



上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2022 年第 11 卷第 03 期



《几何理论与实践》(1739) 正文开篇插图

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：刘梦哲

编委（按姓氏字母序）：

韩粟 纪妍琳 姜浩哲 孔雯晴 雷沛瑶 栗小妮 李卓忱 刘思璐 秦语真 沈中字 孙丹丹 汪晓勤 余庆纯

岳增成 张佳淳 邹佳晨

刊首新语

教育取向的数学史研究再议

——以 HPM 网络研修班阅读材料为例

韩 粟

（华东师范大学教师教育学院, 上海 200062）

在近期收官的第九届数学史与数学教育（HPM）高级研修班（下称 SHPM-9）中，两个工作坊引起了与会人员的强烈关注，雷沛瑶老师主持的工作坊 1 介绍了后疫情时代“HPM 视角下的古典概型”课例形成之路，其中蔡春梦老师作“古典概型历史探源”汇报；刘思璐老师主持的工作坊 2 则聚焦于教育取向的历史研究，比、相似三角形及函数的概念的历史覆盖了小学、初中及高中三个学段。由此可见，在 HPM 领域，教育取向的数学史研究始终是人们关注的研究热点，对职前数学教师而言，它有助于祛除心中浮气，增强历史感，开拓新视野，因为哪怕是自己中小学时再熟悉不过的知识点，都总能在历史长河中找寻到一种又一种新的诠释，也充实了相应课例的“史料库”。

然而，如果这些珍贵的史料素材被原封不动地堆砌成文，交到一线教师手里，不仅“教育取向”一词变得空有其名，想必其进入数学课堂后的教育价值也会大打折扣。汪晓勤老师在美英早期教科书研究书系序言中提到：“教育取向的历史研究往往有两条路径，其一为一般发展史，其二是教育史……在很多情况下，一般发展史和教育史也并非泾渭分明，而是多有重叠和交叉。”对科学技术史专业的研究者而言，自然走第一条路径，但对于数学教育专业，特别是以数学史与数学教育为研究方向的研究者而言，往往要两条路径并线齐行，而这并非易事，需要阅读原始史料，了解宏观背景，整理发展脉络，提炼教学启示等，投入的时间和精力不比完成一篇论文少，但既然参与到 HPM 课例研究中，就意味着主动承担了这份学术上的职责，也为自身迈入数学教师职业生涯打下一分基础。

鉴于此，笔者基于近年来撰写 HPM 网络研修班多个主题的阅读材料的经验，在 SHPM-9 之后再度议及教育取向的数学史研究，希望能为 HPM 课例研究中的职前教师厘清写作思路，增加阅读材料的学术价值。

1 历史时间线梳理

在动笔撰写某一主题的阅读材料前，我们不妨先思索下列两个问题：

（一）围绕该主题的相关知识，最早可以追溯到历史上的哪个节点？

（二）基于已掌握的部分数学史，能否给出该主题发展阶段的初步划分？

第一个问题看似稀松平常，实则暗藏玄机，因为笔者使用的措辞为“围绕该主题的相关知识”而非“该知识点”。如果缺乏大概念（big idea）的视野，囿于后者，只论及该知识点的历史，一则容易定位过晚，二则容易析理不清。

以正弦定理为例，如果仅关注正弦定理的表达式 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ，或许你只能定位到 13 世纪，阿拉伯数学家和天文学家纳绥尔丁（Nasir-Eddin, 1201-1274）最先清楚地表述并证明正弦定理。进一步追问：

- 纳绥尔丁如何想到以三角形的边作圆的半径画弧，圆从何来？
- 纳绥尔丁的证法基于相似三角形的对边成比例，那么角在哪，角的正弦又从何而来？

要理解纳绥尔丁的巧妙构造，我们必须向前追溯，从而发现：正弦源自圆中的半弦。6 世纪的印度数学家阿里亚哈塔（Aryabhata, 476-550）首次用半弦 $\frac{a}{2}$ 定义了正弦（图 1），若继续，还可以上溯至古希腊天文学家希帕恰斯（Hipparchus），托勒密（C. Ptolemy）等人了解决天文学中的计算问题，将三角形都放到其外接圆中，这样三角形的边均变成圆的弦，对角均变成弦所对的圆周角。由此，关于纳绥尔丁证法的两个疑惑便能迎刃而解。

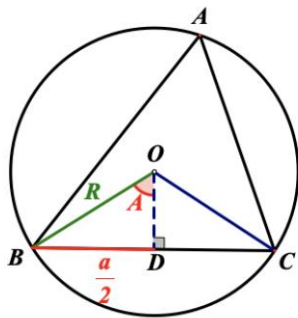


图 1 正弦的“半弦”定义

第二个问题既为第一个问题的延续，也源于多数职前教师的学术背景。大多数职前教师非科班出身的数学史研究者，即使在本科阶段修读过数学史课程，掌握的数学史料也非常有限。

那么在“逆序”找到源头后，还需要捋清“正序”，即初步划分出该主题的发展阶段，从而建立起基本的写作思路，不至于在海量历史素材中迷失。

仍以正弦定理为例，第一则阅读材料分为 3 部分：（1）正弦词源；（2）同径法：从纳绥尔丁到雷格蒙塔努斯；（3）外接圆法：从韦达到梅文鼎。第二则阅读材料也分为 3 部分：（1）直角三角形法：从哈里斯到伍德豪斯；（2）辅助直径法；（3）解析几何法。两则阅读材料主要参考了汪晓勤老师《20 世纪中叶以前的正弦定理历史》一文，该文考察了 17 到 20 世纪的 144 种三角学文献，细致地梳理了其中正弦定理方法的演变。在此基础上，笔者与合作者整体遵循历史序，除正弦词源部分外，每一部分都浓缩了一种证明方法的由来及推导，最后揭示：同径法和外接圆法是多数正弦定理证明方法的源头（图 2）。

正弦定理证明方法的历史演变

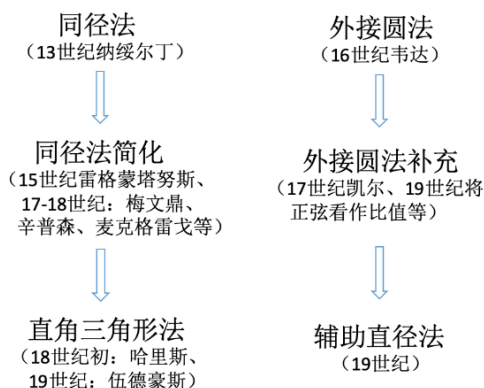


图 2 正弦定理证明方法的演变

参考该文，我们只是确定了阅读材料的基本写作思路。在写作过程中，还需要不断阅读相关书籍，特别是原始文献，一方面是保证阅读材料的科学性，另一方面，有可能挖掘出新的史料，它能有力地回答教学中可能出现的问题。例如，笔者因看到《HPM: 数学史与数学教育》提到梅文鼎（1633-1721）在《平三角举要》卷四中记录了当时学习者的困惑：

“或问：各角正弦与各边皆不平行，何以能相为比例？”

随之回到原始文献中，发现梅文鼎早已在文中释疑（图 3）：

“凡三角形边，必对一角。其角大者，正弦大，而所对之边亦大。角小者，正弦小，而所对之边亦小。故边与边之比例，如正弦与正弦也。”

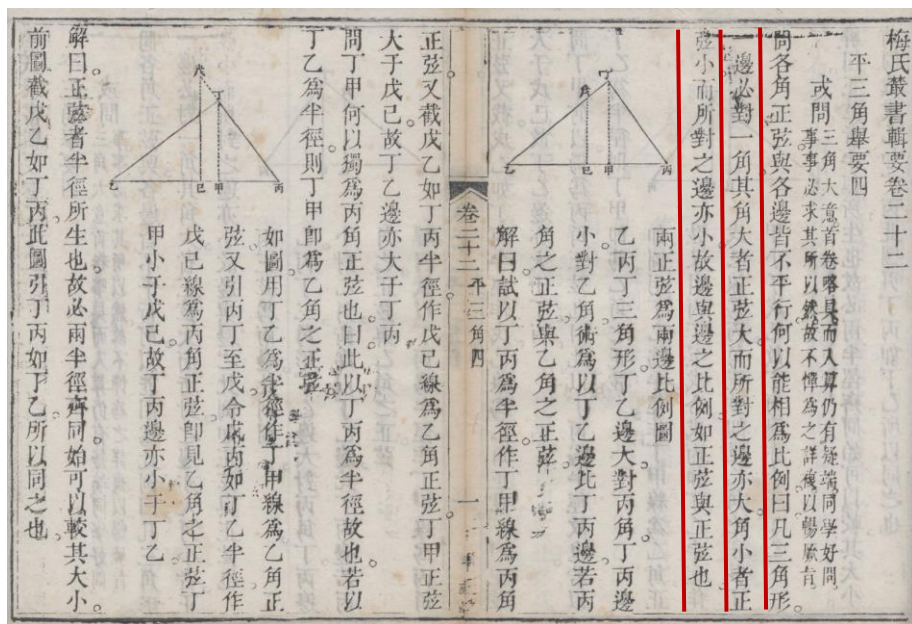


图 3 梅文鼎《平三角举要》书影

梅文鼎的一问一答中点明了正弦定理中蕴含的转化思想，揭示了定性的几何定理“大角对大边”到三角学中定量的正弦定理的跨越。由此，我们也就不难理解沪教版中为何设置一处旁白“正弦定理是‘大角对大边’这一几何性质的定量刻画”了。

2 早期教科书研究成果转化

美英早期教科书研究是近年来 HPM 工作室的研究重心，涵盖代数、几何、解析几何及三角这 4 个中小学阶段的主要数学分支，研究成果丰硕，为 HPM 课例研究提供了丰富的史料素材。然而，对于任何一个数学主题，早期教科书中的内容都不可能等于其背后蕴含的所有数学史，毕竟前者至多只反映了近 5 个世纪的以美、英、法等国为代表的西方数学教科书中的演变史，如果研究者只是照搬已有研究成果，不去了解更宏观的数学史，那么既会使得阅读材料出现断代或片面，研究者本人及读者也都会随之陷入“只见树木不见森林”的境地。因此，合理利用与转化早期教科书研究成果，是提高阅读材料科学性、有效性和可读性的关键。

以等比数列主题为例。对于等比数列概念的定义，早期教科书中可以分为“几何比例定义”、“比值定义”、“乘法定义”和“除法定义”4 种。其中，“几何比例定义”可以认为源于欧几里得（Euclid）在《几何原本》第 5 卷中的定义 6 及定义 10：

定义 6 有相同的比的四个量叫做成比例的。

定义 10 当四个量成<连>比例时，称第一个量比第四个量是第一个量比第二个量的三倍比，依此类推，不论比例如何。

欧几里得的工作是毕达哥拉斯（Pythagoras）学派比例理论的延续和发展，后者认为比包含算术比与几何比两种大小关系，并从中分别演绎出算术比例和几何比例两个概念，而欧几里得在定义比和比例时，仅保留了几何比和几何比例。可见，从几何比到几何比例，再到几何数列（geometric sequence），构成了数学内部等比数列概念的发展脉络。

至于其他三种早期教科书中的定义，“乘法定义”可以认为源于古埃及人的倍乘法，“比值定义”说明了等比数列的术语之本，“除法定义”解释了为何现行教科书中公比的符号表示为 q 。由此，四大文明的数学史、西方早期教科书中的数学教育史以及现行教科书中的数学内容不再是独立山头、各自为营，而是被有机地联系起来，形成一个整体。

对于等比数列的求和公式，早期教科书中更是多达 8 种推导方法，同样，如果阅读材料只是纯粹地复制以上方法，作为读者的教师乃至学生很难觉察到它们和等比数列概念的联系，既不利于教师设计单元教学，也不利于学生的探究亦或理解。对此，笔者首先介绍了古埃及人的递推法、欧几里得的比例法、欧拉（L. Euler, 1707-1783）运用的错位相减法，前两者与第一则阅读材料“概念之源”中的内容密切相关，后者则是现行教科书中与早期教科书中均占据主流的方法，同时承载着师生最多的疑问，如“为什么和式两边乘公比 q ”，以及“是否有其他推导方法”。在此，笔者点出：错位相减法蕴含的最重要的数学思想是消项化简。紧接着介绍早期教科书中两边同乘公比相反数 $-q$ 的“错位相加法”，两边同乘 $1-q$ ，一步到位的“乘子消项法”，以及分别去掉首项和末项，对比两式后自然找到同乘公比 q 的“掐头去尾法”（图 4）。

➤ 错位相加法 $S_n = a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-1}$ $+ \quad -qS_n = -a_1q - a_1q^2 - \cdots - a_1q^n$ $(1-q)S_n = a_1 - a_1q^n$	➤ 乘子消项法 $(q-1)S_n = (q-1)(a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-1})$ $\Rightarrow (q-1)S_n = a_1q^n - a_1$
$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 消项化简	➤ 掐头去尾法 $S_5 - a_1 = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4$ $S_5 - a_1q^4 = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3$ $S_5 - a_1 = (S_5 - a_1q^4)q$

图 4 早期教科书中部分等比数列求和公式的推导方法

特别地，在钻研 9 世纪印度数学家摩诃毗罗（Mahāvīra，约 800-约 870）《计算方法纲要》问题 17 的解法时，我们灵光一现，发现从中可以提炼出一种两边同乘公比的倒数 $\frac{1}{q}$ 的新方法（图 5）。所以，有关等比数列的历史清清楚楚地告诉我们：错位相减法不是唯一的推导方法，换一个不同的乘子，就可能导出一种新的方法。

➤ 灵光一现：摩诃毗罗解法

摩诃毗罗《计算方法纲要》问题17

等比数列的首项为3，项数为6，和为4095，则公比为多少？

首先，由 $\frac{4095}{3}=1365$ ， $1365-1=1364$ ，选择 1364 的因数 4；

然后，将得到的数除以 4，再减去 1，反复执行，直至除以 4 的余数为 0，即

$$\frac{1364}{4}=341, 341-1=340; \quad \frac{340}{4}=85, 85-1=84;$$

$$\frac{84}{4}=21, 21-1=20; \quad \frac{20}{4}=5, 5-1=4; \quad \frac{4}{4}=1$$

所以，4 为所求的公比。

$$1+q+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1}=\frac{S_n}{a_1} \Rightarrow \frac{1}{q}+1+q+\cdots+q^{n-2}=\frac{1}{q}\cdot\frac{S_n}{a_1}$$

$$1+q+\cdots+q^{n-2}=\frac{1}{q}\left(\frac{S_n}{a_1}-1\right) \quad \dots\dots$$

$$1=\frac{1}{q}\left(\dots\frac{1}{q}\left(\frac{1}{q}\left(\frac{S_n}{a_1}-1\right)-1\right)-\dots-1\right)$$

图 5 摩诃毗罗解法

3 数学学科大概概念统领

前文已经谈到了大概概念（big idea），对于数学学科而言，何为大概概念？有学者认为，数学学科大概概念是数学学科知识的精炼，属于更上位的概念，教师以大概概念作为锚点设计单元教学，可以很好地揭示数学知识的整体结构以及本质。虽然考虑阅读材料的篇幅，对于同一大概念统摄的其他数学主题，很难面面俱到地剖析它们之间的联结，但我们还是应当立足大概概念的视角，在必要时引入史料，予以点拨。

仍以等比数列为例，第一则阅读材料的最后一部分为指数函数与等比数列。《普通高中数学课程标准》强调将数列作为一种特殊的函数，引导学生通过类比的方法探索等比数列和指数函数的关系，所以函数可以视为统摄等比数列和指数函数的大概念。

从现行教科书编写来看，一般都是先指数函数，再等比数列，但在数学史上，指数函数源于等比数列。例如对于苏美尔泥版 MS1844 上记载的“七兄弟分财产”问题的解法，哪怕学生还未学习等比数列的通项公式，从函数的观点看，也可以先根据该问题

“七个兄弟分财产，最小的得 2，后一个比前一个多得 $\frac{1}{6}$ ，问共有多少财产？”

建立起指数函数模型，求出函数表达式：兄弟中年龄排序第 x 位的人可分得财产

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^{7-x}, \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

显然，指数被限制在正整数情形，而数列正是一类以正整数集为定义域的离散函数。从以上问题出发设计问题串，便可以基于函数的观点建立起等比数列的通项公式，还可以拓展讨论等比数列的单调性。

又如正弦定理和余弦定理同属于高中阶段解三角形的两大重要定理，往往通过平面几何或解析几何的方法证明，而最新修订的《普通高中数学课程标准》将其归为平面向量的应用，要求用向量几何的方法推导两个定理。我们指出，以向量作为统摄两个定理的大观念，同样有史可依。

现代意义的向量理论体系由美国数学物理学家吉布斯（J. W. Gibbs, 1839-1903）基于德国数学家格拉斯曼（H. G. Grassmann, 1809-1877）的工作创立。在他逝世前一年，他的博士威尔逊（E. B. Wilson, 1879-1964）将其授课内容整理成《向量分析》一书付梓。在此书中，威尔逊利用向量的内积（数量积）与外积（向量积），分别推导了余弦定理和正弦定理，统一、简洁、优美，体现了向量方法的优势。虽然高中阶段不学习向量积，但这一方法的本质是考虑任意两条边所在向量共起点时所构成的平行四边形的面积，由此同样可以推导出正弦定理，所以该方法也被认为是高观点下的等面积法（图 6）。

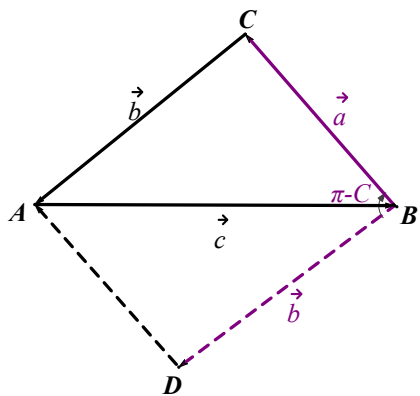


图 6 利用向量积证明正弦定理

4 中华优秀传统文化运用

汪晓勤老师在 SHPM-9 的大会报告中提到中国古代数学（简称“中算”）有着悠久的历史、辉煌的成就和独特的价值取向，提出教育取向的中算史研究、中算史融入数学教学的实践和评价等是未来 HPM 研究的重要课题。对于 HPM 网络研修班中的多数一线教师而言，研究者提供的阅读材料是他们几乎唯一的史料来源，如果我们在撰写过程中没有融入中华优秀传统文化的站位和意识，或者只是不加辨析地罗列中西方数学的异同，则很有可能影响一线教师实践中算史融入数学教学的机会和深度。

此外，虽然《普通高中数学课程标准》明确要求教科书编写者要重视中国传统文化中的数学元素，现行教科书中中华优秀传统文化所占比例也越来越大，但一些教科书中的融入方式和内容依然有值得商榷的地方。如人教 A 版在数列章“阅读与思考”栏目编写了一节“中国古代数学家求数列和的方法”，提到我国魏晋时期数学家刘徽在《九章算术》“盈不足”章的“二马相遇”问题的注中给出了等差数列的求和公式，但对于刘徽发现这个公式的过程，教科书采取了非常模糊的表述：“史学家认为，他可能是在把良马 15 日内每日所行里数逐项相加的过程中发现的。”诚然，刘徽注中确未谈及如何发现等差数列的求和公式，但笔者认为，与其在此处呈现后人对刘徽做法的猜想和臆测，不如呈现更真实、科学的史料。南宋数学家杨辉在《详解九章算法》中针对同一问题给出“阶梯形”面积解法（图 7），这正是倒序相加法的几何版本，远早于高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）儿时求“ $1+2+3+\cdots+100$ ”的故事，更有助于学生感悟我国古代数学的辉煌成就，树立民族自信心。虽然教科书的编写很难一时改变，但我们可以自己撰写的阅读材料或论文中对中算史予以正视和重视。

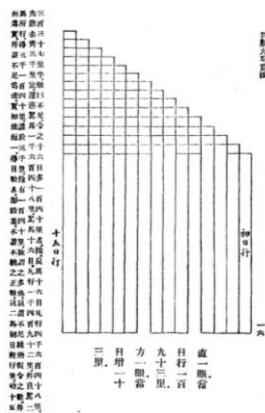


图 7 杨辉的“阶梯形”面积解法
VIII

上文还提到了被誉为清代“历算第一名家”的梅文鼎，相较于刘徽、杨辉等古代数学家，他可能不那么“家喻户晓”，但其斐然的成就不容忽视，特别是他对西方科学知识批判性吸收的治学态度。在经典亡佚、历法失修、数理不传的明末清初时期，他能够荟萃中国古代历法精华，潜心整理古代科学文献，获誉“千秋绝诣，自梅而光”，同时他又能“既贯通旧法，而兼精乎西学”，认真钻研西方科学知识，加以梳理后不遗余力地进行宣传与普及。上文提及的《平三角举要》连同《弧三角举要》，便是由中国数学家自撰的第一套三角学教科书，极大地弥补了中国古代数学缺乏一般角概念的不足。值得我们反思的是，目前中学阶段的三角教学中，即使融入了数学史，也很少看到梅文鼎及其在三角学上的成就介绍，说明我们作为数学教育研究者，对这样一位数学大家的了解还非常浅显，也尚未从其著作中挖掘出更多适合中学数学教学的史料素材及相应的教育价值。

5 结语

综上所述，笔者以 HPM 网络研修班阅读材料为例，结合自身经历，从 4 个方面论及职前数学教师如何做好教育取向的数学史研究，当下来看，或许受惠最多的是 HPM 课例研究，如为执教者提供了新颖的教学素材，为其学生提供了崭新的数学视野，但从长远来看，却是职前教师自身的文化素养。台湾数学教师苏惠玉指出，专业学习共同体的模式，可能导致一线教师在实践 HPM 时照搬大学研究者提供的史料，忽视其历史文化脉络。对中国大陆与台湾两岸 HPM 实践进路的差异，本文不做过多评述，但从职前教师专业发展的视角，如果我们能在研究生阶段，坐好学术冷板凳，做好数学史研究，那么当我们真正进入教育教学现场，成为一线的 HPM 实践者时，便能多一分自己的理解，多一分自己的见地，甚至还可能用上自己曾经的研究成果，岂不乐哉？所以，无论是职前还是在职，我们都应该相信历史研究中的追本溯源、探赜索隐和登高望远能够带给我们巨大的力量，并基于这样的信念，持续地有所作为，最终坚实地迈向卓越教师、学科名师之路。

目 录

刊首新语

教育取向的数学史研究再议	韩 粟 I
--------------------	-------

历史研究

传承与创新：17 世纪数学家关于勾股定理的证明	苏福梅 1
美英早期解析几何教科书中的椭圆几何性质	刘梦哲 10
美英早期三角学教科书中的“三角形中的三角恒等式”	姚 瑶 22

教学实践

数学遇见话剧	胡永强 40
巧用课堂留白，发展数学思维	陈睿滢，王智洋，刘梦哲 48

他山之石

在课堂上通过证明、反驳和溯因推理生成数学知识	杨舒捷 60
------------------------------	--------

活动讯息

聚焦随机事件，体悟理性精神	苏福梅，雷沛瑶 65
乘历史之舟，扬导数之帆	王智洋，雷沛瑶 69
探三角之用，悟教学之法	孔雯晴，雷沛瑶 73
华东师大学科教研联盟与上海市闵行区初中数学联合教研活动隆重举行	孔雯晴 77

CONTENT

FOREWORD

Reconsideration of the Research on the History of Mathematics with Educational Orientation..... Han Su I

HISTORICAL STUDY

Inheritance and Innovation: Henry Coets' Proof of the Pythagorean Theorem..... Su Fumei 1

The Geometric Properties of Ellipse in Early American & British Textbooks on Analytic Geometry Liu Mengzhe 10

The Trigonometrical Identities in Triangles in Early American & British Textbooks on Trigonometry Yao Yao 22

TEACHING PRACTICE

Practical Exploration and Value Analysis of Moral Education in Junior High School Mathematics Curriculum.....Hu Yongqiang 40

Teaching the Geometric Meaning of Derivatives from the Perspective of HPM..... Chen Ruiying, Wang Zhiyang, Liu Mengzhe 48

LITERATURE REVIEW

Generating Mathematical Knowledge in the Classroom through Proof, Refutation, and Abductive Reasoning..... Yang Shujie 60

ACADEMIC INFORMATION

The Classical Probability in the Second HPM Online Training Class for High School Mathematics Teachers.....Su Fumei, Lei Peiyao 65

The Concept of Derivative in the Second HPM Online Training Class for High School Mathematics Teachers Wang Zhiyang, Lei Peiyao 69

The Application of Solving Triangles in the Second HPM Online Training Class for High School Mathematics TeachersKong Wenqing, Lei Peiyao 73

The Subject Teaching and Research Alliance of East China Normal University Held a Joint Teaching and Research Activity with Junior High School Mathematics in Minhang District, Shanghai.....Kong Wenqing 77

历史研究

传承与创新：17 世纪数学家关于勾股定理的证明

苏福梅，汪晓勤

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

勾股定理被视为几何学中的璀璨明珠，从古希腊时代以来，人们对它的证明一直有着浓厚的兴趣，科学家、总统、牧师、中学生……，不同时空作者给出的方法层出不穷，令人叹为观止。在勾股定理丰富多彩的证明方法中，欧几里得在《几何原本》中给出的方法是有文献记载的最早的证明，对后世产生了深远的影响。如图 1 所示（后来阿拉伯人称为“新娘的座椅”），欧几里得的证明按照以下步骤进行：

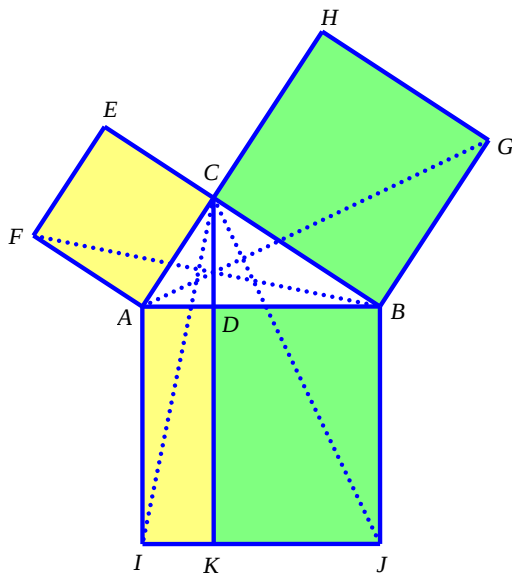


图 1 欧几里得的证明

（1）在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边上各作正方形 $FACE$ 、 $CBGH$ 和 $AIJB$ ，过点 C 作 AB 的垂线，垂足为 D ，交 IJ 于点 K ，连结 BF 、 AG 、 CI 、 CJ ，利用命题 I.4（边角边定理），证明 $\triangle FAB \cong \triangle CAI$ ；

(2) 利用命题 I.41 (若平行四边形与三角形同底, 且位于同样的平行线之间, 则平行四边形是三角形的两倍) 证明 $S_{\square FACE} = 2S_{\triangle FAB}$, $S_{\square AIKD} = 2S_{\triangle CAI}$, 于是得 $S_{\square FACE} = S_{\square AIKD}$;

(3) 同理可证 $S_{\square CBGH} = S_{\square DKJB}$;

(4) 根据 (2) 和 (3), 得 $S_{\square FACE} + S_{\square CBGH} = S_{\square AIKD} + S_{\square DKJB} = S_{\square AIJB}$ 。

由于《几何原本》的巨大影响, 上述证明在相当长的历史时期内都为几何教科书所普遍采用。那么, 在《几何原本》的公理体系中, 勾股定理的证明方法能否创新? 17 世纪荷兰数学家柯茨 (H. Coets, 1670-1730) 在注释《几何原本》时给出了精彩的回答。

柯茨共给出了五种证明^[1], 其中一种即为赵爽的弦图证法, 另四种都是在欧几里得证法基础上的创新。

2 翻转正方形, 寻找新媒介

如图 2, 柯茨以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边为边长, 在斜边上方作正方形 $ABJI$, 过直角顶点 C 作 AB 的垂线, 分别交 AB 和 IJ 于点 D 和 K 。连结 CI 、 CJ , 易证 FE 的延长线恰与 AI 交于点 I 。

根据《几何原本》命题 I.41, 可证 $S_{\square AFEC} = 2S_{\triangle AIC}$, $S_{\square AIKD} = 2S_{\triangle AIC}$, 于是得 $S_{\square AFEC} = S_{\square AIKD}$ 。

同理可证, $S_{\square BCHG} = S_{\square DKJB}$ 。因此, $S_{\square AFEC} + S_{\square BCHG} = S_{\square AIJB}$ 。

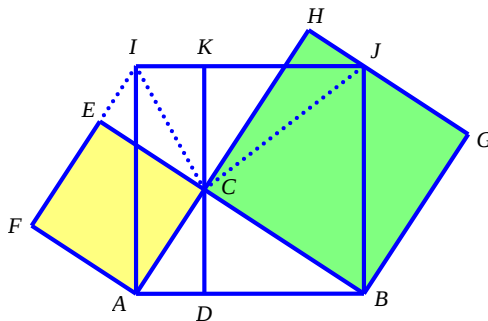


图 2 柯茨的第一种新证法

从上述证法可见, 柯茨将欧几里得的斜边上的正方形进行了翻转, 以同一个三角形为媒介, 得出正方形和长方形面积的相等关系, 从而省去欧几里得证法中的第一步, 使证明得到了简化。

3 转化正方形，全等补空位

上述证法中，柯茨所运用的命题 I.41 是欧几里得在证明勾股定理时所用过的。但柯茨并不满足于此，他敏锐地发现命题 I.43 的潜在价值。该定理说的是：“在任意平行四边形中，对角线两端的平行四边形的余形相等。”这里，欧几里得所说的“相等”，是指“面积相等”。如图 3 所示，设 O 为平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上任意一点，过点 O 作 AB 的平行线，交 AD 和 BC 于点 G 和 H ；作 BC 的平行线，交 AB 和 CD 于点 E 和 F 。于是，四边形 $AEOG$ 和 $OHCF$ 都是平行四边形，它们的余形 $EBHO$ 和 $GOFD$ 面积相等。如图 4 所示，在长方形 $ABCD$ 中，长方形 $AEOD$ 与长方形 $OCHF$ 的面积相等，同加上长方形 $EBCO$ 的面积，即得长方形 $ABCD$ 与 $EBHF$ 面积相等，如果 $ABCD$ 为正方形，就实现了正方形和长方形之间的转化。

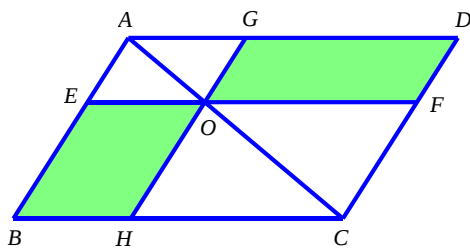


图 3 《几何原本》命题 I.43

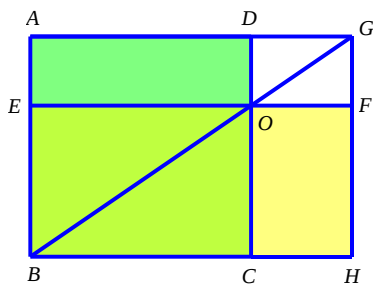


图 4 正方形和长方形之间的转化

柯茨将上述转化方法引入勾股定理的证明。他的第二种方法分成以下几步。

(1) 如图 5 (a)，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边上各作正方形 $ACEF$ 、 $CBGH$ 和 $ABJI$ ， AI 和 CE 交于点 N ， IJ 和 CH 交于点 R 。

(2) 如图 5 (b)，过点 I 作 CH 的垂线，垂足为 Q ，过点 N 作 AC 的平行线，交 AF 和 QI 于点 M 和 P 。根据《几何原本》命题 I.43，长方形 $MFEN$ 与 $NCQP$ 的面积相等，于是，正方形 $ACEF$ 转化成了等面积的长方形 $AMPQ$ 。

(3) 如图 5 (c)，易证 $\text{Rt}\triangle ANM \cong \text{Rt}\triangle RIQ$ ， $\text{Rt}\triangle RJH \cong \text{Rt}\triangle INP$ ， $\text{Rt}\triangle JBG \cong \text{Rt}\triangle ABC$ ，将位于正方形 $ABJI$ 外面的三个直角三角形分别移到正方形内部的相应位置，于是，长方形 $AMPQ$ 和正方形 $BCHG$ 被转化为等面积的正方形 $ABJI$ 。

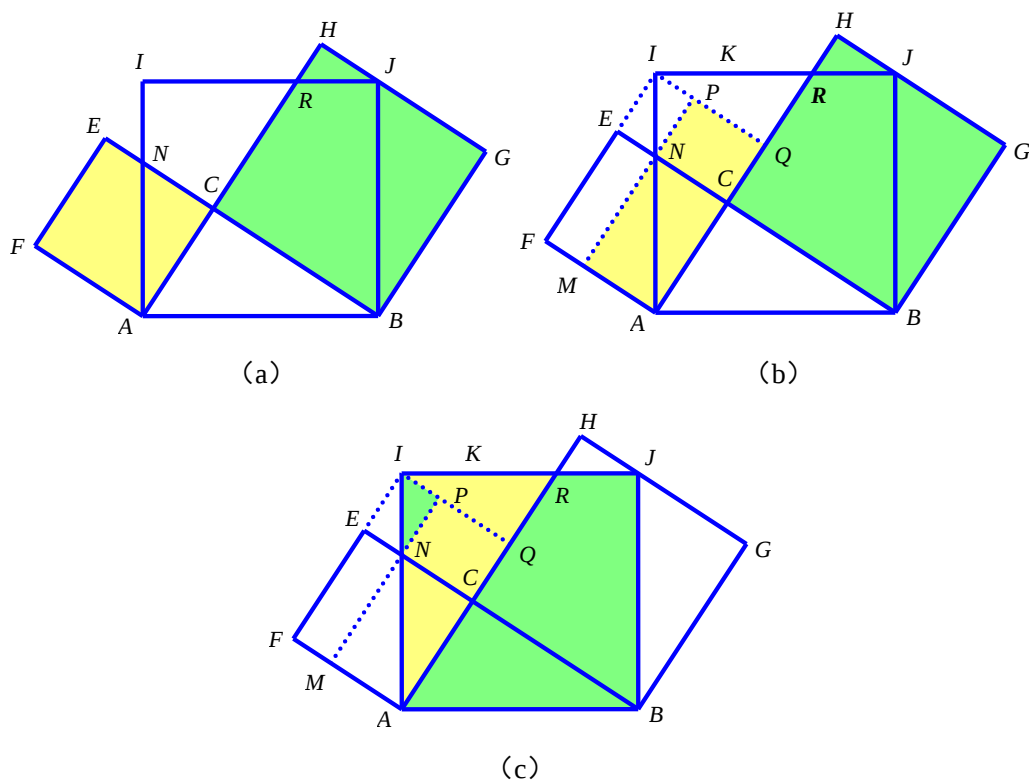


图 5 柯茨的第二种新证法

4 构造长方形，割补化正方

上述证法运用了欧氏命题 I.43，将以勾为边长的正方形进行转化，然后采用出入相补法，将有关图形拼成以弦为边长的正方形，需要移动的图形较多。柯茨的第三种证法则运用欧氏命题 I.43 两次，完成等积变换，具体分成以下几步。

(1) 如图 6 (a)，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边上各作正方形，过直角顶点 C 作斜边 AB 的垂线，交 FE 和 GH 的延长线于点 D ；

(2) 如图 6 (b) 和 (c)，在 CH 上取点 J ，使得 $CJ = CA$ ，过点 J 作 CH 的垂线，分别交 CD 和 ED 于点 K 、 I ，过点 K 作 CH 的平行线，分别交 CE 和 HD 于点 M 、 N 。于是，正方形 $ECJI$ 转化成了长方形 $MCHN$ 。

(3) 如图 6 (d) 和 (e)，延长 BA 至 P ，使得 $BP = BM$ ，在 BP 上作长方形 $PQRB$ ，其中 $BR = PQ = BG = BC$ ，过点 A 作 AB 的垂线，交 QR 于点 O 。连结 BO 并延长，交 PQ 的延长线于点 T ，过 T 作 AB 的平行线，分别交 AO 和 BR 的延长线于点 U 和 S 。

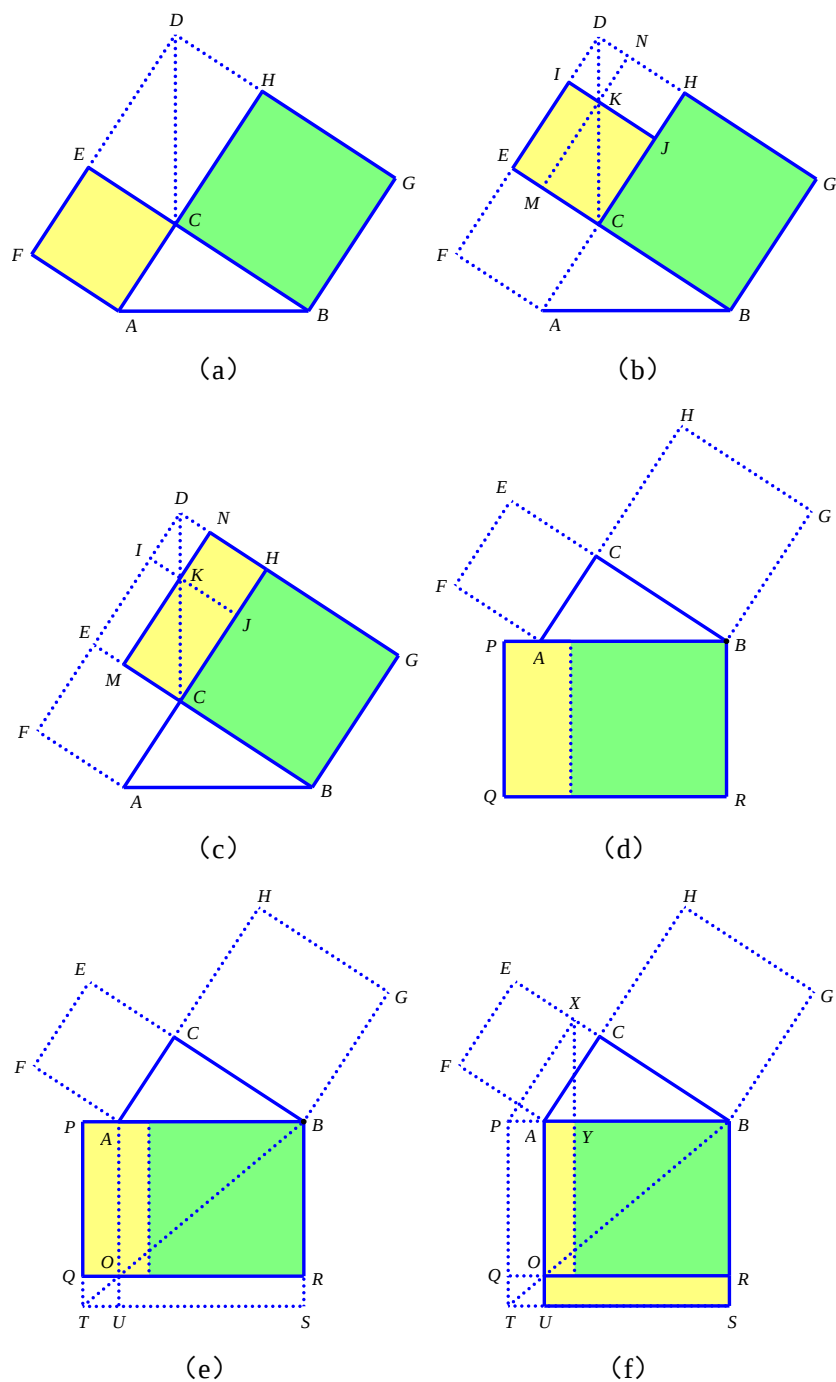


图 6 柯茨的第三种新证法

(4) 因 $S_{\square PQOA} = S_{\square OUSR}$ ，于是将长方形 $PQRB$ 转化为斜边 AB 上的长方形 $AUSB$ 。又在图 6 (f) 中过点 Y ($BY = BC$) 作 AB 的垂线，交 CE 于点 X ，连结 PX ，易证 $XY = AC$ ， $BX = AB$ ， $\angle PXB = 90^\circ$ 。于是有 $AB^2 = BX^2 = BY \times YP = BR \times BP = AB \times BS$ ，故 $AB = BS$ ，即 $AUSB$ 为正方形。

5 转化正方形，填补面积差

柯茨还给出了另一种转化方法，具体步骤如下。

(1) 如图 7 (a) 和 (b)，在以斜边 AB 为边长的正方形 $BCRM$ 中，在 AB 上分别作边长为 AC 和 BC 的正方形 $AQRP$ 和 $MKNB$ ， QR 和 MK 交于点 O 。

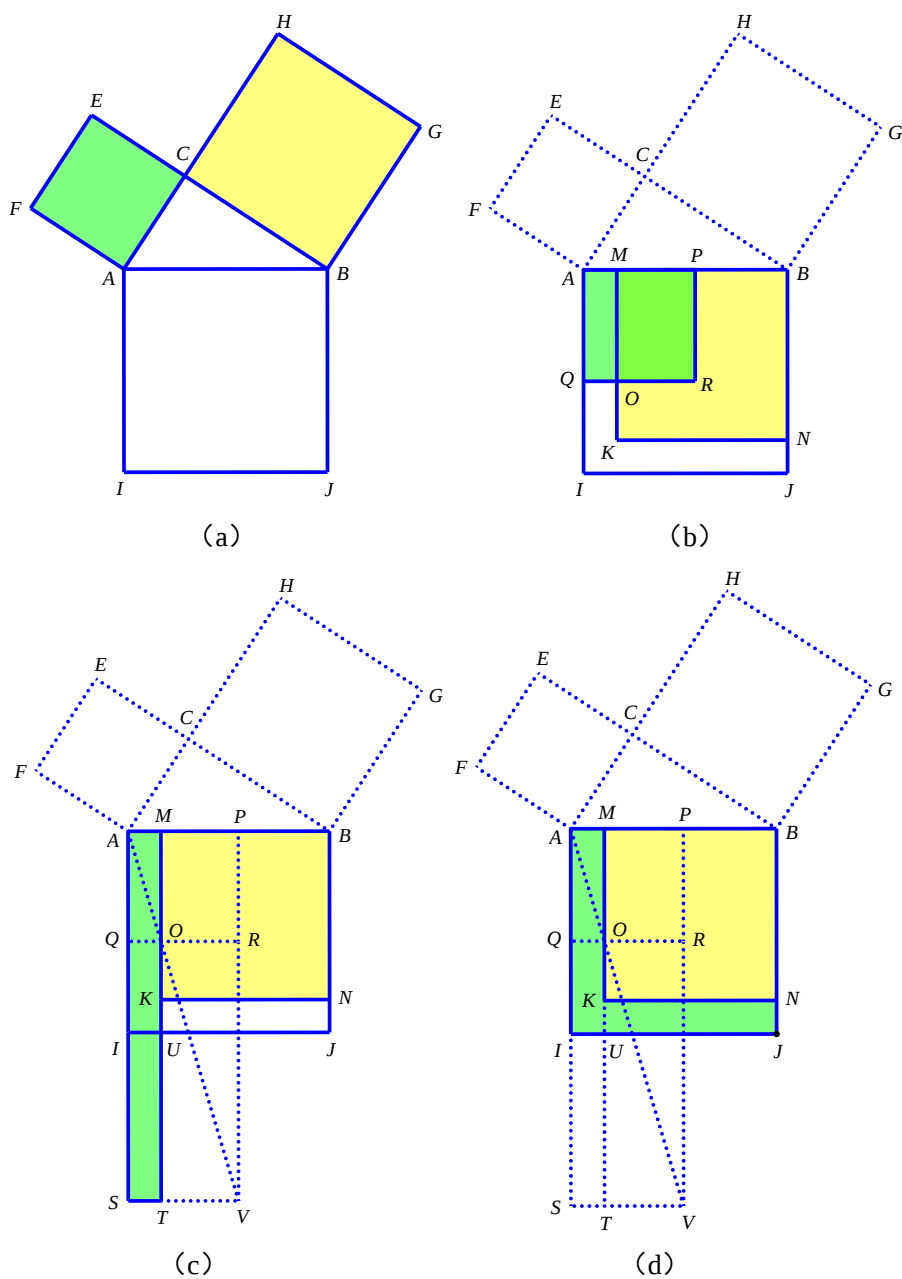


图 7 柯茨的第四种证法

(2) 如图 7 (c), 连结 AO 并延长, 交 PR 的延长线于 V , 过点 V 作 PV 的垂线, 分别交 AI 和 MK 的延长线于点 S 和 T 。根据《几何原本》命题 I.43, 正方形 $AQRP$ 和长方形 $ASTM$ 的面积相等, 于是, 正方形 $AQRP$ 转化成了等积长方形 $ASTM$ 。

(3) 如图 7 (d), 正方形 $AIJB$ 外面的小长方形 $ISTU$ 与里面的小长方形 $KUJN$ 全等, 故将 $ISTU$ 移到 $KUJN$ 处, 从而“填满”正方形 $AIJB$ 。

6 教学启示

柯茨传承了欧几里得的面积转化思想, 但在转化的方式上做出了创新: 第一种方法的巧妙之处在于根据《几何原本》命题 I.41 用同一个三角形来实现正方形和长方形之间的转化, 而后三种方法则通过命题 I.43 来实现正方形和长方形之间的转化, 这种转化方式可以让读者很直观地看到图形的等积变换过程。当然, 柯茨的证法 4 还不够严谨, 对于长方形 $ISTU$ 与 $KUJN$ 为何全等, 并没有做出相应的解释。

柯茨关于勾股定理的新证法, 为今日教学提供了启示。

首先, 柯茨关于勾股定理的新证法体现了数学家的探索和创新精神, 将数学史融入勾股定理教学时, 呈现历史上的方法固然很有意义, 但强调历史上不同方法之间的关系, 更能培养学生的创新意识。

其次, 利用基于欧氏命题 I.43 的等积变换方法, 还可以找到勾股定理更多的证法, 或解决某些几何问题。如, 可以利用同样的转化方法来证明勾股定理, 如图 8 (a) 和 (b), 在 $Rt\triangle ABC$ 的直角边 BC 和 AC 上各作正方形 $GBCD$ 和 $ACEF$, 延长 EF 和 GD , 交于点 K 。连结 CK , 交 AF 于点 I , 过点 I 作 CE 的垂线, 分别交 CE 和 DK 于点 J 和 H 。由欧氏命题 I.43 可将正方形 $ACEF$ 转化成等面积的长方形 $DCJH$, 易证 $\angle BAJ = 90^\circ$ 。由射影定理得 $AB^2 = BC \times BJ = GB \times BJ = BC^2 + AC^2$, 或如图 8 (c), 将斜边 DE 为边长的正方形外面的三角形移到正方形内部相应位置处, 即得同样结论。

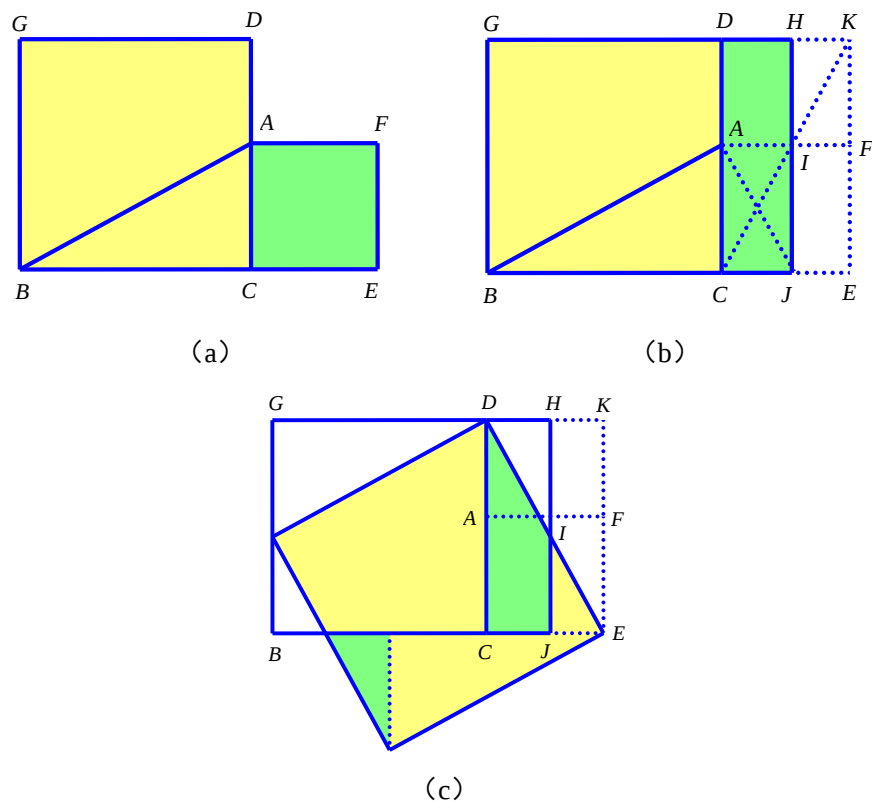


图 8 基于转化等积变换的勾股定理另证

又如，利用欧氏命题 I.43，可以解决三角形内接正方形之类的问题。如图 9，已知三角形的底和高分别为 a 和 h ，内接正方形边长为 d ，则 d 可由等式 $(a-d)(h-d)=d^2$ 求得。

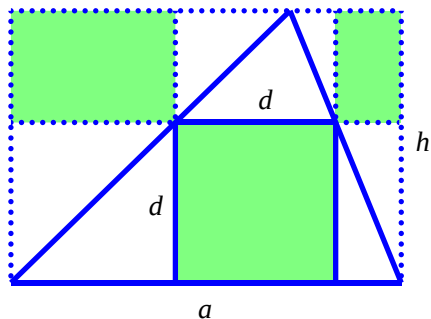


图 9 三角形内接正方形问题

再次，柯茨对勾股定理的证明也为中西比较提供了素材。中国南宋时期数学家杨辉曾提出“勾中容横、股中容直”原理^[2]，并据此推导古代的“重差术”，教师可以让学生思考：为什么杨辉并未利用该原理来证明勾股定理？而柯茨在第二种证法中，在将以直角三角形的勾为边长的正方形转化为长方形后，采用了出入相补法，教师也可以让学生思考：为什么柯茨不在一

开始就直接采用刘徽的出入相补法？通过中西方法的比较，可以拓宽学生的思维，并让学生走进古代数学家的心灵之中。

参考文献

- [1] Coetsii, H. *Euclidis Elementorum Sex Libri Priores*[M]. Lugdunum Batavorum: apud Danielem à Gaesbeek, 1691: 154-165.
- [2] 郭书春. 中国科学技术典籍通汇·数学卷(一)[M]. 河南: 河南教育出版社, 1994: 1115.

美英早期解析几何教科书中的椭圆几何性质

刘梦哲

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

椭圆是圆锥曲线中的一类重要曲线, 通过与直线方程相结合即可推导出椭圆的各类几何性质, 而这些几何性质正受到命题者的青睐, 它可以给学生的解题带来事半功半的效果。《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》指出, 经历从具体情境中抽象出椭圆的过程, 掌握椭圆的定义、标准方程及简单几何性质; 了解椭圆、抛物线的简单运用^[1]。

回溯历史, 对于椭圆的简单几何性质, 早在古希腊时期, 阿波罗尼斯(Apollonius, 约前 262-约前 190)撰写了一部划时代的巨著——《圆锥曲线论》, 书中, 阿波罗尼斯利用三角形的相似得到了椭圆的长轴、短轴及通径等线段长的数量关系, 之后, 阿波罗尼斯又花了很大的力气得到了椭圆的焦半径性质, 即椭圆焦半径之和是定值^[2]。由这一性质出发, 设计圣索菲亚大教堂而闻名世界的拜占庭数学家安提缪斯(Anthemius, 约 474-约 534)在研究燃烧镜时, 给出了今天我们非常熟悉的椭圆的“两钉一绳”画法^[2]。椭圆的焦半径性质即为今天所述的椭圆第一定义, 利用这一定义, 法国数学家洛必达(M.de L'Hospital, 1661-1704)在《圆锥曲线分析》(1707)一书中成功地推导出了椭圆的方程^[2]。

数学定理或公式的教学绝非仅仅为了它们的应用, 其背后所蕴含的思想方法本身也是教学目标之一^[3]。数学思想与数学文化是相互依存、相辅相成的, 数学文化中包含数学思想, 而数学思想又极大的丰富着我们的数学文化。新课程标准下, 融入数学文化的数学教学已是大势所趋, 数学文化中催人奋进的点点滴滴, 对于今天达成立德树人根本任务起到了举足轻重的作用。

在现行沪教版和人教 A 版教科书中, 只需要学生掌握椭圆的范围、形状、大小、对称性和特殊点等性质, 但椭圆的几何性质绝不局限于此。翻开历史的画卷, 椭圆的切线、法线及直径蕴含着相关的角度、定值及轨迹性质, 19-20 世纪美英解析几何教科书对此进行了详细的介绍, 但迄今我们对此知之甚少。鉴于此, 本文拟聚焦椭圆中的几何性质, 对美英早期教科书进行考察, 试图回答以下问题: 除了椭圆的简单几何性质, 还有哪些更深入的性质? 如何证明这

些性质？这些性质对今日的教学有何启示？

2 早期教科书的选取

本文选取 1826-1965 年间出版的 73 种美英早期数学教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

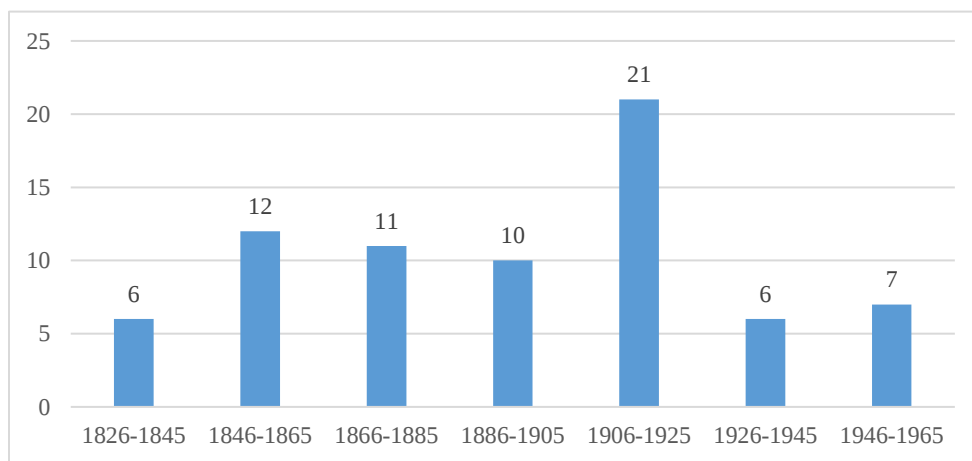


图 1 73 种美英早期数学教科书的出版时间分布

为回答研究问题 1 和 2，按年份依次检索上述 73 本早期解析几何教科书，从“椭圆”“圆锥曲线”“切线和法线”“椭圆和双曲线”等章中，分别摘录出与椭圆的切线、法线及直径相关的内容，并对其进行编码，分为角度、定值及轨迹性质三类。最后，结合所搜集的椭圆中的几何性质及其证明方法，回答研究问题 3。

3 相关的角度性质

命题 1：椭圆上任一点的焦半径的夹角被该点的法线所平分。

证明命题 1 的方法可以分为比例法、夹角法和反证法三类。在物理中，命题 1 也被称为椭圆的反射定律，即由椭圆一个焦点射向椭圆上任意一点的光波或声波，经该椭圆反射后会经过另一个焦点。在实际生活中，运用此定律，则建造出了以回声效果著名的圣保罗耳语廊。

(一) 比例法

Ziwet (1913) 证明如下：对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，则过椭圆上一点 (x_1, y_1) 的切线方程为 $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$ ，法线方程为 $\frac{a^2}{x_1} x - \frac{b^2}{y_1} y = c^2$ ，于是这条法线在 x 轴上的截距为 $\frac{c^2}{a^2} x_1 = e^2 x_1$ 。由点到直线距离公式可以计算出两条焦半径的长度为

$$|F_1 P|^2 = (x_1 + c)^2 + y_1^2 = (x_1 + c)^2 + \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x_1^2) = \frac{1}{a^2} (a^4 + 2a^2 c x_1 + c^2 x_1^2)$$

即 $|F_1 P| = a + e x_1$ ，同理得 $|F_2 P| = a - e x_1$ ，于是计算得到

$$|F_1 N| = c + e^2 x_1 = e(a + e x_1) = e \cdot |F_1 P| \text{ 及 } |F_2 N| = c - e^2 x_1 = e(a - e x_1) = e \cdot |F_2 P|$$

于是可得 $\frac{|F_1 N|}{|F_1 P|} = \frac{|F_2 N|}{|F_2 P|}$ ，所以 $\angle F_1 P N = \angle F_2 P N$ ，即直线 PN 是 $\angle F_1 P F_2$ 的角平分线（图 2）。^[4]

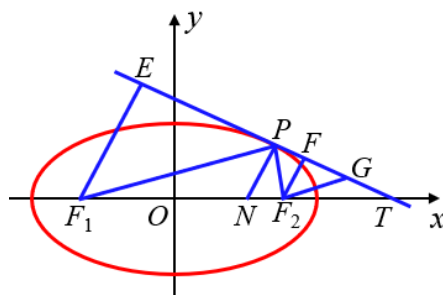


图 2 命题 1 图

命题 1 的表述等价于椭圆上一点的切线与两条焦半径的夹角相等，Fine & Thompson (1914) 过两焦点作切线的垂线，并利用对应边成比例证明了这一命题^[5]。如图 2，分别过点 $F_1(-ae, 0), F_2(ae, 0)$ 作椭圆切线 PT 的垂线，垂足为点 E, F 。因为椭圆的切线方程为

$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y - a^2 b^2 = 0$ ，由点到直线距离公式，得 $|EF_1| = \frac{|b^2 x_1 \cdot (-ae) - a^2 b^2|}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}$ 及

$|EF_2| = \frac{|b^2 x_1 \cdot ae - a^2 b^2|}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2}}$ ，即 $\frac{|EF_1|}{|EF_2|} = \frac{a + ex_1}{a - ex_1}$ 。又因为 $|F_1 P| = a + ex_1$ 及 $|F_2 P| = a - ex_1$ ，所以

$\frac{|EF_1|}{|EF_2|} = \frac{|F_1 P|}{|F_2 P|}$ ，于是 $\triangle EF_1 P \sim \triangle EF_2 P$ ，则 $\angle F_1 P E = \angle F_2 P F$ 。

Church (1851) 作一条焦半径的平行线，并利用比例线段证明命题 1^[6]。过点 F_2 作

$F_2G \parallel F_1P$ ，因为 $|F_1T| = \frac{a^2}{x_1} + c, |F_2T| = \frac{a^2}{x_1} - c$ ，所以 $\frac{|F_1T|}{|F_2T|} = \frac{a^2 + x_1c}{a^2 - x_1c} = \frac{c + e^2x_1}{c - e^2x_1} = \frac{|F_1P|}{|F_2P|}$ 。又因为

$$\frac{|F_1T|}{|F_2T|} = \frac{|F_1P|}{|F_2G|}，所以 |F_2G| = |F_2P|，故 \angle EPF_1 = \angle EGF_2 = \angle GPF_2。$$

(二) 夹角法

Wilson & Tracey (1915) 利用两直线的夹角公式证明了法线与两条焦半径的夹角相等^[7]。

$P(x_1, y_1)$ 是椭圆上一点，则直线 F_1P 和 F_2P 的斜率分别为 $k_{F_1P} = \frac{y_1}{x_1 + c}$ 及 $k_{F_2P} = \frac{y_1}{x_1 - c}$ ，过椭圆上

一点的法线的斜率为 $k_{NP} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$ ，于是计算可得

$$\begin{aligned} \tan \angle F_1PN &= \frac{\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} - \frac{y_1}{x_1 + c}}{1 + \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \cdot \frac{y_1}{x_1 + c}} = \frac{\frac{a^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1 - b^2 x_1 y_1}{b^2 x_1^2 + b^2 c x_1 + a^2 y_1^2}}{\frac{c^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1}{a^2 b^2 + b^2 c x_1}} = \frac{c y_1}{b^2} \\ \tan \angle F_2PN &= \frac{\frac{y_1}{x_1 - c} - \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}}{1 + \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} \cdot \frac{y_1}{x_1 - c}} = \frac{\frac{b^2 x_1 y_1 - a^2 x_1 y_1 + a^2 c y_1}{b^2 x_1^2 - b^2 c x_1 + a^2 y_1^2}}{\frac{a^2 c y_1 - c^2 x_1 y_1}{a^2 b^2 - b^2 c x_1}} = \frac{c y_1}{b^2} \end{aligned}$$

所以 $\tan \angle F_1PN = \tan \angle F_2PN$ ，即 $\angle F_1PN = \angle F_2PN$ 。

Davies (1836) 分别计算切线和两条焦半径之间的夹角^[8]。过椭圆上一点的切线的斜率为

$$k_{PT} = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}，同 理 计 算 可 得 \tan \angle F_2PT = \frac{b^2}{c y_1} 及 \tan \angle F_1PT = -\frac{b^2}{c y_1}。又 因 为$$

$\angle F_2PT + \angle F_1PT = 180^\circ$ 及 $\angle F_1PT + \angle F_1PE = 180^\circ$ ，所以 $\angle F_2PT = \angle F_1PE$ 。

Puckle (1870) 由两条焦半径方程出发，推导两条焦半径所夹角的平分线，最后将所得直

线化简即为椭圆的法线方程^[9]。如图 2，直线 PF_1 和 PF_2 的表达式分别为 $\frac{y}{x - ae} = \frac{y_1}{x_1 - ae}$ 及

$\frac{y}{x + ae} = \frac{y_1}{x_1 + ae}$ ，于是 $\angle F_1PF_2$ 的平分线 PN 的表达式为

$$\frac{-(x_1 - ae)y + y_1x - aey_1}{\sqrt{y_1^2 + (x_1 - ae)^2}} = \frac{(x_1 + ae)y - y_1x - aey_1}{\sqrt{y_1^2 + (x_1 + ae)^2}}$$

令 $y=0$ ，得到 $\frac{x - ae}{a - ex_1} = \frac{-(x + ae)}{a + ex_1} \Rightarrow x = e^2 x_1$ ，由对应边成比例即可证明 $\angle F_1PF_2$ 的平分线 PN 是

过点 P 的法线。

(三) 反证法

Robinson (1860) 利用反证法, 而没有利用椭圆的切线及法线方程来证明这一命题^[10]。设点 P 是椭圆上任意一点, 连结 PF_1, PF_2 , 延长 F_1P 至点 F , 使得 $PF=PF_2$ 。连结 FF_2 , 取 FF_2 的中点 G 并过点 P 、 G 作直线 GP (图 3)。

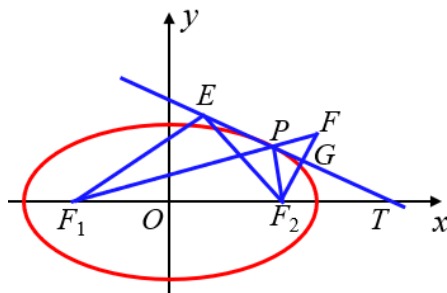


图 3 Robinson (1860) 对命题 1 的证明

因为 $\triangle PFF_2$ 是等腰三角形, 且点 G 是 FF_2 的中点, 由等腰三角形三线合一知 $\angle F_2PG = \angle FPG$, 又因为 $\angle FPG = \angle EPF_1$, 所以 $\angle F_2PG = \angle EPF_1$ 。假设直线 GP 交椭圆于另一点 E , 因为 $F_2E = EF$, 两边同加 F_1E 得 $F_2E + F_1E = EF + F_1E$ 。因为 $EF + F_1E > FF_1$, 所以 $F_2E + F_1E > FF_1 = PF_1 + PF_2$, 显然点 E 不在椭圆上, 与假设矛盾, 故直线 GP 是椭圆的切线。

命题 2: 椭圆的两条共轭直径与椭圆交点的偏心率之间差一个直角。

Schmall (1921) 利用椭圆的参数方程, 设椭圆上的两点 $P(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$, $Q(a \cos \varphi', b \sin \varphi')$, 则过这两点的直径的斜率分别为 $m = \frac{b \sin \varphi}{a \cos \varphi}$ 及 $m' = \frac{b \sin \varphi'}{a \cos \varphi'}$ 。因为这两条直径是共轭的, 由共轭直径的定义, 即两条直径的斜率关系为 $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$, 于是计算可得 $mm' = \frac{b^2 \sin \varphi \sin \varphi'}{a^2 \cos \varphi \cos \varphi'} = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' = 0$, 则 $\varphi - \varphi' = \frac{\pi}{2}$ 。^[11]

Peck (1876) 则是将两条直径的斜率记为 $\tan \theta$ 及 $\tan \theta'$, 由参数方程同样可以得到 $\tan \theta \cdot \tan \theta' = \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi \tan \varphi'$ 。因为 $\tan \theta \cdot \tan \theta' = -\frac{b^2}{a^2}$, 所以 $\tan \varphi \tan \varphi' = -1 \Rightarrow \varphi - \varphi' = \frac{\pi}{2}$ 。^[12]

若椭圆的一条直径与椭圆的交点为 (x', y') , 则其共轭直径与椭圆的交点为 $(-\frac{a}{b}y', \frac{b}{a}x')$,

Bowser (1880) 利用这一性质证明命题 2^[13]。由参数方程可以分别写出椭圆的直径及其共轭直

径与椭圆的交点为 $\begin{cases} x' = a \cos \varphi \\ y' = b \sin \varphi \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x'' = -\frac{a}{b} y' = a \cos \varphi' \\ y'' = \frac{b}{a} x' = b \sin \varphi' \end{cases}$, 于是 $\begin{cases} y' = -b \cos \varphi' \\ x' = a \sin \varphi' \end{cases}$ 。因为 $\frac{y'}{x'} = \frac{b}{a} \tan \varphi$

及 $\frac{x'}{y'} = -\frac{a}{b} \tan \varphi'$, 所以两式相乘即可得到 $\tan \varphi \tan \varphi' = -1$, 则 $\varphi - \varphi' = \frac{\pi}{2}$ 。当然, 可以直接让

$\cos \varphi = \sin \varphi', \sin \varphi = -\cos \varphi'$, 于是也会得到同样的结果, 这一做法来自 Todhunter (1862) [14]。

Askwith (1908) 由命题“过椭圆直径与椭圆交点的切线与其共轭直径平行”出发, 设过椭圆的一条切线为 $\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi = 1$, 则其共轭直径的表达式为 $\frac{x}{a} \cos \varphi + \frac{y}{b} \sin \varphi = 0$ 。因为点 $(a \cos \varphi', b \sin \varphi')$ 在这条共轭直径上, 所以 $\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' = 0 \Rightarrow \varphi - \varphi' = \frac{\pi}{2}$ 。 [15]

4 相关的定值

命题 3: 椭圆的焦点与其任何切线的垂直距离的乘积等于短半轴长的平方。

如图 4, 当给定直线的斜率为 m 时, 椭圆的切线方程为 $y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ 。Fine & Thompson (1914) 利用点到直线距离公式, 计算两焦点 $F_1(-ae, 0), F_2(ae, 0)$ 到椭圆的一条切线

$y - mx - \sqrt{a^2 m^2 + b^2} = 0$ 的距离为 $|EF_2| = \frac{|-mae - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}|}{\sqrt{1+m^2}}, |FF_1| = \frac{|mae - \sqrt{a^2 m^2 + b^2}|}{\sqrt{1+m^2}}$, 于是

$$|EF_2| \cdot |FF_1| = \frac{a^2 m^2 + b^2 - m^2 a^2 e^2}{1+m^2} = b^2。 [5]$$

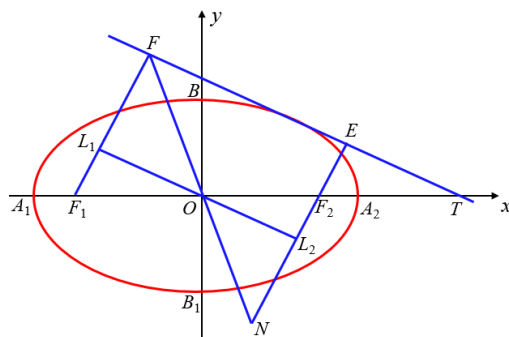


图 4 命题 3 图

Smyth (1855) 过原点作平行于切线的直线 $L_1 L_2$, 分别交直线 FF_1 和 EF_2 于点 L_1, L_2 (图 4)。因为 $\triangle OF_1 L_1 \cong \triangle OF_2 L_2$, 所以 $F_1 L_1 = F_2 L_2$, 于是两条垂线的长度可以记为

$|F_1F| = |F_1L_1| + |L_1F|$ 及 $|F_2E| = |EL_2| - |F_2L_2| = |L_1F| - |F_1L_1|$ 。又因为点 E, F 总在以原点为圆心, a 为半径的圆上, 所以两式相乘得到^[16]

$$|F_1F| \cdot |F_2E| = |L_1F|^2 - |F_1L_1|^2 = a^2 - |OL_1|^2 - c^2 + |OL_1|^2 = a^2 - c^2 = b^2。$$

Coffin (1881) 连结 FO 并延长, 交 EF_2 的延长线于点 N (图 4)。因为 $\triangle OF_1F \cong \triangle OF_2N$, 所以 $OF=ON$ 及 $F_1F=NF_2$, 又因为点 N 在以 A_1A_2 为直径的圆上, 由圆幂定理, 所以 $|NF_2| \cdot |F_2E| = |A_1F_2| \cdot |F_2A_2|$, 于是 $|F_1F| \cdot |F_2E| = |A_1F_2| \cdot |F_2A_2| = |OB|^2 = b^2$ 。^[17]

在椭圆中, 与定值相关的性质还有很多。在图 5 中, F_1, F_2 是椭圆的焦点, 直线 FT 是过椭圆上一点 $P(x_1, y_1)$ 的切线, 切线的斜率记为 m , 直线 PN 是过点 P 的法线。作切线 FT 的垂线 F_1F, OG, F_2E , 垂足分别为 F, G, E , S_2P 及 S_1P 分别表示点 P 的横纵坐标。于是, Siceloff, Wentworth & Smith (1922) 给出如下性质: (1) 次切线长 $|S_1T| = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$; (2) 次法线长 $|NS_1| = \frac{b^2 x_1}{a^2}$; (3) $|ON| \cdot |OT| = |OF_2|^2$; (4) $|OS_1| \cdot |OT| = |OA_2|^2 = a^2$; (5) $|OG| \cdot |NP| = |OB_2|^2 = b^2$; (6) $|OG| \cdot |N_1P| = a^2$; (7) $|N_1P| \cdot |NP| = |F_1P| \cdot |F_2P| = |T_1P| \cdot |PT|$ 。^[18]

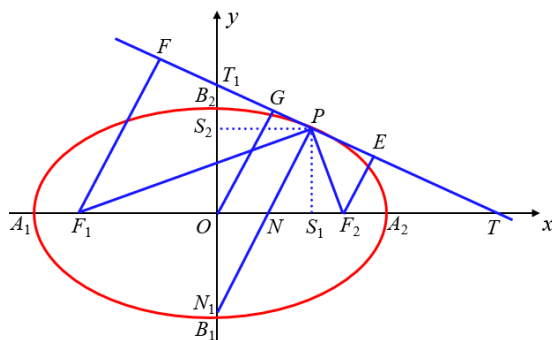


图 5 椭圆中的相关的定值

命题 4: 椭圆的两条共轭直径长的平方和是定值。

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与其直径的交点为 $P(x', y')$, 则其共轭直径与椭圆的交点则为 $Q(-\frac{a}{b}y', \frac{b}{a}x')$ (图 6)。运用两点间距离公式计算可得 $|OP|^2 = x'^2 + y'^2$ 及 $|OQ|^2 = \frac{a^2}{b^2}y'^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2$, 于是 $|OP|^2 + |OQ|^2 = x'^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2 + y'^2 + \frac{a^2}{b^2}y'^2 = (\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2})(a^2 + b^2) = a^2 + b^2$ 。^[5]

Schmall (1921) 再一次利用椭圆的参数方程及命题 2 的结论^[11]。记点 $P(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$,

则点 $Q(a \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}), b \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}))$, 即 $Q(-a \sin \varphi, b \cos \varphi)$, 于是计算可得

$$|OP|^2 + |OQ|^2 = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = a^2 + b^2.$$

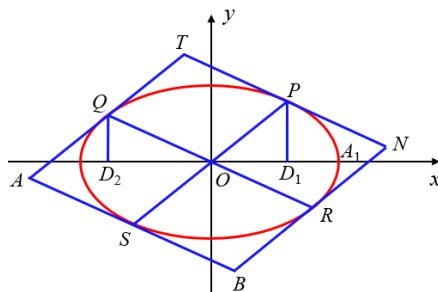


图 6 命题 4 及命题 5 图

命题 5: 以椭圆直径及其共轭直径与椭圆的四个交点所作切线围成的平行四边形的面积是定值。

Fine & Thompson (1914) 利用行列式计算三角形面积^[5]。由 $P(x', y'), Q(-\frac{a}{b}y', \frac{b}{a}x')$, 故

$$S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ -\frac{a}{b}y' & \frac{b}{a}x' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| \frac{b}{a}x'^2 + \frac{a}{b}y'^2 \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} \right) ab = \frac{1}{2} ab, \quad \text{则 } S_{\square ABNT} = 8S_{\triangle OPQ} = 4ab.$$

Schmall (1921) 则将坐标表示为参数方程的形式, 可以得到同样的结论^[11]。

Todhunter (1862) 则计算平行四边形的底边和高从而得到其面积^[14]。由过点 $P(x', y')$ 的切

线的表达式 $y = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} x + \frac{b^2}{y'}$, 所以原点到切线的距离为 $d = \frac{\left| \frac{b^2}{y'} \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \right)^2}} = \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}$ 。又

因为 $|OQ| = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} y'^2 + \frac{b^2}{a^2} x'^2} = \frac{\sqrt{a^4 y'^2 + b^4 x'^2}}{ab}$, 于是 $S_{\square ABNT} = 4S_{\square OPTQ} = 4 \cdot |OQ| \cdot d = 4ab$ 。

Nichols (1892) 由命题“平行四边形的面积等于两组邻边的积乘以夹角的正弦值”来证明这一命题^[19]。设 $PS = 2a', QR = 2b'$ 及 $\angle POA_1 = \theta, \angle QOA_1 = \varphi$, 过点 P, Q 作 x 轴的垂线, 垂足

分别为 D_1, D_2 。由 $\sin \varphi = \frac{|QD_2|}{|OQ|} = \frac{bx'}{ab}, \cos \varphi = -\frac{|OD_2|}{|OQ|} = -\frac{ay'}{bb'}$ 及 $\sin \theta = \frac{y'}{a'}, \cos \theta = \frac{x'}{a'}$, 故

$$\sin(\varphi - \theta) = \sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta = \frac{ab}{a'b'}, \text{ 于是 } S_{\square ABNT} = 4S_{\square OPTQ} = 4 \cdot |OP| \cdot |OQ| \cdot \sin(\varphi - \theta) = 4ab.$$

5 相关的轨迹

命题 6: 从椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 焦点到椭圆任意切线的垂线，两个垂足均在 $x^2 + y^2 = a^2$ 上。

在图 7 中，因为切线 PT 的表达式为 $y - mx = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ ，过焦点 $F_2(ae, 0)$ 作与切线 PT 垂直的直线 F_2G ，垂足为点 G ，直线 F_2G 的表达式为 $my + x = ae$ ，两式两边平方相加可得 $(m^2 + 1)(x^2 + y^2) = a^2 m^2 + b^2 + a^2 e^2 = a^2 m^2 + a^2$ ，所以 $x^2 + y^2 = a^2$ ，即两个垂足的轨迹是以原点为圆心， a 为半径的圆。^[5]

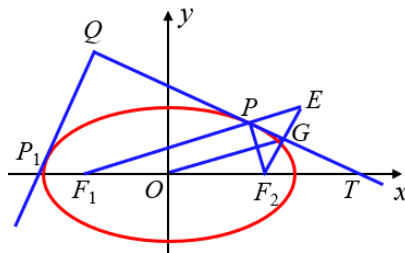


图 7 命题 6 及命题 7 图

Schmall (1921) 过点 F_2 作 $F_2G \perp PT$ ，延长 F_2G 交 F_1P 的延长线于点 E (图 7)，由命题 1 可知， $\angle QPF_1 = \angle TPF_2 = \angle EPT$ ，所以 $\triangle PGE \cong \triangle PGF_2$ ，于是点 G 是线段 EF_2 的中点。又因为点 O 是线段 F_1F_2 的中点，所以 OG 是 $\triangle F_2F_1E$ 的中位线，于是

$$|OG| = \frac{1}{2}|F_1E| = \frac{1}{2}(|F_1P| + |PF_2|) = a. \quad [11]$$

命题 7: 两条相互垂直且与椭圆相切的切线交点的轨迹为 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ 。

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 一条切线的斜率为 m ，则切线方程为 $y - mx = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ 。因为两条垂

直切线的斜率满足 $m'm + 1 = 0$ ，所以另一条切线方程为 $y + \frac{1}{m}x = \sqrt{\frac{a^2}{m^2} + b^2}$ ，即

$$my + x = \sqrt{a^2 + b^2 m^2}. \text{ 两式平方相加，化简可得 } x^2 + y^2 = a^2 + b^2. \quad [20]$$

Bailey & Woods (1899) 在切线上任取一点 (x_1, y_1) , 则 $y_1 - mx_1 = \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$, 于是两边平方可得 $(a^2 - x_1^2)m^2 + 2x_1 y_1 m + b^2 - y_1^2 = 0$ 。设两条切线的斜率分别为 m_1 、 m_2 , 由韦达定理知 $m_1 m_2 = \frac{b^2 - y_1^2}{a^2 - x_1^2}$, 又因为两条切线相互垂直, 所以 $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$ 。[21]

6 结论与启示

综上所述, 美英早期解析几何教科书中所呈现的与椭圆相关的角度、定值及轨迹性质, 为今日椭圆中的几何性质的教学提供了诸多启示。

第一, 优化课堂教学设计, 提升课堂教学的品质。性质、定理课的教学不应局限在简单的定理陈述和证明, 这样的数学课堂过分强调以教师为主导, 学生的主体性却没有得到充分的发挥。在推行素质教育的背景下, 教师应更关注学生的学习机会, 即课堂教学应让每个学生都能参与其中, 有意识地提升课堂教学的参与度。因此, 在椭圆的几何性质的教学中, 教师应当适度留白, 留给学生思考性质的证明方法的时间和空间、留给学生小组探究不同性质的机会、留给学生获得成功的机会, 这一做法将提升学生学习的自信心和持续学习的愿望。与此同时, 教师还应准确把握教学的起点, 在学生的最近发展区内进行教学, 例如找到证明过程中的重点和难点予以详细讲解, 讲解后再进行变式练习等, 学生最终成为学习的主人, 使得各层次学生都有能力积极参与课堂思考。

第二, 重视数学核心素养, 培养学生的创新能力。定理证明中蕴含着丰富的数学思想, 例如, 直角坐标与参数方程的互化体现化归思想, 两直线的交点体现方程思想等。在实施新课程标准的今天, 教师应更新教育理念, 从单纯关注定理的记忆、应用转向关注数学思想方法的渗透。一方面, 学生将“知其然, 知其所以然”, 掌握课堂中讲述的定理的各种证明方法, 培养逻辑推理、数学抽象等数学核心素养; 另一方面, 数学思想的掌握有助于学生进行学习迁移, 以不变应万变。我们认为, 这些思想在今后的问题解决中都能灵活运用, 提高了学生的整体学习能力, 有助于培养社会所需要的创新型人才。

第三, 加强知识普遍联系, 发展学生的理性思维。数学知识本就是环环相扣的, 每个知识点之间都存在联系, 教师可以帮助学生构建知识链, 增强学生对知识的梳理。例如, 直角坐标和参数方程之间是对应的, 但利用参数方程对命题 4 进行证明所需的计算量显然比直角坐标下

的计算量小。因此,教师要帮助学生建立知识图谱,打通知识之间的关联,并引导学生灵活运用知识图谱中的不同表征方式,使问题化繁为简,这样做既能培养学生的发散思维,也能发展学生的理性精神。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 44.
- [2] 马艳荣,叶佳浩,沈中宇. “椭圆及其标准方程”:从历史中寻找“火热的思考”[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2020(01): 30-37.
- [3] 汪晓勤,沈中宇. 数学史与高中数学教学:理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 23.
- [4] Ziwet, A., Hopkins, L. A. *Analytic Geometry and Principles of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company, 1913: 208-209.
- [5] Fine, H. B., Thompson, H. D. *Coordinate Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1914: 84-85+89-90.
- [6] Church, A. E. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: G. P. Putnam, 1851: 153-154.
- [7] Wilson, W. A., Tracey, J. I. *Analytic Geometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Company, 1915: 175-176.
- [8] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Co., 1836: 116-118.
- [9] Puckle, G. H. *An Elementary Treatise on Conic Sections and Algebraic Geometry*[M]. London: Macmillan, 1870: 188-189.
- [10] Robinson, H. N. *Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Ivison, Blakeman, 1860: 16-17.
- [11] Schmall, C. N. *A First Course in Analytic Geometry, Plane and Solid*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1921: 173-175+180-181.
- [12] Peck, W. G. *A Treatise on Analytical Geometry*[M]. New York: A. S. Barnes & Company, 1876:

109-111.

- [13] Bowser, E. A. *An Elementary Treatise on Analytic Geometry*[M]. New York: D. van Nostrand, 1880: 134-135.
- [14] Todhunter, I. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry as Applied to the Straight Line and the Conic Sections*[M]. London: Macmillan, 1862: 172+174.
- [15] Askwith, E. H. *The Analytical Geometry of the Conic Sections*[M]. London: A. and C. Black, 1908: 171.
- [16] Smyth, W. *Elements of Analytical Geometry*[M]. Boston: Sanborn, Carter and Bazin, 1855: 92.
- [17] Coffin, J. H. *Elements of Conic Sections and Analytical Geometry*[M]. New York: Collins, 1881: 21.
- [18] Siceloff, L. P., Wentworth, G., Smith, D. E. *Analytic Geometry: Brief Course*[M]. Boston: Ginn & Company, 1922: 111.
- [19] Nichols, E. W. *Analytic Geometry for Colleges, Universities, and Technical Schools*[M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1892: 131-133.
- [20] Runkle, J. D. *Elements of Plane Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1888: 229-230.
- [21] Bailey, F. H., Woods, F. S. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1899: 203-205.

美英早期三角学教科书中的“三角形中的三角恒等式”

姚 瑶

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

三角恒等式是高中数学三角函数部分的重要内容, 高中数学教学中常见的三角恒等变换公式包括基本诱导公式、两角和差公式、和差化积公式、积化和差公式、倍角公式、半角公式等。而三角形中的三角恒等式, 作为一种特殊的三角恒等式, 指的是同一三角形中三个角的三角函数之间成立的恒等关系, 是上述常见的三角恒等变换公式在三角形条件下的推广结论。

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中要求学生能运用常见三角恒等式进行简单的恒等变换, 推导出其他三角恒等式; 要求教师在三角恒等变换的教学中, 可以采用不同的方式得到三角恒等变换基本公式^[1]。

在不同版本的现行教科书中, 沪教版教科书以例题形式要求证明一个三角形中与正切相关的三角恒等式, 并于“三角”一章的复习题 B 组设置了一个三角形中三角恒等式的证明问题; 苏教版教科书在“几个三角恒等式”一节的习题中设置了两个三角形中三角正弦和、余弦和形式的三角恒等式的证明问题; 人教 A 版和北师大版教科书中并未出现三角形中的三角恒等式。

在教学实践中, 三角形中的三角恒等式多应用于数学竞赛中的不等式证明, 在常见三角恒等式的运用与练习过程中, 不可避免地会出现三角形中的三角恒等式相关运用, 它一方面可以考查学生对基本三角恒等式的掌握程度, 另一方面也可作为其推广进行拓展应用。鉴于目前较少有对三角形中的三角恒等式的系统研究, 本文聚焦该主题, 对美英早期三角学教科书进行梳理研究, 试图回答以下问题: 美英早期三角学教科书中有哪些三角形中的三角恒等式? 常见三角形中的三角恒等式有哪些证明方法? 以期为课堂教学提供素材。

2 早期教科书的选取

本文从相关数据库中选取 19 世纪至 20 世纪中叶期间出版的 108 种美英早期三角学教科书

为研究对象，其中有 56 种美英早期三角学教科书涉及到三角形中的三角恒等式。若以 20 年为一个时间段，108 种教科书的出版时间分布及三角形中三角恒等式的出现情况如图 1 所示。

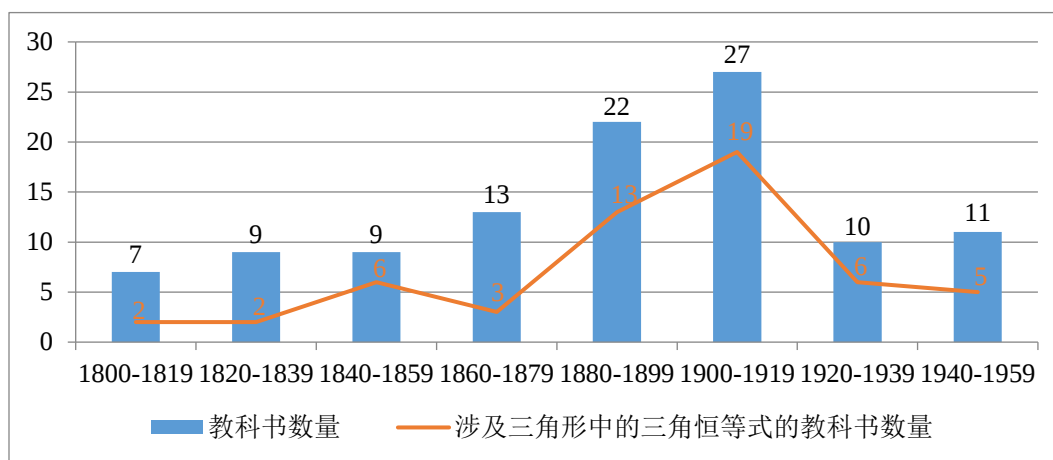


图 1 108 种美英早期教科书及涉及三角形中的三角恒等式的教科书出版时间分布

3 常见三角形中的三角恒等式及其演变

通过对美英早期三角学教科书的梳理，将其中常见三角形中的三角恒等式汇总如表 1 所示。

表 1 常见三角形中的三角恒等式

序号	三角形中的三角恒等式	代表教科书	数量
①	$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ ^[2]	Young (1833)	42
②	$\tan \frac{1}{2} A \tan \frac{1}{2} B + \tan \frac{1}{2} B \tan \frac{1}{2} C + \tan \frac{1}{2} C \tan \frac{1}{2} A = 1$ ^[3]	Pendlebury (1895)	12
③	$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$ ^[4]	Hann (1854)	36
④	$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$ ^[5]	Shute, Shink & Forter (1942)	20
⑤	$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$ ^[6]	Loney (1893)	10
⑥	$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$ ^[6]	Loney (1893)	5
⑦	$\cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C + 1$ ^[7]	Colenso (1859)	35
⑧	$\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C - 1$ ^[6]	Loney (1893)	13
⑨	$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$ ^[4]	Hann (1854)	12

由于在 1800 年至 1810 年期间上述 10 个三角恒等式都没有出现, 因此我们以 30 年为一个时间段, 将 1810 年至 1960 年分为五个时间段, 这 10 个常见三角形中的三角恒等式在不同时间段的出现频率如图 2 所示。

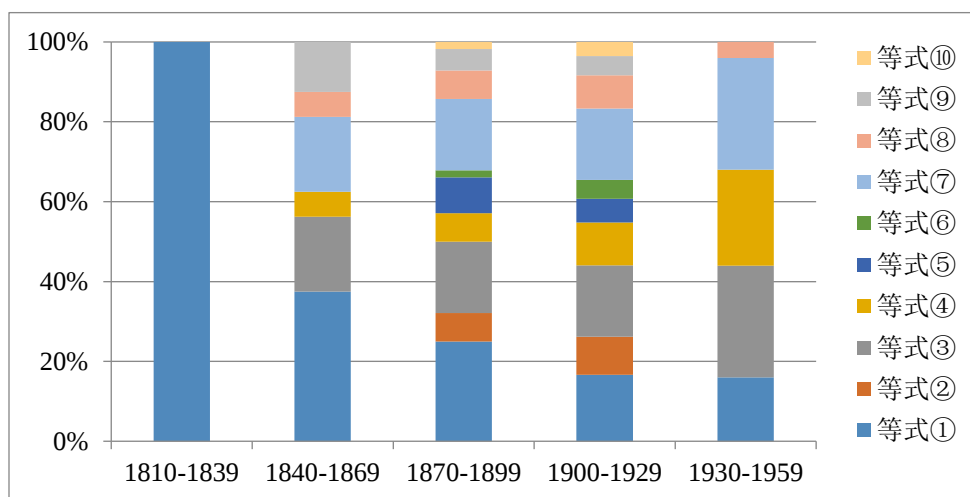


图 2 常见三角形中的三角恒等式在不同时段的分布情况

在 1810-1839 年, 仅有等式①出现, 且随着时间推移, 越来越多种类的等式出现在美英早期教科书中, 故而等式①的占比越来越小。在后面四个时间段, 分别有 6、10、10、5 种常见等式出现, 可见在 1870-1899 年、1900-1929 年时间段的美英早期教科书中呈现的三角形中三角恒等式更加丰富。其中, 等式③、等式④、等式⑩的占比呈现逐渐增长趋势, 其余等式分布占比较小且浮动不大。到 1930-1959 年时间段, 等式①、等式③、等式④、等式⑦逐渐成为美英教科书中的主流三角恒等式。

下文将等式①、等式②归为与正切相关的三角恒等式, 将等式③、等式④、等式⑤、等式⑥归为与正弦相关的三角恒等式, 将等式⑦、等式⑧、等式⑨、等式⑩归为与余弦相关的三角恒等式, 分为三部分进行具体介绍。

4 与正切相关的三角恒等式

4.1 三角正切和恒等式及推论

有 42 种教科书涉及到三角正切和的三角恒等式①:

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

其中 20 种教科书给出了该等式的证明方法，通过整理归纳可得以下四种不同的证法。

证法一：利用两角和与第三角的关系

在 20 种给出该等式证明方法的教科书中，有 10 种教科书利用了三角形中两角和与第三角之间的正切值关系进行证明，具体过程如下：

由于 $\triangle ABC$ 中， $A + B = 180^\circ - C$ ，可得

$$\tan C = -\tan(A + B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

将上式进行化简整理

$$\tan A + \tan B = \tan A \tan B \tan C - \tan C$$

即

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C .$$

证法二：直接利用正切的三角和公式

有 11 种教科书通过利用正切的三角和公式直接进行证明。在三角学教科书中，通常会给出正切的两角和公式，由此我们可以直接利用其推导恒等式①：

$$\begin{aligned} \tan(A + B + C) &= \frac{\tan(A + B) + \tan C}{1 - \tan(A + B) \tan C} = \frac{\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} + \tan C}{1 - \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \tan C} \\ &= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan A \tan C - \tan B \tan C} \end{aligned}$$

由 $\triangle ABC$ 中 $A + B + C = 180^\circ$ 可知 $\tan(A + B + C) = 0$ ，即上式的分子为 0，恒等式①得证。

证法三：利用正弦的三角和公式

有两种教科书提到可以利用正弦的三角和公式证明恒等式①。正弦的三角和公式展开如下：

$$\sin(A + B + C) = \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C$$

由 $\triangle ABC$ 中 $A + B + C = 180^\circ$ 可知 $\sin(A + B + C) = 0$ ，即得

$$\sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C = \sin A \sin B \sin C$$

在该式两边同时除以 $\cos A \cos B \cos C$ 即可证得三角正切和恒等式①

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C .$$

证法四：利用余切半角和的相关恒等式

Whitaker (1898) 提到了利用其他相关三角恒等式来推导三角正切和恒等式①的方法^[8]。

即利用公式

$$\cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C = \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C$$

该等式在下文会给出具体证明，现直接利用。在该等式中，我们知道 $A+B+C=180^\circ$ ，而

$$(180^\circ - 2A) + (180^\circ - 2B) + (180^\circ - 2C) = 180^\circ$$

在上述三角恒等式中我们用 $180^\circ - 2A$ 、 $180^\circ - 2B$ 、 $180^\circ - 2C$ 替换 A, B, C ，可得

$$\cot(90^\circ - A) + \cot(90^\circ - B) + \cot(90^\circ - C) = \cot(90^\circ - A) \cot(90^\circ - B) \cot(90^\circ - C)$$

由三角函数诱导公式可得

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

推论 4.1.1: $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot A \cot C = 1$

由三角正切和恒等式①左右两边同时除以 $\tan A \tan B \tan C$ 即可得到推论所示恒等式。

4.2 半角三角正切恒等式及推论

有 12 种教科书中涉及半角三角正切恒等式②：

$$\tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B + \tan \frac{1}{2}B \tan \frac{1}{2}C + \tan \frac{1}{2}C \tan \frac{1}{2}A = 1$$

其中 Pendlebury (1895) 给出了该等式的证明方法^[3]。

由 $\triangle ABC$ 中 $A+B+C=180^\circ$ 可知 $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$ ，故

$$\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \cot \frac{C}{2}$$

展开可得

$$\frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}}$$

化简即可证得

$$\tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B + \tan \frac{1}{2}B \tan \frac{1}{2}C + \tan \frac{1}{2}C \tan \frac{1}{2}A = 1.$$

推论 4.2.1: $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$

17 种教科书中提到了推论 4.2.1 所示恒等式，其中涉及到两种证明方法。

证法一：利用半角三角正切恒等式

Pendlebury (1895) 提出，由半角三角正切恒等式②左右两边同时乘 $\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$ 即可得推论所示恒等式^[3]。

证法二：利用三角形半周长与内切圆半径的相关结论

Whitaker (1898) 在教科书中利用三角形中如下关系^[8]

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\ \cot \frac{A}{2} = \frac{s-a}{r} \\ \cot \frac{B}{2} = \frac{s-b}{r} \\ \cot \frac{C}{2} = \frac{s-c}{r} \end{array} \right.$$

其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ， r 为内切圆半径。

由上述关系可知

$$\begin{aligned} \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} &= \frac{3s - (a+b+c)}{r} = \frac{s}{r} \\ \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r^3} = \frac{r^2 s}{r^3} = \frac{s}{r} \end{aligned}$$

故可知 $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$ 。

4.3 其他正切相关三角恒等式

在 56 种教科书中，仍有一些涉及与正切相关的三角恒等式，均位于习题部分，因此未给出相关证明，我们将这些三角恒等式呈现如下。

$$\begin{aligned} \cot A + \cot B + \cot C &= \cot A \cot B \cot C + \csc A + \csc B + \csc C \\ \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \sec \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2} \\ (\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2})(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}) &= 1 + \csc \frac{A}{2} \csc \frac{B}{2} \csc \frac{C}{2} \end{aligned}$$

5 与正弦相关的三角恒等式

5.1 三角正弦和恒等式及其推论

有 36 种教科书涉及到三角正弦和的三角恒等式③：

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$$

其中 14 种教科书呈现了该三角恒等式的证明方法，通过归纳整理得到以下三种不同的证明方法。

证法一：利用和差化积公式

有 13 种教科书中的证明方法都利用了和差化积公式，具体过程如下。

由 $\triangle ABC$ 中 $A + B + C = 180^\circ$ 可知 $\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{C}{2}$ ，故 $\sin \frac{1}{2}(A + B) = \cos \frac{1}{2}C$ ，由二倍角公式可得

$$\sin C = \sin(A + B) = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A + B)$$

借助和差化积公式，有

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B) = 2 \cos \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

从而

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos \frac{1}{2}C \left[\cos \frac{1}{2}(A + B) + \cos \frac{1}{2}(A - B) \right]$$

再次利用和差化积公式，即可得

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos \frac{1}{2}C \cdot 2 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B = 4 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

证法二：借助二倍角公式

Hann (1854) 借助了二倍角公式的变形来证明三角正弦和恒等式③^[4]，即

$$\begin{aligned}
& \sin A + \sin B + \sin C \\
&= 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A + 2 \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B + 2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C \\
&= 2 \cos \frac{1}{2} A \cos(\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C) + 2 \sin \frac{1}{2} B \sin(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} C) + 2 \cos \frac{1}{2} C \cos(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B) \\
&\quad - 2 \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C + 2 \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C + 2 \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} A \\
&= 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C
\end{aligned}$$

证法三：利用三角形半周长与外接圆半径的相关结论

Whitaker (1898) 利用了三角形中关于半周长的相关结论进行证明^[8]。我们有

$$R(\sin A + \sin B + \sin C) = s$$

$$s = 4R \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C$$

其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径, s 为半周长, 即 $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ 。

从而可直接推出

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C.$$

推论 5.1.1: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

证法一：构造法

Chauvenet (1851) 构造了如下四个等式进行证明^[9]:

$$\sin(A + B - C) = \sin(\pi - 2C) = \sin 2C$$

$$\sin(A + B + C) = 0$$

$$\sin(A - B + C) = \sin(\pi - 2B) = \sin 2B$$

$$\sin(-A + B + C) = \sin(\pi - 2A) = \sin 2A$$

将上面四个等式全部相加并展开即可得证。

证法二：借助二倍角公式

Hann (1854) 借助了二倍角公式的变形来证明推论 5.1.1^[4], 即

$$\begin{aligned}
\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin A \cos A + 2 \sin B \cos B + 2 \sin C \cos C \\
&= -2 \sin A \cos(B + C) + 2 \cos B \sin(A + C) - 2 \sin C \cos(A + B)
\end{aligned}$$

上式右边展开即可证得推论 5.1.1.

证法三：利用和差化积公式和倍角公式

有 8 种教科书中给出利用和差化积公式和倍角公式证明推论 5.1.1 的方法, 即

$$\begin{aligned}
\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2\sin A \cos A + 2\sin(B+C)\cos(B-C) \\
&= 2\sin A [\cos(B-C) - \cos(B+C)] \\
&= 4\sin A \sin B \sin C
\end{aligned}$$

证法四：替换法

Whitaker (1898) 通过利用三角正弦和恒等式，对等式中的角进行替换^[8]，进而推导出推论 5.1.1。由于 $A+B+C=180^\circ$ ，且 $(180^\circ-2A)+(180^\circ-2B)+(180^\circ-2C)=180^\circ$ ，故在三角正弦和恒等式中用 $180^\circ-2A$ 、 $180^\circ-2B$ 、 $180^\circ-2C$ 替换 A 、 B 、 C ，即可证得推论 5.1.1。

$$\text{推论 5.1.2: } \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4\cos \frac{3}{2}A \cos \frac{3}{2}B \cos \frac{3}{2}C$$

$$\text{推论 5.1.3: } \sin 4A + \sin 4B + \sin 4C = -4\sin 2A \sin 2B \sin 2C$$

$$\text{推论 5.1.4: } \sin 6A + \sin 6B + \sin 6C = 4\sin 3A \sin 3B \sin 3C$$

分别有 4 种、3 种、1 种教科书中提到以上推论 5.1.2、推论 5.1.3、推论 5.1.4，但都位于习题部分，并未给出具体证明。

$$\text{推论 5.1.5: } \sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2nC = (-1)^{n-1} 4\sin nA \sin nB \sin nC$$

Davison (1919) 在教科书中呈现了上述推论 5.1.5 的形式，实质上是对前面几个推论的推广形式^[10]，其证明过程如下：

$$\begin{aligned}
\sin 2nA + \sin 2nB + \sin 2nC &= 2\sin nA \cos nA + 2\sin(nB+nC)\cos(nB-nC) \\
&= 2\sin nA \cos [n\pi - (nB+nC)] + 2\sin(n\pi - nA)\cos(nB-nC) \\
&= \begin{cases} 2\sin nA \cos(nB+nC) - 2\sin nA \cos(nB-nC), & \text{if } n \text{ be even} \\ -2\sin nA \cos(nB+nC) + 2\sin nA \cos(nB-nC), & \text{if } n \text{ be odd} \end{cases} \\
&= (-1)^{n-1} 2\sin nA [\cos(nB-nC) - \cos(nB+nC)] \\
&= (-1)^{n-1} 4\sin nA \sin nB \sin nC
\end{aligned}$$

$$\text{推论 5.1.6: } \sin \frac{1}{2}A + \sin \frac{1}{2}B + \sin \frac{1}{2}C = 1 + 4\sin \frac{B+C}{4} \sin \frac{C+A}{4} \sin \frac{A+B}{4}$$

有 3 种教科书中提到了推论 6，其中 Nixon (1892) 利用和差化积公式和倍角公式给出了恒等式的证明^[11]。

$$\begin{aligned}
\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + 2\sin \frac{B+C}{4} \cos \frac{B-C}{4} \\
&= 1 - 2\sin^2 \frac{\pi-A}{4} + 2\sin \frac{\pi-A}{4} \cos \frac{B-C}{4} \\
&= 1 + 2\sin \frac{\pi-A}{4} \left[\cos \frac{B-C}{4} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{4}\right) \right] \\
&= 1 + 4\sin \frac{\pi-A}{4} \sin \frac{\pi-B}{4} \sin \frac{\pi-C}{4} \\
&= 1 + 4\sin \frac{B+C}{4} \sin \frac{C+A}{4} \sin \frac{A+B}{4}
\end{aligned}$$

5.2 三角正弦和与差的恒等式及其推论

20 种教科书中提到了三角正弦和与差的恒等式④：

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$$

其中，Shute、Shink、Forster（1942）借助和差化积公式和倍角公式给出了如下证明方法^[5]。

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B - \sin C &= 2\sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) - \sin(A+B) \\
&= 2\sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) - 2\sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A+B) \\
&= 2\sin \frac{1}{2}(A+B) \left[\cos \frac{1}{2}(A-B) - \cos \frac{1}{2}(A+B) \right] \\
&= 2\cos \frac{1}{2}C \cdot \left[-2\sin \frac{1}{2}A \sin\left(-\frac{1}{2}B\right) \right] \\
&= 4\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C
\end{aligned}$$

推论 5.2.1: $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4\cos A \cos B \sin C$

共有 8 种教科书中出现推论所示的三角恒等式，其中 Chauvenet（1851）、Conant（1909）分别给出了该恒等式的证法一^[9]、证法二^[12]，证明方法与推论 5.1.1 的证法一、证法三类似。

证法一：构造法

构造如下四个等式：

$$\begin{aligned}
\sin(A+B-C) &= \sin(\pi-2C) = \sin 2C \\
\sin(A+B+C) &= 0 \\
\sin(A-B+C) &= \sin(\pi-2B) = \sin 2B \\
\sin(-A+B+C) &= \sin(\pi-2A) = \sin 2A
\end{aligned}$$

将后两个等式之和减去前两个等式之和，即可得

$$\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = \sin(-A + B + C) + \sin(A - B + C) - \sin(A + B - C) - \sin(A + B + C)$$

展开即可得证。

证法二：利用和差化积公式和倍角公式

$$\begin{aligned}\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C &= 2\sin(A+B)\cos(A-B) - 2\sin C \cos C \\ &= 2\sin C \cos(A-B) + 2\sin C \cos(A+B) \\ &= 2\sin C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 2\sin C \cdot (2\cos A \cos B) \\ &= 4\cos A \cos B \sin C\end{aligned}$$

5.3 三角正弦平方和的恒等式及其推论

有 10 种教科书中涉及了三角正弦平方和的恒等式⑤：

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$$

其中有两种教科书给出了如下的证明方法。

令 $S = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ ，从而有

$$\begin{aligned}2S &= 2\sin^2 A + 2\sin^2 B + 2\sin^2 C \\ &= 2\sin^2 A + 1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C \\ &= 2\sin^2 A + 2 - \cos(B+C)\cos(B-C) \\ &= 2 - 2\cos^2 A + 2 - \cos(B+C)\cos(B-C)\end{aligned}$$

因此

$$S = 2 + \cos A [\cos(B+C) + \cos(B-C)] = 2 + 2\cos A \cos B \cos C$$

推论 5.3.1: $\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C = 2 - 2\cos 2A \cos 2B \cos 2C$

推论 5.3.2: $\sin^2 \frac{1}{2}A + \sin^2 \frac{1}{2}B + \sin^2 \frac{1}{2}C = 1 - 2\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C$

分别有 2 种、8 种教科书给出了推论 5.3.1、推论 5.3.2 所示恒等式，都位于习题部分，故未进行证明。

5.4 三角正弦平方和与差的恒等式及其推论

有 5 种教科书种涉及三角正弦平方和与差的恒等式⑥：

$$\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A \sin B \cos C$$

有 4 种教科书给出其半角形式的推论，如下：

$$\text{推论 5.4.1: } \sin^2 \frac{1}{2}A + \sin^2 \frac{1}{2}B - \sin^2 \frac{1}{2}C = 1 - 2\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C$$

上述两式在教科书中均位于习题部分，故未给出具体证明。

6 与余弦相关的三角恒等式

6.1 三角余弦和恒等式及其推论

有 35 种教科书中涉及到三角余弦和的三角恒等式⑦：

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C + 1$$

其中有 6 种教科书借助和差化积公式和倍角公式证明了这个恒等式。

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 2\cos \frac{1}{2}(A+B)\cos \frac{1}{2}(A-B) + \cos C \\ &= 2\sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}(A-B) + (1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}C) \\ &= 1 + 2\sin \frac{1}{2}C \left[\cos \frac{1}{2}(A-B) - \sin \frac{1}{2}C \right] \\ &= 1 + 2\sin \frac{1}{2}C \left[\cos \frac{1}{2}(A-B) - \cos \frac{1}{2}(A+B) \right] \\ &= 1 + 2\sin \frac{1}{2}C \cdot 2\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \\ &= 1 + 4\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C \end{aligned}$$

$$\text{推论 6.1.1: } \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A \cos B \cos C - 1$$

有 20 种教科书中涉及上述恒等式，其中 Chauvenet (1851)、Wells (1883) 分别给出了如下证法一^[9]、证法二^[13]。

证法一：构造法

构造如下四个等式：

$$\begin{aligned} \cos(A+B-C) &= \cos(\pi - 2C) = -\cos 2C \\ \cos(A+B+C) &= \cos \pi = -1 \\ \cos(A-B+C) &= \cos(\pi - 2B) = -\cos 2B \\ \cos(-A+B+C) &= \cos(\pi - 2A) = -\cos 2A \end{aligned}$$

将上面四个等式全部相加后展开即可得证。

证法二：利用和差化积公式和倍角公式

$$\begin{aligned}
\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= 2\cos^2 A - 1 + 2\cos(B+C)\cos(B-C) \\
&= -1 - 2\cos A\cos(B+C) - 2\cos A\cos(B-C) \\
&= -1 - 2\cos A[\cos(B+C) + \cos(B-C)] \\
&= -1 - 2\cos A \cdot 2\cos B\cos C \\
&= -1 - 4\cos A\cos B\cos C
\end{aligned}$$

推论 6.1.2: $\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C = -1 + 4\cos 2A\cos 2B\cos 2C$

推论 6.1.3: $\cos 2nA + \cos 2nB + \cos 2nC = -1 + (-1)^n 4\cos nA\cos nB\cos nC$

Davison (1919) 在教科书习题部分给出了推论 6.1.2 和推论 6.1.3, 故未给出证明^[10], 由三角正弦恒等式推论的证明方法类推即可。

推论 6.1.4:

$$\begin{aligned}
\cos \frac{1}{2}A + \cos \frac{1}{2}B + \cos \frac{1}{2}C &= 4\cos \frac{\pi+A}{4}\cos \frac{\pi+B}{4}\cos \frac{\pi+C}{4} \\
\text{or } &= 4\cos \frac{\pi-A}{4}\cos \frac{\pi-B}{4}\cos \frac{\pi-C}{4} \\
\text{or } &= 4\cos \frac{B+C}{4}\cos \frac{C+A}{4}\cos \frac{A+B}{4}
\end{aligned}$$

有 6 种教科书中提到了三角半角余弦和的恒等式, 可归纳为推论 6.1.4 中三种不同的形式。

6.2 三角余弦和与差恒等式及其推论

有 13 种教科书中涉及三角余弦和与差的三角恒等式⑧:

$$\cos A + \cos B - \cos C = 4\cos \frac{1}{2}A\cos \frac{1}{2}B\sin \frac{1}{2}C - 1$$

其中有 4 种教科书给出了利用和差化积公式和倍角公式进行推导的证明方法, 即:

由 $\triangle ABC$ 中 $\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$ 可知 $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$, $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$, 从而有

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B - \cos C &= \cos A + (\cos B - \cos C) \\
&= 2\cos^2 \frac{1}{2}A - 1 + 2\sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C-B}{2} \\
&= 2\cos^2 \frac{1}{2}A - 1 + 2\cos \frac{1}{2}A \sin \frac{C-B}{2} \\
&= 2\cos \frac{1}{2}A \left(\cos \frac{1}{2}A + \sin \frac{C-B}{2} \right) - 1 \\
&= 2\cos \frac{1}{2}A \left(\sin \frac{B+C}{2} + \sin \frac{C-B}{2} \right) - 1 \\
&= 4\cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C - 1
\end{aligned}$$

推论 6.2.1: $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 4\sin A \sin B \cos C - 1$

有 8 种教科书中涉及三角余弦和与差的二倍角形式的恒等式，其中 Chauvenet (1851) 仍用构造法对该等式进行了证明^[9]：

构造如下四个等式：

$$\begin{aligned}
\cos(A+B-C) &= \cos(\pi-2C) = -\cos 2C \\
\cos(A+B+C) &= \cos \pi = -1 \\
\cos(A-B+C) &= \cos(\pi-2B) = -\cos 2B \\
\cos(-A+B+C) &= \cos(\pi-2A) = -\cos 2A
\end{aligned}$$

用后两式之和减去前两式之和，展开即可得证。

推论 6.2.2: $\cos \frac{1}{2}A + \cos \frac{1}{2}B - \cos \frac{1}{2}C = 4\cos \frac{\pi+A}{4} \cos \frac{\pi+B}{4} \cos \frac{\pi-C}{4}$

Wells (1883) 给出了三角余弦和与差的半角形式恒等式^[13]，由于其出现在习题部分，故无具体证明。

6.3 三角余弦平方和恒等式及其推论

有 12 种教科书中提到三角余弦平方和的三角恒等式^⑨：

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

其中，Hann (1854)、Nixon (1892)、Davison (1919) 分别给出了如下的证法一^[4]、证法二^[11]、证法三^[10]。

证法一：构造法

由 $\triangle ABC$ 中的角度关系可知

$$\cos A = -\cos(B+C) = -\cos B \cos C + \sin B \sin C$$

$$\cos B = -\cos(A+C) = -\cos A \cos C + \sin A \sin C$$

在上面两式两端分别乘以 $\cos A$ 、 $\cos B$ 可构造出

$$\cos^2 A = -\cos A \cos B \cos C + \cos A \sin B \sin C$$

$$\cos^2 B = -\cos A \cos B \cos C + \sin A \cos B \sin C$$

从而将上面两式相加，得

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B &= -2 \cos A \cos B \cos C + \sin C (\cos A \sin B + \sin A \cos B) \\ &= -2 \cos A \cos B \cos C + \sin C \sin(A+B) \\ &= -2 \cos A \cos B \cos C + \sin^2 C \\ &= -2 \cos A \cos B \cos C + 1 - \cos^2 C\end{aligned}$$

移项即可得证。

证法二：转化法

由 $\triangle ABC$ 中的角度关系，将角 C 用角 A 和 B 表示，即

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2(A+B) \\ &= \cos^2 A + \cos^2 B + (\cos A \cos B - \sin A \sin B)^2 \\ &= \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 A \cos^2 B + (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 B) - 2 \cos A \cos B \sin A \sin B \\ &= 1 + 2 \cos^2 A \cos^2 B - 2 \cos A \cos B \sin A \sin B \\ &= 1 + 2 \cos A \cos B (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \\ &= 1 + 2 \cos A \cos B \cos(A+B) \\ &= 1 + 2 \cos A \cos B \cos C\end{aligned}$$

证法三：利用倍角公式及和差化积公式

$$\begin{aligned}\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B) + \cos^2 C \\ &= 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C \\ &= 1 + \cos(\pi - C)\cos(A-B) + \cos C \cos[\pi - (A+B)] \\ &= 1 - \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 1 - 2 \cos A \cos B \cos C\end{aligned}$$

推论 6.3.1: $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C$

推论 6.3.2: $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 + 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

推论 6.3.3: $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2(\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2})$

上述三个推论为三角余弦平方和的二倍角和半角形式，均在一至二种教科书的习题部分出

现，都未给出具体证明过程。

6.4 三角余弦平方和与差的恒等式

4 种教科书中提到三角余弦平方和与差的恒等式⑩：

$$\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A \sin B \cos C$$

该公式均出现在教科书的习题部分，故未给出证明。

7 其余三角恒等式

从 56 种涉及三角恒等式的教科书的正文及习题中，共整理归纳出六十余种不同形式的三角恒等式，除了上面介绍的正切、正弦、余弦相关的常见恒等式，还有以下几个出现次数超过一本教科书的三角恒等式，现将其呈现如下。

等式 1:

$$(\sin A + \sin B + \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A)(\sin C + \sin A - \sin B)(\sin A + \sin B - \sin C) = 4\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C$$

$$\text{等式 2: } \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 8\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{等式 3: } \sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) = 4\sin A \sin B \sin C$$

$$\text{等式 4: } \sin(B + 2C) + \sin(C + 2A) + \sin(A + 2B) = 4\sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{C-A}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\text{等式 5: } \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$$

$$\text{等式 6: } \frac{1 + \cos A - \cos B + \cos C}{1 + \cos A + \cos B - \cos C} = \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

其中，Nixon（1892）利用三角正弦和恒等式、三角正弦和与差的恒等式结论直接证明了等式 1，其过程如下^[11]：

$$\begin{aligned} & (\sin A + \sin B + \sin C)(\sin B + \sin C - \sin A)(\sin C + \sin A - \sin B)(\sin A + \sin B - \sin C) \\ &= 4\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot 4\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cdot 4\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cdot 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 4\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C \end{aligned}$$

等式 2~6 均位于习题部分，故未进行具体证明。

8 结论与启示

综上所述，美英早期三角学教科书中呈现的常见 10 种三角形中三角恒等式和推论及其证明方法，绘制出三角形中三角恒等式的较为完整的知识框架，为今日三角恒等式相关的教学提供了诸多启示。

第一，重视方法归纳，领悟转化思想。三角形中的三角恒等式大多是利用基本三角恒等式以及三角形中三角和的性质进行变换而来，主要考查学生对于已有条件和熟悉的三角恒等式的理解和应用。三角形中的常见三角恒等式及推论的证明方法可以总结为以下几种主流方法：利用和角公式、利用和差化积公式、构造法、替换法、利用倍角公式，利用这些方法可以举一反三推出更多的复杂三角恒等式。鉴于三角形中的三角恒等式在我国现有教科书中的应用较少，该部分内容可设计为拓展课教学，教师可以引导学生归纳复杂三角恒等式的推导方法，领悟基本三角恒等式与复杂三角恒等式之间的转换的数学思想，提升知识迁移能力。

第二，灵活运用推理，提升核心素养。在上述三角形中的常见三角恒等式的整理与推导过程中，可以发现无论是从常见三角恒等式到其推论，还是从正弦相关的三角恒等式到余弦相关的三角恒等式，都蕴含着类比的数学思想。在拓展课教学时，教师通过引导学生通过类比推理发现更多的三角恒等式，并尝试通过演绎推理进行证明，从而提升逻辑推理、数学运算等核心素养。

第三，设计竞赛专题，突破复习难点。当前高中阶段关于三角形中的三角恒等式的教学实践相对较少，但其在三角不等式、代数不等式的推导证明中起到了至关重要的作用，反复运用的“三角换元”也是解决一些数学难题的突破口。因此，在数学竞赛培训或高三复习课中，教师可以设计三角恒等式专题，培养一批数学资优生。

第四，发现数学之美，体会数学魅力。哲学家马克思曾说：“人类社会的生产活动式按照美的原则进行的。”在生产活动中，数学知识也具有美学价值。很多三角形中的三角恒等式在结构上都呈现出数学的对称美、和谐美、简洁美，这些恒等式生动地展现出数学公式的趣味性，改变学生对数学公式单调古板的认识。教师也应该多关注数学史，从不断推进数学知识的历史中挖掘数学之美，进而引导学生体会数学的魅力。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 22-24.
- [2] Young, J. R. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. London: John Souter, 1833: 49.
- [3] Pendlebury, C. *Elementary Trigonometry*[M]. London: George Bell & Sons, 1895: 112-114.
- [4] Hann, J. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. London: John Weale, 1854: 46.
- [5] Shute, W. G., Shirk, W. W. & Forter, G. F. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Co, 1942: 167-169.
- [6] Loney, S. L. *Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1893: 135-139.
- [7] Colenso, J. W. *Plane Trigonometry (V.1)*[M]. London: Longmans, Green, & Co, 1859: 63-65.
- [8] Whitaker, H. C. *Elements of Trigonometry*[M]. Philadelphia: D. Anson Partridge, 1898: 108.
- [9] Chauvenet, W. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Philadelphia: Hogan, Perkins & Co, 1851: 40.
- [10] Davison, C. *Plane Trigonometry for Secondary Schools*[M]. Cambridge: The University Press, 1919: 107-110.
- [11] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892: 75-80.
- [12] Conant, L. L. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1909: 111-113.
- [13] Wells, W. *A Practical Textbook on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston & New York: Leach, Shewell & Sanborn, 1883: 59-62.

教学实践

数学遇见话剧

——初中数学课程德育的实践探索与价值分析*

胡永强

（苏州市阳山实验初级中学校，江苏 215151）

近年来，初中生内卷现象日趋严重。学生在校内有永远写不完的作业题海，在校外要参加形形色色的培训班，这样机械刷题训练导致他们对学习毫无兴趣。为了解决这一突出问题，2021 年，中共中央办公厅、国务院办公厅印发了《关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见》，简称“双减”文件。该文件旨在整治泛滥全国的校外培训机构和减轻学生过重的作业负担，要求学校开足开齐开好国家规定课程，大力提升教育教学质量，确保学生在校内学足学好。如何开好国家规定课程，让学生在校内学足学好，是每一位教育工作者需要深入思考的问题。

数学是一门重要的基础性学科。学好数学对学好其他学科帮助较大，对学生未来的发展意义重大，是提升国家核心竞争力的基础。近 20 年，我国在基础教育领域开展新课程改革。从整体上看，我国初中阶段的数学教育水平有很大提高，但也存在许多弊端。如教师对知识点讲授偏多，数学教学被窄化成数学知识点的教学；题海战术仍为许多教师所钟爱；不少教师教学观念狭隘，考什么教什么，不考的坚决不教，数学所蕴含的文化、德育等价值多被忽视。如何改变上述现象，是每一位数学教育工作者需要深入思考的问题。

众所周知，兴趣是最好的老师。解决上述问题，可以从教师转变教学方式，培养学生对数学的兴趣做起。数学话剧是数学文化传播的一种新形式，依托于话剧这样一种具象演绎，将数学融入其中，可以将数学生活化、艺术化、通俗化，从而让更多人走近数学、了解数学、喜爱数学^[1]。本文呈现的是在初中阶段通过开展数学话剧创作与排演，激发学生对数学的兴趣、增

* 本文系江苏省中小学教学研究第十四期课题“初中数学课程德育内容设计与渗透策略研究”（编号：2021JY14-L47）的阶段性研究成果。

强学生对数学的认识和理解的一点尝试。

1 背景介绍

2017 年 1 月，中共中央办公厅、国务院办公厅印发《关于实施中华优秀传统文化传承发展工程的意见》，旨在建设社会主义文化强国，增强国家文化软实力，实现中华民族伟大复兴的中国梦。笔者所在学校七、八两个年级每周五下午有一节社团课，实行走班制，学生根据个人兴趣、特长自主选择。为了进一步落实《关于实施中华优秀传统文化传承发展工程的意见》，笔者结合自身特长开设“中国数学史社团”，从两个年级招收 40 名学生。活动内容与形式包括阅读我国古代数学家的故事，了解数学家的主要贡献、人格魅力、精神品格；深入钻研一些具体的数学知识、定理、发现的发生发展过程，梳理数学的发展脉络等。半学期后，学生对中国数学史有了一定的了解，随后开展数学话剧的创作与排演。

2 准备与实施

2.1 剧本来源

教师将社团成员分为 5 个小组，布置各小组结合已经学习过的数学史，利用两周时间创作剧本。两周后，教师安排小组展示并选定剧本。其中《祖冲之与大明历》内容详实，情节动人，加上学生在小学阶段对祖冲之有所了解，最终被选中。

2.2 演职人员的构成

演员 10 人，其中七年级 2 人，八年级 8 人，有 4 名女生。道具保管与后勤服务 4 人。全部来自本社团。

2.3 服装道具的准备

演出服装在网店购置，道具由学生自行制作。

2.4 数学话剧剧本的创作

在学生前期创作的基础上，教师与学生一起进行细致的修改与完善。在排演过程中，根据效果对剧本逐步修改和完善。

2.5 数学话剧的排演

利用社团课及午间休息等时段进行排演。

2.6 数学话剧的推广与演出

通过社团成员的讲述、微信公众号、年级组文艺节目选拔赛等途径对本话剧进行推广。由于本话剧有较好的教育价值，最后得以在全校的迎元旦文艺汇演中演出。

3 分析与反思

3.1 剧本内容与分析

剧本讲述的是我国南北朝时期，祖冲之（429-501）以为国家颁行的何承天元嘉历法不够精密，自造大明历法，于大明六年（462 年）建议修改，遭到当时专制政权的阻挠，新法不被采用。他在大明六年与守旧派官僚戴法兴辩论历法时，曾说：“臣少钝愚，尚专攻数术。以俯信偏识，不虚推古人。”这年他 33 岁，对数学和天文学已有深入研究，同时他做学问不迷信权威，不虚推古人，实事求是。但是在他有生之年，大明历一直未被采用。他的儿子祖暅（约 450-约 520）也是一个博学之才，在梁朝两次建议推行大明历，经过太史令等实测天象，考验新旧历法后，政府于 510 年采用大明历。^[2]

根据上述数学历史素材，共创作四幕话剧，下面对这四幕话剧的概要作简要交代。

第一幕介绍了童年祖冲之在其祖父祖昌的熏陶下，对数学及天文学产生兴趣。祖昌曾任南北朝时期刘宋朝廷的大匠卿，是朝廷负责营建工程的最高官，做事踏实勤奋，经常研读一些算学、工程建设、历法方面的书籍，在数学、天文学等领域有着自己的研究。祖孙隔代亲，童年时期的祖冲之常常缠着爷爷讲故事，夜晚祖孙俩时常偎坐在院子里仰望星空，爷爷指着夜空给小祖冲之讲星宿的运动规律，以及古代科学家的故事。虽然这些规律或故事中的科学道理他并

不完全理解，但前人的治学研究精神却在他幼小的心灵上播下了种子。从此祖冲之萌生大志，长大后要研究天文学，探求其中的奥秘。

第二幕介绍祖冲之进入国子学读书，在天文学家何承天的悉心指导下，他不断学习天文历法方面的知识，并对这一领域的兴趣越来越浓厚。祖父看到他对天文学有着特殊偏好，鉴于天文学和数学之间有着密切的联系，便教他研究《周髀算经》《九章算术》等天文学及数学著作。由于兴趣浓厚、天资聪慧，加上勤奋努力，祖冲之的学识进步飞快。在祖冲之 20 岁左右，国家发生战乱，导致百姓流离失所、农耕失时。祖冲之见此情景下定决心，要尽自己所能，主攻天文历算，让满目疮痍的土地尽快恢复原貌。他要帮助人们医治战争的创伤，重建美好家园。于是他便运用自己所学知识，开启了十几年如一日的测日观天工作。经过十多年的观察、研究、推算，祖冲之发现老师何承天的《元嘉历》不够准确，于是自己编制一部新的历法——《大明历》。这一年他 33 岁。

第三幕介绍祖冲之向朝廷推荐自己的《大明历》，希望它能够尽快颁行天下，以造福百姓。但是新历的颁行之路异常曲折，受到了以戴法兴为首的一干保守势力的百般阻挠。后来在朝廷中好友的极力推荐下，宋孝武帝终于同意由懂历法的大臣组成讨论组，对新历法进行辩论。在辩论会上祖冲之不慌不忙、侃侃而谈，介绍编制新历法的初衷及自己在编制过程中的收获与感悟，群臣都在聚精会神地听他演说。这时，依仗皇帝宠幸的戴法兴突然站了起来，挥动衣袖，厉声喝道：“够了！我看《元嘉历》挺好，没必要改来改去！”气势咄咄逼人。由于祖冲之成竹在胸，他毫不退让、据理力争和戴法兴展开一场针锋相对的激烈辩论。最后戴法兴依仗权势，蛮横无理地说：“新法再好也不能用！”这场辩论祖冲之大获全胜，但大明历的颁行却被一拖再拖，直到祖冲之逝世也未被采用。^[3]

第四幕介绍祖冲之的儿子祖暅在父亲的影响和帮助下，也迷上了数学研究，长大后成为一名在数学上有卓越建树的博学之才。祖暅在父亲去世后仍然不遗余力地上书朝廷，推介父亲的《大明历》。在祖暅的两次上书后，梁武帝萧衍决定组织太史令等人实测天象，考验新旧历法。经考查，《大明历》的确比《元嘉历》精准，于是政府决定于公元 510 年采用《大明历》。此时，祖冲之已经逝世 10 年，祖暅带着朝廷同意颁行《大明历》的诏书，来到父亲的坟前，向九泉之下的父亲报告喜讯，以告慰父亲的在天之灵。到此剧终谢幕。

该剧本偏重讲述数学家的故事，体现数学的文化价值及德育价值。文化价值主要体现在以

下几个方面：首先，剧本介绍了数学和天文历法之间联系，体现当前教学改革要注重“学科联系”的精神；其次，剧本介绍祖冲之新修订的历法更为准确，对人类文明和社会发展起到推动作用，体现了新课程标准中对数学的“社会角色”的定位要求；再次，演员们华丽的古装、富有感情的对话、跌宕起伏的故事情节，给观众带来一场审美盛宴，体现了数学的“审美娱乐”功能。

剧本的德育价值包括，祖冲之对新历法潜心不懈研究可以培育学生坚持真理、不懈探究的理性精神；祖冲之对前人历法进行修正，体现了数学及天文学的演进，说明数学是一门人性化的学科，而不是一个僵化的真理系统，增强了学生的数学信念；祖冲之十几年如一日研究出的新历法的推广遭遇到大阻力，逝世也未能得到采纳，其中的艰难坎坷可见一斑，增强学生面对学习中遇到困难的决心和勇气，增强学生的数学情感；祖冲之的儿子祖暅继续努力，最终获得成功，学生懂得在面对挫折、失败、不被认可时不要放弃，而要持之以恒，这对培养学生坚毅的品质有帮助，朝堂上的辩论可以培养倾听、尊重和包容等品质。

3.2 话剧的影响分析

演出结束后，对参演者及部分观众进行了访谈与分析，如表 1-3 所示。

演出后，全体学生都体会到数学有趣，数学很美，数学是动态发展、不断完善，例如，“以前数学在我心中是枯燥乏味的，现在我发现数学充满了趣味”，“数学话剧让我看到了数学的美，让我更热爱数学”，“祖冲之对前人历法的修正，让我发现数学是不断发展的。参演学生对数学的认识更加深入，了解了相关数学知识背后的历史让他们更喜爱数学，感受到了数学的魅力，对学习数学的态度变得更加积极，例如，“通过此次演出，我对数学的理解不只是做题那么浅了，意识到每个知识背后都有一段历史”，“之前我对数学十分冷淡，认为数学只不过是一堆数字和图形，现在我发现数学非常奇妙，它是前人智慧发明的结晶，是研究自然的工具，我们应当将前人对数学的热爱传承下去”，“参演后，我知道数学与天文历法等学科有着密切的联系”。数学话剧让参演者与观众对数学的认识都发生了较为积极的变化，但参演者的体会更深刻。

表 1 对数学的认识影响分析

问题	参演者	观众
参加（观看）数学话剧演出后，你对数学的认识有哪些变化？	对数学的理解变得深刻，意识到每个知识背后都有一段历史；数学是研究自然的工具；数学是前人智慧的结晶；数学与其他学科联系密切。	数学充满趣味；数学很美；数学是不断发展与完善的。

演出后，学生从数学家身上体会到了追求真理、精益求精、持之以恒、奉献社会等许多高贵的精神品质，例如，“祖冲之深入钻研创造出了《大明历》，为了能让人民享受到更为精确的历法，他在朝堂之上与保守派激烈辩论，不惜得罪权贵”，“后来的子承父业，替父圆梦让我体会到了数学家的坚持”，“从话剧中，我看到了古人的智慧、才能、坚持、奉献、无畏与自信等高贵品质”。参演者对此认识更加细腻、深刻，例如，“我在参演过程中深切体会到祖冲之制作历法的精心：一次次的测量，一次次的研究，一次次的验证”，“我体会到祖冲之是一位有责任担当的数学家”。可以看出，本话剧让学生对数学家的认识变得更加丰富、立体、全面。

表 2 对数学家的认识影响分析

问题	参演者	观众
参加（观看）数学话剧演出后，你对数学家有哪些新的认识？	数学家拥有许多高贵的品质，值得学习，比如探求真理、持之以恒、自信无畏等，对数学家产生一种尊敬与仰慕之心；体会到数学家的成功并不是一帆风顺，数学家面对困难与挑战有勇有谋；数学家为了推动社会进步、服务民众贡献智慧与力量。	数学家为了改变世界努力钻研，用自己的研究成果服务社会，很伟大。后代对前辈的继承和发扬很感人。

话剧演出让观众真切地体会到做数学研究需要专心致志、勤奋刻苦、勇于探索、敢于质疑、持之以恒、敢于发表等品质，例如，“对于数学研究，我们要像祖冲之一样，有着严谨的态度，顽强的毅力，面对质疑要敢于坚持真理”，“面对难题要勇于探究”，“成功不是一帆风顺的，面对困难不要烦躁，应当以良好的心态面对，坚持不懈才能成功”，“现在的学习条件比古人好多了，我们要更努力”，参演者相比观众理解要深刻一些，例如参演者提出“做数学研究既要刻苦钻研、精益求精，但也要实事求是，研究结果要有理有据”，“数学研究要大胆质疑，勇于创新，追求完美”。由此可以发现，数学话剧对学生的数学研究的认识产生了很大的正面影响，

让他们真切地体会到数学研究应遵循的一些原则，以及研究者应具有的一些重要品质。

表 3 对数学研究的认识影响分析

问题	参演者	观众
参加（观看）数学话剧演出后，你对数学研究的认识有哪些变化？	做数学研究要实事求是，既不要迷信权威，不要虚推古人；数学研究要勇于探究，勤奋钻研，大胆质疑，有了新的研究成果要大胆发表，发表见解要有根有据；数学研究要勇于创新、追求完美。	做数学研究要勤奋刻苦，要坚持不懈；向别人解释自己的研究成果要有理有据。

3.3 实践反思

在初中阶段进行数学话剧的编写与排演是笔者的第一次尝试。调查发现，受访学生也都是第一次观看数学话剧，他们对这种形式感到非常新鲜，也很喜爱。数学话剧改变他们对数学的刻板印象，体会到数学之美，增强了学生对数学的兴趣，可以较为全面地认识数学家，体会到数学研究应当遵循的原则及研究者应具备的品质。此外，数学话剧很好地培养了参演者的团队精神，让他们意识到团队凝聚力和个体的责任意识是成功的保障。有多位参演人员在访谈中提到，参加团队活动要发扬主人翁精神、乐于付出，个人利益要服从集体利益等。由此可见，数学话剧对参演者及观众都产生了较大的积极影响，其中对参演者的影响更为深入。

虽然演出获得了师生的许多好评，但依然存在一些问题。

第一，所选的话剧内容涉及天文与历法知识，七、八年级的学生难以理解蕴含其中的数学原理，这使得本话剧只在数学文化魅力和德育价值方面发挥作用，在知识探究与方法能力方面的价值体现不足。今后在选题上要尽量考虑到学生的知识水平，选取一些适合学生探究的内容编写数学话剧。

第二，由于是首次登台演出，演员的临场发挥能力显得不足。准备工作也不是很到位，演员在舞台上的站位出现些许偏差，给观众带来一些视觉不足。个别演员在演出时出现背对观众现象。应结合演出录像，对演员进行相关演出技能培训，以提升演出效果。

第三，屏幕背景图片的更换与故事情节发展变化的吻合度不高，缺少一些必要的声音及动画效果。如讲到祖暅学习专心，“当其诣微之时，雷霆不能入”时，没有给出雷霆之声，影响了部分演出效果。需要精心制作背景图片、音乐等，给观众带来更好的视听觉感受，增强效果。

4 结 语

以上介绍了依托数学史与数学文化社团组织数学话剧的创作与排演的实践与影响分析。我们欣喜发现学生因数学话剧而悄然改变，学生对数学话剧这种全新的学习形式十分喜爱。数学话剧使学生对数学的兴趣变浓，理解加深；对数学的认识更加立体、丰富、全面；对数学研究也有了一定的认识，如实事求是、持之以恒、深入钻研等；增强了团队协作精神与责任担当意识。在实施的过程中发现了许多有待改进的地方，期待在后续的实践研究中逐步完善，让数学话剧这种新的数学学习形式得到进一步的推广，让更多的学生因数学话剧而改变。

致 谢

在本文写作过程中得到了汪晓勤教授、孙丹丹老师、沈中宇老师和刘思璐老师的帮助与指导，在此表示衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] 刘欣雨. 数学话剧德育价值的实践研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2019.
- [2] 钱宝琮. 中国数学史[M]. 北京: 商务印书馆, 2019.
- [3] 田战省. 影响世界的大数学家[M]. 吉林: 北方妇女儿童出版社, 2011.

巧用课堂留白，发展数学思维

——HPM 视角下导数的几何意义的教学

陈睿滢¹ 王智洋² 刘梦哲²

(1. 华东师范大学松江实验高级中学，上海 201620；2. 华东师范大学教师教育学院，上海 200062)

1 引言

导数是微积分的核心所在，是现代数学的基本概念，其蕴含微积分的基本思想，在整个数学学习过程中占有重要的地位和作用。导数的几何意义伴随着导数进入高中数学教材后，给函数图象及性质的研究开辟了一条新的途径。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》指出，通过函数图象直观理解导数的几何意义^[1]。

在已有的教学设计中，樊丹子和敬本善（2021）通过物理问题引入教学，并以问题串为牵引、小组合作为模式，借助信息技术，让学生抽象概括出切线的定义和导数的几何意义。当然，教师还在课堂中展示了切线的演变历史、以直代曲的数学思想等内容^[2]。可见，部分教师虽然帮助学生构建起一般曲线的切线定义，但未能采用对话式，将学生的与历史上的定义进行对照，进而实现穿越时空的对话。

在历史上，切线定义从静态走向动态跨越了数千年的岁月，了解切线的发展历程，有利于教师把握学生的认知起点，也为教学设计打开了新的视野^[3]。随着新课程改革的逐步推进，为培养学生的学习能力和数学素养，教师有必要更新教育理念和教学方式，而课堂“留白”便是一种有效的方法。鉴于此，本节课从 HPM 的视角设计教学，教师尝试适度“留白”，先通过课前学习单的展示与探讨，师生共同经历切线定义的发展历史，再以层层递进的问题串，并利用费马的虚拟等式法探究导数与切线斜率之间的对应关系，最后，教师引导学生从知识、思想及数学史三个维度谈及对本节课的收获。本节课拟定的教学目标如下。

- (1) 明确割线的定义，渗透极限思想，利用割线逼近至极限位置得到切线定义。
- (2) 通过图象直观感受“曲直代换”以及“极限逼近”思想，提升直观想象核心素养。

(3) 感受并推导导数与切线斜率之间的关系，发展逻辑推理核心素养。

(4) 渗透切线的数学史发展进程，在深化数学文化底蕴的同时体现数学学科的人文价值。

2 历史材料及其运用

翻开历史的卷轴，曲线切线的概念经历了从静态到动态的发展过程。

古希腊欧几里得（Euclid，约前 325-约前 265）在《几何原本》第 3 卷中将圆的切线定义为“和圆相遇、而延长后不与圆相交的直线”，即圆的切线是与圆相交且只有一个公共点的直线^[4]。

类似地，阿波罗尼奥斯（Apollonius，约前 262-约前 190）将圆锥曲线的切线看作是圆锥曲线只有一个公共点、且全部落在圆锥曲线之外的直线。阿基米德（Archimedes，前 287-前 212）仍从“公共点的个数”定义了螺线的切线。可见，直到阿基米德，古希腊人对切线的认识还局限于静态定义。在公元前 3 世纪，切线定义的局限性实际上已经暴露出来了，但古希腊数学家未能突破这一局限^[5]。

直到 17 世纪，数学家们相继发现和研究了一般曲线切线的不同构造方法。罗伯瓦尔（Roberval，1602-1675）在其著作《不可分量论》中把曲线看成一个动点在两个分速度作用下运动的轨迹，把切线定义为合速度方向所在的直线（图 1）。罗伯瓦尔以运动的思想定义了切线，适用于许多古希腊定义所不能适用的曲线。这个概念是有价值的，它把纯几何同力学联系起来了，在此之前是根本没有的。但另一方面，这个切线的定义在数学领域内是饱受诟病的，因为它是在物理的概念上定义的，而许多切线是在与运动无关的情况下产生的^[6]。

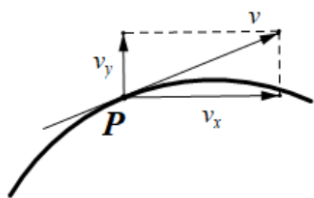


图 1 罗伯瓦尔的合速度方向定义

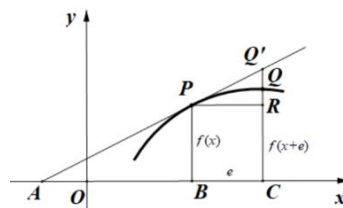


图 2 费马的虚拟等式法

与罗伯瓦尔同时代的费马（Fermat，1601-1665）在手稿《求最大值和最小值的方法》中提供了切线的作法，称之为虚拟等式法。费马通过假设切线上两点的距离与曲线上两点的实际距离几乎等长，利用增量列等式求出次切线 AB 的长度，从而知道切线与 x 轴交点的位置，最

后作出切线，具体过程如下所示。

思路：如图 2，想作出 P 点处的切线，只需确定切线与 x 轴的交点 A 的位置，故只需求出线段 AB 的长度。设 Q 是 P 点右侧的相邻点，即 $BC = e$ 很小，并假设 $QC \approx Q'C$ 。

过程：因为 $\triangle ABP \sim \triangle PRQ'$ ，则 $\frac{AB}{PB} = \frac{PR}{Q'R}$ 。又 $QC \approx Q'C$ ，即 $QR \approx Q'R$ ，那么 $\frac{AB}{PB} = \frac{PR}{QR}$ ，

即 $AB = \frac{e \cdot f' x}{f' x + e - f' x}$ ，让 e 趋向于 0 即可求得 AB 的长。

此外，德国数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz, 1646-1716）还将曲线的切线定义为“连接曲线上无限接近两点的直线”。可见，到 17 世纪下半叶，切线为割线之极限位置的思想已经成为数学家的共识。纵观历史，“以直代曲”思想是切线概念发展的关键，切线定义经历了如下（图 3）的发展，从静态走向动态跨越了数千年的岁月。

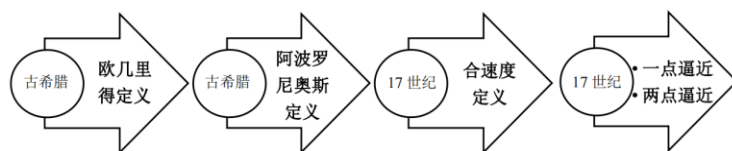


图 3 切线定义的发展

3 教学设计与实施

本节课主要分为三个版块。

- 切线定义的探寻；
- 切线斜率与导数几何意义之间的关系建立；
- 导数的几何意义的应用。

其中，第一版块将配合学生课前学习单成果进行讲授。课前学习单设置的内容与目标有二。

- 让学生通过寻找反例，实现认知冲突，发现“有且仅有一个交点”切线定义的局限性；
- 留给学生足够的空间进行开放式探索，从各类角度寻找圆锥曲线的切线定义，为课堂上的研究与探讨提供素材。

（一）交流探讨，逐步完善

问题 1：我们是如何定义圆的切线的？其定义能否外拓到除圆之外的其他曲线得到切线？

师：为了更好地理解导数的几何意义，本节课需要重点解决一个问题“什么是切线”，有

的同学可能会说“我们不是已经学习过切线了吗”。那我们就先从已经学习过的圆的切线开始说起。我们当初是如何定义圆的切线的。

生：与圆相交有且仅有一个交点的直线；圆心到直线的距离等于半径的直线；过圆上一点且与半径垂直的直线。

师：这些都是我们对于圆的切线的定义，其中第一条“与圆相交有且仅有一个交点的直线”也就是我们古希腊数学家欧几里得对于圆的切线的定义。那这个定义能否适用于其它曲线的切线呢？

【设计意图】从学生最熟悉的圆的切线入手，意识到圆的切线定义的局限性，产生认知冲突，为本节课切线从静态定义向动态定义转化作铺垫。

问题 2：（1）对于圆锥曲线而言，是否也可以用“与曲线有且仅有一个交点的直线”来定义切线？（2）尝试重新定义圆锥曲线的切线。

在本部分中，学生会从不同的角度对切线下定义，教师按照切线的历史发展顺序将课前学习单进行归类，在课上请学生进行展示，并带领学生讨论各个定义的合理性。

（1）阿波罗尼奥斯定义

生 1：能够在双曲线与抛物线中找到反例，所以“只有一个交点”不适用于圆锥曲线。考虑到在研究圆的切线时，可以从点与圆的相对位置关系得到直线与圆的相对位置关系。由于圆锥曲线不存在圆的特殊性，因此需要在只有一个交点的基础上增加“直线落在圆锥曲线之外”进行限制。

师：该同学观察到了直线与圆锥曲线的相对位置关系，得到了“与圆锥曲线有一个交点，且落在圆锥曲线之外的直线”来定义切线。那么，该定义能否用于除圆锥曲线外的其他曲线？

带领学生利用正弦函数 $y = \sin x$ 来进行探讨。

师：尝试寻找是否存在切线能够反驳“切线是与曲线有一个公共点，且不穿过曲线（在曲线同一侧）的直线”这一定义。

学生一般会从以下三个角度进行考虑（图 4-6）：

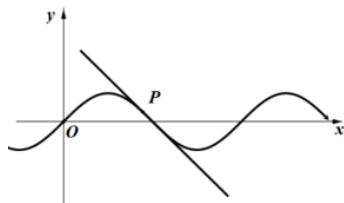


图 4 可以穿过曲线

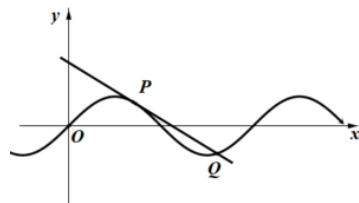


图 5 可以穿过曲线，同时与曲线有两个交点

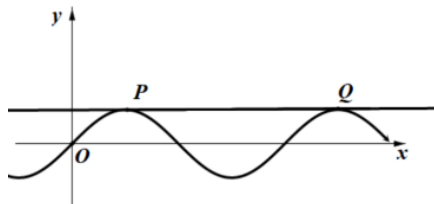


图 6 可以与曲线有多个交点

以此，意识到古希腊时期阿波罗尼奥斯切线定义的局限性。

【设计意图】多数学生往往会选择在一个交点的基础上，从直观的位置关系上去对切线定义进行思考，这也符合数学史上切线定义的发展规律。但从曲线与直线的交点个数这一静态角度进行定义，势必存在一定的局限性，通过从正弦函数图象寻找反例入手，在增加学生的课堂参与度的同时，加深学生的印象与理解。

(2) 合速度方向定义

生 2：切线可定义为方向向量与曲线上该点的运动方向相同或相反的直线。因为曲线是点形成的，点动成线，所以联想到了物理上的曲线运动的切向力，将这个概念带入到数学中，由于直线没有方向，但向量是带有方向的，所以在方向上也进行了限制。

师：该同学与上一节课导数的概念一样，都是从物理学角度进行考虑的，这与 17 世纪利用合速度的方向来定义切线的想法非常类似。但缺陷在于我们很难从这个定义当中得到数量上的信息。但是，这个想法当中有一个非常好的思路：点动成线，这就使得我们开始从动态的角度来思考切线的定义。接下来，我们同样也有同学从动态的角度来思考，但是与点动成线也有着一些差别。

【设计意图】在本教材中，本节课的前序课程“导数的概念”是从平均速度与瞬时速度进行引入，因此，部分学生会自然而然地在本部分通过物理学科中运动方向的角度来思考切线定义，这其实是切线从静态定义向动态定义发展的一个过渡阶段。通过对这一类切线定义的说明，可以让学生开始萌生动态意识，为后续的割线逼近定义提供铺垫。

(3) 割线逼近定义——两点逼近

生 3：一段曲线上任取两点，过这两点作曲线的割线，当这两点不断趋近于一点时，割线同样趋近于一条确定的直线，该直线即为切线。由于我们在上节课学习导数的概念时是将区间不断分割至越来越小，那么同样地，在此时也可以让两点越来越靠近中间的某一点让曲线段越来越小。

师：（配合 GeoGebra 动图进行演示说明）该同学是在生 2 的想法的基础上做了一个提升，由点动成线变成两点动，同时带动着过两点的直线一起动，最后趋近于一条确定的直线。这个想法同样也可以在历史上找到对应，与 17 世纪莱布尼茨的两点逼近定义非常相似。那这个定义方式比起之前的欧几里得定义和阿波罗尼奥斯定义有什么样的优点呢？

生：不再关注整条曲线的样子，只需要关注曲线上的某一段即可。

师：那这样的一种定义方式可以帮助我们减少曲线的复杂程度带来的影响，通过聚焦局部，使得定义的适用范围变广。

【设计意图】形的动态生成过程有着一定的难度，因此教师需要制作动图，让学生在观察的同时进行理解。同时，在此部分通过提问的方式，让学生关注到动态定义的优点，真正地理解从静态定义转变为动态定义的本质。

(4) 割线逼近定义——一点逼近

师：之前的同学是让割线上的两点不断接近，进而生成切线定义，接下来的一组同学同样也是动态的思想，但是与刚才的想法有着稍许差异。请下一组同学阐述你的定义，并解释你的想法与刚才的两点逼近式有哪些不同之处。

生 4：首先，在曲线上固定一点 A ，让曲线上的另一点 B 不断地接近点 A ，同样，割线 AB 也会趋近于一条确定的直线，将此直线称为切线。

师：（配合 GeoGebra 动图进行演示说明）生 3 与生 4 的想法一致的地方在于都是利用割线得到切线，但是一个是割线上两点一起动，一个是一点向一定点靠近，但本质并没有改变。像这种一点动的想法同样是 17 世纪割线逼近定义当中的一点逼近式，并且我们现行的教材也是从本角度来去进行定义的。接下来，我们给出切线定义。

定义（割线）：连接曲线上任意两点的直线称为该曲线的一条割线。

定义（切线）：给定曲线上一点 P ，考虑以 P 为端点的一小段曲线段 PQ 和割线 PQ ，当点

Q 越来越靠近点 P 时, 如果割线 PQ 趋近于一条确定的直线, 那么我们就将这条直线称为曲线在点 P 处的切线 (图 7)。

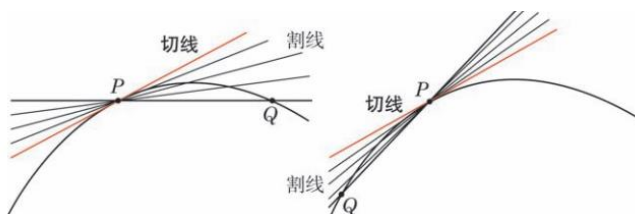


图 7 曲线的切线定义

问题 3: 观察定义, 能否挑选出定义当中最关键的词语?

生: 趋近。

师: 那么, 我们的切线定义主要就围绕着“趋近”这一过程进行展开, 并简单概括为“切线是割线的极限位置”。

【设计意图】本部分通过学生的课前学习单, 按照数学史发展进程讲解, 让学生在课堂上经历从古希腊静态交点定义到 17 世纪动态逼近定义的过程。通过不断地提问、分析、讨论, 让学生辨析每一个时期切线定义的优缺点, 逐步完成从静态到动态的思维转化, 突破教学难点。同时, 教师通过展现数学发展脉络, 完成在课堂中的古今对照 (图 8), 提升学生的数学文化素养。

数学史发展脉络	学生学习单成果
古希腊欧几里得定义	
古希腊阿波罗尼奥斯定义	
17 世纪合速度方向定义	
17 世纪割线逼近定义 (两点式)	
17 世纪割线逼近定义 (一点式)	

图 8 古今对照脉络整理

(3) 切线上的点 Q' 与点 Q 的横坐标相同，点 R 的横坐标与 Q 相同、纵坐标与 P 相同，我们可以利用哪些几何性质建立与斜率相关的方程？

$$k = \frac{PB}{AB} = \frac{Q'R}{PR}$$

(4) 通过数据表能够得到什么样的结论？如何对 (3) 中得到式子进行处理？

本部分，需要运用 GeoGebra 生成动态数据表格，让学生感受 QR 与 $Q'R$ 在逼近过程中的临近关系，进一步感受“曲直代换”思想（图 11）。

$$k = \frac{PB}{AB} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{QR}{PR}$$

$$k = \frac{f(x_0)}{AB} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$k = f'(x_0)$$

综上，过点 $P(x_0, f(x_0))$ 的切线斜率为 $f'(x_0)$ ，即曲线方程 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的导数。

(5) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 的切线方程？

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

定义（导数的几何意义以及曲线上过某点的切线方程）：过曲线方程 $y = f(x)$ 上的点 $P(x_0, f(x_0))$ 的切线斜率为曲线 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处的导数，曲线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

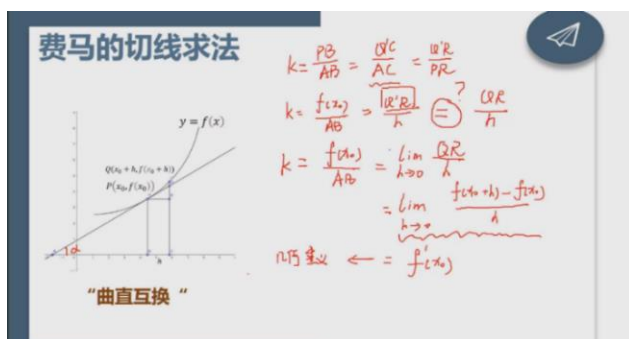


图 11 师生共同探索问题 4

问题 5：现在，试着对例 1 进行解答。

【设计意图】本部分主要采用费马的“虚拟等式法”进行讲解，通过问题链的铺设，一步一步进行引导，重点利用动态表格，让学生通过直观观察来解决 QR 与 $Q'R$ 的逼近问题，即

“曲直互换”思想以及逼近过程对应的极限符号表示，完成斜率与导数的关系建立这一难点突破。最后回到例 1，既是保证过程的完整性，同时也是对导数几何意义的应用的过程展示，规范学生解题过程。

师：我们今天利用了大半节课的时间从古希腊时期穿梭到 17 世纪，完成了对于切线的定义以及导数与切线斜率之间的对应关系的探索。但是事实上，切线的发展经历漫长而又悠久的岁月。下面，我们就通过一个小短片来感受一下历史上切线的诞生历程。

播放微视频——切线的发展历程（图 12），帮助学生理顺切线发展脉络，完成数学史学习。

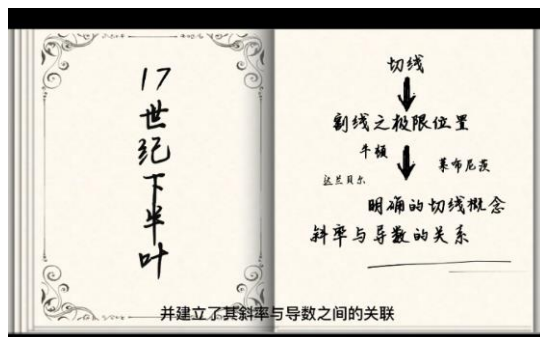


图 12 微视频：切线的发展历程剪影

（三）巩固训练，类比应用

例 2：已知 $f(x) = x^3$ ，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(0,0)$ 处的切线方程。

本部分学生往往会有两种做法，一为直接画图，通过直观感受得出结果；二为参照例 1 过程进行书写。首先需要肯定学生的画图做法，进一步加强在本部分的数形结合意识，其次请学生进行板演，检验过程的规范性，将易错部分进行再一次的强调。

定义（驻点）：我们将导数为 0 的点称为函数的驻点。

问题 6：过函数驻点的切线都有什么样的几何特点？

生：与 x 轴平行或重合的直线。

（四）课堂小结，提炼升华

师：我们本节课学习了哪些知识点？

生：切线的定义：切线是割线的极限位置；导数的几何意义为在此点处切线的斜率；驻点：导数为 0 的点。

师：本节课我们涉及到了哪些数学思想？

生：在推导导数的几何意义时，涉及到了“曲直互换”的思想；从得到切线的定义画出切线到求解切线方程是一个数形结合的过程；在利用割线得到切线定义时涉及到了极限思想。

师：本节课当中我们涉及了很多与数学史相关的知识，那同学们能否从数学史的角度来谈谈对于本节课的收获？

生：从切线定义的发展历程能看出它是一个不断发现问题再不断解决问题的过程，那数学家们对于这个探索的坚持不懈的精神与我们目前的情况还是很相似的。世间的很多事物都是新的，我们在探寻这个新的事物时也要抱有足够的热忱和坚持才能够探求真理。所以，这个数学史发展的精神在我们生活中的很多历程当中都是适用的。

【设计意图】本节课的课堂小结主要是学生从知识、思想、数学史三个方面去说明，一是对于知识的明晰，二是对数学思想的感受与理解，最后古人的经历往往会成为后人的经验，通过学生的感受以及教师的总结，由古照今，完成本节课人文素养的熏陶。

4 结语

本节课的特点可主要概括为一个视角、两条线索、三种思想以及四种德育要素。

一个视角是指 HPM 视角，本节课采取 HPM 重构式教学法，以课前学习单为依托，教师进行分类梳理，带领学生重历切线发展历程，古今对照，并在此过程中逐步讨论各个时期定义的优点与不足，达到深入理解，突破难点的效果。

两条线索即“明线”与“暗线”，本节课以切线的概念与导数的几何意义两部分之间的数形结合为明线，以切线发展的时间历程作为暗线，两相结合，进行知识与素养两方面教学。

三种思想主要有“数形结合”“从特殊到一般”和“曲直代换”。在得到切线的概念后求解切线方程，突出“数形结合”思想；从例题特殊函数入手分析切线求解要素，进而在一般曲线中研究斜率，展现“从特殊到一般”的思想；在利用费马的“虚拟等式法”推导导数几何意义时，借助 GeoGebra 生成动态表格，强调“曲直互换”思想。

四种德育要素包括“理性”“情感”“信念”以及“品质”^[7]。体现在课前学习单的留白空间，在课堂上进行补白，通过大量的问题链铺设，引导学生独立完成思考过程，深化概念理解，探寻发展本质，突破难点，培养理性精神；课堂上利用课前学习单为学生提供生生互动契机，培养学生“团队协作意识与沟通交往能力”，经历不断完善切线定义的过程，从情感上激发学

习数学兴趣、增加自信；通过微视频呈现切线的发展历史，与学生的定义方法形成古今对照，让学生穿梭时空，找寻自身与古人之间的关联，培养动态的数学观，建立数学学习“信念”；通过时间线梳理和课堂总结，让学生发现客观事物发展规律及其中所蕴含的探索精神，将课堂德育成果延伸到生活之中，培养坚持真理、不懈追求和乐观积极的品质。课堂教学在体现数学学科的人文教育价值功能的同时进一步落实立德树人的根本任务。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京:人民教育出版社, 2020: 39.
- [2] 樊丹子, 敬本善. 核心素养视域下的概念课教学——以“导数的几何意义”为例[J]. 中学数学教学参考, 2021(12): 15-19.
- [3] 王芳,汪晓勤. HPM 视角下“导数几何意义”的教学[J]. 数学教育学报, 2012, 21(05): 57-60.
- [4] 欧几里得(兰纪正, 朱恩宽, 译). 几何原本[M]. 南京: 译林出版社, 2014: 59.
- [5] 吴甬翔, 汪晓勤. 曲线的切线: 从历史到课堂[J]. 高等理科教育, 2009(03): 38-43.
- [6] M·克莱因. 古今数学思想(第二册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002: 51-52.
- [7] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与高中数学教学——理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 60-61.

他山之石

在课堂上通过证明、反驳和溯因推理生成数学知识

杨舒捷

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

证明和反驳是数学实践的基本方面，二者关系密切，在数学活动中，猜想和证明往往是通过在证明和反驳之间来回转换而产生和改进的，这也导致了数学知识和理论的发展。已有研究未充分探讨这项活动与学生建构新知识（如数学概念和定理）之间的联系，而其对于更好地整合数学实践和内容具有重要意义。因此，来自日本茨城筑波大学的 Kotaro Komatsu 和来自英国南安普顿大学的 Keith Jones 在《在课堂上通过证明、反驳和溯因推理生成数学知识》一文中重点探讨了“学生如何在教师的支持下通过发现和解决反例来生成新的数学知识”这一问题。

1 理论框架

研究者首先建立了“通过启发式反驳生成数学知识”的理论框架，如图 1 所示，该框架包括启发式反驳（表示为二维平面，涉及猜想、证明和反驳）和数学知识的生成（假设位于三维平面上方），这里的数学知识是指与待证明猜想有关的知识，而不是猜想本身。从启发式反驳（图 1 的下半部分）到生成数学知识（图 1 的上半部分）有多种过渡模式，其中一种模式是：求解者无法利用他们现有的知识处理反例，因此需要新的知识，而一旦建立了新的知识，问题也就迎刃而解了，本研究关注的就是这个过程。在这个过程中，数学知识是在处理反例时构建的。在此基础上，研究者还论述了溯因推理的类型以及教师在组织全班讨论中的作用。

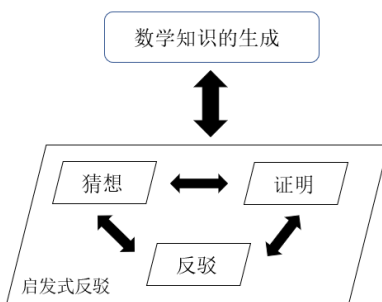


图 1 通过启发式反驳生成数学知识

2 研究方法

研究者选取了“动态几何环境中的证明与反驳”这一研究项目中九年级某个班的课堂活动进行分析，该班级由 39 名 14-15 岁的日本学生组成，他们经常在课堂上使用平板电脑，精通 DGE 的基本功能，包括几何图形的构建和拖动图形的转换。此外，他们已经学习了欧氏几何，知道几个基本的几何定理，如圆周角定理和三角形外角定理，能够使用全等三角形和相似三角形的条件进行证明，但他们既不了解圆内接四边形的概念，也不知道圆内接四边形定理，而本研究所分析的课堂的教学目标就是通过启发式反驳发现并证明圆内接四边形定理。

研究者使用三台摄像机记录课堂，其中两台固定摄像机用于记录整个教室，另一台移动摄像机用于记录学生的作业和同学间的讨论，用于分析的数据包括视频、视频的转录文本、学生的作业以及研究者的现场笔记（研究者以非参与者的身份观察这些课堂活动）。

3 课堂分析

该课程一共经历了三个课时，教师先给出一个初始的证明任务，学生们很快完成了证明，然后进行启发式反驳，教师引导学生发现了一个局部反例使他们的证明无效，学生试图通过修改他们的证明来处理这一反例，但他们已有的知识无法解决，进而通过创造性溯因推理，学生提出并证明了圆内接四边形定理，从而生成了新的数学知识，由此，学生们成功地证明了在局部反例的情况下原始陈述仍是正确的，从反驳回到证明。

第一节课，教师先呈现了一个问题并给出了示意图（图 2）：A、B、C、D 四个点在圆周上，连结 AC 和 BD 交于点 E，那么 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ 成立吗？对此，大部分学生认为是成立的，并给出证明：因为 $\angle BEA$ 和 $\angle CED$ 是对顶角，由对顶角相等可得 $\angle BEA = \angle CED$ ；又因为 $\angle BAE$ 和 $\angle CDE$ 是弧 BC 所对的圆周角，故 $\angle BAE = \angle CDE$ ，因此， $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ 。

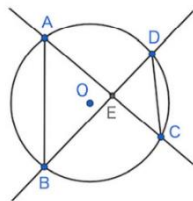


图 2 问题

虽然教师给出了示意图，但由于题目本身并未指定圆周上点 A, B, C, D 的位置，所以教师引导学生探讨更一般的情况。教师首先使用 DGE 稍微改变 A 点的位置，并询问全班学生 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 是否仍然相似，有同学认为仍相似，因为前面的证明仍然有效。然后，老师请学生思考 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ 是否总是成立的，学生开始自己或者与同桌一起使用平板电脑上的 DGE ，通过拖动点去探究各种情况。学生们发现，当 A 点和 B 点重合时 $\triangle ABE$ 不存在；当直线 AC 和 BD 平行时交点 E 不存在，因此 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 不存在；此外，还有一种情况如图 3 所示，与原始示意图的区别在于交点 E 的位置，也就是说，点 E 是在圆内还是在圆外。

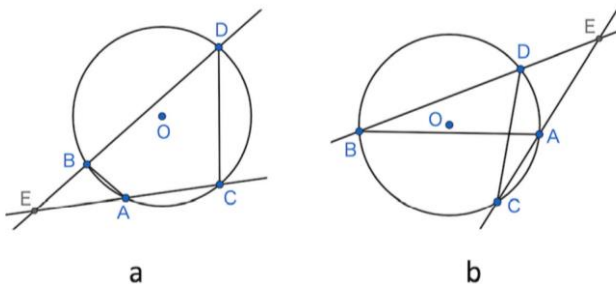


图 3 其他情况

第一节课结束后，教师让学生课后反思，并在作业纸上总结他们的想法。通过学生的作业可以看出，许多学生猜测，只要 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCE$ 出现， $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ 的说法就会成立，一部分学生在没有深入研究如何证明它的情况下直接得出了这个猜想，而另一部分学生则想要去证明，但存在困难和障碍。

第二节课，学生们首先处理了图 3 中 b 所示的情况，通过 $\angle BEA = \angle CED$ （公共角）和 $\angle EBA = \angle ECD$ （圆周角定理），依然能够得出 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ 。然后，针对图 3 中 a 所示的情况，教师直接展开全班讨论，并挑选学生分享他们的想法，在这一过程中，学生发现此时原来的证明不再有效，因为虽然仍有 $\angle BEA = \angle CED$ （公共角），但 $\angle BAE$ 和 $\angle CDE$ 不再是同弧所对的圆周角，无法得到 $\angle BAE = \angle CDE$ ，所以，学生需要寻找新的证明方法，此时，问题转化为证明 $\angle BAE = \angle CDE$ ，但学生目前已有的知识无法解决这一问题。在这种情况下，教师引入新的术语：圆内接四边形，即圆周上的四个点连接形成的四边形。由此再来观察图象，问题就转化为证明圆内接四边形的一个内角等于另一个内角的外角，即证明圆内接四边形定理。

这一课堂活动可视为学生在老师的支持下进行的创造性溯因推理，因为学生原本不知道圆内接四边形定理，正是教师引入了圆内接四边形的概念，学生在此基础上通过他们自己的努力

最终得出了圆内接四边形定理。

第三节课，教师直接展示略去交点 E 的简化图（图 4），并组织全班讨论，请学生分享他们的想法，学生提出了三角形内角和外角、圆周角、圆心角、辅助线等想法，利用这些想法，学生进行了证明。最终，学生展示了两种证明方法。

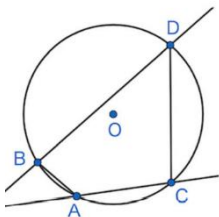


图 4 圆内接四边形定理

方法 1：如图 5 所示，连结 AD 和 BC ，根据同弧所对的圆周角相等可得 $\angle ABC = \angle CDA$ ， $\angle ADB = \angle BCA$ ，又因为 $\angle BAF = \angle ABC + \angle BCA$ ， $\angle CDB = \angle CDA + \angle ADB$ ，因此 $\angle BAF = \angle CDB$ 。

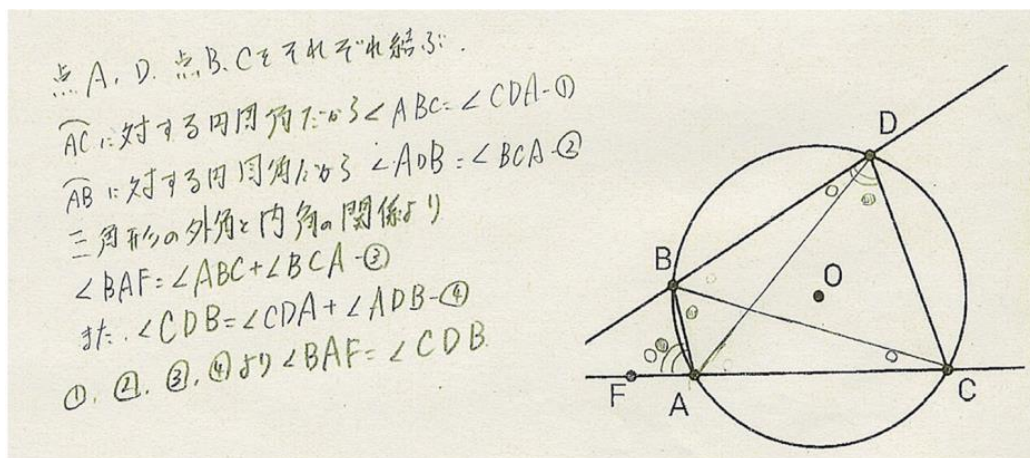


图 5 Mizuki 的证明方法

方法 2：如图 6 所示，设 $\angle BDC = x$ ，根据圆周角定理可得 $\angle BOC = 2x$ ，而圆心角是 360° ，故反向的 $\angle BOC = 360^\circ - 2x$ ，根据圆周角定理可得 $\angle BAC = 180^\circ - x$ ，而 $\angle FAC$ 是一个平角，故 $\angle BAF = 180^\circ - (180^\circ - x) = x$ ，因此 $\angle BAF = \angle CDB$ 。

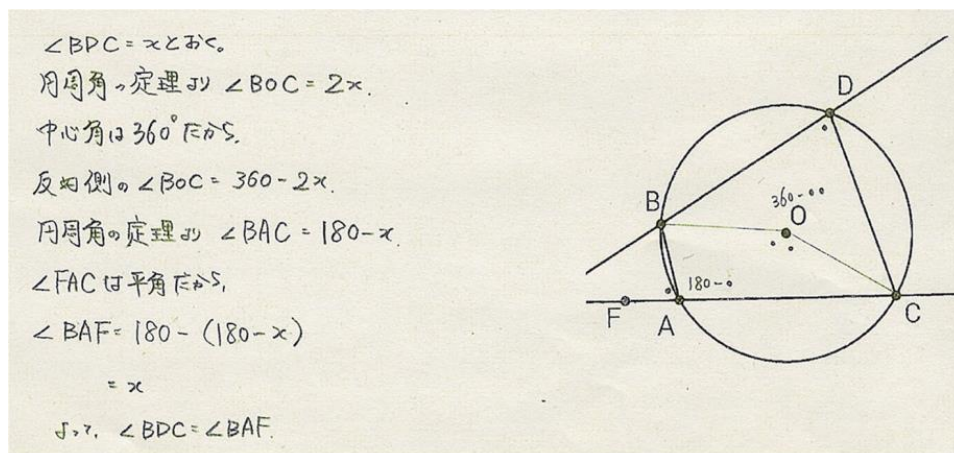


图 6 Miwa 的证明方法

由此，学生们成功证明了圆内接四边形定理。在第三节课结束时，学生们回到图 3 中 a 所示的情况，确认在这种情况下，可以根据圆内接四边形定理得到 $\angle BAE = \angle CDE$ ，从而 $\triangle ABE \sim \triangle DCE$ 仍然成立。

4 研究结论

本研究分析了一系列课堂活动，描述了学生在发现一个局部反例使其证明无效后，通过创造性溯因推理生成圆内接四边形定理这一新知，从而解决反例的过程。这一发现强调了涉及反驳的数学活动与数学知识生成之间的联系，考察了溯因推理在启发式反驳和数学知识建构中的作用，还为学生在从事数学实践的同时学习数学内容的数学活动提供了例证，此外，本研究还体现了教师在支持学生从事这项数学活动中所起的作用以及精心设计任务的重要性。

参考文献

- [1] Komatsu, K. & Jones, K. Generating mathematical knowledge in the classroom through proof, refutation, and abductive reasoning[J]. *Educ Stud Math*, 2022, 109(3): 567-591.

活动讯息

聚焦随机事件，体悟理性精神

第二期 HPM 高中网络研修班——“古典概率”研修活动顺利举行

苏福梅¹，雷沛瑶²

(1.华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2.华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

为了更好的传播 HPM 理念、开展“数学史融入数学教学”的实践研究，由华东师范大学教师教育学院数学组主办的第二期 HPM 高中网络研修班在 2021 年 8 月 27 日顺利举办，华东师范大学教师教育学院的汪晓勤教授、邹佳晨老师以及上海市长宁区教师教育学院教研员栗小妮老师参与指导。本次研修班除上海 HPM 工作室的教师和华东师范大学教师教育学院 HPM 研究团队外，广纳来自全国各地的一线中学教师。

本期研修班选择的主题有：圆锥曲线单元教学、函数的周期性和古典概型。网络研修班的中学教师按照各自的课程安排自行选题，选择古典概率主题的教师共 10 名，分为 05、06 两个小组。研修主要分为两个阶段，第一阶段是阅读与设计、汇报与交流；第二阶段是思考与研讨、分享与优化。

1 阅读与设计、汇报与交流

第一部分是全体学员学习阅读材料，进行初步的教学设计后集体研讨交流。2021 年 11 月 18 日，华东师范大学教师教育学院 HPM 研究团队将撰写的学习材料上传至研修群，主要包括：历史材料、课标与教材解读和思考题。随后，小组的每位学员在两周内认真阅读材料，针对每一个思考题展开了热烈的讨论，并由组长记录下答案，同时每位成员根据阅读材料设计初版的教学设计。

第一次集体研讨于 2021 年 12 月 11 日 19:30 在腾讯会议上举行，会议持续了 2 个小时。首先由华东师范大学教师教育学院的研究生蔡春梦汇报历史材料（图 1）、解读课标与教材（图 2），然后小组成员汇报自己的教学设计，其他成员和团队的硕博研究生共同参与研讨，针对每一份教学设计分享自己的观点和改进建议，结合本次汇报的情况，共有五份教学设计脱颖而出。

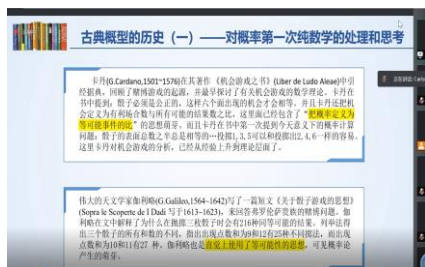


图 1 “古典概率”的阅读材料

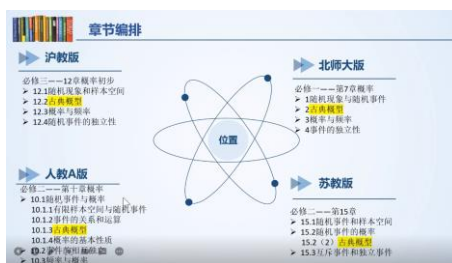


图 2 课程标准和教科书的分析

紧接着的一周，学习任务有三部分，第一，每位老师根据研讨中其它成员的建议完善自己的初版教学设计，并提交修改后的教学设计。第二，小组内部研讨被选出的五位老师的教学设计，提出修改意见，以小组为单位进行汇总。第三，小组内研讨阅读材料中的思考题，组长记录，以小组为单位提交（图 3）。



图 3 学员正在汇报的思考题

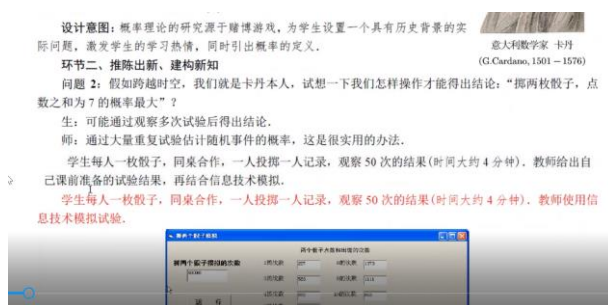


图 4 张青松老师修改后的教学设计

2 思考与研讨、分享与优化

第二次集体研修于 2021 年 12 月 25 日 19:30 在腾讯会议上开展。首先，由各小组汇报“古典概率”的阅读思考题研讨情况，以供各小组之间相互学习交流。之后，学员代表云南师范大学实验中学张青松老师（图 4）、北京宣武外国语学校张翠姝老师、上海平和学校倪骏远老师、上海市曹杨第二中学王海雯老师和江苏省靖江高级中学马丽丽老师分别分享了修改后的教学设计，各小组相互交流纷纷给出了一些修改意见（图 5）。最后，专家对五份教学设计进行点评与分享。

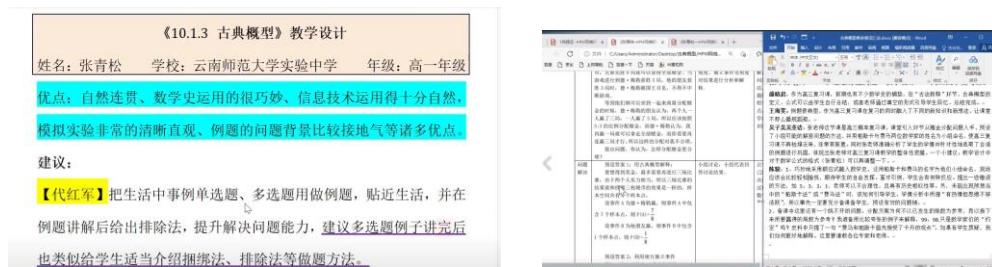


图 5 学员对教学设计给出的建议

在专家点评中，江苏省宜兴中学张海强老师结合五位老师的教学设计对如何进行概率教学进行了分享（图 6）。首先，他提及课程标准中指出，“概率研究的是随机现象，它为人们从不确定性的角度认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法。”因此，课程中要突出用不确定思维研究问题的方法，可以从实际生活中随处可见的不确定事件入手。再者，要牢牢抓住 HPM 的价值。新课改强调数学建模和逻辑推理的重要性，要实现两者需从知识本位到以人为本的转变，从专家结论到专家思维的转变，HPM 为实现这种转变提供了很好的视角，可借助历史上数学家是怎么解决相关问题的策略来培养学生的专家思维模式。选择哪些历史素材，可以根据学情、老师的理解自行把握，课前探究、课后思考题的呈现都是值得借鉴的方式。



图 6 张海强老师点评

华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师对整个活动做了总结与点评。他强调了研修班汇聚全国各地的老师，大家对同一教学内容各抒己见，分享自己的教学设计，再经过集体研讨，不断优化，相信这样的方式会产生许多优秀的课例。他还提到概率的产生使得人们用确定的思维研究不确定的问题，对学生理性精神的培养至关重要，老师们要多多发掘历史素材的德育价值。

经过一个月的研讨与学习，研修班的老师对古典概率的发展脉络有了更清晰的认识，并领悟到学生在古典概率主题上存在一定的历史相似性，因此在教学中可以采用古今对照。由此，古典概率主题的集体研讨就此告一段落，SHPM-9 也展现了两位研修班老师精彩的同课异构，期待更多的老师在实践中运用研修所学，让 HPM 的育人价值在课堂上绽放！

乘历史之舟，扬导数之帆

第二期 HPM 高中网络研修班——“导数的概念”研修活动顺利举行

王智洋¹，雷沛瑶²

(1.华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2.华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

2022 年 2 月 10 日，新年的钟声依稀萦绕耳畔，第二期数学史与数学教育（HPM）高中教师网络研修班逐渐拉开序幕。本次研修班由数学史与数学教育（HPM）工作室主办，来自全国各地的近百名中学教师相聚云端，对“导数的概念”、“解三角形的应用”和“等比数列”三个主题开始了认真学习和激烈研讨。本次研修班还请到了华东师范大学汪晓勤教授、邹佳晨老师，上海市长宁区教育学院教研员栗小妮老师和浙江省海亮高级中学的张小明老师参与指导。

在前期的准备阶段，每位参加研修的中学教师参照本学期的课程安排，结合个人兴趣，进行自主选题，完成分组。共有 30 名教师选择“导数的概念”主题并成立了研修小组，围绕“导数的概念”这一主题开展了为期一个月的研修活动。活动主要分为材料阅读与研讨、设计分享与优化两个部分。

1 材料阅读与研讨

2 月 19 日，由华东师范大学教师教育学院 HPM 研究团队搜集并撰写的学习材料（包括历史材料、课标与教材解读和思考题）上传至研修群，供每位老师学习。老师们在一周内认真阅读了材料，并且以小组为单位针对思考题展开了激烈的讨论，由组长记录了最后的答案。

2 月 26 日 19:30，第一次集体研讨在腾讯会议上举行，会议邀请到上海市长宁区教育学院教研员栗小妮老师参与指导，本次研讨由华东师范大学博士生雷沛瑶主持。首先，由华东师范大学教师教育学院的硕士研究生王智洋介绍了历史材料（图 1），硕士研究生刘梦哲对相关内容的课程标准作了解读，并对沪教版、人教 A 版、苏教版、北师大版共四版教科书进行了分析（图 2）。然后，共 8 个小组的组长汇报了组内关于历史材料阅读以及思考题的讨论情况（图 3）。接着，上海市长宁区教育学院教研员栗小妮老师关于各版教材的异同做了进一步解读，并分享了教学中的体会。华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师向大家介绍了上海新教材

的情况，并解答了小组长们在思考题汇报中提到的问题，还结合自身经验分享了相关教学建议。最后华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授对史料进行深度分析，从“变化性”“统一性”和“德育价值”揭示了学习导数的意义，阐述了“导数与极限”的关系，并对史料如何融入教学提供了思考与建议。

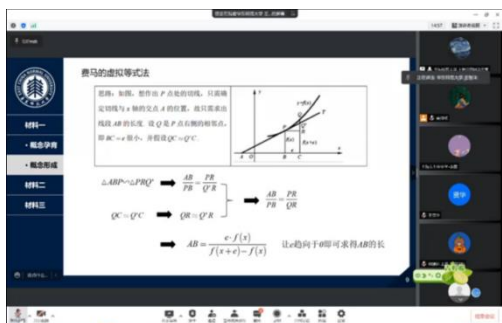


图 1 导数的概念历史素材

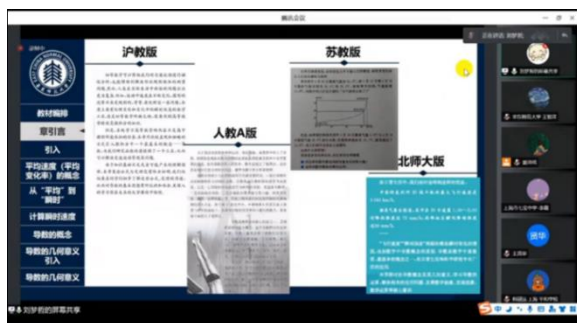


图 2 课标与教材解读

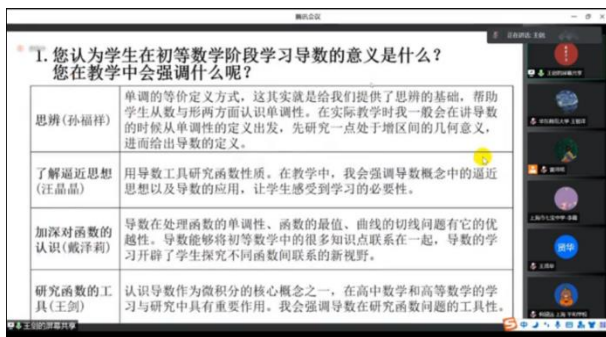


图 3 思考题交流研讨

2 设计分享与优化

2月19日收到阅读材料后，选择导数的概念主题的小组成员在一周内完成并提交了 HPM 视角下的教学设计。研修小组在 2月26日至 27日分三批（图 4）组织了小范围的教学设计研讨，每位小组成员汇报自己的教学设计，其他成员和 HPM 团队的硕士、博士研究生共同参与研讨，针对每一份教学设计分享观点并提出改进建议。根据本次的汇报情况，结合每位老师的开课安排，小组推选出 8 份精致的教学设计。

序号	汇报人姓名	分组	时间	日期	组内顺序	备注
1	戴泽莉	A	16:30	2022/2/26	1	
2	吴起慧	A	16:30	2022/2/26	2	
3	杨育池	A	16:30	2022/2/26	3	
4	张志伟	A	16:30	2022/2/26	4	
5	陈海飞	A	16:30	2022/2/26	5	
6	戴祥辉	A	16:30	2022/2/26	6	
7	王册	A	16:30	2022/2/26	7	
8	孟霞	A	16:30	2022/2/26	8	
9	谢阳春	B	10:00	2022/2/27	1	
10	倪骏远	B	10:00	2022/2/27	2	
11	卫福山	B	10:00	2022/2/27	3	
12	潘广云	B	10:00	2022/2/27	4	
13	王贤华	B	10:00	2022/2/27	5	
14	陆鼎元	B	10:00	2022/2/27	6	
15	王禹	B	10:00	2022/2/27	7	
16	汪晶晶	B	10:00	2022/2/27	8	
17	王海雯	C	11:00	2022/2/27	1	
18	王文雅	C	11:00	2022/2/27	2	
19	沈倩	C	11:00	2022/2/27	3	
20	宋升晋	C	11:00	2022/2/27	4	
21	宗冬娣	C	11:00	2022/2/27	5	
22	姜世学	C	11:00	2022/2/27	6	
23	罗文力	C	11:00	2022/2/27	7	
24	洪文嘉	C	11:00	2022/2/27	8	
25	江留屿					待定
26	贺峰					待定
27	朱亮雅					待定
28	吴子昊					请假
29	吴基洁					请假
30	汪霞					请假

图 4 汇报安排

第二次集体研讨于 3 月 5 日 19:30 在腾讯会议上举行，此前被选出的 8 份教学设计的执老师进行了汇报（图 5），包括邳州市炮车中学的陈海飞老师（图 6）、兰炼一中的戴祥辉老师、

数学史与数学教育 (HPM) 工作室 ^[1] HPM 网络研修班“导数的概念-教学研讨” ^[2]	
3 月 5 日 晚上 19:30-21:00 ^[3] 腾讯会议号: 933-583-989 ^[3]	
19:30-20:15 ^[3]	教学设计汇报 ^[4] 每人 5 分钟 ^[4] 陈海飞 邳州市炮车中学 ^[4] 戴祥辉 兰炼一中 ^[4] 孟霞 上海市闵行三中 ^[4] 倪骏远 上海市平和学校 ^[4] 王海雯 上海市曹杨二中 ^[4] 王文雅 浙江大学附属中学 ^[4] 王贤华 新都一中 ^[4] 杨育池 新疆库车二中 ^[4] 张志伟 内蒙古师范大学附属学校 ^[3]
20:15-20:25 ^[3]	教学设计研讨 ^[3]
20:25-21:00 ^[3]	专家发言 ^[3]

图 5 第二次集体研讨安排

上海市闵行三中的孟霞老师、上海市平和学校的倪骏元老师、上海市曹杨二中的王海雯老师、浙江大学附属中学的王文雅老师、新都一中的王贤华老师、新疆库车二中的杨育池老师以及内蒙古师范大学附属学校的张志伟老师。接着所有研修班的老师对八位教师的教学设计分享了感受并提出建议。然后，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师就“速度与速率的区别”“如何

体现德育价值”提出了教学建议。浙江省海亮高级中学的张小明老师从逻辑序与历史序阐述了教材上关于导数与极限的安排，并结合课程标准的要求介绍了“为什么用数学史”“怎样用数学史”两点体会，对八位老师的教学设计做出了精彩点评。最后，华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授从历史的角度，强调“以史为鉴”对教师教学设计的重要作用，并指出导数的概念教学中须做到“关注起点，架设桥梁”、“提炼思想，立德树人”。

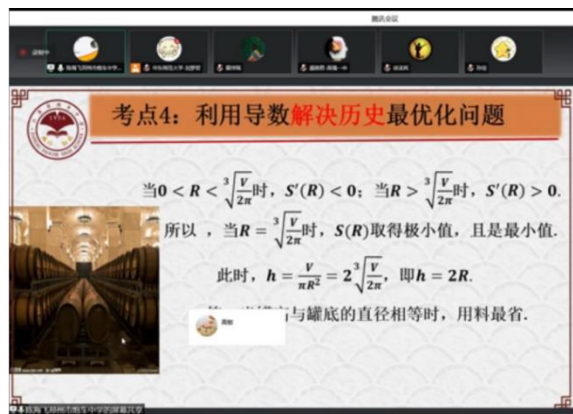


图 6 陈海飞教师分享教学设计

研讨过后，每位老师提交了最终版本的教学设计，开课老师还分享了教学视频供大家观摩学习，“导数的概念”主题研修活动也渐渐落下帷幕。老师们表示在研修期间收获颇丰，不仅对导数的发展脉络有了清晰的认识，还对导数的概念和思想有了更深刻的理解，在专家的引领下，更是对导数德育价值和教学方式有了更真切的体悟。路漫漫其修远兮，期待老师们在本期网络研修班中乘历史之舟，扬帆起航，且行且思，且悟且进！

探三角之用，悟教学之法

第二期 HPM 高中网络研修班——“解三角形的应用”研修活动顺利举行

孔雯晴¹，雷沛瑶²

(1.华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2.华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

冰雪于春光中消融，花草于春风中摇曳。新学期迎接新气象，新研讨共获新进步。本学期，第二期 HPM 高中网络研修班拟开展以“导数的概念”、“解三角形的应用”、“等比数列”为主题的系列研讨活动。本次网络研修班由数学史与数学教育（HPM）工作室主办，华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授、邹佳晨老师和上海市长宁区教育学院教研员栗小妮老师、浙江省诸暨市海亮高级中学张小明老师、江苏省宜兴中学张海强老师参与指导，来自全国各地的中学教师、上海 HPM 工作室的教师和华东师范大学教师教育学院 HPM 研究团队的研究生、博士共同参与。

在准备阶段，HPM 研究团队搜集相关的史料和教学设计、撰写阅读材料和思考题、解读课程标准和整理各版本教科书的内容。网络研修班的中学教师按照各自的课程安排自行选题，共有 22 位教师选择了“解三角形的应用”这一主题，“解三角形应用”研修小组于 2022 年 3 月 1 日正式确立。在此之后，小组成员围绕“解三角形的应用”这一主题开展为期一个月的研修活动，研修主要分为两个阶段，第一阶段是阅读与设计、汇报与交流；第二阶段是思考与研讨、分享与优化。

1 阅读与设计、汇报与交流

2022 年 3 月 3 日，上海 HPM 工作室就“解三角形的应用”这一主题研讨教学设计，网络研修班的成员一同参与本次研讨。首先由华东师范大学教师教育学院硕士研究生孔雯晴同学介绍阅读材料（图 1），硕士研究生苏福梅同学对这部分内容的课程标准和教科书进行了分析（图 2）。接着，工作室成员蔡东山老师和舒适老师分享教学设计，研究团队的研究生、博士和研修班成员一起交流研讨。最后，由华东师范大学教师教育学院的邹佳晨老师和汪晓勤教授讲述了三角学的发展历史，并从针对“解三角形的应用”史料的功能和运用方式提出了建议。

解三角形的应用

——三角学的前世今生

三角学的历史可以追溯到古巴比伦时期，以度、分、秒为单位的现代角度值即源于古巴比伦。起初，三角学只是天文学的一种计算工具，并没有自己独立的理论体系。



梅涅劳斯 (Menelaus)

公元前 2 世纪，被认为是“三角学之父”的古希腊数学家、天文学家希帕克斯 (Hipparchus)，为了天文观测的需要，对球面上的角度和距离进行计算，他制作了一个和现今三角函数相仿的“弦表”，就是在固定的圆内，不同圆心角所对弦长的表。据西翁 (Theon) 所说，希帕克斯计算弦长的著作有 12 部之多。公元 100 年左右，和希帕克斯一样，希腊天文学家梅涅劳斯 (Menelaus) 也制作过弦表，他在球面三角学方面做出了许多贡献。

图 1 “解三角形的应用”的阅读材料

教材内容比较

- 教材版本**
- 沪教版 (新版)
 - 北师大版 (2019 年版)
 - 新人教A版 (2019 年版)

内容对比

- 教材编排
- 内容呈现
- 阅读材料

图 2 课程标准和教科书的分析

在之后一周多的时间内，小组成员认真研读材料、设计教学，并在 2022 年 3 月 11 日（周五）中午 12:00 前提交教学设计。基于小组成员的空闲时间，研修小组在该周末分批进行了 A 组研讨和 B 组研讨（图 3），小组成员均要汇报自己的教学设计，其他成员和团队的研究生、博士共同参与研讨，针对每一份教学设计分享自己的观点和改进建议。结合本次汇报的情况，共有六份教学设计脱颖而出。紧接着的一周，学习任务是小组内部研讨阅读材料中“解三角形的应用”的思考题，且每个小组结合史料编制由 3-4 个题目组成的问题串，由小组为单位提交。

序号	汇报人姓名	分组	时间	日期	组内顺序	备注
1	王剑	A	19:30	2022/3/12	1	
2	袁景辉		19:30	2022/3/12	2	
3	倪艳		19:30	2022/3/12	3	
4	吴建军		19:30	2022/3/12	4	
5	赵志丽		19:30	2022/3/12	5	
6	李凤阁		19:30	2022/3/12	6	
7	张翠姝		19:30	2022/3/12	7	
8	高敏		19:30	2022/3/12	8	
9	孙福祥		19:30	2022/3/12	9	
10	周泽彬		19:30	2022/3/12	10	
11	阙王琛	B	10:00	2022/3/13	1	
12	洪春梅		10:00	2022/3/13	2	
13	汪留屿		10:00	2022/3/13	3	
14	丁倩文		10:00	2022/3/13	4	
15	张青松		10:00	2022/3/13	5	
16	代红军		10:00	2022/3/13	6	
17	潘广云		10:00	2022/3/13	7	
18	龙泽南		10:00	2022/3/13	8	
19	隋玉霞		10:00	2022/3/13	9	
20	朱悦音		10:00	2022/3/13	10	
21	万元沁					请假
22	王恩普					请假

图 3 汇报名单

2 思考与研讨、分享与优化

第一次集体研修于 2022 年 3 月 19 日 19:30 在腾讯会议线上开展，首先由华东师范大学汪晓勤教授作报告《基于数学史的问题串编制》，汪教授从追本溯源、探赜索隐、登高望远、质疑问难和归根结底五个主题对 HPM 视角下的数学教学展开研讨，并针对问题串的设计提出了

“改变史料、一线贯穿”、“以史为基、多题同源”和“重构历史、层层递进”三个方面的建议（图 4）。



图 4 专家报告

接着，各小组汇报思考题（图 5）以及编制的问题串（图 6），最后进行交流与研讨。在听了专家报告后，研修班的教师们都表示收获颇多，将进一步优化教学设计中的问题串。

问题 4：学生在学习本节内容时会遇到哪些困难，这些阅读材料对您处理这些困难有何启发？

孙佳老师：对于解决生活实际问题，学生最困难的就是阅读理解，实际情境问题翻译成数学问题，许多同学不能建立图形之间的联系，特别是遇到立体图形的时候，不能通过文字描述转化为空间图形。比如三角形内“角”之间的制约关系；还有不能将解三角形问题转化为函数模型（三角函数模型）来解决，在综合运用能力方面比较欠缺。

朱悦青老师：学生习惯用初中知识来求解三角形问题，往往漏解或者过于繁琐。学习新事物是远远比运用已经学会的知识更困难。这些阅读材料可以将学生放入到实际情境中，让学生设计方案进行求解，拉近与学生的距离，提高学生的学习兴趣。

潘广云老师：学生在学习本节课（解三角形的应用）的内容时，可能会遇到一下一些困难：在实际应用的情境中，学生可能会无法抽象出合适的数学模型（比如是抽象一个三角形还是多个三角形），如果是复杂三角形，又如何运用正确运用目前所学来解决实际的应用问题。

龙泽南老师：需要学生将抽象的实际问题转化为数学问题，在课堂中可以更多的给学生普及数学建模的思想，从数学史的例子，让学生感受测量问题的解决方法。

问题 1：阅读材料中的解三角形问题运用了哪些思想方法？对您设计教学有何启示？

思想方法：转化化归、数形结合、函数方程。

启示：丰富了解三角形的历史背景，在教学设计中可以借助历史上源自于真实的天文学和生活中的测量距离、高度、角度、面积等实际问题，通过数学建模转化为数学问题，进而求解。以培养学生解决实际问题的能力，发展数学建模素养，增强应用三角学的意识，体会三角学本就是“测量”之学，体会数学源自于生活而应用于生活。

问题 2：针对阅读材料中与天文和测量相关的实际问题，你将会如何改编以融入到课堂教学中？请选择合适的素材分别编制一道天文相关、一道测量相关的试题。

题目 2：如图，为了测量河对岸 A、B 两点之间的距离，观察者找到一个点 C，从点 C 可以观察到点 A、B；找到一个点 D，从点 D 可以观察到点 A、C；找到一个点 E，从点 E 可以观察到点 B、C，并测量得到一些数据：CD=2，CE=2√3，∠D=45°，∠ACD=105°，∠ACB=48.19°，∠BCE=75°，∠E=60°，则 A、B 两点之间的距离为_____。（取 cos 48.19°=2/3）

图 5 思考题的分享

利用解三角形知识解决距离问题

问题 1：现实中有这样两个点 A、B 在对岸，我们能不能用我们学习过的知识求出 A、B 两点之间的距离呢？

例 1、A、B 两点都在河的对岸（不可到达），若在河岸选取相距 40 米的 C、D 两点，测得 ∠BCA=60°，∠ACD=30°，∠CDB=45°，∠BDA=60°，试求 A、B 两点间距离。

问题 2：同学们在解决刚才的问题时，应用了哪些步骤，能不能总结一下呢？

问题 3：我们能不能用我们刚才总结的步骤和方法，来解决下面的问题呢？同学们请看变式 1-1 和 1-2

变式训练 1-1：为了测定河的宽度，在一岸边选定两点 A、B，望对岸标记物 C，测得 ∠CAB=30°，∠CBA=75°，AB=120m，测河的宽度为_____。

数学史问题串设计——三斜求积公式、海伦公式

问题 3：此公式化简后与海伦公式 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 完全一致，其中 p 为三角形周长的一半，请试着给出证明

证：
$$S = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{2ac}{2} \right) \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{(a+c)^2 - b^2}{2} \right) \left(\frac{b^2 - (a-c)^2}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+c+b}{2} \right) \left(\frac{a+c-b}{2} \right) \left(\frac{b+a-c}{2} \right) \left(\frac{b+a-c}{2} \right)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

图 6 问题串编制

第二次集体研修于 2022 年 3 月 26 日 19:30 在腾讯会议线上开展，由之前被选出的六份教

学设计的执教老师进行汇报（图 7），包括江苏省南通中学的汪留屿老师、无锡第一女子中学的王剑老师、南昌第一中学的潘广云老师、云南师范大学实验中学的张青松老师、上海北虹高级中学和拉萨市北京中学李凤阁老师。研修班的老师各抒己见，对六位老师的教学设计提出了自己的感受和修改建议。最后，华东师范大学邹佳晨老师和上海市长宁区教育学院研教研员栗小妮老师就解斜三角形的教育价值和留白式教学等方面对六份教学设计提出了建议。

数学史与数学教育 (HPM) 工作室	
HPM 网络研修班 “解三角形应用-教学研究”	
3 月 26 日 晚上 19:30-21:00	
腾讯会议号：999-334-547	
19:30-20:00	教学设计汇报 每人 5 分钟 汪留屿 江苏省南通中学 王剑 无锡市第一女子中学 潘广云 南昌市第一中学 张青松 云南师范大学实验中学 丁倩文 上海市北虹高级中学 李凤阁 拉萨市北京中学
20:00-20:40	教学设计研讨 01-08 小组，每组 5 分钟
20:40-21:00	交流研讨

图 7 第二次集体研修

三月末，以“解三角形的应用”为主题的研修活动进入尾声。经过这一个月研修，研修班的老师们对于问题串设计、数学史运用和留白式教学等都有了新的认识。这一主题的集体研讨就此告一段落了，但个人发展永无止境，研修小组的老师们将根据教学安排先后进行试讲和正式开课，在实践中检验所学，在回顾中总结所思。知识的行囊将愈发沉甸甸，期待老师们在下一专题的研修中有更好的表现！

华东师大学科教研联盟与上海市闵行区初中数学联合教研活动隆重举行

孔雯晴

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

2022 年 3 月 23 日下午, 华东师范大学基础教育学科教研联盟与上海市闵行区初中数学联合教研活动隆重举行。根据目前的疫情防控要求, 本次活动全员线上举行, 由华东师大二附中紫竹双语学校承办, 联盟各成员校初中数学教师、闵行区初中数学教师、华东师范大学教师教育学院数学教育方向研究生 400 余人参加了本次活动(图 1)。

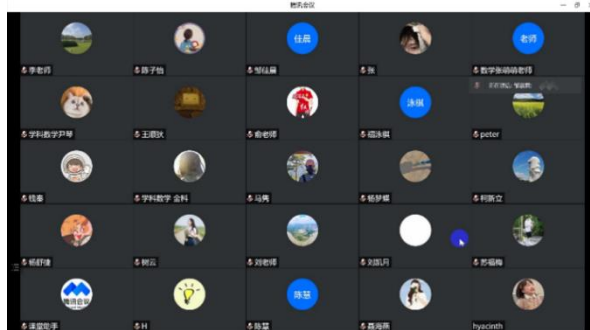


图 1 线上参会人员

【环节一：观摩线上教学】

本次活动首先是两节线上教学的观摩展示课, 分别由华东师大二附中紫竹双语学校的沈克老师和华东师范大学第二附属中学附属初级中学的陈慧老师执教。

沈克老师执教的是初一年级“相交线、平行线”单元复习课, 课前借助导学案收集学生的思维导图, 了解学生现有知识结构的不足(图 2)。课前 3 分钟运用数学文化视频介绍非欧几何, 讲解如何通过角的数量关系判断直线位置关系的原理, 以此拓宽学生眼界。课堂上以学生作品评析的方式梳理有关概念, 在例题的讨论中, 引导学生学会初步添加辅助线来解决简单的几何问题。整节课借助投票、学生发言、互动批注等方式, 尝试突破线上教学的壁垒。

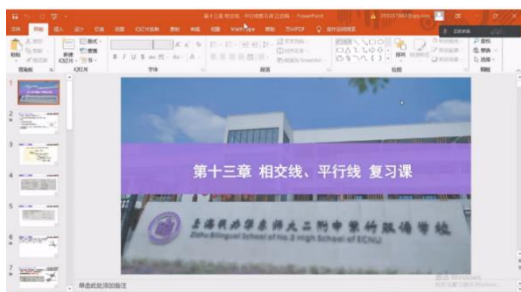


图 2 沈克老师在线上教学



图 3 陈慧老师在线上教学

陈慧老师执教的也是初一年级“相交线、平行线”单元复习课，主要从 5 个版块展开课堂教学（图 3）。一是展示学生自己制作的视频，一方面是复习平行线的性质定理和判定定理，另一方面也让同学们感受到平行线在生活中的应用；二是介绍欧氏几何第五公设（平行公理）的相关内容，完善平行线性质的论证过程，同时也在最后的微视频中介绍了平行线的历史，拓展学生的视野；三是通过问题串的形式，让学生感受运用平行线添加辅助线的方法；四是展示学生围绕平行线编制的题目，锻炼学生提出问题、解决问题的能力；五是课后作业，包括平行线这一单元的证明题、学生编制的几何题，同时布置了数学写作。

【环节二：校长致辞】

线上教学观摩展示课后，华东师大二附中紫竹双语学校邹淑君校长发表了热情洋溢的致辞（图 4）。邹校长以“宛如平行线的各所学校汇聚于本次研修活动，各校的教研成果在此绽放”开场，与本次教研活动的课题相呼应，接着指出这两节课都紧紧围绕教学的实效性展开，沈克老师特别注重与学生的交流和互动，陈慧老师特别注重数学史带给学生的启迪。邹校长提出，教师要以学生的学习为先，通过任务驱动，让课堂中的学习真实、深度地发生，还应关注学生存在哪些似是而非的理解。最后，邹校长表示，希望专家教师们能够从不同的视角探讨这两节课，上升到更高的视角，同时期盼两位教师能够在专家的指导下，从不同的角度得到对教育教学更深的思索。



图 4 邹淑君校长致辞

【环节三：评课交流】

评课交流环节由上海市闵行区教育学院初中数学教研员张胤睿老师主持，先由沈克老师（图 5）和陈慧老师（图 6）从教学设计、课堂实施和有待改进之处分享了执教线上观摩课的体会。



图 5 沈克老师分享执教体会



图 6 陈慧老师分享执教体会

华二紫竹双语学校数学工作室负责人李溢老师从两节课的三个共性分享了自己的观点（图 7）。一是任务驱动，两位老师都通过前置的任务调动学生的主观能动性，不仅扩展了学习时空，也能有效地化解学生之间的差异，让学生以合作的形式进入课堂；二是技术赋能，两位老师娴熟地使用信息技术，例如线上投票、学生互动批注、讨论区互动等。三是学科德育效果好，两位老师都恰当地引进了数学文化的内容，陈老师的数学史介绍具有丰富的内涵，弘扬了中国的数学文化；沈克老师的数学史介绍有着充分的外延，让学生知道了“质疑”不是“怀疑”，而是一种科学精神，是开拓未来必备的品质。



图 7 李溢老师评课



图 8 张胤睿老师评课

闵行区教育学院初中数学教研员张胤睿老师对两节课进行了简要的评价（图 8）。首先，张老师对沈克老师和陈慧老师在疫情背景下给全区教师所带来的高质量公开课表示肯定，两位老师在备课的过程中能够时刻关注学生的学，即使在线上教学中，也同样凸显来了学生的主体地位，给予学生足够的思考时间和思维空间，让学生进行交流，评价，反思，改进，帮助学生树立几何学习的信心。其次，两位教师的教学设计体现出良好的单元意识，从知识结构图梳理

章节知识，到章节与章节之间的呼应，再到数学方法的渗透，学生的知识与方法结构化，不再是孤立离散的。最后，两节数学课有十足的思维深度和文化底蕴，彰显了数学课堂的育人价值。从运用问题链来促进学生深度学习的发生，再到数学史引领学生走入理性思维的大门，感受数学大家追求卓越，攻难克坚的理性精神，让数学课从解题的课堂，转化成育人的课堂。同时，张老师也向全体闵行区初中数学教师提出了新的要求，希望大家继续对线上课堂教学进行研究，在线上教学背景下，设计出一些有新意，有效果的课堂教学手段，把线下教学的一些优秀做法迁移到线上课堂，实实在在提高课堂效率。

华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师从一个主题、两个视角和四大留白分析了两节观摩展示课（图 9）。这两节课的课型是复习课，复习课不仅仅是“炒冷饭”，也可以讲授新知，根据学生情况对在概念课中无法完成的内容进行补充和完善，让学生体会数学是一个整体的联系，同时也能带领学生探究新方法，两位老师通过任务前置，给予了学生充分的思考空间。两个视角分别是信息技术和数学文化的充分运用。两节课作为线上教学的观摩展示课，是目前形势下教研活动的一次尝试，在信息技术的助力下，学生实现了良好的互动，而以首尾呼应的方式融入数学文化，有助于培养学生的理性精神。两位老师在课堂中都尝试了留白式教学，两位老师在陈述之白、论证之白、方法之白和问题之白四个方面都进行了很好的实践，建议两位老师在总结的环节能给予学生更多的时间，力争突出超越之白，发挥数学课堂更大的教育价值。

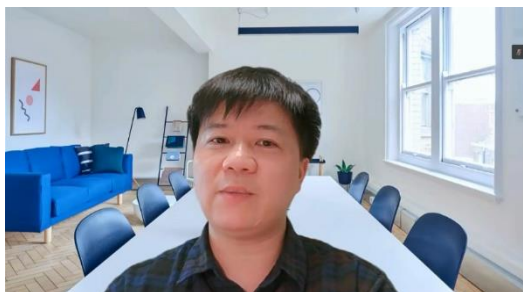


图 9 邹佳晨老师评课

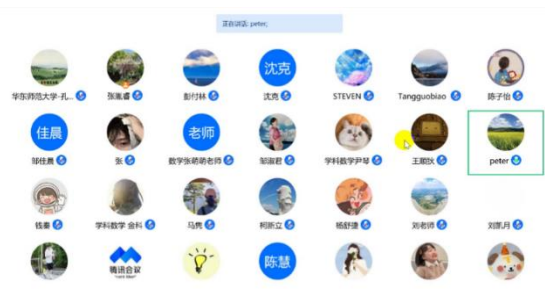


图 10 汪晓勤老师评课

华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授从四个方面进行点评（图 10）。

一是设计问题，放飞思维。两节课问题设计合理，借助动态几何进行教学，再让学生总结其中的一般规律，进而拓展学生的思维。

二是融入文化，拓宽视野。教材通过实验操作引入同位角相等、两直线平行，但《几何原本》不是这样做的，那么学生对于书本上的方法是否有质疑？在这两节课中，教师都提到了第

五公设，回顾知识的源流，大大拓宽了学生的视野。教师如果能站在更高视角去看知识点，会看到不一样的风采。陈老师课堂上的微视频呈现了平行线的中西对照，更是弘扬了中华优秀传统文化。

三是运用留白，提出问题。课前与课后的留白都是值得教师去尝试的，问题提出也有其多元的价值，能够促进学生对知识的理解，问题提出和问题解决都是教师了解学生的窗口。

四是结合写作，对话古今。教师可以给学生呈现《几何原本》中平行线的判定定理和性质定理，让学生走进古希腊数学家的心灵深处，进行隔空对话：假如欧几里得来到今天的课堂，他会怎么看待今天教科书中的几何体系？这值得老师们进一步思考。

文绮中学数学教研组长王晓迪老师也分享了自己的听课感受，他认为沈老师的课是单元复习课，侧重于基础知识的理解和掌握。课堂中通过投票选出答案、学生代表表达观点、轮流分享展示，使更多的学生参与到课堂中，突破了线上教学的壁垒。陈老师的课是专题复习课，具有浓厚的引领和探究意味。数学史的融入增强了课堂的整体性，反证法的使用开拓了学生的思维。

华东师大二附中附属初中数学教研组长柯新立老师表示两位老师在课前任务的安排、例题的选择、上课环节的设计、学生反馈材料的整理、微视频的制作都做了精心的准备。沈克老师课堂语言简洁、准确，对学生的点评中肯到位，反映了良好的教学基本功，例题安排层层递进，思维强度逐步提高，追问学生添加辅助线的理由，让学生做到言必有据，行必有因，体现了课堂的高效。陈慧老师整堂课充分营造了探究的氛围，从作平行线的多种方法和分析方法的实质入手，既复习了平行线性质的判定定理，又提升了学生思维能力。

春光不负赶路人，共聚云端相研讨。线上参与本次活动的老师们也分享了自己的体会和收获。华二紫竹双语学校的夏红波老师认为两节课通过问题驱动，提升了学生的数学素养。华二初级中学的王苗老师认为两节课师生配合非常好，利用数学史，解决了学生的认知困惑，让学生有所收获。华东师范大学教师教育学院数学教育方向 21 级研究生刘雨鑫则体悟到要多给学生机会，让学生成为课堂的主人。在大家的热烈讨论中，本次长达三个半小时的全员线上联合教研活动圆满结束。