍呢？如果外角和是内角和的两倍呢？

6 结论与启示

以上可以看到，本文所提出需要解决的三个问题均有了结论。首先，对于外角的定义，按照出现顺序分类为四种并讨论了其演变趋势。其次，对于外角和定理的证明方法，本文所考察的 1829 至 1925 年间的 69 本教科书中主要采用三种方法进行证明，分为基于内角和定理的证明、基于平行线的证明以及基于方向的证明。最后，对于多边形外角和的应用，给出了其在数学上的三种应用方式，涵盖证明与计算。以上种种，为今日教学带来了诸多启示。

其一，强化知识理解。美英教科书为教师的教学提供了丰富的素材，对于外角的定义我们通常只是机械地采用基于延长线的方法给出，但早期教科书种却出现了四种类型，如果在教学过程中通过不同的方式定义外角以及给出不同方式的证明会使得学生对知识理解更加透彻。与现今教科书上不同的是，美英教科书中出现了动态定义的方法，在教学中教师是否可以采用此方法更好地教学呢？从这个角度出发，会是一节不错的课堂，会加深学生对多边形外角的定义以及多边形外角和定理的理解。

其二，渗透数学思想。不同的证明方法可能会蕴含不同的思想方法，教师在讲授数学知识的时候应该注重数学思想的渗透。譬如，采用基于内角和定理的证明过程中我们会板书列出不同的等式，从而相消得到结果，在此过程中我们可以渗透方程的思想；在基于平行线的证明过程中，可以先回顾内角和定理证明时出现的毕达哥拉斯证明方法，从而引导学生进行推广到多边形中，渗透类比思想；另外，在基于平行线的证明方法中，将不同的外角转化为同一个点出发的角，体现出数学中的转化思想。数学思想的渗透是数学学习的重要环节，它能够使得学生

脱离机械做题的魔咒，为我们培养创新型人才打下坚实的基础。

其三，实施学科德育。学科德育要求我们不仅要关注知识的传授，更要注重学生品德和能力的培养，实现知识与德育、教书与育人的统一。教师利用数学史完善课堂的设计，不仅可以使学生看到现今教科书以外的多种方法与思路，还可以使学生更好地了解数学史以及数学家的故事与贡献，从而激发起学生对于数学学习的热爱，同时本内容出现了许多不同的证明方法，数学研究者们不断探索与追求创新的精神也会带给学生以无穷的启迪与激励。这就是数学史的价值所在，我们相信，数学史与数学课堂的结合会使冰冷的定理焕发出火热的光芒，更加生动的数学教学也是我们一直追求的教育目标。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2022 年版）[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 66.

[2] 杨良畏. 多边形外角和的另类定义[J]. 中学数学教学参考（中旬）, 2018(8): 66-67.

[3] 周杨. 基于数据分析的教学改进——以人教版“多边形内角和与外角和”为例[J]. 数学教学通讯, 2021(8): 6-8, 14.

[4] 刘同军. 多边形外角和公式的探索[J]. 中学数学教学参考（中旬）, 2019(11): 40-42.

[5] 陈晓曦. 核心素养观下几何定理教学的目标定位与策略选择[J]. 福建中学数学, 2019(1): 27-29.

[6] 张仲元. 另眼看“多边形外角和”定理的教学[J]. 中学数学教学参考（中旬）, 2016(6): 68-69.

[7] Walker, T. *Elements of Geometry*[M]. Boston: Richardson & Lord, 1829: 37-38.

[8] Newcomb, S. *Elements of Geometry*[M]. New York: Henry Holt & Company, 1889: 66.

[9] Benjamin, G. *Elements of Geometry*[M]. Boston: Robert S. Davis & Company, 1859: 39-42.

[10] Young, J. W. A. & Jackson, L. L. *Plane Geometry*[M]. New York: D. Appleton & Company, 1916: 13-14.

[11] Edwards, G. C. *Elements of Geometry*[M]. New York: Macmillan & Company, 1895: 18.

[12] Playfair, J. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: A. Walker, 1829: 57.

[13] Davies, C. *Elements of Geometry*[M]. Philadelphia: A. S. Barnes & Company, 1841: 36.

[14] Hayward, J. *Elements of Geometry*[M]. Cambridge: Hilliard & Brown, 1829: 20.

[15] Durell, F. *Plane Geometry*[M]. New York : C.E. Merrill Co, 1904: 76.

[16] Lyman, E. A. *Plane Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1908: 87-89.

[17] Tappan, E. T. *Elements of Geometry*[M]. New York: D. Appleton & Company, 1885: 125.

[18] Slaught, H. E. & Lennes, N. J. *Plane Geometry: With Problems and Applications*[M]. Boston: Allyn and Bacon, 1918: 89.

[19] Betz, W. & Webb, H. E. *Plane and Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1916: 110.

[20] Newell, M. J. & Harper, G. A. *Plane and Solid Geometry with Practical Problems*[M]. Chicago: Row, Peterson & Company, 1918: 91-92.

从形同陌路到亲如一家：关于正余弦定理关系的历史考察

朱峻驻

（华东师范大学数学科学学院, 上海 200241）

1 引 言

正弦定理与余弦定理（下简称正余弦定理）的关系早已被学者们所讨论。这两个定理实际上是等价的[1]。若正弦定理已经得到证明，则余弦定理可作为正弦定理的推论，反之亦然。此外，中学教师们给出的证明方法层出不穷[2,3]。纵观数学史，余弦定理最初是作为勾股定理的推广而诞生的，而正弦定理则源于天文测量，如古希腊天文学家托勒密（C. Ptolemy，约 85-约 168）在研究地心说时便运用了正弦定理的等价形式[4]。那么这两个具有不同起源的定理，其等价关系是如何逐步被世人所认识呢？

近年来，为了开发正余弦定理的教学案例，已有学者在梳理正余弦定理各自发展史时划分出了多个历史阶段[5,6]。鉴此，本文将时间线划分为古希腊的起源、印度与阿拉伯的发展和近代欧洲的完善三个时期，试图探寻正余弦定理的关系及其演变，并寻找其中的动因，为今日教学提供借鉴。

2 形同陌路

演绎几何是古希腊数学最突出的成就，其中最具代表性的著作便是欧几里得（Euclid，约前 325-约前 265）的《几何原本》（下称《原本》）；公元前 2 世纪，喜帕恰斯（Hipparchus，约前 190-约前 120）根据同圆内不同圆心角所对的弦，制作了一张与现今三角函数表相仿的弦表[7]。正余弦定理在此背景中孕育而生。

2.1 余弦定理的几何形式

欧几里得在《原本》的命题II.12 和命题II.13[1]中用几何形式给出了余弦定理的雏形[8]。

---

[1] 指《原本》第二卷命题 12 和命题 13，下文均采用这一记法。

以命题II.13 为例，如图 1，在锐角$\triangle ABC$中，作 $AD \perp BC$ 于 D，则可证明 AC 上的正方形比 BC、BA 上正方形之和小 BC 与 BD 构成的矩形的二倍。

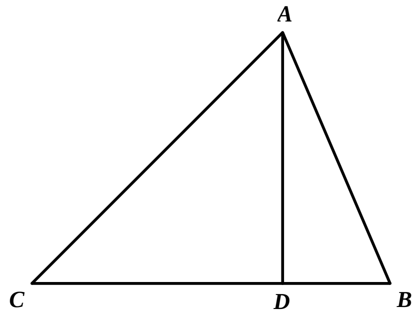


图 1 《原本》第二卷命题 13

用代数式可表示为 $AC^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \times BD$，这与今日余弦定理表达式已相去无几。但该雏形揭示的只是三角形内各线段间的关系，未涉及三角函数，因而它只是作为勾股定理的推广而提出的。

2.2 正弦定理的几何形式

《原本》中并未直接给出正弦定理，只有一些定性描述边角关系的命题。如命题I.18 和命题I.19 分别描述了“大边对大角”和“大角对大边”的关系[8]。然而从命题VI.3（角平分线定理）中我们却能够寻见正弦定理的几何踪影。

如图 2，$\triangle ABC$ 中，CD 平分 $\angle ACB$，$BC = a$，$AC = b$，$AB = c$ [2]，则 $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$，整理得

$$\frac{a}{BD} = \frac{b}{AD},$$

该式与正弦定理相应部分 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ 形式相近。若能证明 BD 与 AD 分别对应 $\angle BAC$ 和 $\angle ABC$ 的正弦，则能说明《原本》中已蕴含正弦定理的几何形式。

如图 2，过点 A、B 分别作 BC 和 AC 的垂线，垂足分别为 F 和 E，再过点 D 作 AB 的垂线，分别交 BE、AF 于 G、H。

由命题VI.3 得 $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$，易知 $\triangle ACF \backsim \triangle BCE$，$\triangle BDG \backsim \triangle BEA$，$\triangle AHD \backsim \triangle ABF$，

[2] 下文均采用这一记号

分别可得 $\frac{AC}{BC}=\frac{AF}{BE}$， $\frac{BG}{BD}=\frac{AB}{BE}$， $\frac{AH}{AD}=\frac{AB}{AF}$，因此有

$$\frac{BG}{AH}=\frac{BD}{AD}\times\frac{AF}{BE}=\frac{BD}{AD}\times\frac{AC}{BC}=1,$$

即 $BG=AH$。

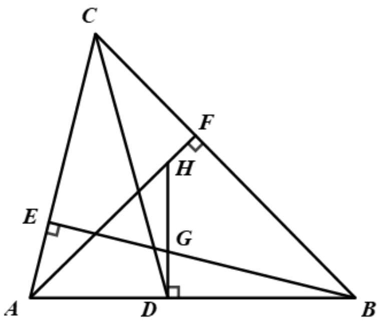


图 2 基于线段定义下的构造

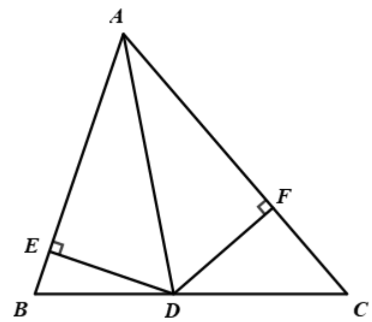


图 3 基于比值定义下的构造

再由 $\triangle BDG\backsim\triangle BEA$， $\triangle AHD\backsim\triangle ABF$，则 $\angle BGD=\angle BAC$， $\angle AHD=\angle ABC$。因此在等圆中，AD 为 $\angle ABC$ 的正弦，BD 为 $\angle BAC$ 的正弦。故正弦定理的几何形式已见于《原本》中。

需注意，上述证明运用了 16 世纪以前三角函数的线段定义，线段的大小是相对于圆的半径而言的。若采用 18 世纪以后的比值定义，则推导过程可更为简洁。

如图 3，$\triangle ABC$ 中，AD 平分 $\angle BAC$，过 D 作 $DE\perp AB$， $DF\perp AC$，垂足分别为 E，F。由角平分线定理可得 $DE=DF$。故得

$$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{DF}{CD}}{\frac{DE}{BD}}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b},$$

即

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}。$$

2.3 正弦定理的等价形式

《原本》中许多命题涉及线段间的比例关系。如命题VI.12 与命题VI.13 分别描述了“求作已知三线段的第四比例项”和“求作两条已知线段的比例中项”[8]。而今日的正弦定理正是以比例式呈现。参考这些命题，我们可以提出这样一个命题：“对于锐角三角形底边上的高以及它的另外两边，其外接圆的直径是这三条线段的第四比例项。”

如图 4，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是底边 BC 上的高，AE 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径，则利用 $Rt\triangle ACD \backsim Rt\triangle AEB$ 有 $AD:AC=AB:AE$，即 $AD:b=c:2R$。同理得 $AD:c=b:2R$。

该命题实际上体现了 19 世纪一些数学家运用辅助直径法证明正弦定理的过程[6]。我们将上两式合并整理为 $\dfrac{b}{\frac{AD}{c}}=\dfrac{c}{\frac{AD}{b}}=2R$ 就会发现该命题不仅与正弦定理等价，而且不涉及三角函数概念。因此，证明过程只需借助《原本》中的公理体系而无需运用三角公式。

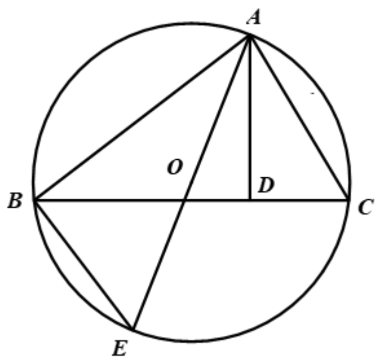


图 4 在外接圆中构造比例关系

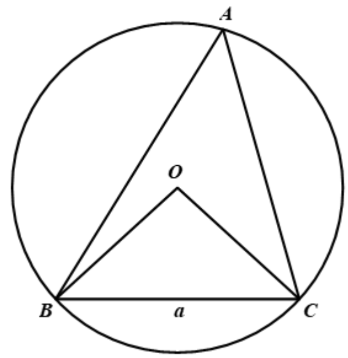


图 5 托勒密所知的正弦概念

若将比例式中的 b 与 c 和 AD 与 $2R$ 分别相乘，即 $b\times c=2R\times AD$，并借助《原本》中“构造矩形”的方式进行叙述，还可得到新命题：“锐角三角形中的任意两边构成的矩形等于第三边上的高与该三角形外接圆半径构成矩形之二倍。”

另外，在托勒密所采用的正弦定理的等价形式中，圆心角所对弦长与今日的正弦概念相去甚远。如图 5，连接锐角 $\triangle ABC$ 外心 O 与其顶点 B、C，则由《原本》命题III.20 易知 $2\angle A=\angle BOC$。

而彼时托勒密熟知的是 $\angle BOC$ 与弦 BC 之间的对应关系，即 $\angle BOC$ 所对弦长等于 $\angle A$ 的对边 a，用表达式可以写作 $crd(2A)=a$。将其与今日正弦定理的变式 $2R\sin A=a$ 对比，可发现前者中的 a 与 $\angle A$ 必须借助二倍角关系进行联系，没有后者那么直接。这一问题也被后来的印度数学家们所注意。因此，也许是这种基于完整弦长的早期三角函数概念阻碍了彼时托勒密等数学家提出正弦定理。

此外，托勒密的《天文学大成》也深受《原本》演绎几何的影响，不仅章节数同为 13，且许多命题与三角学问题仍是借助《原本》中的命题进行证明和解决。虽然代数学已在古希腊兴起，尤其丢番图（Diophantus, 约 246-约 330）已能用代数方法求解某些方程。但在托勒密生活

的年代，几何演绎仍旧是数学研究的主流，代数发展受到局限。我们可以设想，假如托勒密熟知我们今天的符号代数，那么他有可能提出如下式子：

$$\frac{a}{crd(2A)}=\frac{b}{crd(2B)}=\frac{c}{crd(2C)}=1。$$

3 近在咫尺

公元 1 世纪，印度数学家们开始改进正弦的定义，他们不再计算圆心角对应的弦长，而开始用半弦来构造弦表，这相当于现在的正弦线。此外，印度数学家们已经能用代数恒等式来计算正弦值而不像希腊数学家们那样仅靠几何演绎。公元 830 年，阿拉伯数学家花剌子米（al-Khwarizmi，约 780-约 850）所著《对消与还原的艺术》（又译为《代数学》）明确提出代数、未知数、已知数、移项和合并同类项等一系列代数概念[7]。在这样的历史背景下，数学家们对正余弦定理开展了新的探索。

3.1 定理的发展

今日三角学诸多术语取自巴塔尼（al-Battani，约 858-约 929）《星的科学》的拉丁文译本，如正弦、正切、余切等；他还在著作中使用“余角的正弦”即余弦的概念，并提出了球面三角形中的余弦定理 $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$[9]。然而彼时平面三角形中基于三角函数的余弦定理并未被提出。

虽然阿布·韦发（Abul Wefa，940-998）较早地在《天文学大全》中证明了平面斜三角形和球面三角形的正弦定理，但是直到 13 世纪纳绥尔丁（Nasir Eddin al-Tusi，1201-1274）写下《横截原理》以后，平面三角形中基于三角函数概念的正弦定理才被明确提出[9]。

如图 6，在△ABC 中，延长 BA 到 E，延长 CA 到 G，使得 $AE=AC$，$AG=AB$，则由三角形的相似易知 $AB:AD=BE:EF=R:\sin B$，$AD:AC=GH:CG=\sin C:R$。将两式相乘即可得 $AB:AC=\sin C:\sin B$。

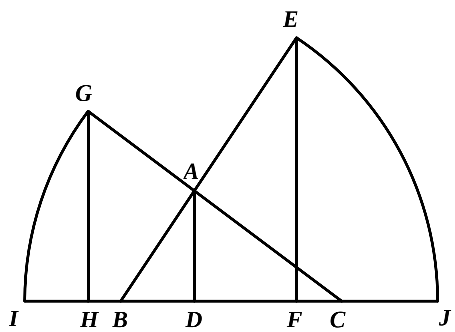


图 6 纳绥尔丁关于正弦定理的证明

总体上，这一时期的正余弦定理及其关系存在以下特点：

首先，正余弦定理都逐步依赖于正弦定义。得益于正弦定义的改进，正弦定理终于被正式提出，而通过“余角的正弦”又引出球面三角形中的余弦定理。这也一定程度上印证了先前的猜想，即不完善的正弦概念阻碍了定理的提出。

其次，余弦定理拥有两种起源的可能。对比源于三角学研究的正弦定理，本时期球面三角形中的余弦定理却与古希腊几何形态的余弦定理之间并非一脉相承。即也可认为余弦定理有两种起源，一种源于古希腊时期的演绎几何，另一种源于阿拉伯时期的三角学研究，两种起源间没有继起关系。

最后，正余弦定理的等价性有了一定佐证。纳绥尔丁在系统地用正弦定理求解三角形时并未注意到在已知两边及其中一边对角的情况下有两个解的可能，也没有提及其他定理或方法的优越性[9]。而我们知道此时如果运用余弦定理便能方便地得到完整解，那么纳绥尔丁及同时代的学者为何只关注正弦定理呢？正余弦定理的等价性启发我们，能用一者求解的问题也必定能用另一者求解。或许这也是纳绥尔丁局限于正弦定理的原因之一，即虽然彼时数学家们还未明晰正余弦定理的等价性，但它的影响依旧客观存在。

综上，本时期正余弦定理逐渐有了以正弦定义为基础的三角学联系，并且余弦定理可能与正弦定理一样有了新的三角学起源。重要的是，此时期正余弦定理的等价性开始显现。

3.2 对等价性的进一步探索

若将上述正余弦定理等价性的间接体现视为古人之留白，那我们今日能否为其补白呢？即当时的数学家是否具备用一者推导出另一者的条件。基于勾股定理，可作如下推导：

如图 7，在△*ABC* 中，延长 *CB* 至 *F*，使得 *CF*=*AC*，作 *CE* 垂直 *AB* 于 *D*，并交 *BD* 的平行线 *FE* 与 *E*。

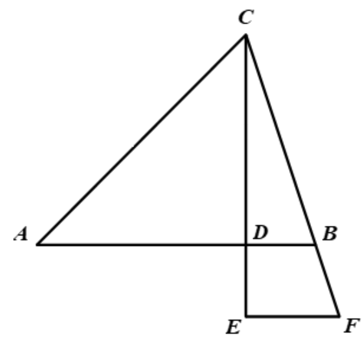


图 7 基于勾股定理的等价性的构造

由《原本》命题II.13 得 $AD=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$， $BD=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$。而在相同半径 $AC=CF=b$ 下，$\angle BAC$ 的余弦为 $AD=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$， $\angle ABC$ 的余弦为 EF。又由△*BCD* 与△*FCE* 相似，有 $EF=\frac{b}{a}BD=\frac{b\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2ac}$。

再构造 $a^2EF^2-b^2AD^2$，并将 *AD* 与 *EF* 代入可得

$$\begin{aligned} a^2EF^2-b^2AD^2&=\frac{b^2}{4c^2}\left[\left(a^2+c^2-b^2\right)-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right]\\ &=a^2b^2-b^4, \end{aligned}$$

整理得

$$a^2\left(b^2-EF^2\right)=b^2\left(b^2-AD^2\right),$$

即

$$a^2CE^2=b^2CD^2,$$

从而有

$$\frac{a}{CD}=\frac{b}{CE},$$

而 *CD* 与 *CE* 分别为$\angle BAC$ 与$\angle ABC$ 的正弦，从而线段定义下的正弦定理得证。

4 亲如一家

1748 年，欧拉（L. Euler, 1707-1783）在《无穷分析引论》中定义了单位圆，他还根据三角函数线与半径的比值来定义三角函数，并用小写和大写拉丁字母分别表示三角形的三条边和三个角[9]。另外，法国数学家韦达（F. Viète, 1540-1603）率先系统地使用字母表示数，代数学的发展进入到符号代数阶段。而 15 世纪以后，“+”“-”“=”等运算符号逐渐被世人接纳[10]。在此背景下，正余弦定理的形式和关系有了突飞猛进的变化。

4.1 不约而同的三角形式

一方面，这一阶段的正弦定理出现了如今的三角形式，且许多数学家给出了新的证法[11]。例如韦达在其《数学法则》中用新方法证明了正弦定理。

如图 8，过 $\triangle ABC$ 外心作三边垂线，则 $a=2BD=2\sin\angle BOD=2\sin A$，$b=2AE=2\sin\angle AOE=2\sin B$，$c=2AF=2\sin\angle AOF=2\sin C$，故可得

$$a:\sin A=b:\sin B=c:\sin C。$$

另一方面，19 世纪以后的大部分三角学教科书也开始给出三角形式的余弦定理而不涉及几何形式[10]。

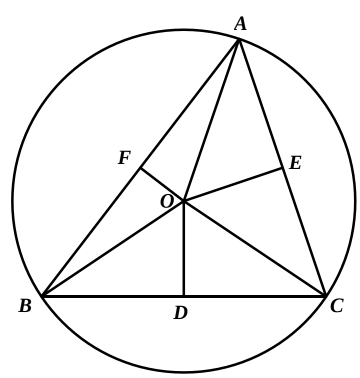


图 8 韦达关于正弦定理的证明

4.2 射影公式之桥

进入 19 世纪，数学家们开始注重余弦定理与和角公式、正弦定理和射影公式之间的关系[11]。英国数学家德摩根（A. De Morgan, 1806-1871）利用和角公式与正弦定理证明了余弦定理；

英国数学家杨格（J. R. Young, 1799-1885）和尼克松（R. C. J. Nixon, 约 19 世纪）以及美国数学家肖弗内（W. Chauvenet, 1820-1870）分别以不同的方式利用射影公式推导出了余弦定理；西弗（E. P. Seaver, 1838-1917）、霍布森（E. W. Hobson, 1856-1933）和彭德尔伯里（C. Pendlebury, 约 19 世纪）同时利用射影公式与和角公式来证明正弦定理。

借助射影公式，正余弦定理的等价性也开始被数学家们所发现。

一方面，西罗德（P. L. Cirodde, 1749-1849）和肖弗内（W. Chauvenet, 1820-1870）等人同时用正弦定理和射影公式证明了余弦定理。

由射影公式得

$$a\cos B = c - b\cos A。$$

由正弦定理得

$$a\sin B = b\sin A。$$

两边各平方再求和即可得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A。$$

另一方面，贝洛斯（C. F. Bellows, 1832-?）用余弦定理和射影公式证明了正弦定理。由余弦定理得

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B。$$

故

$$a^2 - b^2 = b^2 - a^2 + 2c(a\cos B - b\cos A),$$

$$a^2 - b^2 = c(a\cos B - b\cos A)。$$

由射影公式

$$c = a\cos B + b\cos A,$$

所以

$$a^2 - b^2 = a^2\cos^2 B - b^2\cos^2 A。$$

即

$$a^2\sin^2 B = b^2\sin^2 A,$$

$$a\sin B = b\sin A 。$$

同理可得

$$a\sin C = c\sin A ，$$

$$b\sin C = c\sin B 。$$

综合数学家们在两方面的讨论，将射影公式 $c = a\cos B + b\cos A$ 两边先平方再整理为 $a^2 + b^2 - 2ab\cos C = (a\sin B - b\sin A)^2 + c^2$。观察此式，凡已知正余弦定理中的一者，便能快速证得另一者。因此，射影公式或许在数学家们发现正余弦定理等价性上发挥了重要作用。

4.3 等价性证明的完善

在西方早期三角学教科书中，法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752-1833）最早给出了用余弦定理直接推导出正弦定理的方法[11]。他利用余弦定理先得到 $1-\cos A$ 与 $1+\cos A$ 的表达式，再将两式相乘后开方得到 $\sin A$ 的表达式，接着比较 $\dfrac{a}{\sin A}$、$\dfrac{b}{\sin B}$ 和 $\dfrac{c}{\sin C}$ 三者，从而得到正弦定理。

类似的方法也被法国数学家塞雷（J. A. Serret, 1819-1885）和英国数学家伍德豪斯（R. Woodhouse, 1773-1827）所采用[5,6]。

由余弦定理得

$$\sin^2 A = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2},$$

$$\sin^2 B = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2c^2},$$

$$\sin^2 C = \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2b^2},$$

因此有

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{\sin^2 B}{b^2} = \frac{\sin^2 C}{c^2} 。$$

另一方面，德莱尔（A. Delisle, 约 19 世纪）和杰罗诺（C.C. Gerono, 1799-1891）较早给出了用正弦定理直接推导余弦定理的方法。

由

$$\sin C = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

再由正弦定理

$$\sin C=\frac{c}{a}\sin A，$$

$$\sin B=\frac{b}{a}\sin A。$$

所以

$$\frac{c\sin A}{a}=\pm\sin A\sqrt{1-\frac{b^2\sin^2 A}{a^2}}+\frac{b\sin A\cos A}{a}，$$

整理得

$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}+b\cos A，$$

于是

$$\left(c-b\cos A\right)^2=a^2-b^2\sin^2 A，$$

故

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A。$$

而后来洛克（J. B. Lock, 1849-1921）采用正弦代换三边的方法进行推导，更为简洁。由正弦定理得 $a=2R\sin A$， $b=2R\sin B$， $c=2R\sin C$， 于是有

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}&=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}{2\sin A\sin B}\\&=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B-(\sin A\cos B+\sin B\cos A)^2}{2\sin A\sin B}\\&=\frac{2\sin^2 A\sin^2 B-2\sin A\sin B\cos A\cos B}{2\sin A\sin B}\\&=\sin A\sin B-\cos A\cos B\\&=-\cos(A+B)\\&=\cos C\end{aligned}$$

值得注意，洛克的方法额外用到了三角形内角和定理，因此有学者认为该证法仍有瑕疵。王申怀基于希尔伯特公理体系论证了正弦定理与三角形内角和定理等价，从而保证了证明的严谨性[12]。

对比前文对等价性可能的探讨与本时期数学家们更为明晰的证明，可发现前者只能依靠几何关系，而后者可借助丰富的三角公式进行代数变换；前者步骤繁杂，且 $a^2EF^2-b^2AD^2$ 的构

造不够直观，而后者在构造中多以 $\frac{a}{\sin A}$、$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 等为目标，有的放矢；前者只讨论了锐角三角形，而后者满足任意三角形。这些变化离不开欧拉的巨大贡献，单位圆和三角函数比值定义大大简化了正余弦定理的表示，降低了探讨两者等价关系的复杂性。此外，统一运算符号的使用也使得证明过程的叙述更为简洁。

5 结论与启示

本文可用“一二三四”的方式进行概括，即“一个性质——等价性”“两个定理——正余弦定理”“三个阶段——古希腊起源、印度与阿拉伯发展、近代欧洲完善”和“四点启示——从历史到现实”。

一方面，正余弦定理的关系经历了漫长而曲折的发展。古希腊时期，两者有着不同的起源，联系甚少。随着三角函数概念的进步，两者建立了基于正弦概念的联系，等价性也有了一定的体现。得益于印度和阿拉伯数学家的代数学与三角学成就，直接探讨两者的等价性成为可能。最后，由于韦达、欧拉等人的突出贡献，定理的形式与证明得以简化，等价关系逐步明晰。故可认为，三角学和代数学的发展推动了正余弦定理表现形式的演变及其等价关系的显露。

另一方面，正余弦定理关系的发展史为今日教学提供了素材和思想启迪。

（1）关注历史相似性。历史上，正余弦定理的联系经历了极其漫长的过程，数学家纳绥尔丁在运用正弦定理求解三角形时也曾遭遇局限。今日学生们在学习时也可能会割裂地看待这两个定理，在解三角形时偏废地运用二者。教师有必要揭示两者的等价性，增进学生综合运用两者的意识。

（2）建立知识联系。余弦定理可由勾股定理推广得到，正弦定理与三角形角平分线定理也有深刻联系；在三角学中，余弦定理与正弦定理、射影公式、和角公式等息息相关。教师可在复习课中建立知识间的联系，促进学生理解。

（3）古法今鉴。人教 A 版普通高中数学教科书必修第二册第六章中运用向量法证明正余弦定理[13]。其中构造单位向量来证明正弦定理的思路难度较大。事实上，数学家们在探寻正余弦定理等价性时提供了诸多简便且直观的证法，在今日教学设计中仍具有借鉴意义。

（4）感悟知识价值。历史上正余弦定理等价关系随着三角学和代数学的发展而逐步得到

论证。一方面，了解这一历程，能够让学生体会三角学的重要性和代数运算的便捷性，体会今日数学成就的来之不易。另一方面，通过品味数学家们在逐渐逼近真理的过程中所遇之艰辛，能够让学生感悟理性精神的弥足珍贵，激发学生迎难而上、攻坚克难的信心。

参考文献

[1] 王申怀. 正弦定理与余弦定理的关系[J]. 数学通报, 1991, 30(11): 26.

[2] 孙立伟, 刘玉梅, 赵小云. 关于余弦定理、勾股定理和正弦定理的等价性[J]. 中小学数学(高中版), 2021(10): 7-9.

[3] 甘大旺. 勾股定理、正弦定理、余弦定理、射影定理的等价链[J]. 数学教学通讯, 2018(21): 76-77.

[4] 黄婷, 韩粟, 雷沛瑶. 从天文到数学: HPM视角下的正弦定理教学实践[J]. 上海中学数学, 2022(10): 12-15, 40.

[5] 汪晓勤. 20世纪中叶以前的余弦定理历史[J]. 数学通报, 2015, 54(8): 9-13.

[6] 汪晓勤. 20 世纪中叶以前的正弦定理历史[J]. 数学通报, 2016, 55(1): 1-5, 27.

[7] 卡茨. 数学史通论 [M]. 李文林, 邹建成, 胥鸣伟, 等, 译. 北京: 高等教育出版社, 2004: 193-197.

[8] 欧几里得. 几何原本[M]. 兰纪正, 朱恩宽, 译. 西安: 陕西科学技术出版社, 2003: 59-60, 165-166.

[9] 杜雨珊. 三角学历史研究[D]. 辽宁: 辽宁师范大学, 2009.

[10] 梁建. 试论数学符号对数学发展的影响[D]. 江苏: 南京师范大学, 2005.

[11] 汪晓勤. 美英早期三角学教科书研究[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023: 327-338.

[12] 王申怀. 正弦定理与欧氏平行公理的等价性[J]. 数学通报, 1993, 32(7): 25.

[13] 章建跃, 李增沪, 等. 普通高中教科书·数学: 必修第二册 A 版[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019: 42-46.

基于中算史的一类最值问题的编制

彭纯莉

（华东师范大学数学科学学院, 上海 200241）

1 引 言

教育部颁布的《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》（以下简称《新课标》）明确指出要将中华优秀传统文化融入课程内容，积极培育和践行社会主义核心价值观，课程基本理念提出要依据数学学科的特点，注重数学文化的渗透。对教师实施教学以及高考命题也提出了相关建议：“教师应有意识地将数学文化融入数学教学活动中，提升数学学科核心素养，高考命题要融入数学文化，充分发挥高考试题的育人功能和积极导向作用。”[1]作为中华优秀传统数学文化重要组成部分的中算史是一座宝藏，为今日数学教学提供了丰富的素材和思想养料。

近年来，基于中算史料的高考数学试题时有出现，如 2020 年浙江卷设计了一道与杨辉高阶等差数列求和有关的问题，2021 年浙江卷命制了一道以赵爽弦图为背景的计算题，同年全国卷出现了一道与刘徽的海岛高度测量有关的问题，2022 年浙江卷包含了一道以秦九韶（1208-1268）“三斜求积”为背景的计算题，同年全国卷命制了一道以沈括（1031-1095）《梦溪笔谈》中的“会圆术”为背景的计算题。这些问题的来源主要集中在众所周知的图形、公式或方法上，编制策略仅为复制式或条件式，较为单一。此外，有些问题实则利用初中知识点便可迎刃而解，如赵爽弦图问题、刘徽海岛测量问题。

因此，基于数学史的数学问题编制（History Based Problem Posing，简称 HBPP）仍是需要深入研究的课题。本文拟聚焦均值不等式的应用，利用中算典籍中的一些解三角形问题或勾股测量问题来编制高中数学中的一类最值问题，为中华优秀传统文化融入高中数学教学的实践提供参考。

2 古法今用：均值不等式的证明

在中算史上，中算家用过的图形和思想方法为均值不等式的证明提供了思想启迪[2][3]，其中最典型的例子是“勾股容方”图和赵爽的“勾股大方”图。如图 1 所示，Rt$\triangle ABC \cong$ Rt$\triangle A'B'C'$，$BC = B'C' = a$，$AC = A'C' = b$，$AB = A'B' = c$，正方形 $DECF$ 和 $D'E'C'F'$ 分别内接于 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$，斜边 AB 和 $A'B'$ 部分重合，且点 D 和 D' 重合。由图易知

$$4\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 \le ab \tag{1}$$

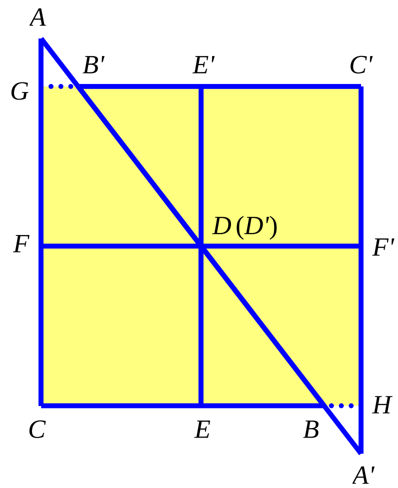


图 1 两个勾股容方图的组合

由（1）可得

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \tag{2}$$

另一方面，由图 2 所示的赵爽“勾股大方”图可得

$$4ab \le (a+b)^2 \tag{3}$$

以及

$$(a+b)^2 = 2c^2 - (b-a)^2 \le 2c^2 = 2(a^2+b^2) \tag{4}$$

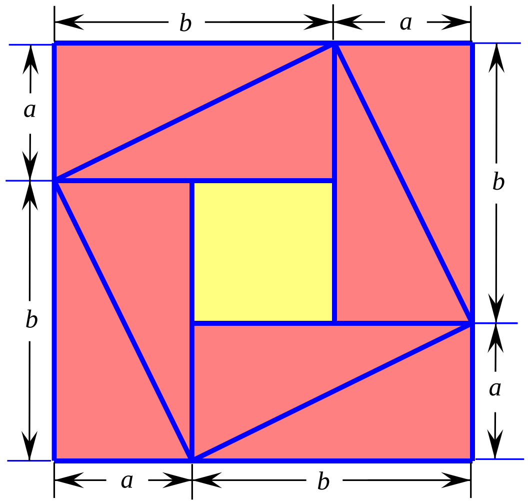


图 2 赵爽勾股大方图

由（3）和（4）分别可得

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \tag{5}$$

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{6}$$

于是得到均值不等式链

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \tag{7}$$

简记为

$$H \le G \le A \le R\text{。}$$

又从图 3 易知，在直角三角形的不同内接长方形中，斜边上的顶点为斜边中点的长方形面积最大。将该结论与勾股容方公式用于赵爽的勾股大方图，可得不等式链（7）：如图 4，

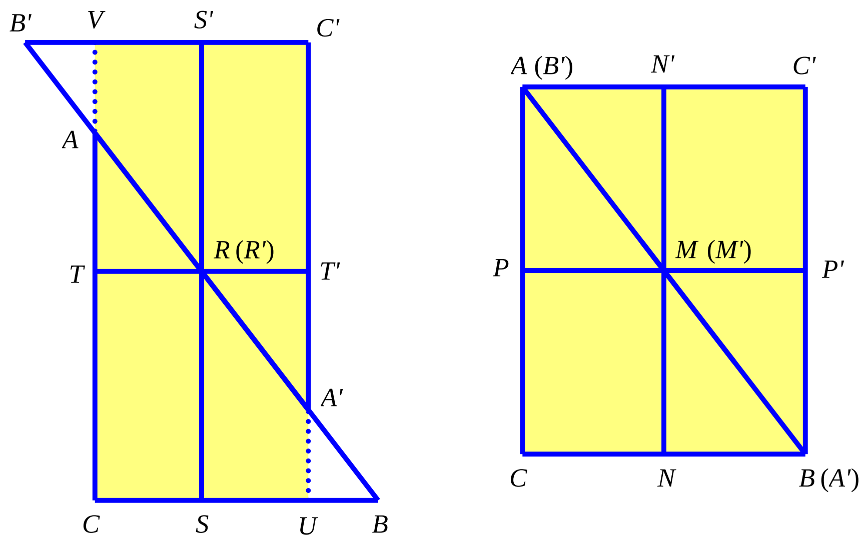


图 3 直角三角形不同内接长方形的面积大小关系

易知

$$4S_{\text{正方形}DECF} \le S_{\text{矩形}AB} \le S_{\text{正方形}ONCM} = S_{\triangle OMR} + S_{\triangle ONS}$$

$$= \left(S_{\triangle RQJ} - S_{\text{梯形}QJOL}\right) + \left(S_{\triangle JPS} + S_{\text{梯形}ONKJ}\right)$$

$$= \left(S_{\triangle RQJ} + S_{\triangle JPS}\right) - \left(S_{\text{梯形}QJOL} - S_{\text{梯形}ONKJ}\right)$$

$$= \left(S_{\triangle RQJ} + S_{\triangle JPS}\right) - S_{\text{正方形}OTJI}$$

$$\le S_{\triangle RQJ} + S_{\triangle JPS}$$

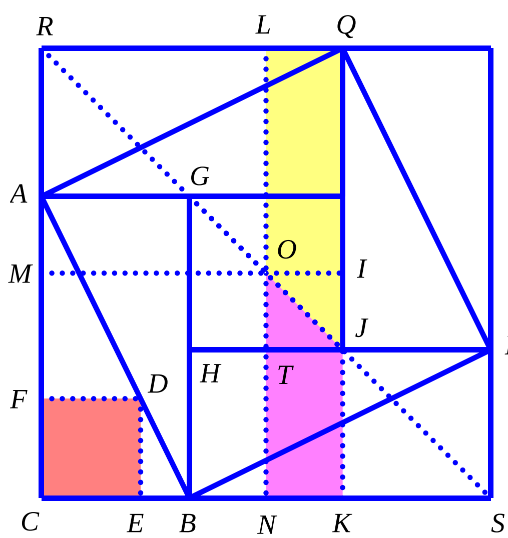


图 4 勾股大方图中的均值不等式链

用 a 和 b 来表示有关面积，即得不等式链（7）。

不等式（1）（3）（5）和（6）中，当且仅当 $a=b$ 时等式成立。

3 可利用不等式 $G\le A$ 解决的最值问题

利用均值不等式（5），可得“和定积最大”“积定和最小”这两个结论，而赵爽的勾股大方图能够帮助学生直观地理解它们。

南宋数学家杨辉（13 世纪）在《续古摘奇算法》中提出命题：“弦之内外，分二勾股，其一勾中容横，其一股中容直，二积之数皆同”[4]，下文简称“杨辉定理”。如图 5，点 E 为长方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上任意一点，过 E 分别作 BC 和 AB 的平行线，分别交 AB、CD 于点 F、G，交 AD 和 BC 于点 H、I，则长方形 $FBIE$ 和 $HEGD$ 的面积相等。利用该定理，可编制许多以勾股测量问题为背景的新问题。

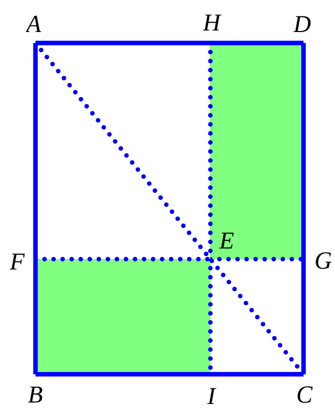


图 5 杨辉定理

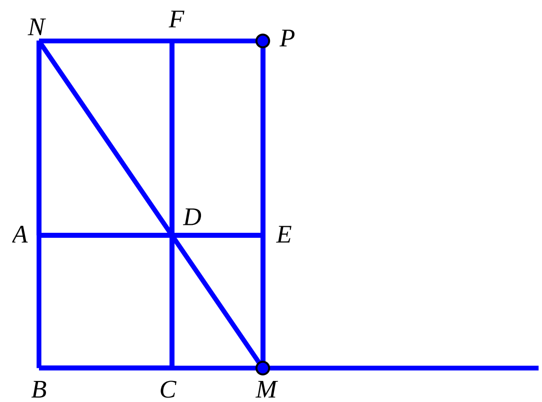


图 6 基于杨辉定理的轨迹问题

问题 1：如图 6，四边形 $ABCD$ 为已知的正方形，$AB=BC=a$，点 M 为边 BC 延长线上任意一点，连结 MD 并延长，交 BA 的延长线于点 N。过点 M 作 BC 的垂线 MP，过点 N 作 AB 的垂线 NP，MP 和 NP 交于点 P。（1）求点 P 的轨迹；（2）求 $AN+CM$ 的最小值；（3）求 Rt△MBN 面积的最小值。

利用《九章算术》中的勾股测量问题，可以编制具有现实背景的相关问题。如，该书勾股章设题：“今有邑方不知大小，各中开门。出北门三十步有木。出西门七百五十步见木。问：邑方几何？”[5]据此可以设计以下问题：

问题 2：如图 7，若一所学校所在区域为正方形 $ABCD$，其边长 AB=AD=500 米。学校北门

和西门分别开在北围墙和西围墙的中点处。甲、乙两人分别从北门 E 和西门 G 出发向正北和正西方向直走一段距离后止步测望，问：当两人刚好望见彼此时，他们步行总路程的最小值是多少？

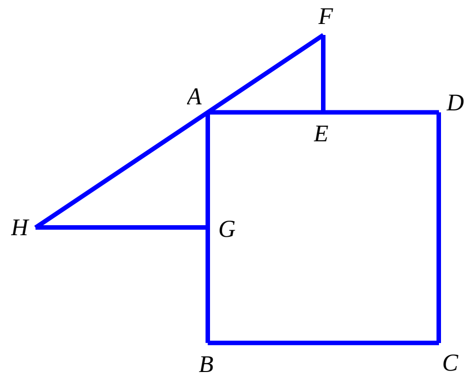


图 7 校园测望问题之一

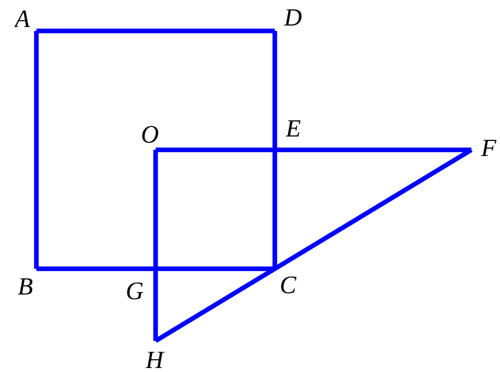


图 8 校园测望问题之二

《九章算术》勾股章又设题："今有邑方一十里，各中开门。甲乙俱从邑中央而出：乙东出，甲南出，出门不知步数，邪向东北，磨邑隅，适与乙会。率：甲行五，乙行三。问：甲、乙行各几何？"[5]据此可以设计以下问题：

问题 3：如图 8，若一所学校所在区域为正方形，其边长 $AB = AD = 500$ 米。学校东门和南门分别开在东围墙和南围墙的中点处。乙从校园正中心 O 出发往东门 E 直走，出门后继续沿正东方向直走一段距离；甲从校园正中心 O 出发往南门 G 直走，出门后继续沿正南方向直走一段距离后立即转身望东偏北方向直走，中途经过校园东南角 C，二人在点 F 处会合。问：甲出南门走多远时，甲、乙所走的总路程最短？此时，甲、乙步行速度之比是多少？

《九章算术》勾股章又设题："今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木，出南门一十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问邑方几何？"[5]据此可以设计以下问题：

问题 4：如图 9，若一个公园所在区域为正方形 $FGHI$，其边长 $FG = 200$ 米。公园北门和南门分别开在北围墙和南围墙的中点处。甲、乙两人分别从北门 D 和南门 E 出发向正北和正南方向直走相同距离分别达到点 A 和 C 处，乙转而向西行至刚好能望见乙的点 B 处，问：甲向北走多少米时，他们所走路程总和最小，最小值是多少？

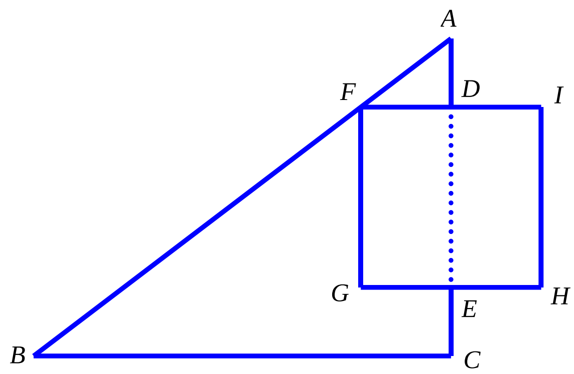


图 9 公园测望问题

金元时期数学家李冶（1192-1279）在《测圆海镜》卷二设题：“甲、乙二人俱在圆城中心而立，乙穿城向东行一百三十六步而止，甲穿城南行二百五十五步望见乙，问：城径几何？”[6]据此可以设计以下问题：

问题 5：如图 10，已知圆城的半径为 r=100 米，甲、乙两人分别从圆城的东、南门出发向正东、正南方向直行，行至刚好能望见彼此，问：甲、乙分别向东、向南走多少米时，他们之间的距离最短？

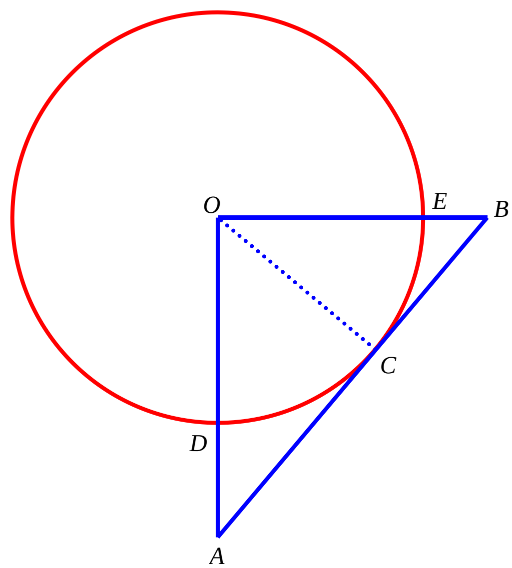


图 10 圆城测望问题之一

问题 1-5 均为“积定和最小”问题。其中，问题 3 的解法如下：设甲出南门走 x 米，乙出东走 y 米，因 $\dfrac{y}{250}=\dfrac{250}{x}$，故 $y=\dfrac{62500}{x}$，$FH=\sqrt{(250+y)^2+(250+x)^2}$，所以总路程为

$$f(x)=500+x+\frac{62500}{x}+\sqrt{x^2+\left(\frac{62500}{x}\right)^2+500\left(x+\frac{62500}{x}\right)+125000}$$

$$\geq 1000+500000=501000,$$

当且仅当 $x=\frac{62500}{x}$，即 $x=y=250$ 时等式成立，此时

$$\frac{OH+HF}{OF}=\frac{500+500\sqrt{2}}{500}=1+\sqrt{2},$$

所以甲出南门 250 米，甲、乙所走路程最短，最短路程为 501000 米，甲、乙步行速度之比为 $1+\sqrt{2}$。

以中算史上的勾股测量或解直角三角形问题为背景，也可以设计“和定积最大”问题。

问题 6：如图 9，有三棵树分别位于一个等腰直角三角形的三个顶点 A、B 和 C 处，$AC=300$ 米，若要建一矩形公园，使得点 A、北门 D、南门 E 和点 C 共线，$DA=EC$，且公园一角 F 位于 AB 上，问：公园面积最大值是多少？

《测圆海镜》卷二设题：“或问：甲、乙二人俱在西门，乙东行二百五十六步，甲南行四百八十步望见乙。问：城径几何？”[6]据此，可以设计以下问题：

问题 7：如图 11，已知圆城的半径为 r，乙从东门 B 东行一段距离至点 C 而止，甲从西门 A 南行一段距离至点 D，恰好能望见乙。问：当二人所走总路程为 a（$a>r$）时，甲、乙之间的最短距离是多少？

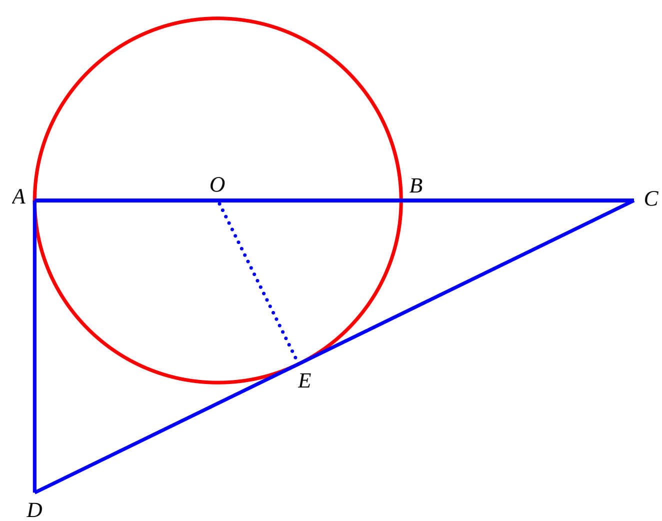


图 11 圆城测望问题之二

问题 6 和 7 均为“和定积最大”问题。例如，问题 7 的解法如下：

设 $AD=x,BC=y$，则 $CD=s$，易得 $rs=x\left(r+y\right)$。于是，

$$s=\frac{x\left(y+r\right)}{r}\le\frac{1}{r}\left(\frac{x+y+r}{2}\right)^{2}=\frac{\left(a+r\right)^{2}}{4r},$$

当且仅当 $x=y+r$ 时，即 $x=\frac{a+r}{2}$， $y=\frac{a-r}{2}$ 时等式成立。

4 可利用不等式 $A\le R$ 解决的最值问题

利用上文提到的赵爽勾股大方图，可以设计如下问题。

问题 8：如图 12，某公园内有一边长为 100 米的正方形人造湖，现为了美化公园，需要在湖边设计花圃，花圃的边界为一个正方形的四条边，且经过湖边四角。问如何设计，可以确保绿化带的边界最长？最长边界是多长？

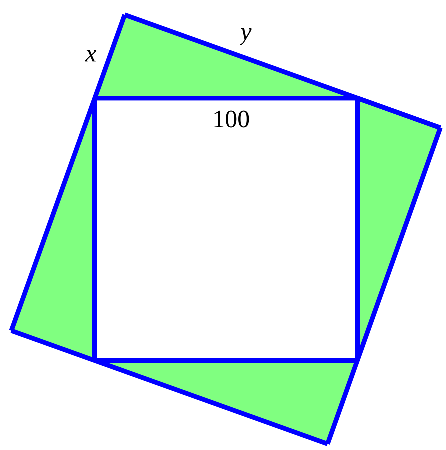


图 12 湖畔绿化问题

《九章算术》勾股章设题：“今有户不知高、广，竿不知长短。横之不出四尺，从之不出二尺，邪之适出。问：户高、广、袤各几何？”[5]这是一个解直角三角形问题，已知 $c-a$，$c-b$，求 a，b 和 c。《九章算术》给出的解法是：

$$a=\sqrt{2\left(c-a\right)\left(c-b\right)}+\left(c-b\right),$$

$$b=\sqrt{2\left(c-a\right)\left(c-b\right)}+\left(c-a\right),$$

$$c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+(c-a)+(c-b)。$$

刘徽利用“矩表方里”图得到恒等式

$$(a+b-c)^2=2(c-a)(c-b) \tag{8}$$

从而证明了上述公式。根据刘徽的“矩表方里”图，可以设计以下问题。

问题 9：如图 13，正方形 $ABCD$、$EBGF$、$IHJD$ 的边长 c、a 和 b 构成直角三角形的三边，其中 c 为斜边长，当 c 固定时，求正方形 $KHLF$ 的面积的最大值。

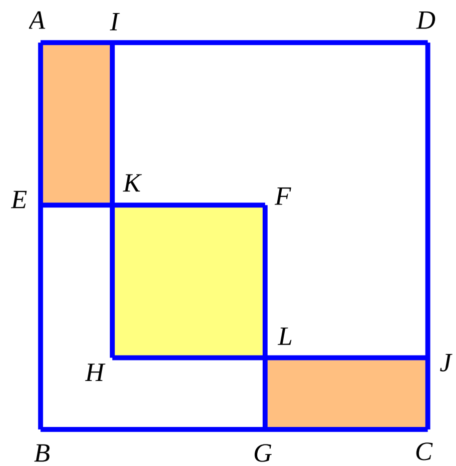


图 13 矩表方里问题

问题 10：笑笑是班级的文娱委员，班级要举办文艺活动，活动地点有个 Rt△ABC 的区域需要布置，已知 Rt△ABC 的斜边为 16 米，而两条直角边没有具体数据，笑笑应该至少买多长的彩带（围绕 Rt△ABC 一周）才能保证材料够用？

问题 8-10 本质上都属于“已知直角三角形的斜边，求该三角形最大周长”问题，即“平方和定和最大”问题。利用不等式（6）可得 $\frac{a+b}{2}\le\frac{\sqrt{2}}{2}c$ 即可解决问题。在问题 8 中，$4(a+b)\le4\sqrt{2}c$；在问题 9 中，$(a+b-c)^2\le(\sqrt{2}-1)^2c^2=(3-2\sqrt{2})c^2$；在问题 10 中，$a+b+c\le(\sqrt{2}+1)c$。诸题中，当且仅当 $a=b$ 时等式成立。

5 可利用不等式 $H\le G,H\le A,H\le R$ 解决的最值问题

《九章算术》勾股章的“勾股容方”图同样可以编制利用不等式 $H\le G,H\le A,H\le R$ 解决

的最值问题。

问题 11：如图 14，有一块面积为 64m^2 的正方形花坛，要为这个花坛围一圈有公共直角的三角形绿化带，求绿化带周长和所围面积的最小值。

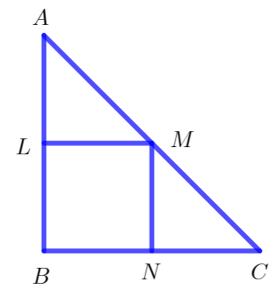


图 14 直角三角形花圃问题

问题 12:：如图 14，在一个 Rt△ABC 场地中，$BC=a$，$AB=b$，有一个与三角形有公共直角且面积最大的矩形商场，商场的入口在点 M 处，甲、乙二人分别在 A、C 处，相约在商场入口处会合，两人同时出发（AC 不可通行），甲前半段路程步行，后半段路程骑自行车，乙前一半时间步行，后一半时间骑自行车，二人步行速度和骑车速度各相同，问谁先到达。

问题 11-12 都涉及不等式（2）或不等式链（7）。在问题 11 中，

$$C_{\Delta ABC}=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geq\frac{4ab}{a+b}+\frac{2\sqrt{2}ab}{a+b}=32+16\sqrt{2}\text{，}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\geq\frac{1}{2}\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2=\frac{1}{2}\times4\times64=128\text{，}$$

上述不等式中，当且仅当 $a=b=16$ 时等式成立。在问题 12 中，$S_{甲}=AL+ML=\dfrac{a+b}{2}$，$S_{乙}=CN+MN=\dfrac{a+b}{2}$，即 $S_{甲}=S_{乙}=S$，设甲花时间 t_1，乙花时间 t_2，甲、乙步行速度为 v_1，骑车速度为 v_2（$v_2>v_1$），则 $t_1=\dfrac{S}{2v_1}+\dfrac{S}{2v_2}=\dfrac{S}{\dfrac{2v_1v_2}{v_1+v_2}}$，又 $\dfrac{t_2v_1}{2}+\dfrac{t_2v_2}{2}=S$，故得 $t_2=\dfrac{S}{\dfrac{v_1+v_2}{2}}$。由均值不等式链（7）得 $t_1>t_2$，故知乙先到达商场门口。

6 若干启示

以上我们看到，根据中算史料，利用“自由式”编题策略，可以编制出“和定积最大”

“积定和最小”“平方和定和最大”等类型的最值问题，这些问题都具备了科学性（基于原始文献）、应用性（反映现实应用）和关联性（考查相关知识）等特征，从中可获得如下启示。

其一，挖掘数学史料，丰富问题资源。以《九章算术》为代表的中国古代数学典籍往往都是问题集。为了编制更多理想的中算史料题，教师需要深入研读这些典籍，从中挖掘丰富的命题素材，利用多种不同策略，编制新的数学问题。[7]本文仅利用了《九章算术》、《测圆海镜》等名著中的有关测量问题或解直角三角形问题，更多史料有待于挖掘。

其二，设计问题情境，体现数学应用。注重实用是中国古代数学的重要特征之一，而“应用性”正是中国高考评价体系（2019 年版）所提考查要求中的“四翼”[8]之一。本文涉及的《九章算术》和《测圆海镜》中的测量问题均为有实际背景的应用问题，对于这类问题，可以通过改变有关情境，编制新问题；而对于“勾股大方”、“勾股容方”之类不涉及现实情境的问题，可以通过增加情境形成新问题。

其三，立足考查目标，加强知识联系。古今数学有着巨大的差异，中算史上的很多原始问题往往不能直接用于今日高中课堂教学，需要对条件和目标加以改变，方能产生满足考查要求的新问题，也就是说，“自由式”是“古问今编”最主要的问题编制策略。中算古问并未涉及最值问题，但古问却提供了丰富的几何图形和现实情境，若将这些图形和情境与今日代数、三角、解析几何等领域的知识联系起来，则古问就有了新的“增长点”，正可谓“无心插柳柳成荫”。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 2, 82, 88.

[2] 汪晓勤. 从“勾股容方”到均值不等式[J]. 数学通报, 2015, 54(2): 7-9.

[3] 汪晓勤. 中华优秀传统数学文化融入高中数学教学的若干路径[J]. 教育研究与评论(中学教育教学) , 2022(9): 27-34.

[4] 杨辉. 续古摘奇算法[M]. 见: 郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇·数学卷（一）, 郑州: 河南教育出版社, 1994: 1114.

[5] 郭书春. 汇校《九章算术》[M]. 北京: 科学出版社, 2019: 447, 454, 456, 458, 459, 463.

[6] 李冶. 测圆海镜[M]. 见: 郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇·数学卷（一）, 郑州: 河南教育出版社, 1994: 763.

[7] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020, 59(5): 9-15.

[8] 教育部考试中心. 中国高考评价体系(2019 年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019: 11.

数学史驱动下高中数学课堂中的学生创新课例分析

朱轶萱

（华东师范大学数学科学学院, 上海 200241）

1 引 言

在以 ChatGPT 为代表的生成式人工智能横空出世的信息时代，教育所承载的育人使命变得更具挑战性，培育创新人才以适应社会变革需要成为十分迫切的时代命题。波利亚指出：“数学是一门激发人类心智的学科，数学学习的一个最重要的目的就是学会更聪明地思考问题”[1]，被冠以“思维的体操”誉称的数学学科在培养学生创造性思维方面具备天然的优势。《普通高中课程标准（2017 年版 2020 年修订）》强调：“以学生发展为本，落实立德树人根本任务，培育科学精神和创新意识”[2]，可见，在课堂教学中激发学生的创新意识是当代数学教师的应有之义，然而目前关于“如何培养学生数学创新能力”的探讨仍以经验总结居多，缺乏扎根课堂的实践佐证。

众所周知，HPM 为改善数学教学提供了一条行之有效的路径，有助于构建知识之谐、彰显方法之美、营造探究之乐、实现能力之助、展示文化之魅、达成德育之效[3]。近年来，随着 HPM 专业学习共同体教学实践研究丰硕成果的涌现，研究者以具体案例为支撑对 HPM 的教育价值展开了更深入的探讨，如汪晓勤等人构建了基于数学史的学科德育内涵分类框架[4]。在智育方面，卢成娴等人借助特定初中课例，剖析了数学史对批判性思维培养的作用[5]，而批判性思维是创新意识的重要彰显[6]，足以窥见 HPM 在激发学生创新方面的潜力。实际上，从已有课例中不难发现学生迸发的创新火花，但仍有待系统地加以梳理。

鉴于此，本文以高中学段作为切入点，对近年来 HPM 专业学习共同体所开发的具有代表性的课例进行考察和分析，试从中归纳出学生创新表现的类型、特点，并洞察数学史在其中所扮演的角色，以期在理论层面挖掘 HPM 教育价值的多元意蕴，同时在实践层面为培养学生数学创新能力指向的 HPM 课例开发提供启示。

2 学生创新分类框架

谈及学生在数学方面的创新，西方学术界的探讨多以“数学创造力”为关键词，起初局限于对杰出数学家身上独特思维品质的刻画，而后随着数学创造力概念外延的拓展，逐渐转而关注中小学生展现出的“相对创造力”。作为心理学与数学“联姻”的产物，数学创造力的评价很大程度上借鉴于一般创造力领域的研究成果，如托伦斯（E. P. Torrance, 1915-2003）提出的数学创造力的四大特征：流畅性、灵活性、新颖性和精致性，时至今日仍是数学创造力刻画和评价的主流框架，但该框架往往基于特定数学任务，难以全面地考察常规数学课堂中的学生创新[7]。反观国内，对数学创新思维的研究起步较晚，随着 20 世纪 90 年代素质教育改革如火如荼地推进，以张奠宙先生为代表的数学教育前辈立足国情，从基础与创新的辩证关系出发开启了探索培养学生数学创新能力的中国道路[8]，其中不乏对课堂中学生表现的关注，例如罗新兵等人指出：数学创新能力的涵义可从潜在的认知过程和显现的认知结果两个角度分析，其中后者为课堂中可观察到的外显表现，包括提出新方法、解决新问题、建立新联系、敢于质疑等等[9]。谢明初等人在追溯西方数学创造力研究脉络的基础上，结合中国课堂特色，提出了刻画学生数学创造力的特征：（1）能提出新的问题或对原有问题能提出新的不同认识视角；（2）能发现新的数学公式、定理或能独立推导公式、证明定理；（3）对非常规性的数学问题能提出独特的、富有洞察力的解决方法[10]。

借鉴上述阐释，结合对高中 HPM 课例的初步分析，归纳出新知创获、方法运用、问题提出、批判辩驳和跨界联结等五种学生创新类型，见表 1。

表 1 数学课堂中学生创新类型

创新类型	具体表现
新知创获	能发现新的数学概念、公式、定理或能独立推导公式、证明定理；
方法运用	对于给定的数学问题，能够提供新颖的、多样的、合适的解决方法；
问题提出	能提出新的问题或对原有问题能提出新的不同认识；
批判辩驳	勇于对他人（教师、同学或古人）的观点发表不同看法，并加以论证；
跨界联结	能够建立不同学科领域的关联，以跨学科的视角提出和解决问题。

3 案例分析

3.1 新知创获

古希腊哲学家苏格拉底（Socrates, 前 469-前 399）运用“产婆术”，以不断提问的方式启发小奴隶突破自身数学知识和经验限度，得到了两倍面积正方形的正确画法[11]。用荷兰数学家、数学教育家弗赖登塔尔（H. Freudenthal, 1905-1990）的观点来解释，即苏格拉底引导小奴隶完成了数学学习的“再创造”，虽然学生要学的数学知识是前人已发现的，但对学生来说，仍是全新的、未知的，需要通过再现类似的创造过程来形成[12]。这种新知创获的过程属于数学课堂中的“微创新”[13]，外化表现为学生在恰当引导下发现新的数学概念、公式、定理或能独立推导公式、证明定理。

在课例“两角和与差的余弦公式”[14]中，教师通过基于帕普斯模型改编的问题串，诱导学生同时用两种几何模型得出了两角差的余弦公式（见图 1）。同主题的另一节课[15]中，学生则是在教师的引导下类比勾股定理的面积法证明，借助三角板拼图成功完成了两角和正余弦展开式的推导（见图2）。实际上，出于天文研究中弦表制作的需要，数学家早在数千年前就发现并给出了两角和差正余弦公式的若干种几何证明，而如今各版本教科书中普遍采用的向量或解析几何法直至 18 世纪以后才陆续出现。尽管前者仅局限于锐角情形，但对于首次探索三角公式的高中生而言，无疑是更加直观、自然的。

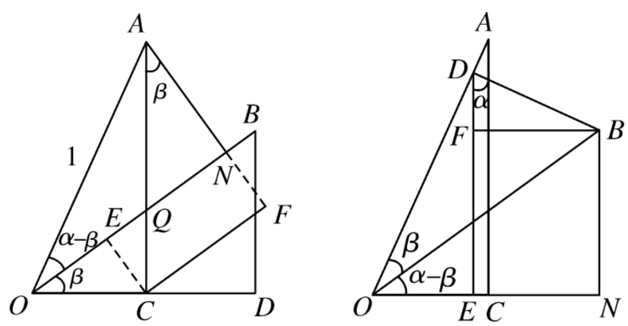


图 1 两角差的余弦公式证明图示

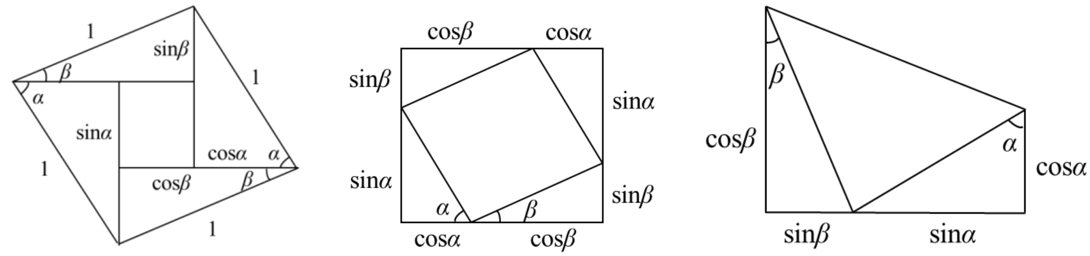


图 2 两角和的正余弦公式证明图示

在课例“正弦定理”中，教师首先请一位学生上台分享三角学的历史，并顺势介绍历史上正弦的圆中线段定义。接着带领学生复习已学的三角形若干性质，并以其中“大边对大角”的定性描述为切入点，引发对其进一步定量刻画的需求，而后在明确探究目标为“三角形对边与对角之间的关系”的情况下，放手由学生以小组为单位进行探究。最终学生集思广益，分别用外接圆法、等面积法与单高法推导出了正弦定理的结论。以上方法在历史上均有迹可循，其中唯一获得推广版正弦定理的外接圆法看似最为意外，却在提前埋下正弦圆中线段定义伏笔的课堂中显得顺理成章。数学家的灵感并非从天而降，巧妙地铺设历史情境有助于学生实现自然地“再创造”。

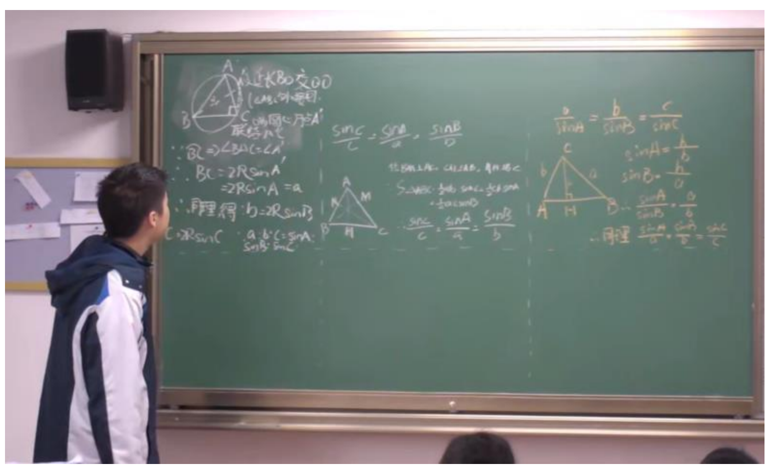


图 3 “正弦定理”课例中学生汇报探究结论及推导方法

历史相似性原理告诉我们，数学史可以成为预测学生认知基础的“参照系”和诱导“微创新”自然生成的“指南针”。

3.2 方法运用

数学的独特之处在于其思想和方法具有多样性。对于同一个公式或定理，古今中外的数学家对探索不同的证明方法总是乐此不疲。在今日课堂上，学生往往也具备创造出多种多样证法

的潜力，这正是思维流畅性、灵活性的体现。姜浩哲进一步提出，不同的思维火花因具有互相补充和完善的潜能而吸引和碰撞到一起，发生“聚合作用”，生成更具普适意义、抽象性和概括性的高阶创新，这一过程即为“微创新聚变”；学生在分享交流的过程中也会相互激发灵感，产生“微创新裂变”[13]。

在课例“等比数列求和公式”[15]中，学生分组讨论后共提供了七种精彩纷呈的公式推导方法。特别地，当教师指出第六组的几何推导法存在未考虑 $q<0$ 情形的缺陷时，一位学生当场举手追补，利用构造思想和分类讨论思想给出了第二种几何证法，过程如下：

对于等比数列 $\{a_n\}$，有 $a_{n+1}=a_nq\ (q\neq 0,\ q\neq 1)$，构造数列 $b_n=|a_n|\ (n\in\mathbf{N}^*)$，不妨设 $p=|q|$，则 $b_{n+1}=b_np$。

如图 4，构造 Rt△ $A_1A_2A_3$，其中 $\angle A_1A_2A_3=\dfrac{\pi}{2}$，$A_1A_2=b_1$，$A_2A_3=b_2$，以此类推，一直作到 Rt△ $A_{n-1}A_nA_{n+1}$（不妨设 n 为正偶数），连接 $A_2,A_4,A_6,\cdots,A_n$ 为一直线，则有

$$\frac{A_{n+1}A}{A_1A}=\tan\left(\angle A_3A_1A_2\right)=p,\quad \frac{A_2A}{A_nA}=\tan\left(\angle A_4A_2A_3\right)=p,$$

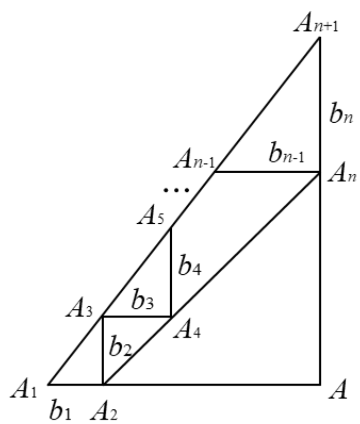


图 4 改进的几何推导方法

又因 $A_{n+1}A=A_nA+b_n$，$A_1A=A_2A+b_1$，故

$$\frac{A_nA+b_n}{A_2A+b_1}=\frac{A_nA+b_1p^{n-1}}{pA_nA+b_1}=p,\quad A_nA+b_1p^{n-1}=p^2A_nA+pb_1,$$

于是得

$$A_nA=\frac{b_1p^{n-1}-b_1p}{p^2-1},\quad A_2A=\frac{b_1p^n-b_1p^2}{p^2-1},$$

从而有

$$A_{n+1}A=A_nA+b_n=A_nA+b_1p^{n-1}=\frac{b_1p^{n+1}-b_1p}{p^2-1},\quad A_1A=A_2A+b_1=\frac{b_1p^n-b_1}{p^2-1},$$

当 $a_1>0$ 时，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1-b_2+\cdots b_{n-1}-b_n=A_1A-A_{n+1}A$，即

$$S_n=\frac{b_1\left(1-p^n\right)}{1+p}=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q},$$

当 $a_1<0$ 时，$S_n=-b_1+b_2+\cdots-b_{n-1}+b_n=A_{n+1}A-A_1A$，则

$$S_n=-\frac{b_1\left(1-p^n\right)}{1+p}=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q},$$

n 为正奇数时，同理可证。

由此可见，学生的方法创新并非总是尽善尽美，但这些待改进之处正是诱发新创新的关键节点，这一过程即为“微创新裂变”。历史上无数先哲为我们留下的方法宝藏不仅能够拓宽学生思维，为课堂上的创新提供思路，辅助教师以古今对话的形式评价学生的创新，还能帮助教师预测学生发挥创造性思维时可能出现的错误。例如在“等比数列求和公式”的课堂中，有三组学生提供的推导过程忽视了 q=1 情形的讨论，而历史上数学教科书的编写者也曾陷入 q=1 的迷思，直至 1916 年威尔辛斯基（E. J. Wilczynski, l876-1932）在《大学代数及应用》一书首次指出“和式两边同时除以 $(1-q)$ 时除数不能为 0”才得以解决[16]。

3.3 问题提出

问题提出任务作为一类特殊的“开放题”，被认为是培养数学创造力的重要途径之一。爱因斯坦（A. Einstein, 1879-1955）说过：“要提出新的问题、新的可能性，从新视角看旧的问题，需要创造性的想象力，这标志着科学的真正进步。”[17]美国学者布朗（S. I. Brown, 1938-）和华尔特（M. I. Walter, 1928-2021）在其《问题提出的艺术》中也指出：“问题提出不仅可以帮助学生对所学内容产生更清晰、深刻的理解，还能鼓励他们产生新的想法。”[18]足见，无论对于推

动科技发展的宏大创新，还是学生在课堂上的“微创新”，问题提出都是不可或缺的“燃料”。

在课例“基本不等式再探”[15]中，教师鼓励学生基于《九章算术》中的勾股容方问题“今有勾五步，股十二步，问勾中容方几何”提出新的数学问题，表 2 展示了学生所提的典型问题及所用的相应策略。

表 2 基于“勾股容方”的学生问题提出

策略	描述	具体问题	问题类别
条件操作	对原问题的条件进行改编而保持目标不变	两条直角边分别为 a 和 b 的 Rt△ABC 中，内接矩形 $DECF$ 的面积为多少？	条件式
目标操作	对原问题的目标（所求项或所证明的结论）进行改编而保持已知条件不变	两条直角边分别为 5 和 12 的 Rt△ABC 中，点 D 在线段 AB 上运动，矩形 $DECF$ 的面积最大值为多少？	目标式
新旧链接	将原问题的目标作为新的已知条件提出新问题	若正方形边长为 a，点 A 在 CF 延长线上运动，直线 AD 交 CE 延长线于点 B，则△ABC 是否存在面积最大或最小值？	链接式
自由设问	不符合上述三种策略的任何一种	直角三角形的哪一种内接正方形面积最大？是不是对任意直角三角形都有这个结论？	自由式

其中生甲的提问：“直角三角形的哪一种内接正方形面积最大？是不是对任意直角三角形都有这样的结论？”正是《九章算术》作者失之交臂的“弦中容方”问题。生乙提出的矩形最值问题与清代数学家梅文鼎不谋而合，两人的解法则是各有千秋。梅文鼎在《几何通解》中利用“勾中容横，股中容直”原理给出了优雅的几何推导（见图 5）[19]。在课堂中，生乙选择采用其更为得心应手的代数手段，想必他与这位中算史上为数不多提出极值问题的算学大家不难成为跨越时空的挚友。

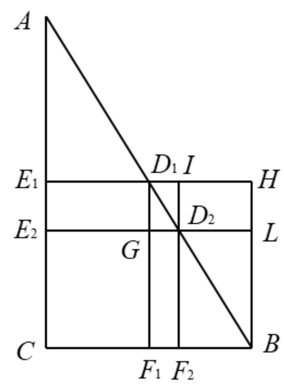


图 5 梅文鼎证明图示（其中 E_1 和 F_1 为中点）

可见，数学史上浩如烟海的问题素材，不仅可以“古为今用”，为学生提供探究与练习的机会，更能“推陈出新”，成为激发学生提出创新之问的基石。

3.4 批判辩驳

克莱夫（A. Craft, 1961-2014）特认为，教育过程中激发创新所必要的组织氛围包括：“新想法能够得到鼓励和支持、能够与他人间形成互动、能够容忍不确定性并鼓励冒险”[20]，敢于批判、质疑是为数学创造扫除旧观念的障碍的前提。但这并不等同于一味否定，批判辩驳的过程中聚合思维和发散思维必须同时活跃，既要“大胆质疑”，亦需“谨慎断言”[21]。

在课例“棱柱的概念”[15]中，教师鼓励学生自己归纳棱柱的定义，有学生认为棱柱是“有两个全等的多边形的面相互平行，其余各面都是平行四边形的多面体”，这与欧几里得《几何原本》中的定义相差无几。很快就有学生用手中的磁力片搭出了两种反例（见图 6-1，6-2），由此发现欧式定义的缺陷在于无法限制面的数量，因而只需通过扩充面的数量便能有力反驳。令人触动的是，学生利用课余时间还研究出了十六面体的反例（见图 6-3）。

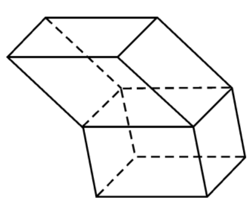


图 6-1 反例 1：四棱柱拼接

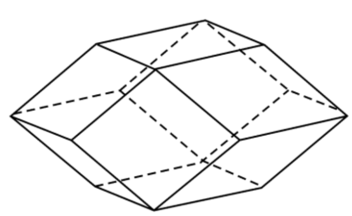


图 6-2 反例 2：十二面体

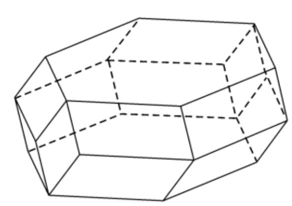


图 6-3 反例 3：十六面体

在课例“二面角的概念”[22]中，师生达成“由两个半平面 a 和 b 及其交线 AB 所组成的空间图形称为二面角”的共识后，教师布置学生用 A4 纸折出一个二面角，并用量角器测量其大

小。生甲选择将 A4 纸斜折，将量角器紧贴二面角边缘的两边测量的方法（如图 7-1），对此生乙表示："在倾斜的情况下，二面角的两个半平面重合时，两条倾斜的边并不重合"，生丙产生质疑："不对，在这种情况下，两条倾斜的边可以重合，例如两边与棱的夹角都是 30°"，生乙提出了第二种反例："那在这种情况下，将二面角摊平，两个半平面在同一平面上，二面角是平角，此时两条倾斜的边并不在同一条直线上（如图 7-2）。"从而说明了：平面角的两边不与二面角的棱垂直时，平面角就无法正确地表示二面角的开合程度。

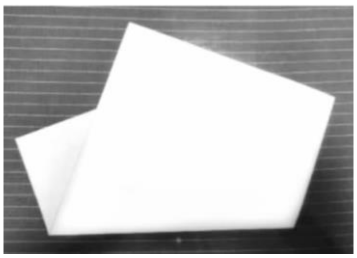


图 7-1 反例 1

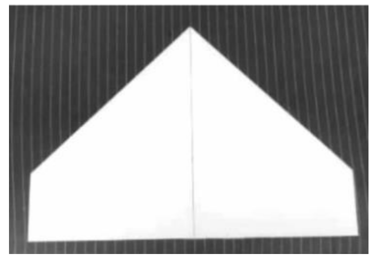


图 7-2 反例 2

有学生仍感到疑惑："有没有这种可能，倾斜的情况只是不能表示两个半平面重合以及摊平的情况，但是其他情况是可行的？"生丁立即以两个半平面相互垂直的情形为例，说明倾斜的折法无法对二面角进行正确刻画，这与美国数学家温特沃斯（G. A. Wentworth, 1835-1906）在其《平面与立体几何基础》给出的例证异曲同工（图 8）。学生彼此倾听、相互驳斥、最终修正错误观点的精彩交锋印证了"兼听则明"。

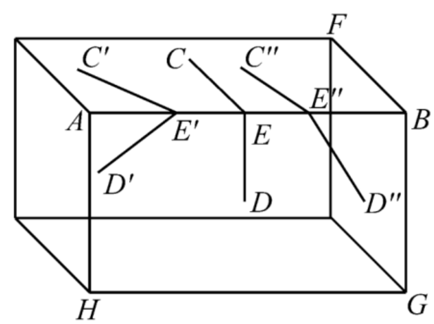


图 8 温特沃斯《平面与立体几何》中的示意图

可见，数学史揭示的多元文化可以培养学生兼容并包、耐心倾听的态度，数学家的千虑一失可以树立学生的信心和理性精神，从而为创新孕育条件。最后，以历史上数学家的观点作为辨析正误、论证异同的素材，促成创新的释放。

3.5 跨界联结

翻开历史的卷轴，数学的进步离不开自然科学发展和生活实践需求的外部推动。而现如今，与其他学科交叉、融合亦是数学发展的时代特征。因此，数学教育可以成为帮助学生跨界整合知识、形成综合性思维习惯的有益载体。学生能够自发地突破学科壁垒、实现融会贯通，以跨学科的视角审视问题是创新思维的重要表现，也是解决信息时代复杂问题和适应不可测情境的必要技能。

在课例“导数的几何意义”[23]中，有学生在意识到古希腊时期阿波罗尼奥斯切线定义的局限性后联想到物理中的力学概念：“切线可定义为方向向量与曲线上该点的运动方向相同或相反的直线。因为曲线是点形成的，点动成线，所以联想到了物理上的曲线运动的切向力，将这个概念带入到数学中，由于直线没有方向，但向量是带有方向的，所以在方向上也进行了限制。”尽管并未触及切线的严谨定义，却突破了静态定义的桎梏，为从动态角度定义切线提供了思路，这与 17 世纪科学家罗伯瓦尔（G. R. Roberval, 1602-1675）利用合速度的方向来定义切线的想法非常类似。

在课例“解三角形的应用”[15]中，学生分享完四种早期教科书中出现过的海岛高度测量方案后指出：“只要有足够精确的温度计和气压计，通过地理知识可知，每上升 100 米高度，气温将下降 0.6 摄氏度，或者用气压计来测高度”“只要有足够好的手机和网络，就可以依据自由落体运动规律来测量”，学生利用跨学科视角和现代工具完成了对古人的超越。

英国数学史家福韦尔（J. Fauvel, 1947-2001）曾指出数学史融入教学的价值之一是“提供跨学科合作的机会”[24]。一方面，历史的视角有助于教师厘清横纵交错的学科脉络，从而设置顺应学生心理序的跨学科情境。另一方面，历史数学文献中颇显数学应用价值的习题也可以成为教学中的有益素材，激发解决问题的跨界思维。有理由相信，在科学技术日新月异的今天，学生全然有潜力实现别创一格、超越古人的创新。

4 教学启示

透过所选取的高中 HPM 典型课例，重新审视数学史的智育价值，可以归纳出新知创获、方法运用、问题提出、批判辩驳和跨界联结五种数学史驱动下的学生创新类型，并从中获得若

干启示。

其一，鉴史留白。上述案例的共同点在于，教师摒弃了“以自我为中心”的思维习惯，充分给予学生探究、表达的机会，这恰是近年来人们所提倡的“留白创造式教学”[25]。英国创造性和文化教育咨询委员会（National Advisory Committee on Creative and Cultural Education, NACCCE）区分了“创造性教学”（teaching creatively）和“为创造力而教”（teaching for creativity）。前者指教师采用新颖、有趣、富有创造性的教学促进学生理解和学习，而后者则更关注于鼓励、识别和培养学生的创造力。为实现“为创造力而教”的目标，教师需采用“创造性地教学”，与此同时“为创造力而教”又进一步丰富了“创造性地教学”的内涵[26]。数学史融入教学无疑属于“创造性地教学”，而“留白创造式教学”要义则与“为创造力而教”不谋而合，二者相辅而行的关系在上述课例中得以具象呈现（见表 3）。

表 3 所选课例中的留白、创新及数学史运用情况

留白类型	创新类型	课例主题	数学史运用方式	数学史使用价值
发现之白	新知创获	两角和与差的余弦公式	顺应式	预测认知基础 铺垫历史背景 铺设思维路径
		正弦定理	复制式 重构式	
方法之白	方法运用	等比数列求和公式	顺应式	提供古今对照 拓宽解题思路 预知常见错误
问题之白	问题提出	基本不等式再探	顺应式	提供改编素材
陈述之白 论证之白 方法之白	批判辩驳	棱柱的概念	顺应式 重构式	培养包容态度 树立理性精神 提供辩论素材
		二面角的概念	复制式 顺应式	
方法之白 超越之白	跨界联结	导数的几何意义	重构式	挖掘学科关联 丰富习题资源
		解三角形的应用下	顺应式	

可见，“留白创造式教学”理念下析出的“课堂六白”可以成为诱发学生创新的教学指南，同时了解、运用或借鉴数学史，又可为教师设计符合学生认知基础和课堂教学目标的“留白”

活动提供素材和指导。

其二，援史有方。“以留白促创新”的 HPM 教学新理念对教师的史料驾驭能力提出了更高的要求。以课例“两角和与差的余弦公式”为例，尽管三角公式的几何本源毋庸置疑，但早期天文学家给出的若干推导方法大多过程繁杂或需要倚靠其它几何定理，直接适用于新知创获阶段教学的寥寥无几，更遑论古希腊时期仍以 60 进制、三角函数线段定义为主流。因此，在确保科学性的前提下对史料进行适当地简化与改编显得尤为关键。在所选案例中，教师甲抓住帕普斯模型的核心思想——用线段的长度表示和差角公式中的三角函数值，让学生用两个直角三角形来构造两角之差。教师乙让学生以勾股定理证明为起点类比创新的背后则隐藏着赵爽的弦图和大方图，可见，尽管中国古代三角学发展史略显黯淡，但在教师和 HPM 研究者的创新下，中华优秀传统数学文化依旧可以成为三角课堂中推动学生创新的鲜活素材。

其三，教学相长。学生的“补白”时常可以成为课堂中的“生成点”，从该角度来看，上述部分课例仍存在美中不足之处。例如，在“等比数列求和公式”课堂中，教师若能以引导学生相互“批判辩驳”的方式代替直接指出“三组方案忽视了 q=1 情形”的问题，或能诱发“微创新裂变”，进而使学生提炼出其中更高阶的核心思想——分类讨论思想，又于无形中实现“微创新聚变”。此外，学生当场补充的第二种几何证法实则与数学家斯梅尔（L. L. Smail, 1888-?）的解析几何法殊途同归，而后者以 q 表示直线斜率的方式巧妙地规避了纯几何法限于 $q>0$ 情形的拘囿[16]，若能以古今对话的形式比较两种方法的优劣异同，想必能够在拓宽学生思维的同时渗透德育之效。“留白”的课堂必然会致使教学过程不确定性的增加，教师不妨视其为提升自身捕捉、开发和利用课堂生成性资源能力的机遇，在教学相长的良性循环中实现教师专业发展。

参考文献

[1] Pólya, G. Mathematics Promotes the Mind[C]//Zweng, M. et al. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. Boston: Birkhäuser, 1983: 1.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 43-44, 2.

[3] Wang, X., Qi, C., & Wang, K. A Categorization Model for Educational Values of the History of Mathematics: An Empirical Study[J]. *Science & Education*, 2017, 26(7-9): 1029-1052.

[4] 汪晓勤, 邹佳晨. 基于数学史的数学学科德育内涵课例分析[J]. 数学通报, 2020, 59(03): 7-12, 19.

[5] 卢成娴, 姜浩哲, 汪晓勤. 数学史对批判性思维培养的作用——以《三角形一边平行线性质定理及推论》一课为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2019, (04): 11-17.

[6] 岳晓东, 龚放. 创新思维的形成与创新人才的培养[J]. 教育研究, 1999, (10): 9-16.

[7] Leikin, R., & Sriraman, B. Empirical research on creativity in mathematics (education): from the wastelands of psychology to the current state of the art[J]. *ZDM Mathematics Education*, 2022, 54(1): 1-17.

[8] 张奠宙. 普通高中创新人才培养中的基础与创新问题[J]. 教育发展研究, 2010, 30(6): 48-49.

[9] 罗新兵, 罗增儒. 数学创新能力的涵义与评价[J]. 数学教育学报, 2004(2): 82-84.

[10] 谢明初, 王尚志. 数学创造力的特征、培养与研究展望[J]. 全球教育展望, 2020, 49(5): 119-128.

[11] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 42-43.

[12] 弗赖登塔尔. 数学教育再探——在中国的讲学[M]. 刘意竹, 等, 译. 上海: 上海教育出版社, 1999: 63-68.

[13] 姜浩哲. 数学课堂中的“微创新”：理论内涵、过程机理与培育路径[J]. 课程.教材.教法, 2022, 42(8): 130-136.

[14] 马艳荣, 汪晓勤. HPM视角下“两角和与差的余弦公式”课例研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2020(3): 8-12, 18.

[15] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与高中数学教学——理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 160-175, 192-229, 307-331.

[16] 韩粟, 汪晓勤. 美英早期代数教科书中的等比数列知识[J]. 中国数学教育, 2022(Z2): 88-94.

[17] Einstein, A., & Infeld, L. *The Evolution of Physics*[M]. Cambridge: The Cambridge University Press, 1938: 95.

[18] Brown, S. I., & Walter, M. I. *The Art of Problem Posing*[M]. Philadelphia: The Franklin Institute Press, 1983: 1.

[19] 刘钝. 大哉言数[M]. 辽宁: 辽宁教育出版社, 1993: 413-414.

[20] Craft. A. The Limits to Creativity in Education: Dilemmas for the Educator[J]. *British Journal of Educational Studies*, 2003, 51(2): 113-127.

[21] 董毓. 批判性思维三大误解辨析[J]. 高等教育研究, 2012, 33(11): 64-70.

[22] 高振严, 韩嘉业. HPM视角下的“二面角”概念教学设计与实践[J]. 中小学课堂教学研究, 2021(12): 5-9, 37.

[23] 陈睿滢, 王智洋, 刘梦哲. 巧用课堂留白, 发展数学思维——HPM视角下导数的几何意义的教学[J]. 数学教学, 2022(8): 45-50, 37.

[24] Fauvel, J. Using history in mathematics education[J]. *For the Learning of Mathematics*, 1991,11(2): 3-6.

[25] 王华, 汪晓勤. 中小学数学“留白创造式教学”教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023: 25, 67-80.

[26] Jeffrey, B., & Craft, A. Teaching creatively and teaching for creativity: distinctions and relationships[J]. *Educational Studies*, 2004, 30(1): 77-87.

教学实践

以史为鉴 留白探究 创获新知

——HPM 视角下的“多边形的外角和”教学实践与思考

胡永强 [1]，沈中宇 [2]，汪晓勤 [3]

（1. 苏州市阳山实验初级中学校, 苏州 215151; 2. 苏州大学数学科学学院, 苏州 215006; 3. 华东师范大学数学科学学院, 上海 200241）

1 引 言

多边形的内角和与外角和是初中数学课程的重要内容。苏科版初中数学教科书将这一内容放置在平行线的性质之后，运用平行线的性质证明三角形内角和定理，接着用三角形内角和定理证明多边形内角和定理，随后用多边形的内角和定理证明多边形的外角和定理。数学家陈省身曾说：“多边形的外角和定理比内角和定理好。因为相比多边形的内角和来说，外角和不随边数的变化而变化，这种寻找变化中不变量的思想在数学研究中十分重要。”从这个意义上说，多边形的外角和定理蕴含重要的教学价值。

教科书上给出的多边形的外角与多边形的外角和的定义分别是：多边形的一边与它的邻边的延长线组成的角，叫做多边形的外角；在多边形的每个顶点处分别取一个外角，这些外角的和叫做多边形的外角和。根据上述定义，n 边形有 $2n$ 个外角，其外角和应当是 720°，这显然与多边形的外角和为 360°相悖，教科书对此没有加以解释，教学中发现有不少学生对此表示不理解。同时，如何在多边形外角和的教学中留白，为学生提供更多的探究机会，让学生创获新知、增强创新意识，也是值得思考的问题。

美国数学史家 M·克莱因（M. Kline, 1908-1992）曾指出“历史是教学的指南。”[1]为了解决学生的困惑并在教学中留白，笔者对多边形外角和的相关数学史加以研究，秉承“留白方能创新”的理念设计并实施了“多边形的外角和”教学。

2 史料分析

2.1 多边形外角的定义

历史上多边形外角的定义有静态和动态两种，静态定义为：外角是指多边形的一条边与其延长的相邻边所产生的角度[2]，这与现行教科书给出的外角定义一致；动态定义为：外角是指在多边形的某一顶点处线段方向的改变[3]。这两种定义与之前学生学习的角的两种定义相一致。

2.2 多边形外角和定理的证明方法

历史上多边形外角和定理的证明方法大致有 3 类。第一类是公元 5 世纪，希腊数学家普罗克拉斯（Proclus，约 411-约 485）在《几何原本》注中给出的借助内角和证明外角和的方法，n边形的内外角之和为$n\times180°$，内角和为（$n-2$）$\times180°$，两式相减可得外角和为 360°[4]；第二类是通过作平行线将 n 边形的外角聚拢到某一点处，组成一个周角，从而实现证明[5]；第三类是 1809 年德国数学家提波特（Thibaut，1775-1832）给出的旋转法，将一支笔按照同一个方向分别旋转所有的外角，最终笔尖方向与初始方向一致，且刚好旋转一周，从而说明多边形的外角和为 360°[6]。

2.3 美英早期几何教科书中的相关习题

18-19 世纪出版的美英早期教科书中有许多相关习题，其中有一类是由多边形的内角和与外角和之间的数量关系求边数。如：内角和等于外角和的多边形有几条边？若内角和是外角和的两倍呢？如果外角和是内角和的两倍呢？内角和减去外角和为 540°的多边形是几边形？[7-8]

本节课分别使用了顺应式、复制式、重构式将上述历史素材融入教学过程。基于多边形外角的动态定义，设计了围绕多边形的边界走一圈，转过多少度的情境引出多边形的外角定义及外角和的定义，同时用旋转法推导多边形的外角和定理，属于顺应式。在学生探索并展示出多边形外角和定理的多种证法之后，给出历史上相应的数学家的证法，让学生进行古今对照，激发自信心，属于复制式。结合美英早期教科书中的习题，编制题组帮助学生加深对知识的理解、探索蕴藏其中的一般规律，属于顺应式。[9]

3 教学过程

基于对教科书和历史的分析，结合学生的认知水平，将本节课的教学目标设定如下：（1）了解多边形外角的两种定义、外角和的定义，体会求简思想；（2）经历探索并证明多边形外角和定理的过程，发展推理能力，会应用多边形外角和定理解决简单的问题，增强应用意识和创新意识；（3）体会数学研究中类比思想、从特殊到一般的方法和寻找变化中的不变量的思想。本节课的教学重点是掌握多边形外角和定理的证明；教学难点是寻找多边形外角和定理的不同证明方法。主要设计与实施教学环节如下。

3.1 创设情境

问题 1：小明绕着图 1 所示的五边形花园的外围跑一圈，他转了多少度？为什么？

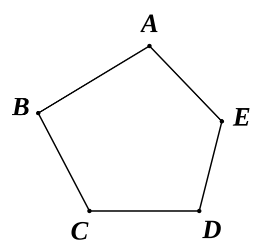


图 1

生 1：540°。小明跑一圈，刚好转了五边形的 5 个内角，因为五边形的内角和是 540°，所以他转了 540°。

师：有没有不同意见？

生 2：360°。跑一圈就是转一周，所以他转了 360°。

师：究竟是多少度呢？本节课，我们来研究这个问题。

【设计意图】借助生活情境，制造认知冲突，引出新课。

3.2 多边形的外角的定义

问题 2：结合图 1，说一说小明在跑步过程中转过的是哪些角？

教师用杆子演示从一条边转到另一条边的过程，引出多边形的外角并总结多边形的外角的两种定义：①静态定义：多边形的一边与它的邻边的延长线组成的角，叫做多边形的外角；②

动态定义：多边形的一边的延长线在顶点处按照某个方向旋转到另一边上所形成的图形叫做多边形的外角。

【设计意图】通过操作演示让学生理解多边形的外角，在此基础上，引导学生总结出多边形的外角的两种定义。

3.3 多边形的外角和的定义

问题 3：上述情境中小明转过的度数指的是什么？

生：在五边形的每个顶点处各取一外角的和。

师：回答得很好。将其推广到任意多边形，就可以得到多边形的外角和的定义：在多边形的每个顶点处分别取多边形的一个外角，这些外角的和叫做多边形的外角和。

追问：计算多边形外角和为何在每个顶点处只取一个外角？

组织学生思考、交流，从两个层面予以解释：第一层面，求简思想，因为一个顶点处的两个外角互为对顶角，因此只取一个即可；第二层面，根据外角的动态定义，按一定方向转一圈，在每个顶点处只形成一个外角，因此只需在每个顶点处取一个外角。

【设计意图】结合情境引出多边形外角和的定义，从求简思想及外角的动态定义两个层面理解在每个顶点处只取一个外角的合理性。

3.4 多边形的外角和定理

问题 4：三角形的外角和是多少度？并说明理由。

生 1：三角形的内角和加外角和为 3×180°。因为三角形的内角和为 180°，所以三角形的外角和为 360°。

师：很好。你的证法与公元 5 世纪，希腊数学家普罗克拉斯在给《几何原本》作注时的证法一致。

生2：根据“三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和”，可以推出三角形的外角之和等于三角形的内角和的 2 倍，所以三角形的外角和为 360°。

师：用到了欧几里得的《几何原本》命题 I.32 的结论。[10]

生 3：在平面上选一点，过这点分别作三角形的三条边的平行线，将三角形的三个外角转

化到这个点处，形成一个周角，所以三角形的外角和为 360°。

师：这里体现了转化思想。还有别的证法吗？

生 4：如图 2，将三角形向其内部不断收缩，当三角形收缩成一个点时，三角形的三个外角组成一个周角，所以三角形的外角和为 360°。

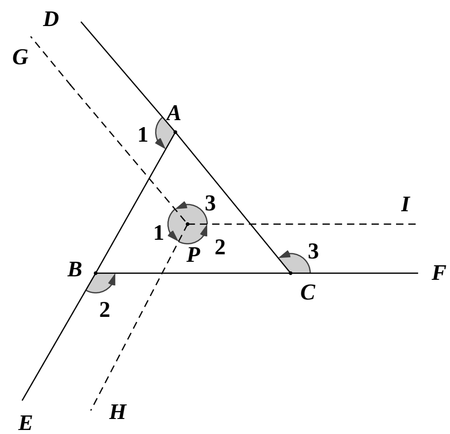


图 2 极限思想求外角和示意图

师：这里体现了极限思想。

生 5：将一根笔杆转完三角形的三个外角，刚好旋转一周，所以三角形的外角和为 360°。

师：这与 19 世纪初，德国数学家提波特的方法一致。

问题 5：你能找到这些方法之间的区别和联系吗？

生 6：生 1 的方法好理解，体现了知识的递进性。

生 7：生 2 的方法有局限性，对四边形及以上的多边形不好使用。

生 8：生 3 的方法和生 4 的方法道理相同。

生 9：生 5 的方法有创意。

问题 6：如果把三角形换成四边形、五边形、*n* 边形呢？你能得到什么结论？

【设计意图】让学生通过探究多边形的外角和定理的多种证明方法体会探究之乐和方法之美。组织学生对不同证法加以分析与讨论，以此提升学生的批判性思维。用问题 6 驱动学生借助三角形的外角和定理的学习经验，研究其他多边形的外角和定理，从中体会到从特殊到一般的数学研究路径。

3.5 古题今解

问题 7：完成下列各题：

（1）n 边形的内角和是外角和的一半，n=_____；

（2）n 边形的内角和等于外角和，n=_____；

（3）n 边形的内角和是外角和的 2 倍，n=_____。

追问 1：你能提出一些类似的问题吗？

生 1：n 边形的内角和是外角和的 3 倍，n=_____。

生 2：n 边形的内角和是外角和的 5 倍，n=_____。

追问 2：这里有规律吗？如果有，如何寻找这里的规律呢？

生：有规律。可以引入字母，设 n 边形的内角和是外角和的 x 倍，n=_____。

$(n-2)\times180°=x\times360°$，$n=2x+2$，只要把倍数 x 代入 $n=2x+2$，即可求出 n。

追问 3：解决上述题组，你有什么体会？

生 1：用字母表示数可以帮助我们找到一般规律。

生 1：我从中体会到了“从特殊到一般”的研究过程。

追问 4：你能提出其他问题吗？

生 1：n 边形的内角和与外角和之和为 900°，n=_____.

生 2：n 边形的内角和比外角和多 540°，n=_____.

【设计意图】这组题的前 3 道改编自早期美英几何教科书，用以帮助学生巩固知识。追问 1 旨在培养学生提出问题能力。追问 2 和 3 旨在引导学生深入思考，寻找蕴含其中的一般规律，并通过字母表示数提示这一规律，经历像数学家一样研究问题的过程，体会数学探究的乐趣。追问 4 旨在引导学生提出新的问题，让学生的思维变得更加宽广。

3.6 比较辨别

问题 8：多边形的内角和定理与外角和定理，你更欣赏哪一个？为什么？

生 1：我更喜欢多形外角和定理。

师：为什么？

生 1：因为它不随着多边形边数的变化而变化，永远是 360°，好记。

师：很好。还有其他观点吗？

生 2：我觉得内角和定理好。因为多边形的内角和定理是推出外角和定理的基础。

师：大家说得都很有道理。下面我们来看看数学家的观点。（播放陈省身关于多边形外角和定理好于内角和定理的访谈视频，体会陈先生提出的数学研究中要善于寻找变化中的不变量的思想。）

【设计意图】培养学生批判性思维是数学教学的重要任务之一。教师组织学生对所学内容加以对比、分析，在加深对知识理解的同时，激发学生深度思考。随后通过微视频把数学家的观点也引入课堂，与学生的观点相互碰撞，培养学生的批判性精神和理性精神。

3.7 课堂小结

引导学生从以下四个方面进行课堂小结。一个定理：多边形的外角和为 360°；两个概念：多边形的外角及外角和的定义；三种方法：普罗克拉斯证法、平行线法、旋转法；四种思想：特殊到一般、变中有不变、求简、转化。

【设计意图】从四个维度帮助学生回顾与反思，旨在起到巩固与提升的作用。

4 学生反馈

在实施本课之后，对 48 名学生进行了问卷调查。对调查结果加以整理和分析发现以下结论：

92%的学生表示完全理解本课所学内容，8%的学生表示基本理解本课所学内容。75%的学生想到了证明多边形外角和定理的方法，有 25%的学生想到多种方法，其中用平行线的性质和用旋转法证明的均为 35%，20%的学生想到用内角和定理证明。对于本节课你体会到哪些数学思想方法、和精神？许多学生表示体会到了转化、类比、实验等思想方法和严谨、求简、批判、创新、追求变中不变等精神。

对于本节课你最感兴趣的环节是什么？50%的学生表示最喜欢多边形的外角和定理的证明环节，理由如下：我从中了解到更多的证明方法，开拓了视野；我在这个环节想到了一种和古人一样的证明方法，我非常惊喜；思考多种证法培养我的创新能力，生动有趣。20%的同学表

示喜欢微视频，理由如下：这里有我喜欢的数学史；数学家陈省身教授提出的寻找变化中的不变量的思想我很认同。

以上我们看到，基于数学史的留白教学促进学生的数学理解，打消了学生心中为何计算多边形的外角和只在每个顶点处取一个外角的疑虑，激发了学生的探究热情，增强了学生的成功体验，加深了学生对数学思想方法的领悟。

5 教学启示

5.1 基于历史，追求自然

数学知识的生成是自然的，也是有其内在规律的。数学教学设计应当遵循知识的生成与发展规律，引导学生重新经历数学家研究相关知识的过程，也就是“再发现”与“再创造”的过程。本课从学生熟悉的生活情境开始，自然引出多边形的外角的定义和外角和的定义，在外角和定义的形成过程中通过数学的求简思想和外角的动态定义帮助学生理解计算多边形的外角和时在每个顶点处只取一个外角的理由。这样的设计遵循知识形成与发展的自然规律。

5.2 设计留白，启发思考

在教学中，教师的满堂讲往往无法取得预期的效果，如果在某些重要的教学环节留下一些白，给学生提供思考探究与交流表达的机会，常常可以取得意想不到的效果。本设计留了四种白，多边形的外角的定义、外角和的定义都是学生在理解情境的基础上自己给出的，属于陈述之白。教师引导学生在课堂上探究出证明多边形的外角和定理的三种方法，属于方法之白。在练习中设计了“你还能提出新的问题吗？”等问题引导学生主动提问，属于问题之白。在课堂小结中，引导学生在知识总结的同时体会求简思想、转化思想、寻找变中不变的思想，属于超越之白。[11]

5.3 自主探究，创获新知

学生是课堂的主体，教师运用适宜的教学方式组织学生自主探究数学问题，可以促进学生创获新知，让学生实现意义建构。本节课借助小明围绕花坛跑一圈转了多少度的生活情境引导

学生探究并获取多边形的外角的定义及外角和的定义，与教师直接给出定义的方式相比，这种在自主探究中创获的定义更有意义。在多边形外角和定理的证明过程中教师给学生提供探究证法的机会，通过“还有新的证明方法吗？”等问题驱动学生思考并创获多种证法，以此培养学生的创新意识。在“古题今解”环节通过问题引导学生探究并创获蕴含其中的一般规律，让学生经历数学结论的发现与证明过程，让学生在探究中创获新知。

参考文献

[1] Kline, M. A proposal for the high school mathematics curriculum[J]. *Mathematics teacher*, 1966, 59(4): 322-330.

[2] Walker, T. *Elements of Geometry* [M]. Boston: Richardson & Lord, 1829:37.

[3] Edwards, G. C. *Elements of Geometry* [M]. New York: Macmillan & Company, 1895:18.

[4] Playfair, J. *Elements of Geometry* [M]. Philadelphia: A. Walker, 1829:57.

[5] Hayward, J. *Elements of Geometry* [M]. Cambridge: Hilliard & Brown, 1829:20.

[6] Edwards, G. C. *Elements of Geometry* [M]. New York: Macmillan & Company, 1895:19.

[7] Betz, W. & Webb, H. E. *Plane and Solid Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1916:109-110.

[8] Newell, M. J. & Harper, G. A. *Plane and Solid Geometry with practical problems* [M]. Chicago: Row, Peterson & Company, 1918: 53-54.

[9] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 33-34.

[10] 欧几里得. 几何原本[M]. 兰纪正, 朱恩宽, 译. 南京: 译林出版社, 2011: 27.

[11] 王华, 汪晓勤. 中小学数学留白创造式教学——理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2023: 67-80.

向量探幽：推开历史之门

于博，韩粟

（华东师范大学数学科学学院, 上海 200241）

现实生活中，我们经常和长度、质量、距离等只有大小的量打交道，到了高中，我们开始接触到位移、速度、力等既有大小又有方向的量。我们把诸如前者的量叫做数量，而诸如后者的量叫做向量（Vector）。

“Vector”这一概念最早由英国数学家哈密顿（W. R. Hamilton，1805-1865）使用的。据记载，这一概念被引入中国是在清朝末年时期。“Vector”最初被译为“动量”，“表依定方向，经定距离之移动曰动量”。此后“Vector”的译名经历了多次改变，直到 1985 年，全国自然科学名词审定委员会统一规定：物理学称“矢量”，数学称“向量”，这两个译名一直沿用至今。

《普通高中数学课程标准》中提出，向量理论具有深刻的数学内涵以及丰富的物理背景。作为沟通几何与代数的桥梁，向量的学习有助于学生体会形与数的结合，感悟数学知识之间的关联，加强对数学整体性的理解。今天我们将从数学史的角度出发，跨越时空，同历史上的数学家们对话，探索向量的“前世今生”。如果你准备好的话，就请和我一起推开历史的大门，进行一场愉悦的“向量探幽”之旅吧！

1 物理之源：速度和力的平行四边形法则

谈及向量的起源，我们需要把目光转回到几千年前的古希腊时期。早在公元前 350 年，亚里士多德（Aristotle, 前 384-前 322）就在《物理学》一书中给出了速度的平行四边形法则：“当一个物体以一定比率移动时（朝着两条路径以定比率速度运动），该物体一定沿着一条直线运动，这条直线是以定比率速度为邻边构成的平行四边形的对角线。”仔细阅读，不难发现亚里士多德给出的法则和我们课本上所学的向量加法的平行四边形法则很相似。后来数学家海伦（Heron, 约 10-约 75）给出了几何证明。试试看，你能否和两千年前的海伦碰撞出思想的火花呢？

如图 1，动点 G 从点 A 处沿着直线 AB 向点 B 做匀速运动，同时直线 AB 开始沿与自身平行的方向匀速平移，当点 G 到达点 B 处时，直线 AB 到达了直线 CD 位置，端点 A 的运动轨迹是

直线 AC，直线 EF 是 AB 运动过程中任意时刻所处的位置。证明：点 A，G，D 三点共线。

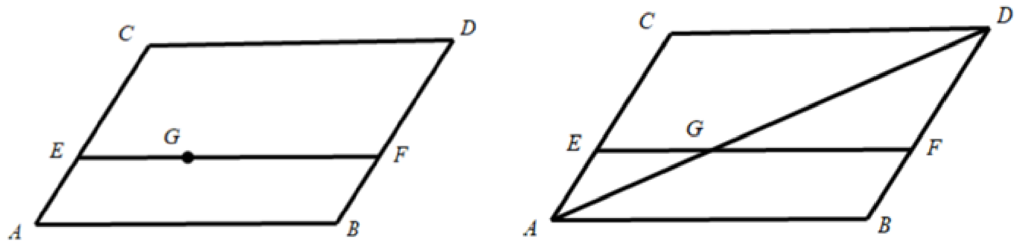


图 1 海伦的几何证明

进入 17 世纪下半叶，英国数学家、物理学家牛顿（I. Newton，1643-1727）在其著作《自然哲学的数学原理》中以推论的形式进一步阐述并证明了力的平行四边形法则：“物体同时受两个力作用时，其运动将沿平行四边形对角线进行，所用时间等于二力分别沿两边所需时间”。然后他又在另一推论中给出力的合成与分解方法：“任何两个斜向力 AB 和 BD 合成一直线力 AD；反之，任何一直线力 AD 可分解为两个斜向力 AB 和 BD；这种复合和分解已在力学上充分证实”。这无疑对整个力学系统的构建产生巨大的推动作用。

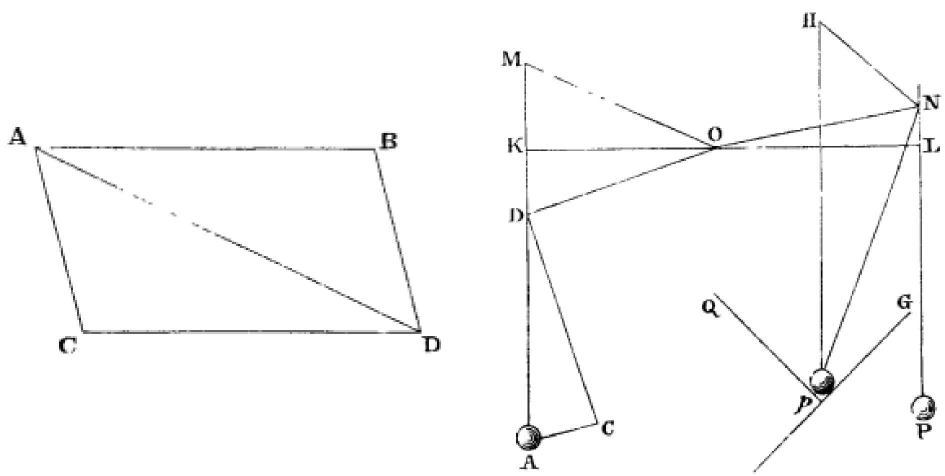


图 2 《自然哲学的数学原理》推论中的图形

此后，随着力学的不断发展，无论是数学家，还是物理学家，亦或两种身份兼有的科学家，他们全身心投入到物理量中“向量”的挖掘中，又发现了诸如力矩、角速度这些用来描述刚体运动的“向量”。故在 18 世纪以前，向量多以物理量的身份出现在人们的视野里，有关向量的性质几乎只有平行四边形法则，在此时期这种力学中的具体运算并未被抽象为代数运算。

2 数学之流：从位置几何到坐标表示

仍旧在 17 世纪，德国数学家莱布尼兹（G. W. Leibniz, 1646-1716）在写给惠更斯（C. Huygen, 629-1695）的信中提出了他对于位置几何的构想。他在信中表明，当前利用代数运算来进行几何证明是一件困难的事情，如果能够建立一个新的系统，人们可以像处理几何一样处理力学，这对物理方面的帮助是莫大的。可见，此时莱布尼兹已经看到了这个新形式的代数将在数学和物理上有许多应用，但他并没有为此创造出一种实际有效的方法。后来，有人将莱布尼兹的理想照进了现实，这个人就是德国数学家格拉斯曼（H. G. Grassmann, 1809-1877）。他在《扩张论》中提及其思想源泉，如果 A、B、C 是同一条直线上的三点，那么无论 AB 和 BC 是在同一方向上还是在相反的方向上，都会有 $AB+BC=AC$，当方向相反时，AB 和 BC 就不仅仅要被看作长度，同时还应考虑到它们的方向。然而，上述都算是简单的情形，如果 A、B、C 不在同一直线上呢？格拉斯曼这一思考，扩张了数学的新领域。他在另一本著作《潮的理论》中还介绍了许多关于向量的加法和减法，两种主要类型的向量乘法等内容，与如今的向量表达方式几乎等价，我们不得不感叹其构思之精巧，成果之伟大。

进入 18 世纪，在研究刚体的运动规律时，欧拉（L. Euler, 1707-1783）首次把向量的分解放入笛卡尔坐标系中考虑，他认为笛卡尔直角坐标系是处理向量最自然的工具。19 世纪，向量迎来快速发展，复数功不可没。彼时还是测量员的挪威数学家韦塞尔（C. Wessel, 1745-1818）在论文《关于方向的解析表示，特别是在确定平面和球面多边形方面的努力》中尝试以代数的形式解析地表示有向线段。他按照传统速度加法，通过平行四边形法则并对应复数的加法，给出了向量的加法定义：“如果我们将两条直线以某种方式合并起来，就称将两条直线相加，方法是第二条线的始端连接第一条线的末端，然后从合并线的第一个点到最后一点贯穿一条直线，这条直线就是合并的两线之和。”此外，为了研究平面中的向量，他还引入了两个正交的单位向量，其工作使得“向量”第一次以纯数学的方式进入人们的视野。

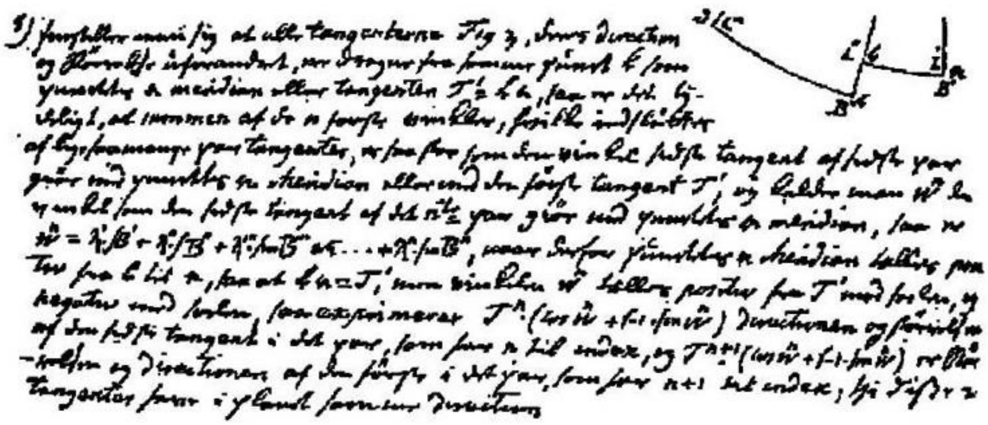
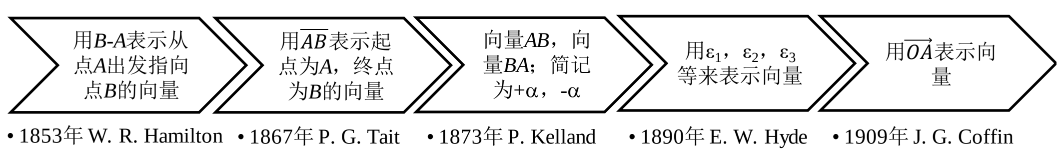


图 3 韦塞尔手稿

此后，德国数学家高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）建立起复平面的概念，使得向量和复数可以一一对应，向量能够表示为一对有序的实数 (a,b)。这种由有序实数对表示的向量有着更加广泛的应用。例如我们今天熟知的利用坐标来求向量的模和两点间距离：已知向量 $\vec{a}=(a_1,a_2)$，则 $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$；已知点 $A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$，则两点间距离 $d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$。进入 20 世纪后，经过美国数学物理学家吉布斯（J. W. Gibbs, 1839-1903）及其博士威尔逊（E. B. Wilson, 1879-1964）等人的共同努力，完整的现代向量系统最终得以功成。

数学史上，如今用来表示向量的符号 $\overrightarrow{AB}$ 并不是从天而降，而是经历了一个演变的过程。观察下图，你能说说你对向量符号演变的理解吗？它和向量概念的演变有何关系？



3 几何之法：向量方法在平面几何中的应用

向量集数与形于一身，向量的线性运算和数量积运算都具有鲜明的几何背景，因此平面几何图形的许多性质都可以由向量的线性运算及数量积表示出来，这样平面几何中的许多问题就可以用向量方法来解决。下面让我们一起翻开古籍，从早期数学教科书中探寻向量与平面几何

的联系。

【例题 1】连接三角形两边中点的线段与第三边平行且等于第三边的一半。

证明：如图 4 所示，在$\triangle ABO$中，点 M、N 分别为线段 OA、OB 的中点，我们令$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则有$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\vec{b}$，因此$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$，$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$，所以$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$。即$MN\parallel AB$，$MN=\frac{1}{2}AB$，证毕。

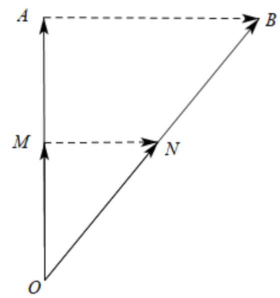


图 4 例题 1 示意图

【例题 2】顺次连接一个（凹）四边形各边中点所构成的四边形为平行四边形。

证明：以凹四边形为例，如图 5 所示，将四边分别表示为向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$，则$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$，所以$\vec{a}+\vec{b}=-\left(\vec{c}+\vec{d}\right)$。点 P、Q、R、S 分别为四边中点，易知$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$，$\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}\right)$，因此$\overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{RS}$，即。即$PQ\parallel RS$，$PQ=RS$，四边形 $PQRS$ 为平行四边形，证毕。

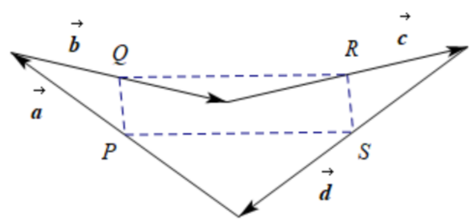


图 5 例题 2 示意图

【试一试】证明平行四边形对角线互相平分。（图 6）

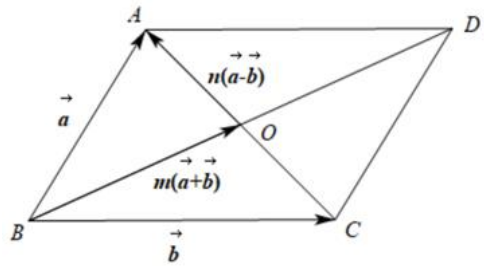


图 6 “试一试”示意图

【例题 3】平行四边形一个顶点与对边中点的连线和对角线的交点是该对角线的三等分点。

证明：如图 7 所示，在▱$ABCD$ 中，点 E 是 AD 边中点，连接 BE 交对角线 AC 于点 P，令 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AP}=m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$。又 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\frac{1}{2}\vec{a}+n\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$，所以 $m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+n\left(\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)$，即 $m\vec{a}+m\vec{b}=\frac{1}{2}(1-n)\vec{a}+n\vec{b}$，因此 $\begin{cases} m=\frac{1}{2}(1-n) \\ m=n \end{cases}$，解得 $m=n=\frac{1}{3}$，即 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$，证毕。

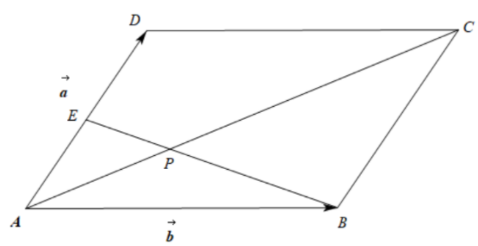


图 7 例题 3 示意图

【例题 4】在三角形内选取任意一点，作三边的平行线，与三边相交所得三条线段，那么这三条线段与对应平行边的比值之和等于 2。

证明：如图 8 所示，点 P 为△ABC 内任意一点，作平行线与三边分别交于点 D、E、F、G、M、N。令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m\vec{a}+n\vec{b}$，则 $\overrightarrow{DB}=(1-m)\vec{a}$，$\overrightarrow{MC}=(1-n)\vec{b}$，则 $\frac{DE}{AC}=1-m$，$\frac{MN}{AB}=1-n$。又 $\overrightarrow{AP}=m\vec{a}+n\vec{b}=(m+n)\vec{a}+n\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$，所以 $\frac{FG}{BC}=m+n$，即 $\frac{DE}{AC}+\frac{MN}{AB}+\frac{FG}{BC}=(1-m)+(1-n)+(m+n)=2$，证毕。

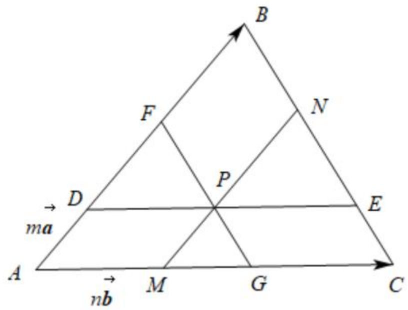


图 8 例题 4 示意图

【试一试】如图 9 所示，点 P 是 $\square ABCD$ 中任意一点，过点 P 作与 $\square ABCD$ 边平行的直线，交 AD、AB、 BC、 CD 分别于 K、L、M、N。求证：直线 LM、KN 和 AC 交于一点。

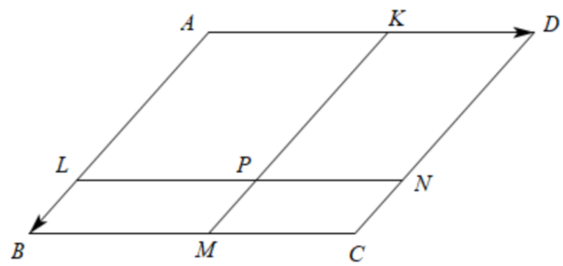


图 9 “试一试”示意图

至此，通过“物理之源”“数学之流”和“几何之法”三个板块，我们跟随着数学家们的脚步了解了向量的起源和发展，也从古籍中学习到解决平面几何问题的一种新方法——“向量法”。本次的向量探索之旅可谓收获颇丰，相信你一定还十分好奇：在现代数学和科学中，向量又扮演着怎样的角色呢？在物理学中，向量为力学的研究提供了数学工具；在工程学中，向量被用来帮助设计稳定的结构；在计算机科学中，向量被用来表示图形的位置和方向，支持计算机图形学的发展。除此之外，向量在机器学习、数据分析、量子力学等现代领域中都发挥着关键作用。希望同学们在未来的数学学习中，不仅满足于掌握基本概念和解题技巧，还能揭开题目背后的奥秘，做知史明理、举一反三的小小数学家。

小试牛刀

大数学家欧拉曾提出过这样一条定理：三角形的外心、重心、垂心依次位于同一条直线上，

且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半。该直线被称为三角形的“欧拉线”。与欧拉线有关的题浩如烟海，请你尝试解决下题：已知$\triangle ABC$，BC=6，AC=5，AB=4，点 I, O, G, H 分别为$\triangle ABC$ 的内心、外心、重心、垂心，求$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}$的值。

答案：如图，连接 AI 并延长交 BC 于点 E，由角平分线定理可知：$\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{5}$，即$\overrightarrow{BE}=\frac{4}{5}\overrightarrow{CE}$，则 $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{4}{5}\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\right)$，即 $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$。同理可得，$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}$，

由三角形重心知，$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

由欧拉线定理知，$\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$，

所以$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{AO}+3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AO}+3\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}\right)=-2\overrightarrow{AO}+3\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，

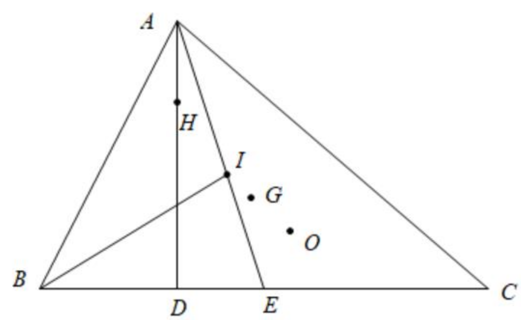
所以$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}=\left(-2\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AI}=-2\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AI}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AI}$，

而$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{4}{15}\times\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=6$，

$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{1}{8}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=4\times5\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$，

所以$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AI}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{15}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{4}{15}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{27}{2}$，

即$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}=-2\times6+\frac{27}{2}=\frac{3}{2}$。



活动讯息

绣湖之畔书声朗，金岭山巅翰墨香

——浙江义乌教研与参观活动

唐都宁，谢宇欣

（华东师范大学数学科学学院, 上海 200241）

2024 年 3 月 5 日，华东师范大学教师教育学院汪晓勤老师、邹佳晨老师携 HPM 研究团队数名研究生赴浙江省义乌市参加教研与参观活动。

图 1 万松强老师致辞

上午的教研活动于义务公学展开。首先，义乌市教研员万松强老师为本次活动致开场辞，他指出，统计概率部分的教学一直是高中数学教学的难点和薄弱点，欲突破这一瓶颈，需要集思广益，共同攻克，提升课堂品质。

【教学展示】

接着，进入教学观摩环节。本次“品质课堂”高一数学研训活动由来自义乌公学的丁春艳老师和义乌中学的陈沛余老师围绕《简单随机抽样》这一主题进行同课异构的现场教学。

丁老师通过讲解抽签法、随机数法的操作步骤和原理，让学生深刻领会到了“简单”与“随机”的课程价值。独具匠心的教学风格、以生为本的教学理念在现场引起了听课老师们的共鸣和好评。生动有趣的语言表达、形象直观的案例分析不仅提升了学生学习兴趣和积极性，更促进了他们对课程内容的深入理解和掌握。

陈老师在教学实践中先以学生所熟知的义乌小商品城作为切入点，抓住学生与生活紧密相关的实际问题，在探讨实际生活问题中不断突破，推动教学形式创新。在教学中为学生建立起

联系学科与日常生活的桥梁，不仅能够提高学生的创造性思维，促进知识更好的传承和实践，也能不断增强老师的教学经验，为青年教师的成长提供了积极的借鉴。

图 2 丁春艳老师教学展示

图 3 陈沛余老师教学展示

【专题讲座】

在精彩的教学展示之后，汪晓勤老师带来了主题为“古为今用，推陈出新——中算史在高中数学教学中的应用”的讲座分享，从古今对比的角度出发，阐述了“古为今用，推陈出新”的教育理念。汪教授认为，古代数学文化中蕴含着丰富的教育资源和智慧，可以为现代数学教育提供有益的借鉴和启示。汪老师鼓励老师们在教学中融入传统文化元素，让学生在学习数学的同时，也能感受到传统文化的魅力。

图 4 汪晓勤老师讲座

图 5 邹佳晨老师讲座

邹佳晨老师作了题为“HPM 课例中的留白与创新”的专题讲座，邹老师强调留白创造式教学注重学生的主体性和创造性，在 HPM 课例中注入留白理念可以激发学生的学习兴趣和探究欲望。邹老师的分享让与会教师对教学实践有了更深层次的认知，要敢于走出自己的舒适区接触新的知识，并且能够在数学史中汲取教学的营养，将学习成果应用到实际课堂当中去。

【义乌中学数学研学社区参观】

3 月 5 日下午，汪老师、邹老师携 HPM 研究团队参观了浙江省义乌中学数学研学社区，并

与义乌中学数学组进行了深度交流探讨。

图 7 参观（HPM）工作室浙江义乌教研基地

义乌中学是数学史与数学教育（HPM）工作室浙江义乌教研基地。义乌中学数学研学社区以打造“青岩数学”教研品牌为抓手，把浸入式学习场、主题式研修坊、品牌研发基地三大区域，相应解构为“青言数学”“青研数学”“青颜数学”三个子系，以“青岩数学·亲研未来”为统领，进行资源整合输出，并内化为具有地域特色、学校传统的学科教研品质。通过研学社区的建设，打造义乌中学数学教与学的精神家园。

图 8 人员合影

此次研学活动圆满结束。每一位参与的师生都满载而归，相信在 HPM 工作室与义乌中学数学研学社区的密切合作下，未来会涌现更丰硕的课例成果！

第二届“留白创造式”数学教学研讨会隆重举行

彭纯莉，钱骏霖，唐都宁，王德凯，谢宇欣，

姚雪凌，于博，赵哲栋，朱峻驻，朱轶萱

（华东师范大学数学科学学院, 上海 200241）

2024年4月29日上午，第二届“留白创造式”数学教学研讨会在华东师范大学隆重开幕。本次会议由上海市普陀区教育局、华东师范大学教师教育学院主办，上海市晋元高级中学、上海市普陀区教育学院、华东师范大学教师教育学院数学教育研究所承办，上海市宜川中学附属学校协办。上海市普陀区教育局局长赵平，上海市普陀区教育学院院长、正高级教师、特级教师刘友霞，上海市晋元高级中学正高级教师、特级教师、华东师范大学教师教育学院数学教育研究所首席专家王华，华东师范大学教师教育学院副院长、教授、博士生导师汪晓勤，上海市闵行区高中数学教研员、正高级教师、特级教师杨家政，上海市静安区教育学院高中数学教研员、正高级教师、特级教师任升录，上海市黄浦区北京东路小学副校长、正高级教师林雁平，上海市嘉定区初中数学教研员曹君，苏州大学数学科学学院沈中宇，上海市崇明区高中数学教研员周磊明出席开幕式。来自上海、苏州、杭州、嘉兴、北京、合肥、淮南、成都和萍乡等地区的 107 余家单位，共计 183 位高校学者、研究生、教研员和一线中小学教师参加会议。华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师主持开幕式。

图 1 全体合影

【大会致辞】

上海市普陀区教育局局长赵平，华东师范大学教师教育学院副院长、教授、博士生导师汪晓勤分别在开幕式上致辞，而后，上海市普陀区教育局赵平局长，上海市普陀区教育学院刘友

霞院长，上海市晋元高级中学王华老师和华东师范大学教师教育学院汪晓勤老师共同为“中小学数学留白创造式研究中心”揭牌。

图 2 揭牌仪式

【大会报告】

开幕式后，上海市晋元高级中学王华老师和华东师范大学教师教育学院汪晓勤老师分别作了大会报告。

王华老师作了题为“追求真善美 留白促创新——数学留白创造式教学理论实践与思考”的大会报告。王老师首先对中小学数学留白创造式教学的理论进行了概述，它源于时代的发展与不断前行的探索，包括优秀传统文化中的留白与创新，留白创造式教学的概念、认识与实施。在此基础上，进行对中小学数学留白创造式教学的实践探索，包括理论学习、研究团队建设、例会制度等内容。然后，王老师结合具体课例，谈及追求真善美的创新教育。最后，王老师对留白创造式教学的未来进行了展望与思考。

图 3 王华老师作大会报告

图 4 汪晓勤老师作大会报告

汪晓勤老师作了题为“基于中算史的无字证明构造与留白创造式教学”的大会报告。汪老师从“时代之需”“大方之蕴”“弦图之变”“容方之探”“横直之构”“课堂之用”六个方面，阐述了基于中算史构造无字证明并开展留白创造式教学的方式。以赵爽《周髀算经》注中的大

方图、弦图，勾股容方图以及“勾中容横，股中容直”图为例，通过对上述图形进行变形，构造无字证明，归纳出“形诡量峻，体殊数齐”“同源分流，求同存异”“相与之势，不失本率”三种构造无字证明的策略，并总结无字证明与“陈述”“发现”“方法”“论证”“问题”“超越”六白之间的联系，为其在留白创造式教学的实施提供思想启迪。

【圆桌论坛】

大会报告结束后，华东师范大学教师教育学院汪晓勤老师、上海市晋元高级中学王华老师、上海市静安区教育学院任升录老师、上海市闵行区教育学院杨家政老师和华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师组织了题为“留白与创新，数学教育新探索”的圆桌论坛，论坛由华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师主持。

图 5 圆桌论坛

各位老师就留白创造式数学教学的理论与实践展开了交流与探讨。任老师认为，留白创造式教学的核心在于为学生留下充分的思考与探究的时间与空间，因此教师需要聚焦教学目标，适当引导启发，在留白与补白的过程中激发学生的创造力。杨老师结合多项式乘法与复数的概念两个案例，分析了留白问题设计对教师提出的要求，同时分析了留白问题的特征，包括情境体验，整体关联，层层递进和动态发展等。王老师认为在留白创造式教学中，问题之间的跨度较大，给学生思维的空间较大。关于留白创造式教学与教师专业发展，汪老师认为年轻教师要在“做中学”，并可通过专业学习共同体成长。

【分组报告】

2024 年 4 月 29 日下午，第二届“留白创造式”数学教学研讨会开启了热烈的分组报告，分组报告分三组同时进行，三十余位报告者从自身经验出发分享了有关留白创造式教学的教学实践和理论探索。

图 6 分组报告掠影

2024 年 4 月 30 日上午，第二届“留白创造式”数学教学研讨会分学段于上海市宜川中学附属学校和上海市晋元高级中学进行了教学观摩活动。

【教学观摩-小学组】

上海外国语大学附属普陀实验学校的张雯珺老师带来了一节以“算筹探秘”为主题的观摩课。张雯珺老师以原始计数工具为情境，引出祖先发明的记数工具算筹，带领学生探索一位数、两位数、三位数算筹的摆放方式，并与古代时候其他地区的记数工具进行对比。张老师将学生的探究结果进行有顺序地投屏，以生生互评、师生互评的方式让学生的想法充分被表达，从而让学生充分体会到位值制记数方法的便捷性，渗透符号化、求简的思想，感悟中国人民的数学智慧。

图 7 张雯珺老师的观摩展示课

在评课交流环节，上海市黄浦区北京东路小学的毕艳老师认为课堂活动让学生感受到算筹

发明过程的不易以及如今数学表达形式的简洁，进一步，可以将课堂拓展设计成综合实践活动，为给学生留更多白。上海市黄浦区北京东路小学的林雁平老师对本次教学观摩课进行了总结。林老师认为本堂课在留白创造式教学方式的使用及 HPM 的融入上都有很多可圈可点、值得研讨的地方，为学生留出了好奇、挑战、反思、创造的空间。林老师指出，在留白课堂上基于怎样的目标、要给学生留多少白是值得思考的问题。对于课堂中超越之白的体现，林老师认为本堂课通过微视频让学生学会换位思考、形成同理心，这对于学生的信息提取能力也能得到很大的提升。

【教学观摩-初中组】

来自上海市宜川中学附属学校的游晓洁老师带来一节“行程问题探究”的观摩展示课。游老师从一个现实问题情境引入“如何设计方案保证在截止时间前完成出境手续”，整节课围绕这个问题开展探究，让学生自己发现问题，提出问题，分析问题，解决问题，培养学生的数学建模、数学抽象素养。

图 8 游晓洁老师的观摩展示课

评课环节由上海市静安区教育学院任升录老师主持。任升录老师提出，研讨会的课例展示旨在说明数学课堂改革的最新研究成果。专家型教师更关注问题的设计是否以学生为中心、是否能引起学生的兴趣及激发学生的思考。任老师介绍了本堂课教学设计的修改过程，并阐述了六种留白形式在本堂课中的体现。此外，任老师认为同伴评价的意义在于引导学生倾听，避免有同学游离在小组讨论之外。胡军老师认为，从“综合与实践”的视角设计问题是当下教育评价的一个趋势，解决真实的问题需要数学抽象的过程。胡老师认为，设计留白创造式课堂需要教师调整对自己的定位，将教师视为背景、将学生视为风景，关注学生的表现，给学生留出充足的思考时间，促进深入思考，同时要避免设计过多的任务，把握留白的度。

【教学观摩-高中组】

上海市延安中学的冯振国老师带来一节“圆锥曲线统一性的探究”的观摩展示课。冯老师先温故引题，带领学生和阿波罗尼奥斯古今对话，引出“圆锥曲线统一的几何特征是什么”的探究问题。随后，冯老师从抛物线方程出发，启发学生思考各个量的几何含义，并结合几何画板的演示，引导学生发现“线段长度平方等于矩形面积”这一性质，理解“齐曲线”的含义。接着冯老师让学生自行探究椭圆和双曲线的几何特征，分享方法思路，和学生共同发现三类圆锥曲线统一的几何特征。最后，冯老师用“一个几何特征”“两种思考角度”“三类思想方法”“四点心得启示”总结了本节课。

图 9 冯振国老师的观摩展示课

与会的各位老师对本堂课进行了提问和研讨。王华老师提出，古人是先研究了圆锥曲线的几何性质，再有代数方程，今天我们从方程来研究圆锥曲线的几何特征，是一个历史再现的过程。教师应当培养学生从几何性质上去研究问题的意识，这也是留白创造式教学的意义所在，为学生的终身发展奠定基础。杨家政老师认为，这堂课的教学设计的“统一性”体现在以下几个方面。第一，内容的整体性；第二，结构化教学；第三，寻找共性，体现变化中的不变；第四，内容的条理性。留白创造性教学应该将知识与内在的研究方法联系起来，并留给学生更多的思考空间。

在热烈的讨论中，第二届“留白创造式”数学教学研讨会圆满结束。感谢全体报告人、授课教师认真的准备和精彩的分享，感谢会议组织人员、志愿者、保障人员的坚持与辛勤工作，感谢来自全国各地的同仁的关注、理解与支持。让我们共同展望留白创造式教学的美好明天！