



上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2022 年第 11 卷第 05 期



查尔斯·楚里作品：正弦人像（计算机生成图片，1967）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：刘梦哲 孔雯晴

编委（按姓氏字母序）：

韩粟 纪妍琳 姜浩哲 雷沛瑶 栗小妮 李卓忱 刘思璐 秦语真 沈中宇 孙丹丹 汪晓勤 余庆纯 岳增成

张佳淳 邹佳晨

刊首新语

驾技术之舟，游千年之旅

刘梦哲，孔雯晴

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

1 引言

21 世纪以来，随着计算机的日益普及，现代信息技术逐步进入课堂，突破了传统板书不能动态地展示数学图形、不够生动形象等瓶颈。国务院颁布的国家教育事业发展“十三五规划”（2017 年）中提及要全力推动信息技术与教育教学深度融合，鼓励教师利用信息技术提升教学水平、创新教学模式。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》和《义务教育数学课程标准（2022 年版）》都指出通过信息技术改进教学方式，促进学生学习方式转变，提高教学的实效性。由此可见，教师应当充分认识到信息技术在数学课堂教学中的价值，合理利用信息技术并发挥其作用。

圆锥曲线是高中解析几何教学的重要内容，椭圆、双曲线和抛物线的定义源自三维的“截线”，现行教科书中的二维定义对学生了解三种曲线间的关系和深刻理解定义的内涵造成了一定的障碍，因此，部分教师尝试将数学史融入数学教学，以此弥补这一块空缺。例如，使用旦德林双球模型建立起椭圆的原始定义和第一定义间的联系，但是旦德林双球模型对于学生的三维空间想象能力提出了挑战，如果教师使用不当，反而会增加学生的认知负担。倘若能以技术为辅，这样的困境便迎刃而解。

GeoGebra 是一款具有强大代数运算及绘图功能的动态数学软件，它能够将抽象的数学知识以直观的方式呈现，创设“多元联系表征”的学习环境，帮助学生深入理解知识的内在逻辑。尤其是在知识动态性方面，教师能够借助它呈现知识发生和发展的过程，帮助学生增强空间观念和空间想象能力，落实直观想象核心素养的培养。但是熟练使用 GeoGebra 需要耗费较多的精力，由于受到技术水平的限制，在实际的教学中教师常常心有余而力不足。因此，本文以圆锥曲线作为抓手，介绍 GeoGebra 在 HPM 教学中的应用，以期能为教师教学提供参考。

2 GeoGebra 在圆锥曲线教学中的应用举例

2.1 梅内克缪斯三线的绘制

公元前 4 世纪，梅内克缪斯（Menaechmus，约前 380-约前 320）用垂直于母线的平面去截三种不同的圆锥，得到三种不同的圆锥曲线，被后人称之为“梅内克缪斯三线”。

（1）绘制三种圆锥：直角的、锐角的和钝角的圆锥（图 1）。

- 在“绘图区”中分别绘制两根数值滑动条，名称分别为 h 和 r ，代表圆锥的高和底面半径。
- 依次输入圆锥的底面圆心 $O(0,0,0)$ 、顶点 $P(0,0,h)$ ，并输入指令“圆锥(O, P, r)”，由此得到一个底面半径为 r ，高为 h 的圆锥。

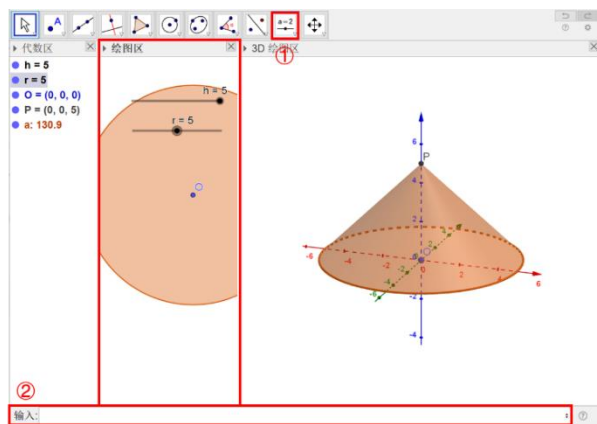


图 1 梅内克缪斯三线的绘制步骤之一

（2）绘制垂直于圆锥母线的平面（图 2）。

- 在“3D 绘图区”中选择“多边形”选项，依次连结圆锥的顶点和圆锥与 x 轴或 y 轴的交点，作圆锥轴截面，记为 $\triangle PAB$ 。
- 在线段 PA 上任取一点 C ，过点 C 作垂直于母线 PA 的平面。最后点击“相交曲线”选项，即可得到垂直于母线的平面与圆锥的交线。

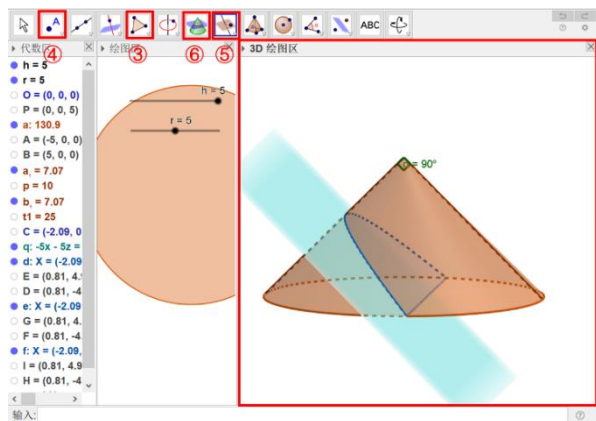


图 2 梅内克缪斯三线的绘制步骤之二

(3) 调整与优化。教师可以根据实际需求，隐藏相关坐标点或平面，并标注圆锥顶角的大小等。

拖动两根滑动条，当 $r < h$ 时，得到锐角的圆锥，截线为锐角圆锥曲线（椭圆）；当 $r = h$ 时，得到直角的圆锥，截线为直角圆锥曲线（抛物线）；当 $r > h$ 时，得到钝角的圆锥，截线为钝角圆锥曲线（双曲线），但梅内克缪斯只研究了双曲线的一支。

2.2 阿波罗尼奥斯对圆锥截线的研究

古希腊数学家阿波罗尼奥斯（Apollonius，约前 262-约前 190）编著了《圆锥曲线论》，对前人的研究进行综合和创新。阿波罗尼奥斯是第一个使用同一正圆锥或斜圆锥来得到三种不同圆锥曲线的人，同时也是第一个发现双曲线有两支的人。

(1) 绘制对顶圆锥。

- 在已有两根数值滑动条 h 和 r 的基础上，再添加一根数值滑动条 h_1 和两根角度滑动条 α, β_1 ；
- 输入对顶圆锥的底面圆心 “ $O(0,0,0)$ ”、“ $Q(0,0,2h)$ ” 及顶点 “ $P(0,0,h)$ ”，并输入指令 “圆锥(O, P, r)” 和 “圆锥(Q, P, r)”，由此得到一对顶圆锥。

(2) 绘制与圆锥底面成 β 的平面。

- 输入 “ $u = (1; \alpha; \beta_1)$ ”，并输入指令 “垂直平面($(0, 0, h_1), u$)”，于是得到与圆锥底面成 $\beta = 90^\circ - \beta_1$ 的平面。最后点击 “相交曲线” 选项，可以得到该平面与对顶圆锥的交线。

(3) 调整与优化。教师可以根据实际需求, 隐藏相关坐标点或平面, 并添加圆锥顶角及平面与圆锥底面的夹角等文本, 便于学生归纳圆锥曲线的截线定义 (图 3)。

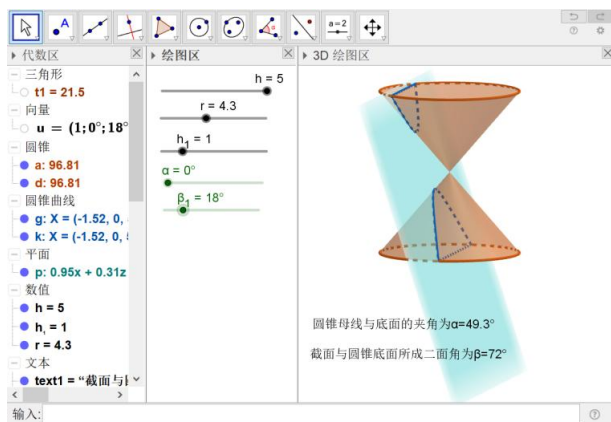


图 3 阿波罗尼奥斯截圆锥

通过动手操作, 改变截面与圆锥底面所成二面角的大小, 学生不难发现: 当 $\beta=0$, 截线为圆; $0<\beta<\alpha$, 截线为椭圆; $\beta=\alpha$, 截线为抛物线; $\beta>\alpha$, 截线为双曲线。

2.3 旦德林双球模型

翻开历史的画卷, 虽然数学家们先后给出了椭圆的圆锥截线定义、轨迹定义, 并推导出了椭圆方程, 研究了椭圆的性质, 但圆锥截线定义与轨迹定义很长时间都彼此缺乏统一。直到 1822 年, 比利时数学家旦德林 (G. Dandelin, 1794-1847) 在一篇论文中利用圆锥的两个内切球, 直接在圆锥上作出椭圆截面的焦点, 导出椭圆的焦半径性质, 从而证明了截线定义与轨迹定义的统一性, 填平了古希腊圆锥曲线定义 (截线定义) 和 17 世纪新定义 (今称椭圆第一定义) 之间的鸿沟。

以椭圆的旦德林双球模型为例, 利用 GeoGebra 绘制需要经历圆锥及平面、双球、辅助线及调整优化四步。

(1) 圆锥及椭圆所作平面的绘制 (图 4)。

- 按照 2.1 节中的方法, 绘制出底面半径为 r , 高为 h 的圆锥, 并利用 “多边形” 选项, 作出圆锥的轴截面。
- 在线段 PA 上任取一点 C , PB 上任取一点 D , 过点 C 作 $\triangle PAB$ 的垂线。最后, 过这条垂线和点 D 作平面, 再利用 “相交曲线” 选项, 即可得到椭圆。

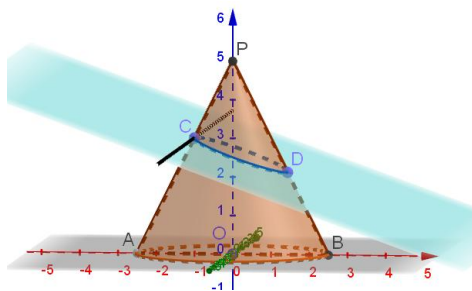


图 4 旦德林双球模型步骤之一

(2) 双球的绘制 (图 5)。

- 创建 $\triangle PAB$ 的平面视图，利用“直线”工具，连结 PO ，利用“线段”工具，连结 CD 。分别作 $\angle PCD$ 和 $\angle CDB$ 的角平分线，交直线 PO 于点 E 、 F ，这两点即为所求双球的球心。
- 分别过点 E 、 F ，作线段 CD 的垂线，垂足为点 G 、 H 。将这两点重命名为 F_1 和 F_2 ，易知，这两点是椭圆的焦点，于是线段 EF_1 和 FF_2 为双球的半径。
- 回到“3D 绘图区”，利用“球面”选项，分别作以点 E 为球心、 EF_1 为半径的球和以点 F 为球心、 FF_2 为半径的球。

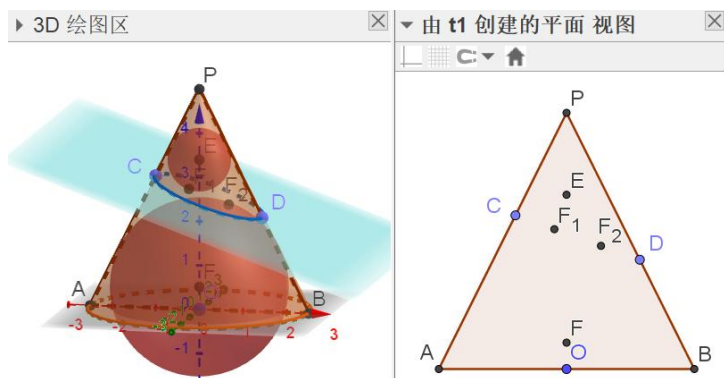


图 5 旦德林双球模型步骤之二

(3) 添加相关辅助线 (图 6)。

- 在 $\triangle PAB$ 的平面视图中，过点 E 、 F ，分别作 PA 的垂线，垂足为点 G 、 H 。
- 在“3D 绘图区”中，过点 G 、 H ，分别作与 z 轴垂直的平面，由此得到双球与圆锥的交线。
- 在椭圆上任取一点 Q ，利用“直线”选项，连结 PQ ，直线 PQ 分别交双球与圆锥的

两条交线于点 J 、 K 。利用“线段”工具，连结 QF_1, QJ, QF_2, QK 。

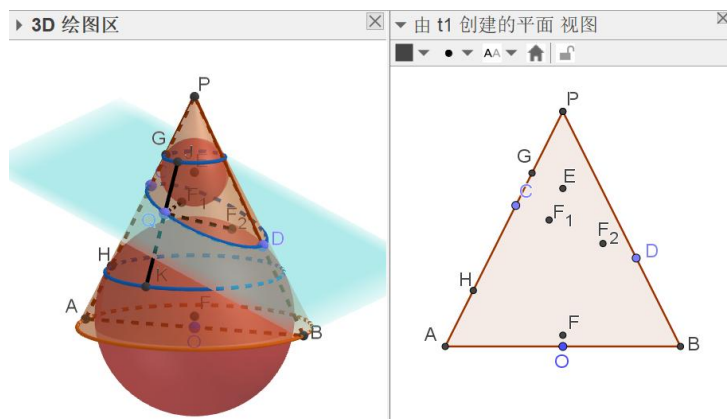


图 6 旦德林双球模型步骤之三

(4) 调整优化 (图 7)。

- 创建椭圆的平面视图，由此可以让平面与圆锥的截线一目了然。当然，教师还可以隐藏不需要的点、直线或平面，改变点、直线或平面的颜色，同时在平面视图区创建文本，显示 $QF_1 + QF_2$ 及 $QJ + QK$ 的长度等。

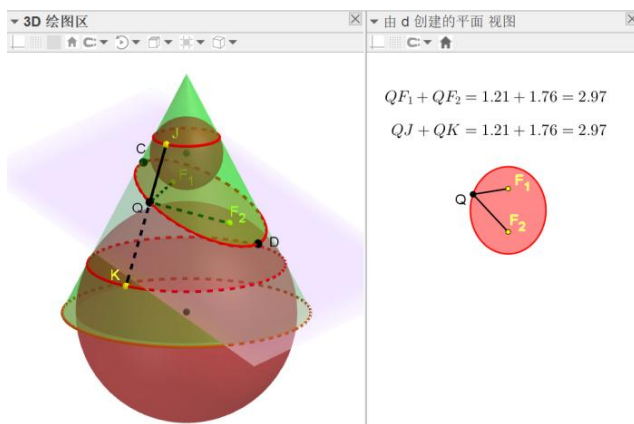


图 7 旦德林双球模型步骤之四

如图 7，圆锥内含两球且与圆锥内表面相切，现用一不平行于母线且不过圆锥顶点的平面去截圆锥，并与两球分别相切于 F_1 、 F_2 两点，可以证明其交线为椭圆。母线与两个球面相切于 J 、 K 两点。由球外一点 Q 向球引切线，其切线长相等，即 $|QJ| = |QF_1|$ 及 $|QK| = |QF_2|$ ，则 $|QF_1| + |QF_2| = |QJ| + |QK| = |JK| > |F_1F_2|$ 为定值。因此我们可以知道，椭圆上的任意一点到两个定点（即椭圆的焦点）之和为一个常值。

若在对顶圆锥中，我们也可以按照类似的方式作出圆锥的截线，并证明此截线为双曲线。且德林双球模型的建立，不仅将古希腊的几何传统与截线定义有效结合，还帮助教师在今天的数学课堂中更好地采用发生教学法。

3 结论与启示

综上，信息技术宛如一缕和煦的春风，为数学教育注入了新的活力；信息技术宛如一艘巨轮，在数学的海洋里乘风破浪；信息技术宛如教育百花园中一枝靓丽的奇葩，让数学教学变得多姿多彩。以网络 and 多媒体技术为核心的信息技术的发展，给教育带来了极大的挑战，也带来了新的契机。数学史的可贵之处并不只在于历史本身，而更在于发现探索的过程，精神意志力和方法的体现。因此，数学教师有必要主动转变教育理念，将 GeoGebra 与数学史深度融合，使数学教学实效得到提升，有效培养学生的数学素养。

其一，历历在目，培养学生的直观想象素养。

几何一直以来都是数学学习的重点和难点内容，从小学阶段起，学生先要接触一些最简单的几何图形，进而在初中阶段学习相关的初等几何知识，而到了高中，学生还需要学习解析几何和立体几何知识，可以说，几何的知识一直伴随着学生。然而，一些学生普遍认为几何很抽象、很难学。因此，教师应努力寻找原因、摸索对策，以帮助学生摆脱“望几何生畏”的困境。

我国著名数学家华罗庚曾说过：“数缺形时少直观，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休。”GeoGebra 作为一款功能强大的数学软件，可以直观的揭示出“数与形”之间的内在联系，有助于实现数学知识的可视化、可理解化和可操作化。例如，在圆锥曲线的教学中，教师可以借助 GeoGebra，绘制平面截圆锥的立体图形，学生通过改变圆锥顶角的大小或圆锥截面的位置，从而发现圆锥曲线的截线定义，这一过程既有助于解答学生“为何椭圆、双曲线及抛物线统称为圆锥曲线”之困惑，又将加深学生对圆锥曲线的截线定义的理解与记忆。

由此可见，数字化软件的应用为数学教学打开了一扇新门，教师在几何教学中，应尝试利用 GeoGebra 绘制几何图形，将原本抽象的图形变静为动，形象化地表达数学知识，从而打破“意会”与“言传”之间的壁垒，我们有理由相信，GeoGebra 必将成为培育学生直观想象素养的有效利器。

其二，继往开来，强化学生的逻辑推理能力。

数学推理是数学思维活动的重要部分，在数学中的运算、证明、作图等都蕴含着逻辑推理的成分，而 GeoGebra 不仅可以助力几何图形可视化，还可以促进学生数学思维的发展。

借助 GeoGebra 活跃思维，通过搭建几何图形，学生可以从可视化图形的制作过程中，思考每一步操作成立的依据。以制作旦德林双球模型中的一步为例，教师可以设置思考题：为什么 $\angle PCD$ 和 $\angle CDB$ 的角平分线与直线 PO 的交点是圆锥的两个内切球的球心（图 5）。显然，由对称性可知，双球的球心一定在面 PAB 中，由此问题可以转化为求 $\triangle PCD$ 的内切圆的圆心和求与 AC 、 CD 、 DB 三边相切的圆的圆心。在 $\triangle PCD$ 中，因为直线 CE 和 PO 分别是 $\angle PCD$ 和 $\angle APB$ 的角平分线，则两直线的交点即为 $\triangle PCD$ 的内心，同理可作出另一个圆的圆心。

我们有理由相信，信息技术为数学史进课堂插上了腾飞的翅膀。GeoGebra 本身的直观性、有趣性的特点，可以帮助教师更好的使历史再现于数学课堂，使学生有身临其境的感觉，以数学史为载体促进学生对数学知识的本质理解，对于发展学生的思维、营造良好课堂的氛围、乃至促进教师专业发展起到重要的作用。

目 录

刊首新语

驾技术之舟，游千年之旅 刘梦哲，孔雯晴 I

历史研究

美英早期解析几何教科书中的极坐标方程 刘梦哲 1

美英早期三角学教科书中的积化和差公式 陈雨晴 15

美英早期三角学教科书中的三角函数的性质 石 城 28

美英早期三角学教科书中的反三角函数概念 刘倩雯 36

教学实践

HPM 视角下圆锥曲线探究式教学 戴泽莉，钱 秦，秦语真 50

他山之石

“我是小组的一员，其他人听我说”：建立数学小组活动中的有效倾听框架
..... 杨舒捷 64

教师提供实质性反馈的教学情境 韦润蓉 69

活动讯息

华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学联盟第十八次集中研修活动隆重举
行 刘梦哲，杨舒捷 72

融技术于课堂，展历史之风采 刘梦哲，雷沛瑶 80

CONTENT

FOREWORD

Application of GeoGebra in HPM..... Liu Mengzhe, Kong Wenqing 1

HISTORICAL STUDY

The Polar Coordinate Equations in Early American & British Textbooks on Analytic Geometry..... Liu Mengzhe 1

The Formulas for Changing Product into Sum or Difference in Early American & British Textbooks on Trigonometry..... Chen Yuqing 15

The Properties of Trigonometric Functions in Early American & British Textbooks on Trigonometry..... Shi Cheng 28

The Concept of Inverse Trigonometric Functions in Early American & British Textbooks on Trigonometry..... Liu Qianwen 36

TEACHING PRACTICE

The Exploratory Teaching of Conic Sections from the Perspective of HPM.....
..... Dai Zeli, Qian Qin, Qin Yuzhen 50

LITERATURE REVIEW

“I am part of the group, the others listen to me”: theorising productive listening in mathematical group work..... Yang Shujie 64

The instructional situations in which mathematics teachers provide substantive feedback..... Wei Runrong 69

ACADEMIC INFORMATION

The 18th Teaching and Research Activity of the Junior High School Mathematics Alliance of the Basic Education Subject Teaching and Research Alliance of East China Normal University..... Liu Mengzhe, Yang Shujie 72

The Micro Video Production in the Second HPM Online Training Class for High School Mathematics Teachers..... Liu Mengzhe, Lei Peiyao 80

历史研究

美英早期解析几何教科书中的极坐标方程

刘梦哲

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

坐标系的建立架起了代数与几何之间的桥梁, 实现了几何方法与代数方法的结合, 使形与数统一起来。坐标系看似简单, 但它的形成却是一个十分漫长的过程。今天, 我们所熟知的直角坐标系主要是费马 (P. Fermat, 1607-1665) 和笛卡尔 (R. Descartes, 1596-1650) 的贡献。然而, 数学家并没有止步于直角坐标系的建立, 此后还建立了极坐标系, 并将平面坐标系发展为空间三维坐标系。

极坐标是高中数学中的一个重要知识点, 它是高考考查的一个重点, 是与现实生活紧密相连知识, 同时衔接着初等数学和高等数学。然而, 学生在学习极坐标时往往会出现一些认知障碍, 例如极坐标系概念、公式的理解, 方程间的转换, 取值范围的分析及方程的综合运用等^[1]。究其原因, 学生对知识往往知其然, 却不知其所以然, 故而, 教师有必要了解极坐标背后更广阔的历史背景, 掌握更为丰富的数学史素材, 并在课堂中追本溯源, 提高课堂教学的有效性。

回溯历史, 牛顿 (I. Newton, 1643-1727) 在《流数法与无穷级数》(1671) 一书中提出了新的坐标系, 也就是现在所说的极坐标系。当时的人们还只是用一根 x 轴和与其成直角或斜角的 y 轴来表示坐标系, 而牛顿是用一个固定点和通过该点的一条直线作为坐标系, 他用极坐标表示平面内任意的点, 并验证了极坐标系与其他坐标系间的转化关系^[2]。到了 18 世纪, 意大利数学家丰塔纳 (G. Fontana) 将其命名为 Polar coordinate system, 1816 年, 皮科克 (G. Peacock, 1791-1858) 在翻译拉克鲁克斯 (S. Lacroix, 1765-1843) 的《微分学与积分学》一书时将其翻译为英语^[2]。

极坐标并非从天而降, 每一个数学概念都有它的源头^[3], 以史为鉴, 方能使新知识的产生自然而然、水到渠成, 符合学生的认知发展规律, 从而使新知识易于为学生所理解^[4]。鉴于此,

本文拟聚焦极坐标方程，对 19-20 世纪美英早期解析几何教科书进行考察，试图回答以下问题：如何引入和定义极坐标系？如何利用极坐标方程的相关性质绘制几何图形？直线、圆及圆锥曲线的极坐标方程该如何推导？探寻这些素材并将其用于今日的课堂之上，能够为教师提供教学设计的思路。

2 早期教科书的选取

本文选取 1826-1965 年间出版的 64 种美英早期解析几何教科书作为研究对象，以 20 年为一个时间段进行划分，其出版时间分布情况如图 1 所示。其中，对于同一作者再版的教科书，若内容无显著变化，则选取最早的版本，若内容有显著变化，则将其视为不同的教科书。

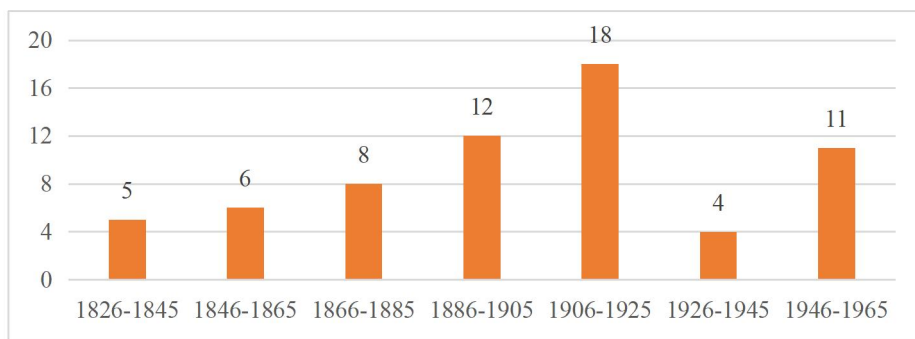


图 1 64 种美英早期解析几何教科书的出版时间分布

为回答研究问题 1 和 2，本文按年份依次检索上述 64 本早期解析几何教科书，从“极坐标”“坐标（系）”“点的坐标”等章中，分别摘录出极坐标的引入、概念、坐标系之间的变化及极坐标方程的性质、作图，再经内容分析，确定每一知识点的分类标准，并将其归于不同类别。最后，结合所搜集的素材，回答研究问题 3。

3 极坐标系

在平面内建立直角坐标系，是人们公认的最容易接受并且被经常采用的方法，但它并不是确定点的位置的唯一方法。对于一些复杂的曲线，例如螺旋线、玫瑰线及心形线等曲线，用直角坐标方程表示极其复杂，但用极坐标方程表示就会变得简单且便于处理。事实上，确定平面内一个点的位置时，既可以依靠水平距离与垂直距离这两个量，还可以依靠距离与方位角这两个量。

3.1 引入方式

除部分教科书直接给出极坐标的定义外，一些教科书从数学内部引出极坐标的定义，例如，O'Brien（1844）指出，除了用直角坐标系和斜坐标系，还可以用极坐标表示点的位置。^[5]当然，还有一些教科书从数学内部出发，利用生活中常见的导航问题引入极坐标。表 1 给出了极坐标系统的不同引入方式。

表 1 极坐标系的引入方式

引入方式	具体描述	教科书
数学内部	一个点在平面上的位置是由它到平面上定点的距离和方向决定的。 ^[6]	Crawley & Evans（1918）
	告诉一个点到给定点的距离和方向，就可以完全描述一个点在平面上的位置，这个想法形成了极坐标系的基础。 ^[7]	Osgood & Graustein（1921）
	极坐标系的使用使解析几何中许多应用问题的处理变得简单。这个系统基于一个单一的有向轴（极轴）和位于这个轴上的一个点（极点）。 ^[8]	Nelson, Folley & Borgman（1949）
数学外部	在极坐标系中，点的位置是通过测量一个距离和一个方向来确定的，而不是通过测量两个距离来确定的，这与测量中使用的方位和距离系统本质上是相同的，与地理中使用的纬度和经度系统相反。 ^[9]	Wilson & Tracey（1915）
	显然，我们可以告诉一个人朝某个方向走一定的距离，从而将其引导到一个地方。例如，往西北方向走 10 英里。一个点的极坐标由距离和方向组成，方向由一个角度来表示。 ^[10]	Kells & Stotz（1949）
	到目前为止，本课程对位置的描述为，向走东 4 个单位及向北走 3 个单位，即(4,3)。但是，能够让我们（至少在理论上）到达同一个目的地的方向是：“沿着一条与正东方向约 37 度角的线走 5 个单位。” ^[11]	Cell（1951）
	地球表面上一点的位置通常是由它与另一点的距离和方向来确定的。比如 A 在 B 的东北方向 25 英里处，于是 B 在平面上点的位置同样可以确定。 ^[12]	Hardy（1891）

位置的概念可以用多种代数方法来表示。如果我们想要确定一个城镇的位置，我们通常把它说成是离某个知名地点在某个方向上的一段距离。^[13] Ashton (1901)

极坐标在任何研究中都具有特殊的价值，其中重要的要素是可变点 (variable point) 与固定点的距离和方向。地球绕太阳的运动或任何有关螺旋曲线的问题都是例证。^[14] Maltbie (1906)

3.2 定义

Hamilton (1826) 在斜坐标系的基础上，取斜坐标系上任意一点 P ，连结 OP ，令 $OP=r$ ， $\angle POX=\omega$ 及 $\angle YOX=\alpha$ (图 2)。过点 P 作 OY 的平行线，交 OX 于点 M ，在 $\triangle OMP$ 中，有

$$\frac{OM}{OP} = \frac{\sin \angle OPM}{\sin \angle OMP} = \frac{\sin \angle POY}{\sin \angle YOX} = \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin \alpha},$$

即 $x = r \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin \alpha}$ 及 $y = r \frac{\sin \omega}{\sin \alpha}$ 。因此， x 、 y 可以用 r 、 ω 表示，而 r 、 ω 可以确定 P 的位置。

当采用这种方式定义点的位置时，点 O 称为极点 (pole)， OP 称为矢径 (radius vector)，点 P 的极坐标是 (r, ω) 。方程表示曲线上任意一点坐标的关系，称为曲线的极坐标方程。^[15] Lardner (1831) 将极坐标方程记为 $z=f(\omega)$ ，其中 ω 表示可变角 $\angle ZOX$ ， z 表示矢径。^[16]

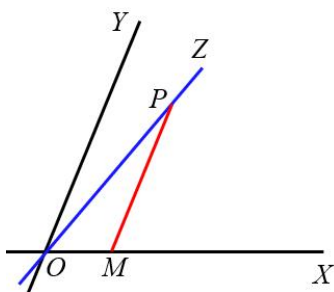


图 2 斜坐标系

Davies (1836) 假设平面上有一点 O ，过该点作直线 OX 。一条线段 OB 绕点 O 旋转，使得其和 OX 形成 0° 到 360° 的角。若 OB 同时伸长或缩短，则点 B 可以连续地与平面上的每一点重合，即给定可变角 $\angle BOX$ 和可变长度 OB ，则可以确定平面上任意一点，这种用可变角和可变长度确定点的方法叫做极坐标。^[17]

Bowser (1880) 给出了一种静态且更加简洁的表述，此后有诸多教科书编者以这一方式来定义点的极坐标^[18]。令 O 是一个定点， OA 是过点 O 的定直线。若给定线段 OP 长及 $\angle POA$ ，

则可确定平面上任意一点 P 的位置。在检索的早期教科书中，作者首次将 OA 叫做极轴 (polar axis)，定点 O 叫做极点， OP 叫做矢径， $\angle POA$ 叫做方向角或矢量角。这一方法被称为极坐标。若将任意点的方向角记为 θ 、矢径记为 ρ ，则点 P 的坐标可记为 $P(\rho, \theta)$ 。

对于极径和极角的取值，Davies (1836) 记 $\angle BAX=v$ 及 $|AB|=r$ ， x, y 分别表示点 B 的横纵坐标，则 $x=r\cos v, y=r\sin v$ 。点 B 在第一、四象限，则 $r=\frac{x}{\cos v}>0$ ；点 B 在第二、三象限，则 $r=\frac{x}{\cos v}<0$ ，故有 $r \geq 0$ ，且极角 v 的范围限定在 0° 到 360° 之间。^[17]Loomis (1872) 承认极径和极角可取负值，当极径绕极点逆时针旋转时，极角 $\theta>0$ ，当极径绕极点顺时针旋转时，极角 $\theta<0$ ；当 $\rho>0$ 时，点 $P(\rho, \theta)$ 在 θ 的终边上，当 $\rho<0$ 时，点 $P(\rho, \theta)$ 在 θ 终边的反向延长线上。^[19]Wentworth (1886) 为了能用一个极坐标方程表示轨迹上所有点，同样允许 ρ 和 θ 取负值^[20]。

在平面直角坐标系中，点的坐标和点的位置可以一一对应，而在极坐标系中却不尽如此。给定 $P(\rho, \theta)$ ，由 θ 的值可以画出 θ 的终边，再由 ρ 的值可以在 θ 的终边或终边的反向延长线上确定点 P 的位置。反之，对于平面上任意一点 P ，若其坐标为 (ρ, θ) ，则 $(\rho, \theta+2n\pi)$ 及 $(-\rho, \theta+(2n+1)\pi)$ ， $n \in \mathbf{Z}$ 是极坐标系上同一点，均可表示点 P 的坐标^[10]。由此可知，在极坐标系下，点的坐标和点的位置并不是一一对应的关系，即给定点的一对坐标可以唯一确定点的位置，但可以用无数对点的坐标表示给定点的位置。

3.3 直角坐标与极坐标的互化

Schmall (1921) 将极坐标系置于平面直角坐标系的不同位置，从而给出了将直角坐标转化为极坐标的四种情况^[21]。

(1) 当极轴与 x 轴重合、极点在原点时，令点 P 在直角坐标系下的坐标为 (x, y) ，在极坐标系下的坐标为 (ρ, θ) (图 3(a))。于是，在 $\text{Rt}\triangle POQ$ 中，有 $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$ ，即 x, y 可用 ρ, θ 表示。

(2) 当极轴与 x 轴平行、极点为 (a, b) 时 (图 3(b))，有 $\begin{cases} x = a + \rho \cos \theta \\ y = b + \rho \sin \theta \end{cases}$ 。

(3) 当极轴与 x 轴的夹角为 φ 、极点在原点时 (图 3(c))，有 $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta + \varphi) \\ y = \rho \sin(\theta + \varphi) \end{cases}$ 。

(4) 当极轴与 x 轴的夹角为 φ 且极点为 (a, b) 时 (图 3(d)), 有 $\begin{cases} x = a + \rho \cos(\theta + \varphi) \\ y = b + \rho \sin(\theta + \varphi) \end{cases}$ 。

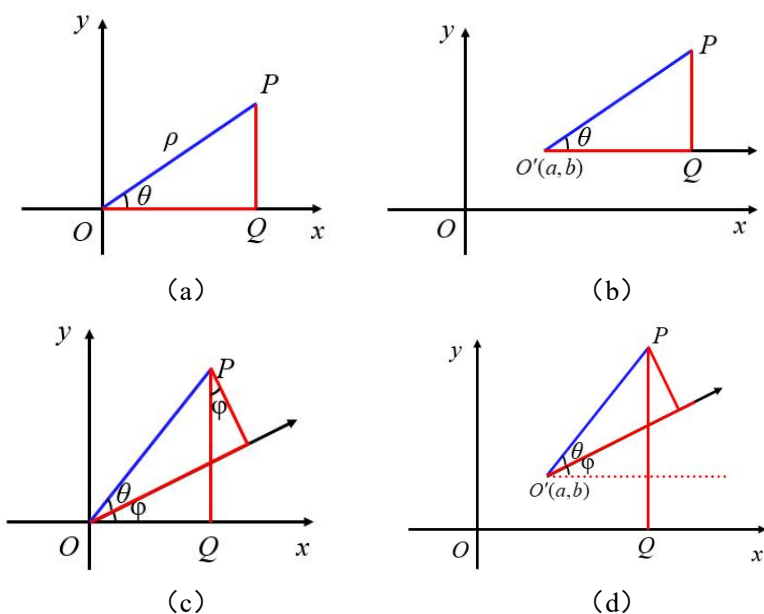


图 3 直角坐标与极坐标的互化

当然, 还可以将极坐标化为直角坐标, 只需对上述公式作逆运算即可。对于上述四种情况,

分别有 $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}, \begin{cases} \rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ \theta = \arctan \frac{y-b}{x-a} \end{cases}, \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} - \varphi \end{cases}, \begin{cases} \rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ \theta = \arctan \frac{y-b}{x-a} - \varphi \end{cases}。$

4 极坐标方程

4.1 性质

在极坐标系中, 方程的轨迹由满足方程的点的全体所组成的集合。通过为方程中的其中一个变量赋值来计算另一个变量的值, 然后将这些点绘制在极坐标纸 (polar coordinate paper) 上, 可以连接成一条光滑曲线。但如果事先讨论该方程所满足的性质, 则可以方便地绘制曲线的图形。Nelson, Folley & Borgman (1949) 主要分析了极坐标方程的对称性、截距、在极点时的方向及周期性^[8]。

(1) 对称性。因为 (ρ, θ) 和 $(\rho, -\theta)$ 关于极轴对称, 如果用 $-\theta$ 替换方程中的 θ 得到同一方程,

则曲线关于极轴对称，同理，若用 $\pi-\theta$ 替换 θ 及 $-\rho$ 替换 ρ 可得同一方程，则曲线同样关于极轴对称（图 4）。

按照这一方式，我们可以将曲线对称性的性质简记为

$$\left. \begin{array}{l} \theta \rightarrow (-\theta) \text{ 或} \\ \theta \rightarrow (\pi - \theta), \rho \rightarrow (-\rho) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{关于极轴对称}$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta \rightarrow (\pi - \theta) \text{ 或} \\ \theta \rightarrow (-\theta), \rho \rightarrow (-\rho) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{关于 } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 对称}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rho \rightarrow (-\rho) \text{ 或} \\ \theta \rightarrow (\pi + \theta) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{关于极点对称}$$

其中 $A \rightarrow B$ 表示用 B 替换方程中的 A 可以得到同一方程。

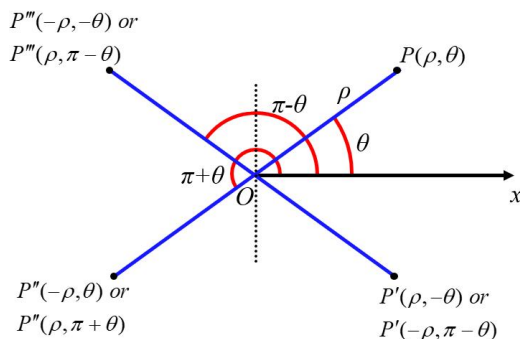


图 4 对称性

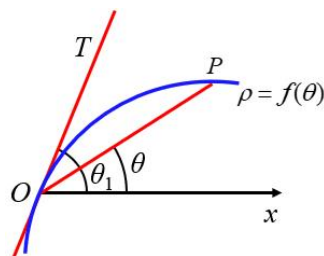


图 5 在极点时的方向

(2) 截距。令 $\theta = n\pi$ or $\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$ ，即可发现曲线在极轴以及在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 上的截距。

(3) 在极点时的方向。如果极点是曲线上一点，则有以下定理：

若 $\theta_1, \theta_2, \dots$ 是 $f(\theta) = 0$ 的实根，则直线 $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2, \dots$ 是曲线 $\rho = f(\theta)$ 在极点处的切线。

[10]

Hart (1963) 对此给出证明^[22]。如图 5, $P(\rho, \theta)$ 是曲线 $\rho = f(\theta)$ 上一点，由 $f(\theta_1) = 0$ ，记直线 OT 的方程为 $\theta = \theta_1$ 。假设在 $\widehat{OP}$ 上 $\rho = f(\theta)$ 是连续函数，则当 $\rho \rightarrow 0$ 时， $\theta \rightarrow \theta_1$ 。或者，割线 OP 将 OT 作为 $\rho \rightarrow 0$ 时的极限位置。因此， $\widehat{OP}$ 在极点处的切线为 OT 。

(4) 周期性。如果 $\rho = f(\theta)$ 是只包含 θ 的三角函数，则 $\rho = f(\theta)$ 是关于 θ 的周期函数，那

么 ρ 的值会重复 $f(\theta)$ 在一个周期内的所有值。然而，当周期 T 小于 2π 时，虽然 $\rho=f(\theta)$ 与 $\rho=f(\theta+T)$ 相同，但是点 (ρ, θ) 和 $(\rho, \theta+T)$ 不重合。

除了上述性质，Nathan（1949）进一步确定曲线的范围^[23]。首先，对于某些 θ ，代入 $\rho=f(\theta)$ 计算可得 ρ 的值是虚数，因此这些 θ 的值可以排除。其次，当 $\theta \rightarrow \theta_1$ 时，有 $\rho \rightarrow \infty$ ，则曲线的轨迹沿着直线 $\theta=\theta_1$ 的方向从极点无限延伸，当然，这并不能说明直线 $\theta=\theta_1$ 是曲线的渐近线。如果 ρ 的值是有限的，我们可以找出 $|\rho|$ 取最大值时对应的 θ 的值。最后，需要找出 $|\rho|$ 取最小值或等于0时，对应的 θ 的值。Taylor（1959）还利用导数判断曲线的单调性^[24]。

4.2 作图

五点法作图固然是描绘曲线轨迹的一种方法，但当我们掌握曲线的相关性质，则可以更加准确地画出曲线的轨迹。在绘制极坐标方程的轨迹时，往往会使用极坐标纸，在这种纸上有一组通过极点的直线和一组以极点为圆心的同心圆（图6）。^[25]下面以四叶玫瑰线 $\rho=a\cos 2\theta$ 为例，简要说明极坐标方程的作图方法（图7）。^[8]

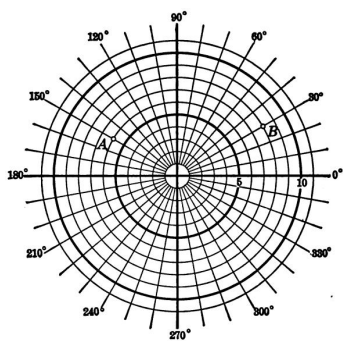


图6 极坐标纸

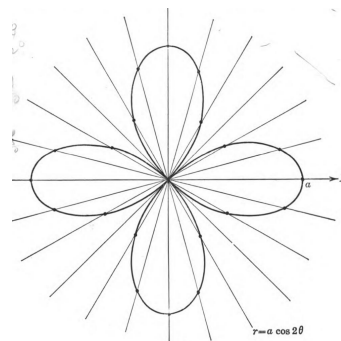


图7 四叶玫瑰线

由曲线的性质：①因为 $\cos 2\theta$ 的周期是 π ，所以只需画出 $0 \leq \theta < 2\pi$ 的图像即可；②当我们用 $-\theta$ 替换 θ ，有 $a\cos 2\theta = a\cos(-2\theta)$ ，则曲线关于极轴对称，同理，曲线关于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 对称；③曲线与极轴及 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的交点为 $(a, 0), (-a, \frac{\pi}{2}), (a, \pi), (-a, \frac{3\pi}{2})$ ；④当 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 时，有 $\rho=0$ ，故曲线经过极点，并得到曲线在极点处的切线；⑤由 $|\cos 2\theta| \leq 1$ ，可以得出 $|\rho| \leq a$ 。利用这些性质，只需列出部分点的坐标，即画出一条光滑的曲线。

5 曲线的极坐标方程

5.1 直线的极坐标方程

一条直线在平面上的位置可由极点到直线的距离 $p=ON$ 及 ON 与 x 轴的夹角 $\alpha=\angle NOQ$ 确定。如图 8，设 $P(\rho, \theta)$ 是直线 PN 上任意一点，在 $\text{Rt}\triangle PON$ 中，有 $|OP|\cdot\cos\angle PON=|ON|$ ，于是直线 PN 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta-\alpha)=p$ 。^[26]

Puckle (1870) 利用直线的一般式方程 $Ax+By+C=0$ ，由点 $P(\rho, \theta), N(p, \alpha)$ 在直线上，故 $A\rho\cos\theta+B\rho\sin\theta+C=0$ 及 $Apcos\alpha+Bpsin\alpha+C=0$ ，于是 $\frac{\rho\sin\theta-p\sin\alpha}{\rho\cos\theta-p\cos\alpha}=-\frac{A}{B}$ 。令 $\theta=0$ ，有 $\rho=-\frac{C}{A}$ ；令 $\theta=\frac{\pi}{2}$ ，有 $\rho=-\frac{C}{B}$ ，则直线的斜率为 $\tan\alpha=\frac{B}{A}$ ，故 $\frac{\rho\sin\theta-p\sin\alpha}{\rho\cos\theta-p\cos\alpha}=-\cot\alpha$ ，化简得 $\rho\cos(\theta-\alpha)=p$ 。^[27]

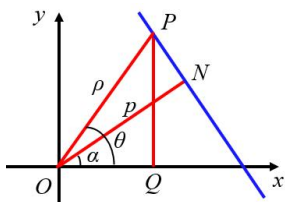


图 8 直线的极坐标方程之一

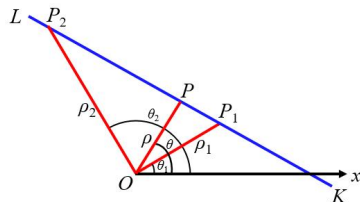


图 9 直线的极坐标方程之二

Runkle (1888) 从直线方程 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ 出发，令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ ，代入可得 $\rho\cos(\theta-\alpha)=p$ 。当然，也可将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 直接代入直线的一般式方程，可得 $\rho(A\cos\theta+B\sin\theta)+C=0$ ，并利用两角和余弦公式可得直线的极坐标方程。^[28]

Tanner & Allen (1899) 利用三角形面积公式得到直线的极坐标方程^[29]。令 O 是极点， OX 是极轴，给定两点 $P_1(\rho_1, \theta_1)$ 、 $P_2(\rho_2, \theta_2)$ ，并在过 P_1 、 P_2 的直线 LK 上任取一点 $P(\rho, \theta)$ (图 9)。

因为 $S_{\triangle ORP_2}=S_{\triangle ORP}+S_{\triangle ORP_1}$ ，由三角形面积公式可得

$$\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\theta_2-\theta_1)=\frac{1}{2}\rho_1\rho\sin(\theta-\theta_1)+\frac{1}{2}\rho\rho_2\sin(\theta_2-\theta),$$

化简得直线方程为 $\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\rho}+\frac{\sin(\theta-\theta_1)}{\rho_1}+\frac{\sin(\theta_2-\theta)}{\rho_2}=0$ 。

对于几种特殊的直线，如图 8，当 $\alpha=0$ 时，直线 PN 与极轴垂直，此时极坐标方程为 $\rho\cos\theta=p$ ；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线 PN 与极轴平行，可得极坐标方程为 $\rho\sin\theta=p$ ；当 $p=0$ 时，

直线 PN 过极点, 则 $\rho \cos(\theta - \alpha) = 0$, 因为 $\rho \neq 0$, 所以 $\cos(\theta - \alpha) = 0 \Rightarrow \theta - \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = c$, 其中 c 为任意常数。^[26]

5.2 圆的极坐标方程

利用余弦定理, 可以得到极坐标系下的两点间距离公式, 这也是推导圆的极坐标方程的基础。给定平面上任意两点 $P_1(\rho_1, \theta_1)$ 、 $P_2(\rho_2, \theta_2)$, 联结 OP_1 、 OP_2 (图 10)。在 $\triangle OP_1P_2$, 有

$$|P_1P_2|^2 = |OP_1|^2 + |OP_2|^2 - 2|OP_1||OP_2| \cdot \cos \angle P_1OP_2,$$

即得两点间距离公式^[30]

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1)}.$$

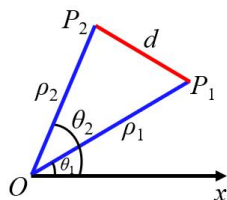


图 10 两点间距离公式

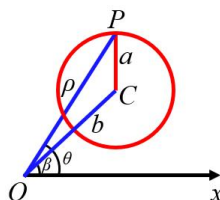


图 11 圆的极坐标方程

如图 11, 对于平面上不经过极点且以 $C(b, \beta)$ 为圆心, a 为半径的圆, 任取圆上任意一点 $P(\rho, \theta)$ 。在 $\triangle OPC$ 中, 运用两点间距离公式计算可得 $a^2 = \rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos(\theta - \beta)$ 。^[31]令 $b=a$, 即可得到过极点的圆的极坐标方程为 $\rho = 2a \cos(\theta - \beta)$, 进一步, 若 $\beta=0$, 则极轴还过圆心 C , 此时的极坐标方程为 $\rho = 2a \cos \theta$ 。当圆心与极点重合时, 圆的极坐标方程为 $\rho = a$ 。

5.3 圆锥曲线的极坐标方程

如图 12, 若点 F 为圆锥曲线的焦点, ZM 为准线, 由圆锥曲线的准线定义可知,

$$|FP| = e|PM| = e(|FZ| - |FG|) \quad (1)$$

令 l 是圆锥曲线通径长的一半, 若线段 FP 与通径重合, 此时点 F 、 G 重合, 代入 (1) 式得 $l = e|FZ|$, 即 $|FZ| = \frac{l}{e}$ 。现以 F 为极点、 FZ 为极轴, 由 $|FP| = \rho$ 及 $\angle PFZ = \theta$ 知 $|FG| = \rho \cos \theta$, 代入 (1) 得 $\rho = e(\frac{l}{e} - \rho \cos \theta)$, 即 $\rho = \frac{l}{1 + e \cos \theta}$ 。^[32]当 $0 < e < 1$ 时, 所得圆锥曲线是椭圆; $e=1$

时，得到抛物线； $e > 1$ 时，得到双曲线。Ziwet & Hopkins (1913) 设焦点到准线的距离 $|FZ| = q$ ，将其代入 (1) 得 $\rho = e(q - \rho \cos \theta)$ ，则圆锥曲线的极坐标方程为 $\rho = \frac{eq}{1 + e \cos \theta}$ 。^[30]

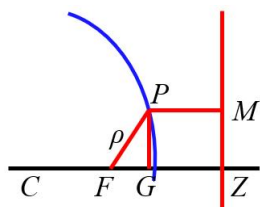


图 12 圆锥曲线的极坐标方程

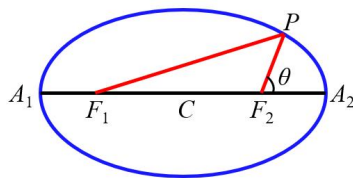


图 13 余弦定理法

除利用圆锥曲线的第二定义推导其极坐标方程外，推导方法还有代入法、余弦定理法、焦半径法三类。设点 $P(\rho, \theta)$ 是圆锥曲线上任意一点。

(1) 代入法。以抛物线 $y^2 = 2px$ 为例，当极点在原点时，设 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 。将其代入抛物线的标准方程可得 $\rho^2 \sin^2 \theta = 2p\rho \cos \theta$ ，即 $\rho = 2p \csc^2 \theta \cos \theta$ 。若以焦点为极点，此时 $x = \frac{p}{2} + \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ ，同理可得

$$\rho^2 \sin^2 \theta = p^2 + 2p\rho \cos \theta \Rightarrow \rho^2 = p^2 + 2p\rho \cos \theta + \rho^2 \cos^2 \theta \Rightarrow \rho = p + \rho \cos \theta,$$

即 $\rho = \frac{p}{1 - \cos \theta}$ ，这与之前给出的圆锥曲线的极坐标方程一致。^[33]

(2) 余弦定理法。如图 13，以椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 为例，令极点与椭圆的右焦点重合。在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得， $|PF_1| = \sqrt{\rho^2 + 4a^2e^2 - 4ae\rho \cos \theta}$ 。由椭圆第一定义知， $|PF_1| + |PF_2| = 2a \Rightarrow \sqrt{\rho^2 + 4a^2e^2 - 4ae\rho \cos \theta} + \rho = 2a$ ，化简得 $\rho = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos \theta}$ 。^[34]

(3) 焦半径法。以双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 为例，令极点与双曲线的左焦点重合。点 P 在双曲线的右支上，则一条焦半径长 $|PF_1| = ex + a$ 。将 $x = \rho \cos \theta - c$ 代入焦半径公式可得双曲线的极坐标方程 $\rho = e(\rho \cos \theta - c) + a \Rightarrow \rho = \frac{a - ec}{1 - e \cos \theta}$ 。^[34]

6 结论与启示

综上所述，美英早期解析几何教科书中给出了极坐标的多种引入方式、定义的多种表述方

式及坐标变换的方法，指出了极坐标方程所满足的性质及其作图步骤，呈现了几种曲线的极坐标方程的不同推导方法，为今日极坐标方程的教学提供了诸多启示。

其一，创设教学情境，激发学生求知欲。相比教师直接向学生呈现数学概念、定理、公式，一个有效的情境将激发学生探究新知识的欲望，满足学生认知发展的需要，促进学生有意义的学习。在日常生活中，学生经常会使用导航软件进行定位，而极坐标通常被用于导航。教师可利用这一情境设置问题，从数学外部引出学习极坐标的必要性，由此展开极坐标定义的教学。

其二，以信息技术为载体，推进课堂教学多样化。在数字化日益发展的时代，学生的学习方式也越来越多样化。疫情期间，我们看见了线上采用信息化教学的诸多优势。后疫情时代，当我们回归线下，走进课堂，应努力探索信息化教学与传统教学的结合，采用混合式教学方法。例如，课前向学生推送坐标系发展的历史视频，并让学生循着数学家的足迹绘制一个属于自己的坐标系；课中教师可利用几何画板等软件，通过分析极坐标方程所满足的性质绘制出一条优美的曲线，随后，让学生以小组为单位选择几个极坐标方程，并在平板上共同绘制出曲线；课后教师根据学生反馈的疑点、难点，有针对性地解答学生疑问，推送个性化的作业。将信息技术融入传统的数学课堂，学生从以往知识的被动接受者变为主动学习者，课堂上有更多参与互动的机会，提高了学习数学的积极性，真正成为了学习的主人。

其三，发展数学思维，提升数学素养。在新课程改革的背景下，教师要贯彻落实素质教育理念的新标准和新要求，加强对学生核心素养的有效培育。数形结合作为高中数学的重要思想方法，在极坐标方程的教学中应予以渗透。当给出几何图形时，教师应培养学生观察图形的能力，让学生揭示图形中蕴涵的数量关系；当给出方程时，教师应培养学生将数转化为形的意识，让学生切实把握数与形的对应关系，最终提高学生思维的灵活性和创造性。与此同时，当给定学生轨迹所满足的性质时，不仅要鼓励学生多样化的建系方式，还要让学生掌握最优的建系方式，当然，教师还应留给学生充足的时间去推导轨迹方程，这样做将提高学生数学运算、直观想象、数学抽象等数学素养。

参考文献

- [1] 黄钦梅. 高中生在极坐标与参数方程学习中存在的困难与错误及其策略研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2018.

- [2] 方哲. 高中数学坐标系与参数方程的教学研究[D]. 上海: 华东师范大学, 2020.
- [3] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 92.
- [4] 汪晓勤, 沈中宇. 数学史与高中数学教学: 理论、实践与案例[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020: 20.
- [5] O'Brien, M. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry*[M]. Cambridge: Deightons, 1844: 37.
- [6] Crawley, E. S. & Evans, H. B. *Analytic Geometry*[M]. Philadelphia: University of Pennsylvania, 1918: 179.
- [7] Osgood W. F. & Graustein, W. C. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1921: 193.
- [8] Nelson, A. L., Folley, K. W. & Borgman, W. M. *Analytic Geometry*[M]. New York: The Ronald Press Company, 1949: 147-151.
- [9] Wilson, W. A. & Tracey, J. I. *Analytic Geometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Company, 1915: 127.
- [10] Kells, L. M. & Stotz, H. C. *Analytic Geometry*[M]. New York: Prentice-Hall, 1949: 87-88, 93.
- [11] Cell, J. W. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1951: 162.
- [12] Hardy, A. S. *Elements of Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1891: 6.
- [13] Ashton, C. H. *Plane and Solid Analytic Geometry*[M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1901: 7.
- [14] Maltbie, W. H. *Analytic Geometry*[M]. Baltimore: The Sun Job Printing Office, 1906: 125.
- [15] Hamilton, H. P. *The Principles of Analytical Geometry*[M]. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1826: 54.
- [16] Lardner, D. *A Treatise on Algebraic Geometry*[M]. London: Whittaker, Treacher & Arnot, 1831: 9-10.
- [17] Davies, C. *Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Wiley & Long, Collins, Keys & Co., 1836: 74-75.
- [18] Bowser, E. A. *An Elementary Treatise on Analytic Geometry*[M]. New York: D. van Nostrand, 1880: 9.
- [19] Loomis, E. *The Elements of Analytical Geometry*[M]. New York: Harper & Brothers, 1872: 36-37.

- [20] Wentworth, G. A. *Elements of Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1886: 107-108.
- [21] Schmall, C. N. *A First Course in Analytic Geometry, Plane and Solid*[M]. New York: D. van Nostrand Company, 1921: 7-8.
- [22] Hart, W. R. *Analytic Geometry and Calculus*[M]. Boston: Heath, 1963: 333.
- [23] Nathan, D. S. *Analytic Geometry*[M]. New York: Ronald Press Co, 1949: 245-246.
- [24] Taylor, A. E. *Calculus, with Analytic Geometry*[M]. New Jersey: Prentice- Hall, 1959: 398.
- [25] Smith, E. S., Salkover, M. & Justice, H. K. *Analytic Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1954: 167.
- [26] Woods, F. S. & Bailey, F. H. *Analytic Geometry and Calculus*[M]. Boston: Ginn & Company, 1917: 121-122.
- [27] Puckle, G. H. *An Elementary Treatise on Conic Sections and Algebraic Geometry*[M]. London, Macmillan, 1870: 42-43.
- [28] Runkle, J. D. *Elements of Plane Analytic Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1888: 80-81.
- [29] Tanner, J. H. & Allen, J. *An Elementary Course in Analytic Geometry*[M]. New York: American Book Company, 1898: 118.
- [30] Ziwet, A. & Hopkins, L. A. *Analytic Geometry and Principles of Algebra*[M]. New York: The Macmillan Company, 1913: 17, 224-225.
- [31] Phillips, H. B. *Analytic Geometry*[M]. London: Chapman & Hall, 1915: 117.
- [32] Poor, V. C. *Analytical Geometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1934: 130-131.
- [33] Peck, W. G. *A Treatise on Analytical Geometry*[M]. New York: A. S. Barnes & Company, 1876: 63-64.
- [34] Newcomb, S. *The Elements of Analytic Geometry*[M]. New York: Henry Holt and Company, 1884: 135-136, 174.

美英早期三角学教科书中的积化和差公式

陈雨晴

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

积化和差公式是一组重要的三角恒等变换公式,它能够简化复杂的三角表达式,减少计算量。《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称《课标》)对三角恒等变换的内容要求,明确提出要能运用两角和与差的正弦、余弦、正切公式等进行简单的恒等变换,包括推导出积化和差公式,但是不要求记忆^[1]。推导积化和差公式可以有效帮助学生熟悉三角关系,熟练掌握和差角公式这一基本的三角学恒等式。经历推导过程后,学生可以基于理解运用公式,不会再因为“难记难背”而望而却步。翻开历史的画卷,我们发现积化和差公式有着丰富的现实背景,多样的证明方法,可谓生动而灵活。

早在 1510 年左右,德国天文学家维纳(J. Werner, 1468-1522)为了简化天文运算而率先使用了公式

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (1)$$

1588 年,德国数学家乌尔索斯(N. Ursus, 1551-1600)给出了另一个公式

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (2)$$

16 世纪丹麦天文学家第谷(Tycho Brahe, 1546-1601)利用公式(1)和(2)来简化天文计算^[2],上述公式成了对数思想的源泉之一。后来的数学家和天文学家相继推导和利用了所有四个公式,并强调其在计算中的重要作用。在今天的三角教学中,对积化和差公式的证明似乎桎梏在和差角公式里,少了几分往昔的光彩和想象力。

现行高中数学教科书均利用和差角公式来证明积化和差公式。回望历史,积化和差公式的证明方法并不局限在此,我们可以通过对历史上早期教科书进行梳理和分析,找到积化和差公式在不同时期的证明方法,以期如今的实际教学提供新的视角。鉴于此,本文聚焦积化和差公式,对美英早期三角学教科书进行考察,试图回答以下问题:积化和差公式的证明方法有哪

些？由积化和差公式产生的常见推论有哪些？这些证明方法和推论对今日教学有何启示？

2 早期教科书的选取

本文从有关数据库选取了 1810-1955 年出版的 104 种美英早期三角学教科书作为研究对象，对于同一作者再版的教科书，若无显著变化，则视为同一本教科书，选取出版年份较早的一本，若变化显著，则视为不同的教科书。以 20 年为一个时间段划分，教科书的分布如图 1 所示。

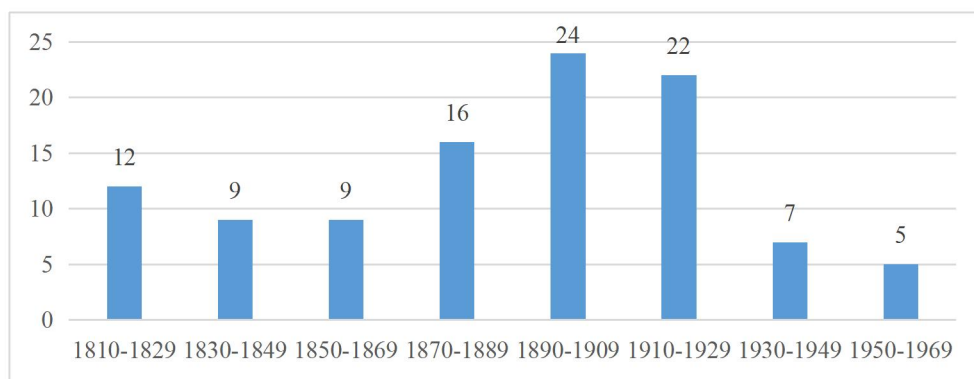


图 1 104 种美英早期三角学教科书的出版时间分布

为了回答研究问题 1 和 2，本文按照年份依次检索了上述 104 种美英早期三角学教科书，并从中摘录出与积化和差公式相关的所有内容，经过整理和分析，积化和差公式主要分布在“三角学定理”“三角函数表”“三角恒等变换”“三角恒等式”等章节，通过内容分析，总结出证明方法分为几何与代数两种取向，并将 104 种教科书中的相关内容划分为不同类别。最后，结合相关证明方法的特点、思想，现行教科书的编排形式和已有的文献回答问题 3。

3 积化和差公式的证明方法

英国数学家赫顿（C. Hutton, 1737-1823）曾经说过，三角学研究通常有两种方式，一种是几何的，另一种是代数的，几何方法能够直观、迅速地得到一些三角学的结论，但是对于更现代的科学来说就显得缓慢而迂回；相反，代数方法在基本理论的证明中有时显得迂回，但是对于一些奇异而有趣的公式证明则非常迅速和高效^[3]。所考察的教科书对积化和差公式的证明方法也大致吻合赫顿的分类，其中几何取向的证明方法共有 3 种，集中出现在 19 世纪上半叶；代数取向的证明方法主要有 2 种，贯穿 19-20 世纪。有 4 种教科书采用了几何方法，100 种教

科书采用了代数方法。

从早期教科书中积化和差公式名称的演变也能够窥见其不断完善的过程。最初它仅作为和差角公式的推论，没有一个专门的名称，到得名“乘积转换公式（conversion formulas for products）”“乘积公式（product formulas）”^[4-5]，体现了积化和差公式的作用就是将正余弦的积转换为正余弦的和。有趣的是，多种教科书强调了学生应该记忆这些公式，甚至还给出了帮助记忆的口诀^[6-7]。虽然这与今天《课标》和教科书的要求背道而驰，但同时也体现出历史上积化和差公式在三角学学习中的不可或缺。下面将给出美英早期三角学教科书中有关积化和差公式的不同证明方法。

3.1 几何取向的证明

3.1.1 利用相似三角形

欧几里得在《几何原本》第 6 卷命题 33 中证明了等圆中圆心角或圆周角之比等于它们所对的弧长之比^[8]。早期的三角学文献立足于该命题，以弧来度量角，正弦、余弦、正切表示的是与弧相关的直线段，从而也能够刻画角的一些关系，它们的大小显然与圆的半径有关，如图 2 所示， $\angle AOB = \angle COD$ ，但是在小圆内 $\sin \angle AOB = AB, \cos \angle AOB = OA$ ，大圆内 $\sin \angle COD = CD, \cos \angle COD = OC$ ，显然大圆的正余弦分别大于小圆的正余弦。若 r_1 、 r_2 分别为大圆、小圆的半径，则满足

$$OC^2 + CD^2 = OD^2, \quad OA^2 + AB^2 = OB^2,$$

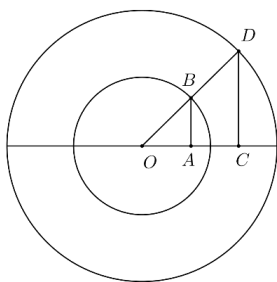


图 2 线段表示角的正余弦

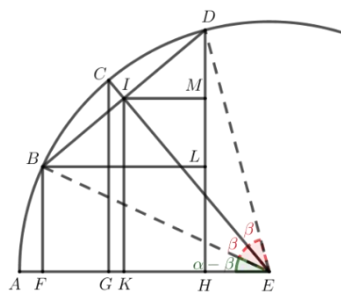


图 3 相似三角形解法

即

$$(\cos \angle COD)^2 + (\sin \angle COD)^2 = r_1^2, \quad (\cos \angle AOB)^2 + (\sin \angle AOB)^2 = r_2^2.$$

由于早期的三角关系常常以比例的形式呈现，相似三角形则是产生比例最自然和直接的工

具，当正余弦以线段表示时，通过相似三角形之比，得到有关正余弦的关系式也不足为奇。Nichols（1811）以线段表示正余弦，运用相似三角形的性质，得到了积化和差公式，并且指出了其在解决高等数学中的问题时有重要作用^[9]。书中具体的解法如下¹：

如图 3 所示，在 E 为圆心， AE 为半径且长度为 R 的圆的一段圆弧上，取 B 、 C 、 D 三点，满足 $\widehat{BC}=\widehat{CD}$ ，分别过 B 、 C 、 D 点作 AE 的垂线，垂足为 F 、 G 、 H ，则 BF 、 CG 、 DH 为弧 AB 、 AC 、 AD 或 $\angle AEB$ 、 $\angle AEC$ 、 $\angle AED$ 的正弦，过 B 作 $BL \perp DH$ ，连结 BD ，交 CE 于 I ，过 I 作 $IK \perp AE$ ， $IM \perp DH$ ，则 $BI = DI$ ， $LM = DM$ ， $BD \perp CE$ ， $IM \parallel BL \parallel AE$ 。根据上述过程可推出

$$BI = \sin \angle BEC = \sin \angle CED, EI = \cos \angle BEC = \cos \angle CED。$$

由于 $BF = HL$ ，则

$$BF + DH = DH + HL = DL + 2LH = 2LM + 2LH = 2MH = 2IK，$$

所以 $IK = \frac{1}{2}(BF + DH) = \frac{1}{2}(\sin \angle AEB + \sin \angle AED)$ 。因 $\triangle CGE \sim \triangle IKE$ ，故得 $CE : EI = CG : IK$ ，即

$$R : \cos \angle BEC = \sin \angle AEC : \frac{1}{2}(\sin \angle AEB + \sin \angle AED)。$$

由此可得推论

$$R \times (\sin \angle AEB + \sin \angle AED) = 2 \sin \angle AEC \times \cos \angle BEC。$$

进一步，设 $\angle AEC = \alpha$ ， $\angle BEC = \beta$ ， $R = 1$ ，则有

$$\angle AED = \angle AEC + \angle BEC = \alpha + \beta，\quad \angle AEB = \angle AEC - \angle BEC = \alpha - \beta，$$

上述推论变为

$$\sin \alpha \times \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) \quad (3)$$

同理， $FH = 2FK = 2HK$ ， $KE = KH + HE = \frac{1}{2}(FE + HE) = \frac{1}{2}(\cos \angle AEB + \cos \angle AED)$ ，

$CE : EI = EG : EK$ ，可以推断出

$$R : \cos \angle BEC = \cos \angle AEC : \frac{1}{2}(\cos \angle AEB + \cos \angle AED)，$$

同样地令 $R = 1$ ，则有

¹ 原文并未连接 BE 、 DE

$$\cos \alpha \times \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta)。$$

利用 $\triangle IDM \sim \triangle CEG$ ，可以得到

$$CE:CG = DI:IM, \quad CE:EG = DI:DM,$$

令 $R=1$ ，则有

$$\begin{aligned} \sin \alpha \times \sin \beta &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta), \\ \cos \alpha \times \sin \beta &= \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (4)$$

方法一样，在此不再赘述。Leslie (1817) 同样用相似三角形来证明积化和差公式^[10]，具体作图时有细微区别，但证明过程无本质差异。

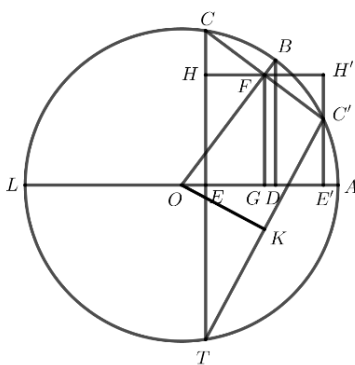


图 4 《几何元素和平面三角学》中利用相似三角形证明积化和差公式

我们如今常说，利用积化和差公式可以将积转为和，实现“降次”。但由相似三角形证法可见，积化和差公式并非为了实现“降次”，而只是人们在表示三角形相似比时所发现的一个角的关系，并且这个关系与系数 R 有关，随着正余弦定义的不断演变，我们常在单位圆中考虑问题，系数 R 就“隐藏”起来了。利用积化和差公式的加减运算，Nichols (1811) 还得到了和差角公式^[9]，这与今日教科书所呈现的顺序恰好相反。

3.1.2 利用托勒密定理

苏教版教科书三角恒等变换一章的阅读材料中介绍了利用托勒密定理证明差角公式，无独有偶，Woodhouse (1819) 对此有详细的介绍，不仅利用托勒密定理证明了和差角公式，还推导出了积化和差公式^[11]。

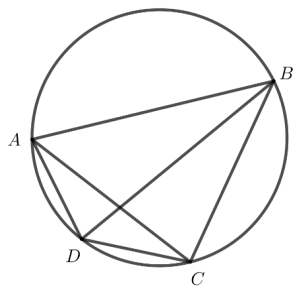


图 5 托勒密定理解法

为了方便表述，本文在此处采取与教科书一样的做法，以线段表示弧的正余弦，前文已经介绍过这种表示的合理性。首先我们需要知道用线段表示正弦时一个相关的定理：弧的正弦等于倍长这段弧所对的弦的一半，图 5 中有 $\sin \widehat{AD} = \frac{1}{2} AC$ 。

在图 5 中， $AB \times CD + BC \times AD = AC \times BD$ ，令 $\widehat{AD} = \widehat{DC} = 2\beta$ ， $\widehat{BAD} = 2\alpha$ ，根据托勒密定理可得

$$(AB + BC)AD = AC \times BD,$$

即得

$$[2\sin(\alpha - \beta) + 2\sin(\alpha + \beta)]2\sin\beta = 2\sin 2\beta \times 2\sin\alpha \quad (5)$$

令 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ，则有

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \right] \sin\beta = \sin 2\beta \times \sin \frac{\pi}{2},$$

又由 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos\beta$ ， $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ，可得 $2\cos\beta \times \sin\beta = \sin 2\beta$ ，代入 (5) 式，则

有 $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \times \cos\beta$ 。

假设 $\alpha > \beta$ ，用 $\frac{\pi}{2} + \alpha$ 、 $\frac{\pi}{2} + \beta$ 分别替换 α, β ，即得

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\pi + \alpha + \beta) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right),$$

则有 $\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) = -2\cos\alpha \times \sin\beta$ 。

Woodhouse (1819) 并没有在教科书中呈现用托勒密定理证明公式 (1) 和 (2)，但是我们可以利用公式 (3) 和公式 (4)，通过字母代换得到完整的一组积化和差公式。

3.1.3 利用线段和差

利用线段的和与差发现和证明相关性质是数学家们常用的方法，图 6 常常被作为和差化积公式的几何表示，但是鉴于和差化积公式和积化和差公式的互逆性和等价性，也有数学家利用图 6 来证明积化和差公式，只是在设角时有一定的讲究。图 6 在历史上也有迹可寻，比如前文介绍的利用相似三角形证明的图 3 中，去掉圆弧，保留剩余的部分，则可看到图 6 的形态，但图 6 所示的证法较图 3 更为简洁，体现了证明方法的进步。

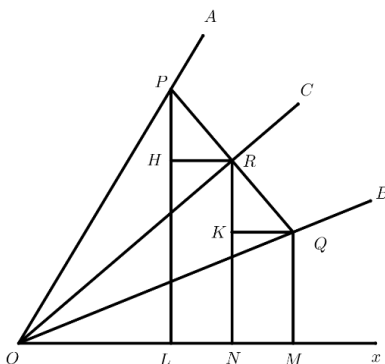


图 6 线段和差解法

Davison (1919) 给出如下证明^[12]:

令 $\angle xOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle xOA = \alpha + \beta$, $\angle xOB = \alpha - \beta$, 其中 OC 平分 $\angle BOA$ 。过 OC 上任一点 R 作 $PQ \perp OC$, 交 OA 于点 P , OB 于点 Q , 作 PL 、 RN 、 OM 垂直于 Ox , $RH \perp PL$, $QK \perp RN$, 可得

$$\begin{aligned}\angle RPH &= \frac{\pi}{2} - \angle PRH = \angle HRO = \angle xOR = \alpha, \\ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \frac{LP + QM}{OP} = 2 \frac{NR}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} = 2 \sin \alpha \cos \beta, \\ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) &= \frac{LP - MQ}{OP} = 2 \frac{HP}{RP} \cdot \frac{RP}{OP} = 2 \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) &= \frac{OL + OM}{OP} = 2 \frac{ON}{OR} \cdot \frac{OR}{OP} = 2 \cos \alpha \cos \beta, \\ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) &= \frac{OM - OL}{OP} = 2 \frac{HR}{RP} \cdot \frac{RP}{OP} = 2 \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

这种方法的美中不足在于需要对角进行分类讨论。上述几何证明过程虽然直观，但只阐述了锐角的情形，缺乏一般性。

3.2 代数取向的证明

3.2.1 利用和差角公式

由基本式子运算产生新的结果是数学推论出现的重要方法。在所考察的 104 种三角学教科书中，编者常常利用和差角公式的运算得到其他一系列重要的公式，因此和差角公式也被称为三角学基本公式。本文涉及到的和差角公式如下：

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (6)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (7)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (8)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (9)$$

由公式 (8) + (9) 可推导出公式 (3)，由公式 (8) - (9) 可推导出公式 (4)，由公式 (6) + (7) 可推导出公式 (2)，由公式 (6) - (7) 可推导出公式 (1)，过程非常简洁，因此这一方法也成为了 19-20 世纪三角学教科书对积化和差公式的主流推导方法。需要说明的是，此时期正余弦仍然由与弧或角相关的直线段表示，因此运算产生的结果与半径有关。此外，早期对上述和差角公式的证明往往限定在锐角，或角的和差小于 π ，未对负角情况下公式的合理性进行阐述，这导致产生的积化和差公式适用范围存在一定的局限性。随着正余弦的三角比定义、圆上点的坐标比值定义、单位圆上点的坐标定义的出现，和差角公式的证明不断完善，积化和差公式的严谨性和适用性也进一步提升。

3.2.2 利用三角函数的复数表示

复数可以用三角表示，那三角自然也可以用复数来表示，从而三角正余弦之间的运算可以被转换为复数之间的运算。在所考察的教科书中，19 世纪末已经有教科书开始用复数定义三角函数，并说明可以通过复数运算得到一系列的三角公式。比如 Clarke (1888) 提到利用欧拉公式给出正余弦的新定义后，所有的三角公式都可以通过分析的方法得到，因此三角学可以被看作代数的一支^[13]。Moritz (1915) 给出了利用复数证明公式 (3) 的方法^[14]，具体过程如下：

$$\begin{aligned}
 2\sin\theta\cos\varphi &= 2\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\cdot\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \\
 &= \frac{e^{i(\theta+\varphi)}-e^{-i(\theta+\varphi)}+e^{i(\theta-\varphi)}-e^{-i(\theta-\varphi)}}{2i}。 \\
 &= \sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)
 \end{aligned}$$

早期三角学教科书大多在例题或练习题中提到可以利用三角函数的复数表示来证明除和差角公式之外的三角公式。从上述的证明过程中我们不难看出三角学与代数，特别是与分析学的紧密关联，利用分析学的相关知识对公式进行证明，展现了代数运算的重要性，虽然这更为抽象，但是也更简洁、严谨。

4 积化和差公式的常见推论

积化和差公式在早期教科书中被视为一组重要的公式，因为它可以解决更为复杂、更为困难的问题。梳理这些教科书，本文总结了 2 种积化和差公式常见的推论。

4.1 n 倍角的正余弦递推公式

Chauvenet (1855) 利用公式 (1) - (4) 推导出了 n 倍角的正余弦公式^[15]。

由公式 (3) 和 (4)，可以得到

$$\sin(y+x) = 2\sin y \cos x - \sin(y-x),$$

$$\sin(y+x) = 2\cos y \sin x + \sin(y-x),$$

令 $y = (m-1)x$ ，则有

$$\sin mx = 2\sin(m-1)x \cos x - \sin(m-2)x,$$

$$\sin mx = 2\cos(m-1)x \sin x + \sin(m-2)x,$$

以上便是 n 倍角正弦的递推公式，同理，利用公式 (1) 和 (2) 可以得到 n 倍角余弦的递推公式

$$\cos mx = 2\cos(m-1)x \cos x - \cos(m-2)x,$$

$$\cos mx = -2\sin(m-1)x \sin x + \cos(m-2)x。$$

19 世纪中后期之后，美英三角学教科书关注了如何求一些三角级数，其中积化和差公式在求解过程中发挥了巨大作用。

$$S_1 = \sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \cdots + \sin[\alpha + (n-1)\beta],$$
$$2 \sin(\alpha + \beta) \sin \frac{\beta}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right),$$

.....

$$2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot S_1 = \cos \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right) - \cos \left\{ \alpha + \left(n - \frac{1}{2} \right) \beta \right\},$$

$$2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot S_1 = 2 \sin \left[\alpha + \left(\frac{n-1}{2} \right) \beta \right] \sin \frac{n\beta}{2},$$

若要求 $S_2 = \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \cdots + \cos[\alpha + (n-1)\beta]$, 按照同样的方法, 利用公式 (4), 可得

$$2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot S_2 = \sin \left[\alpha + \left(n - \frac{1}{2} \right) \beta \right] - \sin \left(\alpha - \frac{\beta}{2} \right),$$

同样根据和差化积公式，可得

$$S_2 = \frac{\cos \left[\alpha + \left(\frac{n-1}{2} \right) \beta \right] \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}.$$

5 结论与启示

梳理美英早期三角学教科书，发现积化和差公式的证明方法经历了由几何到代数，证明过程由不完善到完善的发展。几何证明将三角关系可视化，但是在角的范围上存在一定局限性，代数证明简洁严谨，但是缺少了对公式的形象表征。如果在教学中能够合理地串联几何与代数的证明方法，那将会是对《课标》要求的培养学生直观想象和数学运算能力最好的诠释。美英早期三角学教科书中积化和差公式的内容对今日教学和教科书编写有着诸多启示。

(1) 创造学习动因，激发学习兴趣。积化和差公式在历史上最早被称为“加减术”，产生的动因是为了简化天文学中冗长复杂的运算，教师可以在授课时选择正余弦乘积较为复杂的例子，以此例子的求解为学生创造学习动因，并适时补充数学史知识，开阔学生的视野，激发其学习兴趣。

(2) 丰富证明方法，展现方法之美。现行教科书大多采用利用和差角公式的加减运算推导积化和差公式，这与历史上的主流方法一脉相承，但是也有数学家从积化和差公式的几何解法出发，推导和差角公式。为了加深学生对和差角和积化和差公式的印象，教师也可以尝试利用相似三角形等几何方法证明积化和差公式，再通过积化和差公式推导和差角公式，从而提升学生的知识贯通能力。

(3) 挖掘知识联系，设计拓展探究。数学是一门不断发展的学科，正余弦的定义不断演变，19 世纪中后期已经有教科书利用复数来定义正余弦，并指出可以由此推导一系列三角公式。如果我们讲到复数一章时，反过来再利用复数推导这些三角公式，能够强化学生对复数的运用，加深他们对积化和差等公式的理解。这不仅串联了课程内容，还实现了对知识的多元表征，数学的发展性、文化性将在课堂中得以体现。同时，根据知识的固着点，教师还可以设计

拓展课程，比如苏教版教科书在阅读材料中展现了利用托勒密定理证明和差角公式，而 Woodhouse 却利用托勒密定理证明了积化和差公式，同一个方法，能够得到不同的结果，这便是数学变式的魅力，教师可以从托勒密定理出发，设计一堂拓展课，串联起平面三角恒等式，帮助学生实现由知识“碎片化”到“整体化”的转变。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 22.
- [2] 汪晓勤, 钱卫红. 关于积化和差公式的一个历史注记[J]. 数学教学, 2006(11): 41-43.
- [3] Hutton, C. T. *A Course of Mathematics*[M]. London: F. C. & J. Rivington, etc., 1811: 53-54.
- [4] Hall, A. G. & Frink, F. G. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Company, 1910: 95.
- [5] Hart, W. W. & Hart, W. L. *Plane Trigonometry, Solid Geometry and Spherical Trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1942: 110.
- [6] Pendlebury, C. *Elementary Trigonometry*[M]. London: George Bell & Sons, 1895: 56.
- [7] Hobson, E. W. & Jessop, C. M. *An Elementary Treatise on Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1896: 91.
- [8] Gregory, D. & Stone, E. *Euclid's Elements of Geometry: The First Six, the Eleventh and Twelfth Books*[M]. London: J. Rivington, 1765: 286-289.
- [9] Nichols, F. *A Treatise of Plane and Spherical Trigonometry, in Theory and Practice*[M]. Philadelphia: F. Nichols, 1811: 65-67.
- [10] Leslie, J. *Elements of Geometry and Plane Trigonometry*[M]. Edinburgh: A. Constable & Co., 1817: 234.
- [11] Woodhouse, R. *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*[M]. Cambridge: J. Deighton & Sons, 1819: 28-32.
- [12] Davison, C. *Plane Trigonometry for Secondary Schools*[M]. Cambridge: The University Press, 1919: 101-103.

- [13] Clarke, J. B. *Manual of Trigonometry*[M]. Oakland: Pacific Press, 1888: 51-52.
- [14] Moritz, R. E. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915: 341.
- [15] Chauvenet, W. *A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry*[M]. Philadelphia: Lippincott, Grambo & Co., 1855: 36-38.
- [16] Loney, S. L. *Plane Trigonometry*[M]. Cambridge: The University Press, 1893: 280-282.

美英早期三角学教科书中的三角函数的性质

石 城

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

三角函数在中学数学中处于核心地位, 其不仅联系着几何与代数, 也是联结初等数学与高等数学的纽带。无论是初等数学中的平面向量、圆锥曲线等, 还是高等数学中的傅里叶级数、欧拉公式等都离不开三角函数。

三角函数图象与性质作为高考数学全国卷中的必考内容, 在教材之中也是重点编排的内容。在现行的人教 A 版和沪教版教科书中, 三角函数的性质包括定义域、值域、周期性、奇偶性、单调性、对称性等。《普通高中数学课程标准(2017 版 2020 年修订)》(以下简称《课标》)中要求用几何直观和代数运算的方法研究三角函数的性质^[1], 三角函数图象是对三角函数性质的直观表示, 利用图象研究性质, 蕴含数形结合思想。因此, 现行版教科书中研究三角函数的性质, 往往从图象出发。在已有的研究中, 学生主要存在正余弦函数性质混淆不清、单调性认识不清、周期理解不深等问题, 进而导致一系列的错误^[2]。

已有研究主要涉及国内教科书中三角函数内容的变迁, 但鲜有涉及国外, 特别是美英等西方主流国家的教科书^[3]。为了从 HPM 的视角开展三角函数的教学研究, 本文拟聚焦三角函数的性质, 对 1855-1955 年间出版的 63 种美英早期数学教科书进行考察, 旨在回答以下问题: 早期教科书呈现了三角函数的哪些性质? 呈现方式有何变化?

2 三角函数的性质

三角函数有诸多性质, 包括定义域、值域、周期性、单调性、对称性、奇偶性、连续性、渐近线、最值、有界性等。在 63 种教科书中出现的性质可以大致归为五类, 即周期性、单调性和最值、连续性和渐近线、对称性和奇偶性和其他性质。各种性质的讨论频数统计如图 2 所示。早期教科书讨论最多的是三角函数的周期性、单调性和最值, 编写者或从几何的观点切入,

或从代数的观点切入，来选择用何种工具研究三角函数性质，如函数图象、单位圆及诱导公式等。

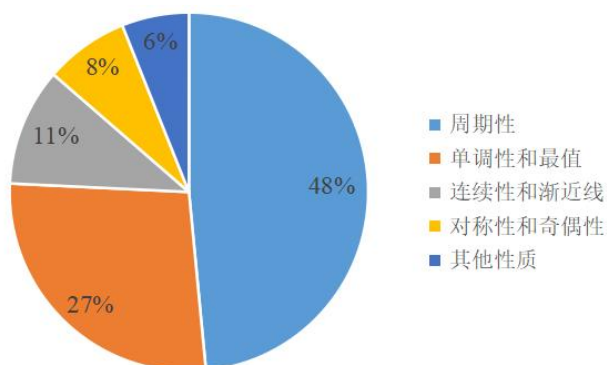


图 2 三角函数性质的讨论频数

2.1 周期性

周期性作为三角函数最特殊的性质，在教科书中出现的频率最高。正是由于三角函数的周期性，许多其他性质都可以限制在一个周期内进行讨论，这为其他性质的研究提供了便利。

早期教科书中讨论三角函数周期性的方法有三种，第一种是通过任意角的定义。例如，Oliver, Wait & Jones (1881) 对周期性描述为有相同终边的三角函数值相等，即 θ 与 $\theta + 2n\pi$ (n 为任意整数) 的函数值相等^[4]。这种文字描述的定义，缺乏几何的直观和代数的证明，适用范围狭小，因而对三角函数的周期性刻画并不清晰。

第二种是观察函数值“周而复始”的规律。例如，Loney (1893) 通过角的终边旋转，得到了正弦函数变化经历从 0 递增到 1，再从 1 递减到 -1，最后才从 -1 递增回的 0 的过程，如此循环往复。并且正弦函数经历这样的变化后，就会恢复初始值 0^[5]。Wilczynski (1914) 观察动点 P 在单位圆上的运动，得到其纵坐标（即正弦函数值）在 0° 到 360° 的变化过程，随着点 P 在单位圆上旋转圈数的增加，函数值不断重复^[6]。第二种的探究方法相较于第一种，突出了三角函数变化的过程，由特殊的现象归纳推理出一般的结论。

第三种是将代数工具和几何工具相结合，多角度说明周期性。Murray (1899) 不仅仅从几何的角度画出图像，观察到三角函数的周期性，还从代数意义上定义周期函数为 $f(x) = f(x+k)$ (x 是任意数， k 是常数)，并利用诱导公式 $\sin \theta = \sin(\theta + 2n\pi)$ ，说明正弦函数

的周期^[7]。Granville (1909) 利用 $\sin x = \sin(x \pm 2\pi)$ ，不断将一个周期内三角函数图象上的每个点向左右平移 2π 距离，从而将正弦函数向两侧无限延伸，从而说明三角函数的周期性^[8]。这种方式体现了数形结合的思想方法，几何直观和代数推理可以相互补充，相互印证，更有利于学生掌握三角函数图象与性质之间的内在联系。

三角函数作为一种特殊的周期函数，其周期性在《周期函数概念的历史》一文中已经有更为详细介绍了，故本文不再赘述。

2.2 单调性和最值

对于单调性、最值的讨论，教科书主要是通过三角函数的定义、三角函数线和三角函数图象三个角度来总结三角函数值的变化。

在早期，教科书中主要采用前两种方式。例如，Whitake (1898) 直接根据三角函数定义中的直角三角形三边的大小关系推出有界性和最值^[9]。Crockett (1896) 通过三角函数线研究出最值，进而得出函数值变化的趋势^[10]。

19 世纪后期的教科书中鲜少涉及函数图象的研究，导致对单调性和最值的研究并不深入。例如，Olney (1870) 只确定了三角函数在各象限的符号、何时取最值，没有研究函数值的变化过程^[11]。虽然通过三角函数线即可看出三角函数在各个象限内的增减情况，但无法对单调性有整体性的把握，利用函数图象可以弥补三角函数线的不足，同时可以更好的应用性质。Curtiss & Moulton (1942) 利用正弦函数的单调性得到了两条推论：同一象限内的两个角 θ 和 θ' 的正弦值不可能相等；一条介于 $y = -1$ 和 $y = 1$ 的平行于 x 轴的直线跟 0° 到 360° 的正弦函数图像最多只有两个交点^[12]。而当函数图象研究成为主流之后，单调性和最值都与图象紧密结合。三角函数的图象和性质本质是函数的几何表示和代数表示，教科书中既有利用单调性和最值来帮助画图象，如 Bullard & Kiernan (1922)，也有利用图象来研究单调性和最值，如 Davis & Chambers (1933)。

三角函数的单调性和最值不仅仅在内容上发生了较大变化，在形式上也有很大的改变。在呈现形式上，教科书以文字、表格和图形三种形式总结三角函数值的变化规律，文字占 50%，表格占 44.5%，图象占 5.5%。Harding & Turner (1915) 将讨论结果总结成表 1^[13]，表格能够清晰明了地展示各个象限内正弦函数的单调性和最值情况，利于学生从整体上把握。

表 1 三角函数在各象限的增减情况

	0°	$0^\circ-90^\circ$	90°	$90^\circ-180^\circ$	180°	$180^\circ-270^\circ$	270°	$270^\circ-360^\circ$	360°
sin	0	+, 增	1	+, 减	0	-, 减	-1	-, 增	0
cos	1	+, 减	0	-, 减	-1	-, 增	0	+, 增	1
tan	0	+, 增	∞	-, 增	0	+, 增	∞	-, 增	0

Bohannon (1904) 借助示意图来帮助学生理解三角函数的变化过程, 并在图旁边标注了“重复, 前进, 后退, 永远不停”, 并称函数单调性改变的点为转折点^[14], 这是今天极值点的雏形。

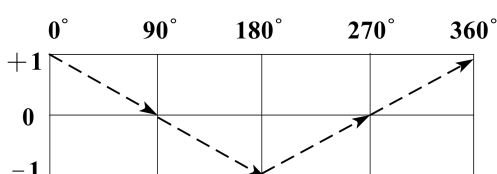


图 3 余弦函数的变化示意图

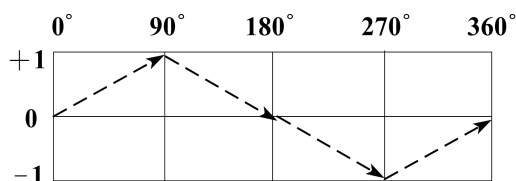


图 4 正弦函数的变化示意图

早期教科书不仅仅介绍三角函数的增减, 还介绍了函数变化率的概念, 即三角函数增减的快慢。Oliver, Wait & Jones (1881) 关注了正弦函数的变化率问题, 指出: 正弦函数一开始减少得很慢, 当接近半圆时越来越快^[4]。这表明, 早期人们从整体上直观考虑函数的变化快慢。Lyman & Goddard (1900) 则关注局部特殊值的变化率: “ $\sin x$ 在 0° 和 180° 处变化很快, 在 90° 和 270° 处变化很慢; $\cos x$ 在 0° 和 180° 处变化很慢, 在 90° 和 270° 处变化很快; $\tan x$ 自始至终变化很快”^[15]。

2.3 连续性和渐近线

早期教科书中的连续性定义并不像今日大学教材中借助极限定义, 而是通过观察函数曲线有没有间断。在六种三角函数中, 为了突出正余弦函数和正切函数的不同, 往往会将正余弦曲线和正切曲线对比。由于 $\tan 90^\circ = \infty$, 故正切曲线在 90° 是间断的, 因而教科书介绍了三角函数的连续性。

Lyman & Goddard (1900) 描述为“对于每一个变化的角度, 正余弦函数曲线都是连续的。正余切曲线在 $(2n+1)90^\circ$ 处不连续^[15]。”Wilczynski (1914) 想象用一支石墨铅笔画曲线, 由于

石墨的润滑性，正余弦曲线连续且光滑，但铅笔易断，故而正切曲线却在 $x = \frac{\pi}{2}$ 这点中断，由此又引入了函数间断点的概念^[6]。Rosenbach, Whitman & Moskovitz (1937) 还介绍了渐近线的概念以突出正切函数的无界性，渐近线将正切函数分成无数个不连续的分支^[16]。Hart(1942)画出了正切函数在 0° 到 360° 的图象，指出了渐近线为 $x = 90^\circ$ 和 $x = 270^\circ$ ，并介绍了渐近线的特点：曲线可以任意接近渐近线，但永远不能触及^[17]。

因为连续性的严格定义需要全面系统的极限理论支撑，如 $\varepsilon - \delta$ 语言，无穷大量与无穷小量等，所以早期三角学教科书中没有过多提及。

2.4 对称性和奇偶性

三角函数中正余弦函数图象既是轴对称图形，又是中心对称图形，因而具有高度的对称性。奇偶性作为一种特殊的对称性，也出现在教材之中。教科书中关于三角函数对称性和奇偶性的探究过程，经历了从特殊到一般，从具体到抽象，图像到符号的逻辑思维的转换。

教科书先从特殊的奇偶性入手，借助几何的直观感知，利用单位圆的对称性来研究奇偶性。Wilczynski (1914) 考虑离 y 轴距离相等但方向相反的任意两点 P 和 P' 。由于单位圆的对称性，它们的纵坐标为相反数，得到正弦函数是奇函数^[6]。Smail(1952)则先在单位圆中探究负角 $-\theta$ 和正角 θ 的三角函数值关系，得到 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ ，从而定义奇偶函数^[18]。从代数角度来说，奇偶性就蕴含在公式之中。Bohannon (1904) 通过泰勒展开式 $\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \dots$ 和 $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^6}{6} + \dots$ ，验证了 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ 和 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ，证明了正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数。同时揭示了正余弦函数都是超越函数，即无法用有限次基础运算得到^[14]。

为了深入研究三角函数的对称性，教科书在奇偶性研究的基础上，一方面利用诱导公式找到三角函数图象的对称轴。Davison (1919) 运用诱导公式 $\sin(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(\frac{\pi}{2} + z)$ 和 $\sin(\frac{3}{2}\pi - z) = \sin(\frac{3}{2}\pi + z)$ 等，得到一个周期内三角函数的对称轴为 $x = \frac{\pi}{2}$ 和 $x = \frac{3\pi}{2}$ ^[19]。另一方面，画出图象，利用直线分割图象，观察两部分是否对称。Wilczynski (1914) 考虑过 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 画一条平行于 y 轴的直线将正弦曲线分成两个对称部分，在不同方向上距离这条直线距离相等

的两个点的纵坐标相等，从而正弦函数关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称^[6]。对于对称中心，早期教科书很少提及。

通过几何观察和代数证明，包括利用周期性，都可以让学生了解到三角函数图像对称轴的不唯一性；帮助学生们认识到对称性是图像的固有属性，和坐标系不存在关系。

2.5 其他性质

早期教科书中还讨论过三角函数的零点问题。Perlin(1955)从定义出发，观察单位圆中当角的终边落在 x 轴上时，即 $\theta = n\pi, n \in \mathbf{Z}$ 时，正弦函数值为 0。这样就找到了正弦函数的全部零点^[20]。Wylie (1955) 画出图象，观察出函数与 x 轴的交点，从而得到零点。更进一步，教科书讨论了三角函数的多对一性质，即多个自变量取值对应同一个函数值。如 Lyman & Goddard (1900) 提到用平行于 y 轴的直线截三角函数图像，只截到一点，而用平行于 x 轴的直线，截三角函数图像，可以得到无数点^[15]。

3 结语

英美早期教科书中三角函数性质的内容逐渐丰富化，表述逐渐规范化，呈现形式逐渐多样化。内容上，性质的种类从只有单一的周期性，到出现单调性、对称性、连续性、有界性等等。所探究性质的数目也越来越多，覆盖面越来越广泛，涉及到了零点和极限理论，探究性质的工具也不再局限于某一种，而是多种途径探究，相互补充，相互印证。表达上，性质的描述也逐渐清晰规范，并且删繁就简。呈现形式上，从只有抽象的文字描述到完整的表格和示意图。早期教科书的探究为我们今天的课堂教学提供了诸多启示。

(1) 加强数学知识的关联性。早期教科书中推导性质的方式多种多样，利用的数学工具有单位圆、三角函数线、泰勒公式、极限理论等，不仅可以从多个角度相互印证性质的正确性，更有利于串联起三角函数这一章前后的知识联系。按照奥苏伯尔的有意义学习理论，教师可以在单元复习课中用不同方式推导同一性质，使得知识与学生原有认知结构产生实质性的联系。因此教师在教学中，可以交替使用多种数学工具来推导性质，有利于学生构建起知识的联系。

(2) 注重数学语言的严谨性。早期教科书中三角函数的性质表述的发展也在提醒教师要

注重学生的表达能力。《课标》中提出“三会”，即会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界^[1]。因此，教师在三角函数性质教学中，不仅要让学生在直观感知的基础上，系统、规范的认识函数的性质，更要获得精准规范的表达，培养思维的严谨性。对于性质的文字表述，要注意术语的准确。对于性质的符号语言，要注意适用范围。

(3) 体现呈现方式的多样性。早期教科书中对于性质的呈现方式多种多样，包括文字、公式、三角函数线、图象、示意图等。三角函数性质众多，往往是学生记忆的难点。认知心理学认为，长期反复记忆相同形式的内容，大脑会产生疲劳，久而久之效果会逐渐下降，所以交叉记忆会刺激大脑，更利于高效记忆。课堂教学中，教师可以鼓励学生用自己喜欢的方式梳理性质，并不限于课本的形式，帮助学生理解和记忆各个性质，这样才能真正结构化和意义化所学内容，让一个一个知识点由原来的孤岛变成一个统一整体。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 2, 21.
- [2] 甄天奇. 高中生三角函数的性质与图象认知水平调查研究[D]. 辽宁: 辽宁师范大学, 2021.
- [3] 张露露. 中国中学三角函数内容设置变迁研究(1950-2019)[D]. 内蒙古: 内蒙古师范大学, 2021.
- [4] Oliver, J. E., Wait, L. A. & Jones, G. W. *A Treatise on Trigonometry*[M]. Ithaca: Finch & Apgar, 1881: 20-25.
- [5] Loney, S. L. *Plane Trigonometry*. Cambridge[M]. Cambridge: The University Press, 1893: 42-50.
- [6] Wilczynski, E. J. *Plane Trigonometry & Applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914: 151-162.
- [7] Murray, D. A. *Plane Trigonometry for Colleges & Secondary Schools*[M]. New York: Longmans, Green & Co., 1906: 131-142.
- [8] Granville, W. A. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Co., 1909: 93-98.
- [9] Whitaker, H. C. *Elements of Trigonometry*[M]. Philadelphia: D. Anson Partridge, 1898: 24-30.
- [10] Crockett, C. W. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: American Book Company, 1896: 42-50.

- [11] Olney, E. *Elements of Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York: Sheldon & Co., 1870: 13-14.
- [12] Curtiss, D. R. & Moulton, E. J. *Essentials of Trigonometry with Applications*[M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1942: 41-48.
- [13] Harding, A. M. & Turner, J. S. *Plane Trigonometry*[M]. New York: G. P. Putnam's Sons, 1915: 88-96.
- [14] Bohannon, R. D. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1904: 184-190.
- [15] Lyman, E. A. & Goddard, E. C. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston & Chicago: Allyn & Bacon, 1900: 19-28.
- [16] Rosenbach, J. B., Whitman E. A. & Moskovitz, D. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Co., 1937: 243-249.
- [17] Hart, W. W. & Hart, W. L. *Plane Trigonometry, Solid Geometry & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: D. C. Heath & Co., 1942: 89-95.
- [18] Smail, L. L. *Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1952: 115-121.
- [19] Davison, C. *Plane Trigonometry for Secondary Schools*[M]. Cambridge: The University Press, 1919: 18-20.
- [20] Perlin, I. E. *Trigonometry*[M]. Scranton: International Textbook Company, 1955: 21-38.

美英早期三角学教科书中的反三角函数概念

刘倩雯

(华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

反三角函数的出现源于微积分的诞生。据史料记载, 早在 1669 年以前, 牛顿 (I. Newton, 1643-1727) 就已经提出了 $\sin^{-1}x$ 关于 $\sin x$ 的级数展开式, 随后英国数学家格雷戈里 (J. Gregory, 1638-1675) 于 1670 年提出 $\tan^{-1}x$ 关于 $\tan x$ 的级数展开式^[1]。1729 年, 瑞士数学家丹尼尔·伯努利 (D. Bernoulli, 1700-1782) 最先给出反正弦函数的符号表示 “A S.”^[2], 此后, 反三角函数的内容逐渐出现在三角学教科书中。

从课程标准来看,《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》未有反三角函数内容。从现行教科书来看, 人教 A 版及 B 版均指出可以利用科学计算器上的 SIN^{-1} 等键求出给定三角函数值在特定范围内对应的角, 后者据此引入 $x = \arcsin y$ 等记号; 沪教版在正文中引入反三角函数的记号, 并在例、习题中加以应用和拓广; 苏教版和北师大版则全无涉及。由此可见, 反三角函数内容在高中教科书中所占篇幅不多, 内容也较为简单。然而, 考虑初等数学与高等数学的衔接, 高中生有必要了解作为六种基本初等函数之一的反三角函数。已有研究表明, 超过 80% 的高中老师在教学中几乎不会涉及反三角函数, 而大学老师却认为学生在高中已经熟练掌握, 这一强烈反差使得反三角函数成为学生从初等数学进阶到高等数学时遇到的衔接困难之一^[3]。

目前对反三角函数的教学研究主要集中于其概念及应用, 例如梁海华等澄清了学生对反三角函数概念容易产生的理解误区, 并借助例题说明反三角函数的应用^[4], 刘春平等应用三角函数在定义域内某个单调区间上的反三角函数的解析式解决了大学数学分析的若干习题^[5]。但无论是中学还是大学阶段, 都鲜有关于反三角函数定义演变的历史研究, 致使教师很难基于知识本身的发生发展去设计或重构教学, 以突破学生的理解难点。鉴于此, 本研究聚焦反三角函数的引入及定义, 梳理 1837-1956 年间的 75 种美英三角学教科书的相关内容, 试图回答以下问题: 美英早期三角学教科书中如何引入反三角函数? 定义的方式有哪些? 以期教科书的编写

及课堂教学提供借鉴。

2 研究对象

以是否含有反三角函数内容为标准, 本文从 20 世纪 60 年代之前出版的 143 种西方三角学教科书中筛选出 75 种作为研究对象, 其中 60 种是美国教科书, 15 种是英国教科书。75 种美英三角学教科书分布于 1837-1956 年间, 若以 20 年为一时间段, 则具体分布情况如图 1 所示。其中, 对于同一作者的再版教科书, 若内容无变化, 则选择最早版本, 若内容有变化, 则将其视为不同的教科书。

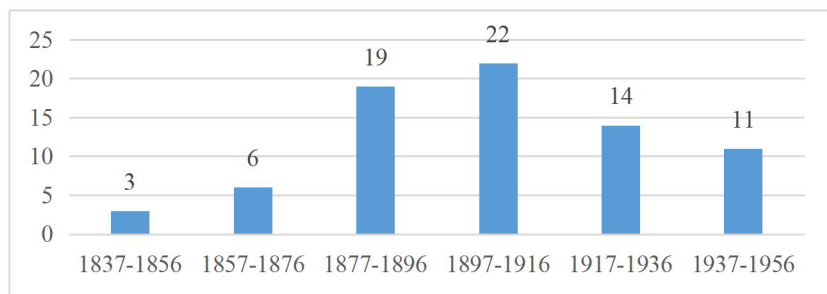


图 1 75 种美英教科书的时间分布

75 种三角学教科书中, 反三角函数概念所在章节大致可以分为 5 类: “逆符号”(inverse notation) “平面三角函数” “反三角函数” “基本原理和公式”(fundamental principles and formulae) 和 “三角方程与反三角函数”, 如表 1 所示。

表 1 反三角函数概念在 75 种教科书中的章节分布

所在章节	逆符号	平面三角函数	反三角函数	基本原理和公式	三角方程与反三角函数
教科书数量	7	17	25	9	17

早期教科书中表示反三角函数的符号主要有两种: $\sin^{-1}$ 和 $\arcsin$, 由于 $\arcsin$ 符号使用更为普遍, 因此若教科书无特殊说明, 本文则统一使用符号 $\arcsin$ 。

3 反三角函数概念的引入

75 种教科书中引入反三角函数的方式可以分为 6 类: 直接引入、三角函数引入、反函数引入、函数概念引入、运算引入、符号引入 (图 2), 可见三角函数引入所占比例最高。

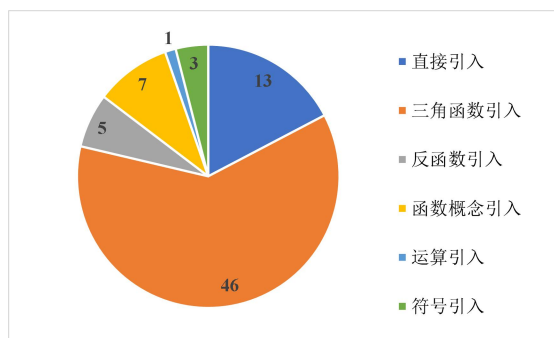


图 2 反三角函数引入的六种类型分布

3.1 直接引入

13 种教科书未作过多铺垫，直接引入反三角函数概念。部分教科书直接给出反三角函数的定义，也有教科书先定义反正弦，再用类比的方式推广至其余反三角函数。

3.2 三角函数引入

46 种教科书通过三角函数进行引入，在引入方式中占比最高，这一引入方式又可细分为 4 类。

25 种通过分析表达式 $y = \sin x$ 中的自变量 x 引入：“ $y = \sin x$ 表示 y 是 x 的正弦值，那么 x 是 y 的什么呢？”分析可得 x 是正弦值为 y 的角，使用符号 $\arcsin x$ 来表示角 x ，称为反正弦函数。

13 种通过分析与三角函数相同变量关系的不同表示方法进行引入。例如 Moritz（1915）称：“ $y = \sin x$ 和 $x = \arcsin y$ 表示同种函数关系。由于 $\sin x = \sin(\arcsin y) = y$ ， $\arcsin y = \arcsin(\sin x) = x$ ，sine 和 arc-sine 可相互抵消，因此称 $\arcsin x$ 为反正弦。”^[6] Chauvenet（1851）称：“表达式 $y = \sin x$ 中， y 是关于 x 的显函数， x 是关于 y 的隐函数，若将 x 表示为关于 y 的显函数，可以使用符号 $x = \arcsin y$ ，该符号表示 x 是正弦为 y 的角，并称 x 为 y 的反函数。”^[7]

5 种利用给定三角函数值时有无数个与之对应的角这一特殊性质引出反三角函数。例 Kenyon & Ingold（1913）：“当表达式 $y = \sin x$ 中的 y 已知时， x 有无限多个角与之对应，其中任一角可记为 $x = \arcsin y$ 。”^[8]

3 种通过逆向研究三角函数的必要性进行引入。例如 Wilczynski（1914）表示：“基于目前

的研究，我们称三角学是对于三角函数性质的讨论，但目前对于三角函数的讨论是单向性的，即正向考虑问题：给定角度，求三角函数值。如今我们需要逆向考虑问题：给定三角函数值，求对应角度。”^[9] Vance（1954）称：“如果不呈现三角函数的反函数，那么对于三角函数的讨论将会是不完整的。一方面，反三角函数相当重要且广泛应用于高等数学中，另一方面，对反三角函数的研究可以帮助阐明三角函数的性质。”^[10]

3.3 反函数引入

5 种教科书通过函数与反函数的关系引入。如 Bohannon（1904）：“一般的，若 y 是 x 的函数，则 x 也是 y 的函数，两者互为对方的反函数。用符号表示即为： $y = F(x)$ ， $x = F^{-1}(y)$ 。

因此 $y = \sin x$ 的反函数为 $x = \sin^{-1} y$ 。”^[11]

3.4 函数概念引入

7 种教科书通过函数的定义引入新函数类型：反三角函数。其中，2 种采用“变量依赖关系”中的“应变型”定义方式^[12]，如 Richards（1878）：“若存在两个变量，其中一个变量改变导致另一个变量也随之改变，则称后者是前者的函数。例如： $\sqrt{x}$ 是 x 的函数；圆的周长是关于半径的函数。对于表达式 $y = \sin x$ ，角的正弦值是关于角的函数。但发现当正弦值改变时，角度也同样随之改变，因此角度也是关于正弦值的函数，用 $x = \arcsin y$ 表示。”^[13] 3 种采用“变量依赖关系”中的“依赖型”定义方式^[12]，如 Taylor（1904）：“一个变量的值取决于一个或多个其余变量时，它就被称为这些变量的函数。对于表达式 $y = \sin x$ ， $\sin x$ 取决于角度 x ， $\arcsin x$ 也取决于 y 的值，因此正弦值是关于角度的函数，角度是关于正弦值的函数。”^[14] 2 种采用“变量对应关系”中的“无变化范围的变量对应”定义方式^[12]，如 Dresden（1921）：“变量 x 和 y ，若任一变量的任一值对应另一个变量的一个或多个值，则称 x 是 y 的函数且 y 是 x 的函数。 $y = \sin x$ 建立了变量 x 和 y 之间的关系：每个 x 都有对应的 y ，同时每个 y 也有对应的 x 。因此 x 是 y 的函数，称为反正弦函数。”^[15]

3.5 运算引入

Dickson (1922) 从运算与逆运算的角度引入：“大多数运算都伴随着逆运算。例如平方运算 $y = x^2$ ，其逆运算为找到一个数使其满足平方后为数 y ，可记为 $x = \pm\sqrt{y}$ 。同理，当我们考虑余弦为正运算，例 60° 的余弦值为 $\frac{1}{2}$ ，若存在逆运算，则需要找到一个角的余弦值为 $\frac{1}{2}$ 。这样的角是存在的，且不唯一。我们用符号 $\arccos 60^\circ$ 或 $\cos^{-1} 60^\circ$ 来表示任意一个余弦值为 $\frac{1}{2}$ 的角度。若将正运算比作向北走 4 英里，逆运算则为向南走 4 英里，而非向北走 $\frac{1}{4}$ 英里。因此 $\cos^{-1} x$ 中的符号 “ -1 ” 不是指数，不代表取倒数的含义。”^[16]

3.6 符号引入

3 种教科书通过强调符号的产生方式及由来引入反三角函数。Twisden (1860) 表示：“John Herschel 最先提出符号 $\tan^{-1} \theta$ 是符号系统中的一部分。”^[17] Clarke (1888) 通过类比的方式引入反三角函数的符号：“若 $ab = m$ ，则记为 $b = a^{-1}m$ ，通过类比，若 $\tan m = A$ ，则 $A = \tan^{-1} m$ 。”^[18] Bocher & Gaylord (1914) 通过介绍符号 $\sin^2 x$ ， $\sin^3 x$ 的含义引出特殊的 $\sin^{-1} x$ 。书中称：“我们常使用符号 $\sin^2 x$ ， $\sin^3 x$ 等表示 $\sin x$ 的平方，立方等。但此符号系统中有一个重要的例外： $\sin^{-1} x$ 。 $\sin^{-1} x$ 并不代表 $\sin x$ 的负一次方（即倒数），而是关于 x 的反正弦，代表一个正弦为 x 的角。”^[19]

3.7 小结

75 种教科书中反三角函数的引入方式丰富多彩。其中，17% 的教科书直接给出反三角函数的定义或符号，虽然简洁明了，但对于反三角函数这类较复杂的概念，灌输式的引入方式可能会导致学生对概念的学习兴趣不高，对概念的理解也不深刻。61% 的教科书从三角函数进行引入，在引入方式中占比最高。究其原因，一方面，反三角函数与三角函数联系紧密；另一方面，在学习反三角函数前学生已掌握三角函数的内容，此时通过已知的三角函数引入未知的反三角函数，可以为学生搭建概念学习的脚手架，有助于学生知识体系的构建。7% 的教科书利用从一般到特殊的思想方法，先阐述函数与反函数的关系，再具体至三角函数的反函数进行引入。

此方式强调反三角函数的本质，但也可能产生由于反函数的概念较为抽象而导致学生较难理解的问题。9%的教科书根据函数的定义确定反三角函数为一种函数，从而进行引入，此引入方式学生较易理解，但也可能导致学生忽略其与三角函数的关系，将反三角函数视为一个完全独立的函数。个别教科书还通过介绍反三角函数符号的产生方式以及将反三角函数视为一种运算引入。

4 反三角函数的定义

75 种教科书中出现了 3 种关于反三角函数的术语：反三角比（inverse trigonometrical ratio），反圆函数（inverse circular function）和反三角函数。其中，反三角函数是 75 种教科书中出现频率最高，也是目前最普遍使用的术语。由于三角函数又称为三角比和圆函数，因此对应出现了反三角比和反圆函数的术语，但是早期教科书中仅有 8 种采用反圆函数的表述，其中，Crockett（1896）和 Olney（1870）甚至混淆了圆函数（circular function）和反三角函数，如 Olney（1870）：“圆函数（circular function）是角度被正弦，余弦，正切或者其他三角比表示的函数，记作 $\arcsin y, \arccos x, \arctan z$ 。”^[20]由此可见，早期的部分数学家对反三角函数的概念尚未建立起清晰的认识。此外，在剩余 6 种教科书中，2 种将反圆函数定义为限定区间内的反三角函数，是单值函数。这与《数学大辞典》对反圆函数的解释一致：“在实函数中一般只研究单值函数，只把定义在包含锐角的单调区间上的基本三角函数的反函数称为反三角函数，这时又称为反圆函数。”^[21]

75 种教科书中，3 种未给出反三角函数的定义。在剩余的 72 种教科书中，根据定义的方式，可以分为“形式定义”“表示定义”“关系定义”“符号说明”4 类，具体数量如图 3 所示。

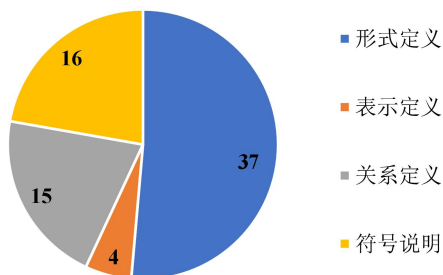


图 3 不同反三角函数定义的数量

4.1 形式定义

“形式定义”是根据反三角函数符号表示的形式来定义反三角函数，是早期教科书中占比最高的定义。如 Wheeler（1878）定义：“ $\arcsin x$ ， $\arccos y$ ， $\arctan z$ 等被称为反三角函数，读作正弦为 x 的角，余弦为 y 的角，正切为 z 的角。”^[22] Wells（1883）给出反正弦的形式定义：“表达式 $\arcsin y$ 称为 y 的反正弦，它表示一个正弦为 y 的角。”^[23]

在形式定义中，不同教科书对于“ $\arcsin x$ ， $\arccos y$ ， $\arctan z$ ”的描述不尽相同。部分教科书称其为符号（notations/symbols），也有教科书称其为表达式（expressions）、变量（quantities）或函数（functions）。

6 种教科书用符号来描述“ $\arcsin x$ ， $\arccos y$ ， $\arctan z$ ”等。Pendlebury（1895）在书中解释：“必须理解 $\arcsin x$ ， $\arccos y$ ， $\arctan z$ 等如 θ ， α ， A ， B 一样，并非新的概念，只是一种符号。此符号代表着独特的含义，当其出现时，用相同的方式处理即可。”^[24] 20 世纪之前的 2 种教科书均采用“notation”的表示，20 世纪后，“symbol”一词出现，相较于前者，后者表示具有固定含义的符号。

12 种教科书用表达式一词来描述，表达式一般指变量、函数或常量、变量或函数的组合。大多数教科书中的表达式指变量，如 Richards（1878）在书中定义：“表达式 $\arcsin x$ ， $\arccos y$ ， $\arctan z$ ， $\operatorname{arcsec} \frac{a}{b}$ 等独立存在，被称为反三角函数。”^[13] 也有教科书中的表达式指常量，如 Durfee（1901）定义：“表达式 $\arccos \frac{2}{3}$ ， $\arctan \frac{3}{2}$ ， $\operatorname{arcsec} \frac{5}{3}$ 读作余弦为 $\frac{2}{3}$ 的锐角，正切为 $\frac{3}{2}$ 的锐角，正割为 $\frac{5}{3}$ 的锐角。这些被称为反三角函数。”^[25] 值得注意的是，Durfee 实际上只定义了锐角反三角函数，并未推广至任意角。

5 种教科书用变量一词来描述。如 Passano（1918）定义：“ $\arcsin x$ ， $\arccos x$ ， $\arctan x$ ， $\operatorname{arcsec} x$ ， $\operatorname{arccot} x$ ， $\operatorname{arccsc} x$ 这六个变量被称为反三角函数。”^[26]

除此之外，Hun & MacInnes（1911）等 2 种用函数一词来描述，给出定义如下：“函数 $\theta = \arcsin a$ ， $\theta = \arctan a$ 等称为反三角函数。对于任意角度 θ ，三角函数唯一确定，但对于任一正弦值，角度有无数个，在所有值中最小正值为主值。”^[27]

4.2 表示定义

“表示定义”是用“三角函数值表示的角度”来定义反三角函数，在定义方式中占比最低。不同教科书中的定义略有不同。如 Granville（1909）定义：“ 30° 的角可以用‘正弦值为 $\frac{1}{2}$ 的最小正角’表示，因此考虑此角度是关于正弦值的函数，被称为反三角函数，通过符号 $\arcsin x$ 来表示。”^[28] Nixon（1892）定义：“如果一个三角函数有一个定值，那么其对应的最小正角就称为相应的反三角函数。”此定义也使得反三角函数为单值函数。^[29]

4.3 关系定义

“关系定义”是通过函数与反函数的关系来定义反三角函数，约占 20%。如 Bohannan（1904）定义：“ $y = \sin x$ ， $y = \cos x$ ， $y = \tan x$ 等， y 是关于 x 的函数，那么 x 也是关于 y 的函数，并用符号 $\arcsin x$ ， $\arccos x$ ， $\arctan x$ 表示。相应的两函数互为反函数，称 x 是 y 的反三角函数。”^[11]

4.4 符号说明

16 种教科书未明确定义反三角函数，仅给出反正弦，反正切或反余切的符号说明。如 Dickson（1922）：“已知余弦为 $\frac{1}{2}$ 的角度中有 60° ，用符号 $\arccos \frac{1}{2}$ 来表示余弦为 $\frac{1}{2}$ 的角即角度 $60^\circ \pm 360^\circ n$ 。”^[30]

4.5 分布与讨论

4.5.1 反三角函数定义分布情况与讨论

以 20 年为单位，“形式定义”“表示定义”“关系定义”和“符号说明”的具体分布情况如图 4 所示。

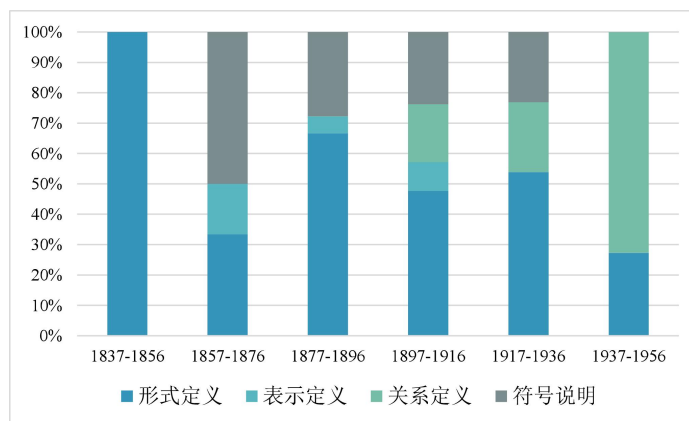


图 4 反三角函数定义的演变

“形式定义”强调反三角函数的表现形式，因其直观，简洁的优势，在每个时期均有出现，占据主流近一个世纪。“表示定义”体现了反三角函数诞生的意义，即用三角函数表示角，但这一定义较为笼统，过于概括，因此其所占比重相对较小，出现时期也较短。“符号说明”仅对符号进行了解释，未给出明确的定义，这侧面反映在三角学早期，反三角函数并非研究重点，因此部分教科书也并未对其过多展开。20 世纪以来，人们更多地使用“关系定义”，从一般的函数与反函数的关系出发，通过三角函数的反函数定义反三角函数，此定义中反三角函数不再是一个孤立的概念，而是与已有的较为完善的三角函数概念联系起来，又可以作为反函数的一个实例。由此不难理解现行的反三角函数定义即为“三角函数的反函数”。《数学大辞典》中表示：“反三角函数是三角函数的反函数。由于基本三角函数具有周期性，故反三角函数是多值函数，这种多值的反三角函数包括反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数、反正割函数、反余割函数，分别记为 $\text{Arcsin } x$ 、 $\text{Arccos } x$ 、 $\text{Arctan } x$ 、 $\text{Arccot } x$ 、 $\text{Arcsec } x$ 、 $\text{Arccsc } x$ 。 $\arcsin x$ 是 $\text{Arcsin } x$ 的单值分支，满足条件 $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ 。”^[21]值得注意的是，现行教科书将 $\text{Arcsin } x$ 定义为通值，将 $\arcsin x$ 定义为主值，这一点在复变函数中也得到了验证，《复变函数论》中称：“记号 $w = \text{Arctan } z$ 指的是方程 $\tan w = z$ 的解的总体。”^[31]但在早期教科书中，除了 Hall & Frink（1910）将 $\arcsin x$ 定义为主值，用 $\text{Arcsin } x$ 表示所有正弦为 x 的角^[32]之外，其余教科书均将 $\arcsin x$ 定义为通值，而将 $\text{Arcsin } x$ 定义为主值。可见，早期教科书中对 $\arcsin x$ 和 $\text{Arcsin } x$ 的主流定义与当今的主流定义相反。

4.5.2 反三角函数符号的讨论

75 种教科书中提及的符号有“ $\sin^{-1}$ ”“ inv sin ”“ anti sin ”“ $\sin^{-1}$ ”和“ $\arcsin$ ”共 5 类，其中“ $\sin^{-1}$ ”“ inv sin ”和“ anti sin ”都仅在一本教科书中出现，故暂且不予考虑。若以 20 年为单位，则符号的分布情况如图 5 所示。

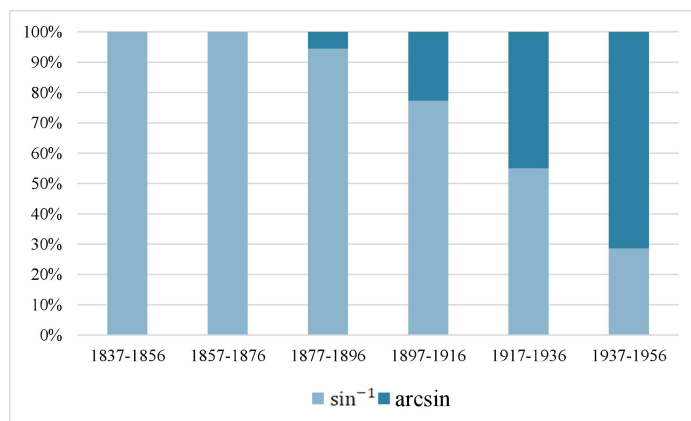


图 5 符号“ $\sin^{-1}$ ”和“ $\arcsin$ ”的分布情况

Daniel Bernoulli 于 1729 年使用符号“ $A S.$ ”表示反正弦，这成为反三角函数的首个符号。18 世纪，反正弦的符号经历的变化过程为：“ $A S.$ ”“ $A \sin$ ”“ arc.sin ”“ arc.sin. ”“ Arc.sen. ”，反正切的符号变化过程为：“ $A t$ ”“ $A \overline{\text{tag}}$ ”“ $\text{arc.tang./arc.tangent}$ ”“ Arc.Tang. ”。^[2]

1813 年，英国科学家赫歇尔（J. Herschel, 1792-1871）在《伦敦哲学学报（*Philosophical Transactions of London*）》上提出使用符号“ $\cos.^{-1}$ ”来代替“ $\arccos.$ ”，赫歇尔承认一些作者使用“ $\cos.^m A$ ”表示“ $(\cos.A)^m$ ”，但在微积分中，将 d 和 Δ 运算重复的次数作为指数附加在 d 和 Δ 上，具有简洁且清晰的优势，对于积分的逆运算，采取同样的方式添加负指数。因此定义 $\sin.^{-1} x = \arcsin(x)$ 。^[2]赫歇尔在《有限差分演算应用实例集（*A collection of examples of the applications of the calculus of finite differences*）》书中给出具体推导过程： $f(f(x)) = f^2(x)$ ， $f(f(f(x))) = f^3(x)$ 。由此可以得到 $f^m f^n(x) = f^{m+n}(x)$ 。令 $n=0$ ， $m=1$ 得到 $ff^0(x) = f(x)$ ，故 $f^0(x) = x$ ，再令 $n=-1$ ， $m=1$ ，得到 $ff^{-1}(x) = f^0(x) = x$ ，因此 $f^{-1}(x)$ 表示“函数值为 x 的量”，为 $f(x)$ 的逆函数。这种表示方法不仅让反三角函数的符号更简便，还证明了此运算性质

的普遍性，更在不引入新记号的前提下表示逆函数。^[33]事实上，最早提出符号 f^{-1} 的并非赫歇尔，而是德国分析学家布尔曼（H. Burmann, ? -1817），但后者未想到将其用于反三角函数。^[2]

由图 5 可见，19 世纪以前绝大多数美英教科书均使用赫歇尔提出的符号来表示反三角函数，这一点在史料中也得到证实：“在英国，赫歇尔的符号迅速普及，而美国在 19 世纪主要受英国的影响。”^[2]但是，由于符号的“ -1 ”和代数中的指数“ -1 ”形式相同，学生容易类比 $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ，将 $\sin^{-1} x$ 错误理解为 $\frac{1}{\sin x}$ 。对此，教科书在引入符号 $\sin^{-1}$ 时必须进行解释说明，Wood（1885）提出使用新符号“ $\sin^{-1}$ ”来避免此问题。^[34]当发现欧洲流行的符号 $\arcsin$ 可以很好的解决此问题时，教科书编写者们逐渐使用 $\arcsin$ 来代替 $\sin^{-1}$ 。Miller（1894）也表示：“符号 $\arcsin$ 与 $\sin^{-1}$ 等价，在德国和法国普遍流行，但前者更为优越。”^[35]从图 6 中可以看到 1910 年后，符号 $\arcsin$ 的出现频率逐渐增加，且从 1938 年起，使用频率超过符号 $\sin^{-1}$ ，成为反三角函数的主要表示符号。如今，符号 $\arcsin$ 和 $\sin^{-1}$ 均存在，而符号“ $\sin^{-1}$ ”“ inv sin ”“ anti sin ”销声匿迹。

5 结论与启示

1837-1956 年间的 75 种美英早期三角学教科书共计给出 6 种引入方式，其中三角函数引入的方式所占比例最高。早期教科书中，按照时间顺序，共出现了“形式定义”“表示定义”“关系定义”3 类定义方式，而 21% 的教科书未明确定义反三角函数，仅给出反三角函数的符号说明。其中，形式定义在 20 世纪以前一直是早期教科书中的主流定义，20 世纪以来，关系定义逐渐兴起，代替形式定义成为主流定义。早期教科书中反三角函数的引入和定义及其演变过程，对今日课堂教学与教科书的编写均有所启示。

其一，多样导入，早期教科书中的 5 种引入方式各有千秋，教师在设计课堂教学时，可以根据需要选择、融合不同的引入方式。比如从三角函数引入，可以通过设问“你认为正弦函数 $y = \sin x$ 中， x 是什么？”引入。波利亚（G. Pólya, 1887-1985）曾说：问题是数学的心脏。教师可以借助问题让学生思考 x 是正弦为 y 的角，可以加深学生对于反三角函数本质的理解；又如逆运算引入，可以先由学生已学的运算与逆运算切入，如平方的逆运算为开平方根，那么正弦值的计算有逆运算吗？再具体举例 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ，类比平方与开平方，引导学生发现此运算的

逆为找到角，使其正弦值为 $\frac{1}{2}$ ，教师还可追问：“这样的角唯一吗？”为后续反三角函数的定义中的限定区间做铺垫。

其二，建立联系，反三角函数并非孤立的概念，它与三角函数密切相关，因此课堂教学需要建立其与三角函数的联系，并引导学生思考。尽管现行教科书是通过三角函数的反函数定义反三角函数，但由于反函数的内容在中学教材中被简化，学生对于反函数的理解存在一定的困难，故而学生虽知道反三角函数是三角函数的反函数，但却并不能理解两者间到底有何联系，常将反三角函数视为一种新函数，并以说明符号 $\arcsin x$ 、 $\arctan x$ 代以严格定义反三角函数。在教学中，教师应强调三角函数与反三角函数的紧密联系，例如通过具体实例，让学生明确虽然两种函数形式、图像均不同，但实则表示完全相同的变量关系；也可通过介绍反三角函数概念的知识源流，帮助学生理解其诞生与三角函数密不可分。

其三，厘清主次，我们建议在中学阶段，无论是教科书编写还是课堂教学，都应该以 $\arcsin$ 等作为反三角函数的主要表示，辅以介绍符号 $\sin^{-1}$ 等。因为学生经历三角函数的学习后，往往已经熟练掌握 $\sin^2 x = (\sin x)^2$ ，很容易产生知识的负迁移，即将 $\sin^{-1} x$ 错误理解为 $(\sin x)^{-1}$ ，即 $\frac{1}{\sin x}$ ，使用符号 $\arcsin$ 可以有效避免此问题。同时，考虑到 $\sin^{-1}$ 的用途，如计算器的按键为 SIN^{-1} ，因此对符号 $\sin^{-1}$ 的介绍也是必要的。此外，教师可以在教学中介绍反三角函数符号的产生及由来，让学生感悟数学中一个新概念的诞生是不易的，需要数学家们前赴后继的努力与摸索，从而渗透德育之效。

其四，架构桥梁，重视反三角函数衔接初等数学和高等数学的桥梁作用。虽然反三角函数目前没有进入课程标准，但其重要性不言而喻，教科书在编写时不应简单略过反三角函数的内容，教师也可以在反三角函数的教学中巧妙设问、留白，为后续高等数学的学习设下伏笔。例如，中学教科书将反三角函数定义为限定区间内三角函数的反函数，如果考虑完整的定义域，除去单值函数的限制，那么三角函数的反函数有何性质，图象又如何？我们能够精确求解的反三角函数极少，对于大多数反三角函数如 $\arcsin \frac{1}{5}$ ，如果没有计算器的辅助，我们能否得到结果？历史上数学家们利用反三角函数精确 π 值，他们是如何做到的？思考上述问题，或将减少学生从初等数学过渡到高等数学时所遇到的衔接困难。

参考文献

- [1] Durell, F. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: Merrill, 1910: 173.
- [2] Cajori, F. *A History of Mathematics Notations*[M]. New York: Dover Publications, Inc., 1993: 175-177.
- [3] 高雪芬, 王月芬, 张建明. 关于大学数学与高中衔接问题的研究[J]. 浙江教育学院学报, 2010, 28(03): 30-36.
- [4] 梁海华, 马腾冰. 关于反三角函数几个基本概念和性质的探讨[J]. 中学数学研究 (华南师范大学版), 2019(21): 20-22.
- [5] 刘春平, 刘晓平. 反三角函数的解析式及其应用[J]. 大学数学, 2015, 31(01): 88-90.
- [6] Moritz, R. E. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1915: 245.
- [7] Chauvenet, W. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Philadelphia: Hogan, Perkins & Co., 1851: 41.
- [8] Kenyon, A. M. & Ingold, L. *Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Co., 1913: 100.
- [9] Wilczynski, E. J. *Plane Trigonometry & Applications*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914: 214.
- [10] Vance, E. P. *Trigonometry*[M]. Cambridge: Addison-Wesley Publishing Co., 1954: 74.
- [11] Bohannon, R. D. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Allyn & Bacon, 1904: 115-117.
- [12] 刘思璐, 沈中宇, 汪晓勤. 英美早期代数教科书中的函数概念[J]. 数学教育学报, 2021, 30(4): 55-62.
- [13] Richards, E. L. *Elements of Plane Trigonometry*[M]. New York: D. Appleton & Co., 1878: 85-86.
- [14] Taylor, J. M. *Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Co., 1904: 106.
- [15] Dresden, A. *Plane Trigonometry*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1921: 90-95.
- [16] Dickson, L. E. *Plane Trigonometry with Practical Applications*[M]. Chicago: Benj H. Sanborn & Co., 1922: 113.
- [17] Twisden, J. F. *Plane Trigonometry, Mensuration & Spherical Trigonometry*[M]. London & Glasgow: Richard Griffin & Co., 1860: 318.
- [18] Clarke, J. B. *Manual of Trigonometry*[M]. Oakland: Pacific Press, 1888: 14-15.

- [19] Bocher, M. & Gaylord, H. D. *Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1914: 54-55.
- [20] Olney, E. *Elements of Trigonometry, Plane & Spherical*[M]. New York & Chicago: Sheldon & Co., 1870: 16.
- [21] 王元. 数学大辞典(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 799.
- [22] Wheeler, H. N. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Heath, 1878: 37-38.
- [23] Wells, W. *A Practical Textbook on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston & New York: Leach, Shewell & Sanborn. 1883: 65.
- [24] Pendlebury, C. *Elementary Trigonometry*[M]. London: George Bell & Sons, 1895: 161.
- [25] Durfee, W. P. *The Elements of Plane Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1901: 13.
- [26] Passano, L. M. *Plane and Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1918: 62-63.
- [27] Hun, J. G. & MacInnes, C. R. *The Elements of Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: The Macmillan Company, 1911: 36.
- [28] Granville, W. A. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: Ginn & Co., 1909: 84.
- [29] Nixon, R. C. J. *Elementary Plane Trigonometry*[M]. Oxford: The Clarendon Press, 1892: 138.
- [30] Dickson, L. E. *Plane Trigonometry with Practical Applications*[M]. Chicago: Benj H. Sanborn & Co., 1922: 164-165.
- [31] 钟玉泉. 复变函数论(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 87.
- [32] Hall, A. G. & Frink, F. G. *Plane & Spherical Trigonometry*[M]. New York: Henry Holt & Co., 1910: 117-118.
- [33] Herschel, J. F. W. *A collection of examples of the applications of the calculus of finite differences*[M]. Cambridge [Eng.] Printed by J. Smith and sold by J. Deighton & sons; 1820: 5-6.
- [34] Wood, De V. *Trigonometry, Analytical, Plane & Spherical*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1885: 31-32.
- [35] Miller, E. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*[M]. Boston: Leach, Shewell & Sanborn, 1894: 12-13.

教学实践

HPM 视角下圆锥曲线探究式教学

戴泽莉¹, 钱秦², 秦语真²

(1. 淮南第二中学, 安徽 232000; 2. 华东师范大学教师教育学院, 上海 200062)

1 引言

圆锥曲线是平面解析几何的核心内容, 是用代数方法研究曲线几何性质的典型示范, 也是高考的一大热点和难点。在提倡将数学文化融入数学教学的今天, 不少学者开发了基于数学史的圆锥曲线课例, 其中椭圆和双曲线的教学案例较多^[1-5], 而抛物线的案例稍少^[6]。同时, 圆锥曲线是一个整体, 各知识点之间具有密切的联系。所以, 不仅可以在单个知识点的教学中使用数学史, 也可以借助数学史进行圆锥曲线单元教学设计。

一些学者的研究还发现, 学生在圆锥曲线的学习中普遍存在以下问题^[7-8]: (1) 大部分学生不喜欢本章的内容, 感觉内容太难; (2) 对定义的理解和掌握不够深刻; (3) 能够直接利用圆锥曲线的几何性质解决浅层次的数学问题, 但不能灵活利用几何性质解决深层次的数学问题; (4) 学生的数学应用能力比较薄弱。分析造成这些问题的原因, 一方面, 圆锥曲线内容难度较高, 学起来容易枯燥乏味。另一方面, 可能是由于现在圆锥曲线教学中重“数”轻“形”, 导致学生对于定义和几何性质没有清晰的把握。事实上, 人们对圆锥曲线的研究是从“形”开始的, 万万不可忽视其“形”的性质。

探究学习能激发学生学习兴趣, 提高学生的课堂参与度, 是培养学生核心素养的有效方式。同时, 数学史能揭示知识发生和发展的过程, 促进学生对概念的理解。因此, 我们从 HPM 视角开展圆锥曲线探究式教学, 进行液面形状、球体影子和旦德林双球的数学实验探究, 联系圆锥的截口曲线与教材中圆锥曲线的定义。以期解决学生在学习中的上述问题, 增强学生对圆锥曲线概念和几何性质的本质理解, 体会数学的应用价值, 感悟数学史的文化价值。

2 教学准备

2.1 教材分析

“圆锥曲线”位于人教 A 版数学选择性必修第一册第三章《圆锥曲线的方程》，内容包括椭圆、双曲线和抛物线的定义，标准方程和简单几何性质。本章的章引言部分指出，用与圆锥的轴成不同角度的平面截对顶圆锥，可以得到不同的截口曲线（椭圆、双曲线、抛物线）。但教材中并没有给出圆锥的截口曲线与圆锥曲线定义之间的内在联系，易使学生产生似懂非懂的感觉。因此，在学生学有余力的前提下，揭示圆锥曲线截线定义和轨迹定义之间的关系十分有必要。

2.2 学情分析

学生通过本章节的学习，已经掌握椭圆、双曲线和抛物线的定义，标准方程和简单几何性质。学生具备求轨迹方程的一般方法，掌握立体几何的一般性知识以及直线与圆的知识，了解用平面去截圆柱体和圆锥体可以产生圆锥曲线。但是，学生没有平面截圆柱或圆锥体的实物感知，没有在实物模型中探究过焦点的位置，也缺少从生活情境中提炼出圆锥曲线模型，进而运用所学的数学知识系统性地研究圆锥曲线的学习体验。故而，在教学中，让学生做实验，构建模型，提出数学问题，解决问题。

2.3 数学史分析

古希腊数学家梅内克缪斯（Menaechmus, 约前 380-约前 320）利用垂直于母线的平面去截顶角分别为直角、钝角和锐角的正圆锥，得到直角圆锥曲线（即抛物线）、钝角圆锥曲线（即双曲线）和锐角圆锥曲线（即椭圆）^[3]。而阿波罗尼奥斯（Apollonius, 约前 262-约前 190）则用不同方向的平面截同一个斜圆锥，得到齐曲线（抛物线）、盈曲线（双曲线）和亏曲线（椭圆）。阿波罗尼奥斯以后，希腊数学家对圆锥曲线贡献不多。

之后的一千多年里，圆锥曲线的研究没有较大进展，主要是将其应用于物理、天文学中。直到 17 世纪初，费马（P. de Fermat, 1601~1665）和笛卡尔（R. Descartes, 1596-1650）在研究“三线轨迹”和“四线轨迹”的基础上创建了解析几何^[9]，数学家们重新运用代数的方法对圆

锥曲线的定义、方程和性质进行了探讨，圆锥曲线的研究才终于又迎来一个新的高峰。1822 年，比利时数学家旦德林（G. P. Dandelin, 1794-1847）利用对顶圆锥里的两个与圆锥侧面和椭圆截面都相切的内切球，直接在圆锥上作出了椭圆的焦点，利用球的切线长定理，导出了椭圆的第一定义^[10]。旦德林双球模型不仅适用于椭圆，也可以推导双曲线和抛物线的定义与性质（抛物线中为单球模型），从而在古希腊截线定义和圆锥曲线第一定义之间架起了一座桥梁。

3 教学设计与实施¹

3.1 教学目标与重难点

【教学目标】

1. 从液面的形状实验中构建平面截圆柱体和平面截圆锥体的数学模型；从球的影子实验中构建旦德林内切球模型，探究圆锥曲线焦点的位置；从旦德林双球模型的制作中，探究椭圆的简单几何性质。在三个实验探究活动中，培养学生的观察、探究及数学建模的能力。
2. 借助旦德林双球模型探究椭圆、双曲线和抛物线的焦点及准线问题，综合运用立体几何和平面解析几何的知识，经历发现数学问题、提出数学问题和解决数学问题的过程。
3. 让学生在实验探究中感悟数学史的文化价值和数学的应用价值。

【教学重点】

1. 从球体影子实验中抽象出平面截圆柱和圆锥体模型，并构造旦德林内切球模型，探究圆锥曲线焦点的位置。
2. 从制作的旦德林双球模型中，探究圆锥曲线的简单几何性质。
3. 在数学实验探究过程中，提出有价值的数学问题并加以解决。

【教学难点】

1. 制作旦德林双球模型。
2. 构造旦德林内切球模型，探究圆锥曲线焦点的位置。

¹ 本《HPM 视角下圆锥曲线探究式教学》共计两个课时，第一课时聚焦圆锥曲线的焦点；第二课时聚焦圆锥曲线的准线。

3.2 教学过程

【第一课时】

3.2.1 定义重温，引入探究

【问题1】 这段时间学习的三类圆锥曲线的定义分别是什么？

【说明】 在学生学完圆锥曲线的平面轨迹定义后，需要学生们在立体图形中寻找圆锥曲线的焦点，而教材中圆锥曲线的定义，都是围绕焦点展开的，因此首先复习定义，为本节实验课的探究活动提供方向。

3.2.2 历史回顾，介绍模型

师：很久以前，人们就已经在研究圆锥曲线了。首先介绍一位非常伟大的数学家阿波罗尼奥斯，他写了一本书《圆锥曲线论》。但在之后的一千多年里，圆锥曲线的研究却没有较大进展。直到笛卡尔和费马创造了解析几何，人们才开始用代数的方法去研究这些轨迹问题，也就是我们现在说的解析几何思想。

【问题2】 阿波罗尼奥斯曾经是如何研究圆锥曲线的？

【说明】 了解阿波罗尼奥斯的对顶圆锥模型。

师：阿波罗尼奥斯提出了一个模型，他用平面去截对顶圆锥。如图，大家发现用不同角度的平面去截对顶圆锥，截口曲线的形状各不相同。图 1-3 中的曲线，分别与我们最近研究的哪类曲线类似？

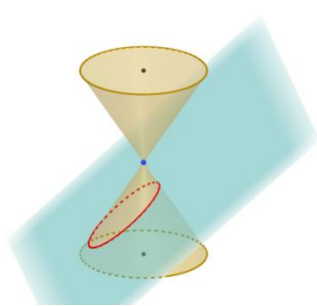


图 1 椭圆

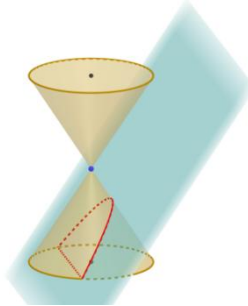


图 2 抛物线

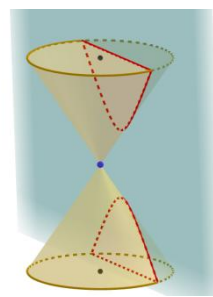


图 3 双曲线

3.2.3 实验探究，发现问题

实验一：液面形状实验

【问题 3】 分别在圆柱形（烧杯）、圆锥形（锥形瓶）容器中加入适量的液体，倾斜容器，液面与容器侧面的交线是什么形状？

【说明】 以小组为单位进行实验和讨论，通过数学实验感受圆锥曲线在生活中的体现。

生 1： 如图 4，旋转锥形瓶可以发现，液面可以呈现出椭圆和双曲线的一支，但是无法产生抛物线。烧杯跟锥形瓶差不多，可以变换出椭圆和双曲线，但是我们小组并未观察到抛物线。

师： 还有同学有不同的看法吗？

生 2： 当锥形瓶稍微倾斜一点时，液面为一个椭圆；再倾斜一点，它是双曲线的一支，但是抛物线和双曲线很像，不确定什么时候会出现抛物线。在烧杯中双曲线是不太容易呈现的，但是只要把烧杯一倾斜，就出现椭圆了。

师： 那么什么时候会出现双曲线或抛物线呢？



图 4 液面实验分享 1



图 5 液面实验分享 2

生 3： 如图 5，烧杯不倾斜时，液面是圆形，当容器倾斜但液面未接触烧杯底面时，它是椭圆。如果再倾斜，它应该是抛物线和双曲线的一支。锥形瓶不倾斜时，截口曲线也是圆形，倾斜液面到液面与底面恰好相交之间能得到椭圆。继续倾斜，得到双曲线，最后倾斜到 90 度时，应该是抛物线。

师： 如果给烧杯加上一个盖子，能得到什么圆锥曲线呢？

生 4： 椭圆和双曲线，抛物线不太确定。

师： 大家基本认为，如果给烧杯加一个盖子，可能会产生双曲线和抛物线。此外，在锥形瓶中，椭圆、双曲线和抛物线这三种曲线都能产生，但是大家好像认为倾斜过程中产生这三种曲线的顺序不太一样。椭圆大家没有异议，当截口曲线不封闭时，大家便难以确定其图形，什

么时候出现双曲线和抛物线也不太明确，这些都值得我们进一步探究。

实验二：球体影子实验

【问题 4】课前让同学们做过乒乓球在阳光下的影子实验，我们发现影子只有椭圆和圆两种形状。今天第二个实验，我们继续做影子实验，也就是球体在不同光线下的影子。观察乒乓球在灯光下影子的形状有哪些？

【说明】球体影子实验是对液面形状实验的进一步拓展，本实验的探究可以较好地回答实验一的困惑，为后续引出旦德林内切球模型铺垫，同时也让学生直观感知焦点的位置。

生 5：当灯光正对着乒乓球时，影子是圆形，当灯光斜照乒乓球且阴影全在纸面上时，影子是椭圆形；如果阴影到了纸面外，它会出现双曲线和抛物线。如果把两个球都沾在纸上，光在两球正中间的位置正射，就会出现双曲线。但我不确定什么时候能出现抛物线。

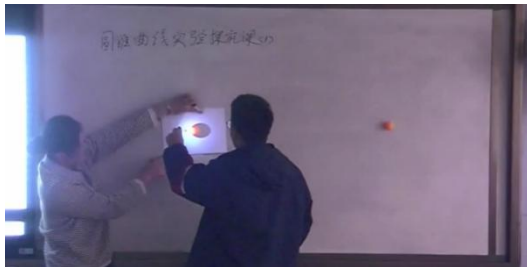


图 6 球体影子实验

实验三：旦德林双球实验

【问题 5】如图 7，数学家旦德林在阿波罗尼奥斯的对顶圆锥模型上加入了内切球，这个内切球与对顶圆锥的侧面相切，同时也和截面相切。为了使大家更好地感知旦德林的方法，老师给大家做了两个模型：圆柱和圆锥的旦德林双球模型。观察你们手中的模型，你能否提出新的数学问题？

【说明】旦德林双球模型是针对球体影子实验构造的数学模型。借助该模型能够较好地探究椭圆和双曲线的两个焦点间的性质，旦德林单球模型可以探究抛物线的焦点性质。学生通过实物制作的旦德林双球模型，能够更好地感知圆锥曲线的性质，并为他们探究提供更多的思考方向。

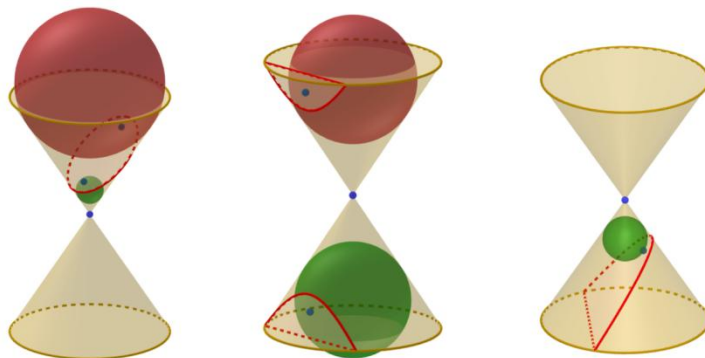


图 7 旦德林双球模型

生 6: 在圆锥双球模型中, 可以找一个平面跟这两个球同时相切, 我们可以去研究这个截面的形状。圆柱模型中也是一样的。

师: 这个问题非常好, 你手里模型中纸片是什么形状?

生 6: 椭圆。

师: 球和截面有切点, 两个球会出现两个切点。你猜切点与椭圆有什么样的关系?

生 6: 切点就是椭圆的两个焦点。

3.2.4 模型探究, 解决问题

【问题 6】大家能不能证明在圆柱旦德林双球模型中, 球与纸片的切点就是椭圆的焦点呢? 我听到有同学说回到定义, 请大家利用模型进行尝试。

【说明】借助圆柱旦德林双球模型论证椭圆焦点的位置。

生 7: 如图 8, 在曲线上任意找一点 O , 从点 O 做圆柱底面的垂线, 连接 O 与切点。我们发现 OA 和 OF_1 是这个球的两条切线, 所以 $OA=OF_1$ 。 OB 和 OF_2 为同一个球的两条切线, 所以 $OB=OF_2$ 。那么 $OF_1+OF_2=OA+OB$, 又因为 AB 是定值, 所以 OF_1+OF_2 也为定值。

师: 刚才他做的辅助线太棒了, 利用球外一点的切线长相等定理, 将 OF_1+OF_2 转化为定值 AB 。 A 点和 B 点的位置需要进一步说明, 它们都是球与圆柱的切点。这两个球和圆柱有无数个切点, 这些切点构成了两个圆, 两个圆围成一个圆柱体, AB 正好是圆柱的母线长。

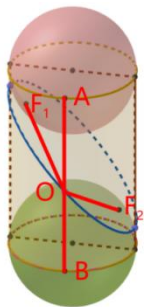


图 8 圆柱双球模型证明椭圆的焦点

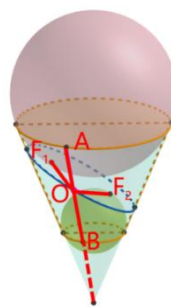


图 9 圆锥双球模型证明椭圆的焦点

师：我们已经解决了圆柱模型中内切球的切点即为椭圆焦点的问题，接下来大家进行小组讨论，如何证明圆锥模型中两个切点是椭圆的焦点？

生 8：与生 7 刚才的证法相似，如图 9，也是随意取一个点，记作 O 点。然后沿着圆锥的母线作大球的切线，切点设为 A 点，切线 OF_1 和 OA 相等，然后再向小球做切线 OB ， OB 和 OF_2 也是相等的。所以 $OF_1 + OF_2 = OA + OB$ ， $OF_1 + OF_2$ 就等于圆台的母线长 AB 。

师：刚才你标记的 A 点和 B 点是如何产生的？是否需要借助于圆锥的顶点才能产生？

生 8：需要，连接圆锥顶点与点 O ，这条线与两个球的切点就是点 A 和点 B 。

师：经历上述证明，大家再回到液面倾斜实验。圆柱形的烧杯液面倾斜时，能产生抛物线和双曲线吗？（有学生回答“可以”，有学生回答“不能”）圆柱双球模型告诉我们截面曲线有椭圆，而在圆柱内一定可以放进两个内切球，因而不能产生其他的圆锥曲线。即在圆柱的截面曲线中，可以产生椭圆，但是不能产生双曲线和抛物线。接下来，我们就用圆锥双球模型做进一步探究。

【问题 7】 平面截对顶圆锥可以产生双曲线，在上下圆锥中各放一个球与双曲线截面相切，这个时候是不是也有切点？你认为切点与双曲线有没有关系？（学生齐答“有”）猜想是什么？（学生齐答“切点为双曲线焦点”）那该如何证明呢？小组合作讨论，想一想怎么利用双曲线的定义，证明那两个切点是双曲线的焦点？

【说明】 借助圆锥旦德林双球模型论证双曲线焦点的位置。

生 9：如图 10，令对顶圆锥的顶点为 S ，任取双曲线上一点 P ，连接 PS 。 PS 与两球的交点分别为 A 和 B ，发现 B 点和 F_1 点都是大球的切点，所以 $PB = PF_1$ 。同样地， A 点和 F_2 点也是小球的切点，则 $PA = PF_2$ 。 $PA - PB$ 就是 AB ，长度为一个定值，即 $|PF_1 - PF_2|$ 为定值。

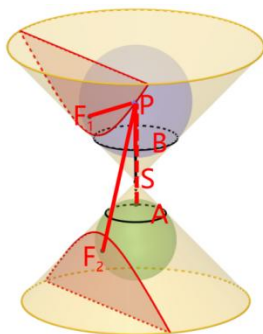


图 10 圆锥双球模型证明双曲线的焦点

【第二课时】

【问题 8】如何倾斜锥形瓶，截面曲线会产生抛物线呢？

【说明】借助圆锥单球模型论证抛物线焦点的位置。

生 10：如图 11，液面和上面的母线平行时，是抛物线；再倾斜，液面和下面的母线平行时，也是抛物线，这是两个不同的抛物线。



图 11 液面实验展示抛物线

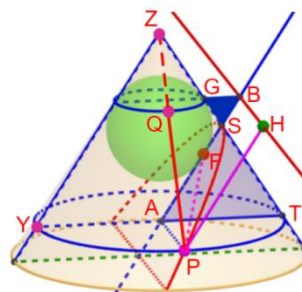


图 12 圆锥单球模型证明抛物线的焦点

师：当平面与圆锥的一条母线平行时，截面曲线为什么是抛物线呢？如图 12，我们构建圆锥单球模型，此时球与平面有切点 F ，球与圆锥侧面的切点所在的平面与圆锥截面曲线所在的平面相交于直线 l ，切点 F 和直线 l 具有什么性质呢？在截面曲线上任取一点 P ， PH 垂直直线 l 于点 H ， PF 与 PH 有何关系呢？

生 11：在小圆上取点 Q ， $PQ=PF$ ， $PQ=TG$ ， $AB=PH$ ， $AB=TG$ ，所以 $PF=PH$ 。

师：思路很好，但是有很多地方我们需要完善。在球与圆锥侧面的切点构成的圆上取点 Q ，点 Q 取在圆上的哪个位置呢？圆锥是不是有顶点？（众生回答“连过去”），将顶点 Z 与 P 点连起来，构成母线，该母线与切点圆相交于点 Q 。 $PF=PQ$ ，为什么呢？

生 11：圆外一点向圆引两条切线，切线段长度相等。

师：平面内是这样的，现在是三维的，应该是？（众生回答“球”）

生 11：球用平面去截一下，还是圆。

生 12：空间中从球外一点向球引切线，切线段长度都一样，因此 $PF=PQ$ 。 PQ 长度转换为圆台的另一条母线 GT 。 P 点到直线 l 的距离 $PH=AB$ 。 $\triangle STA$ 和 $\triangle SBG$ 为等腰三角形，可证 $TG=AB$ ，所以 $PF=PH$ 。

师：非常好。以上，我们借助圆锥单球模型证明了用平行于母线的平面去截圆锥，截口曲线为抛物线，确定了抛物线的焦点和准线的位置。

【问题 9】欧几里得曾经研究过平面内到定点与到定直线距离比值为定值的轨迹问题，几百年后帕普斯（Pappus，约 290-约 350）第一次提出轨迹是圆锥曲线。定值的取值与轨迹类型有什么关系呢？

【说明】研究平面曲线轨迹问题。

生 13：比值在 $(0,1)$ 区间内时，是椭圆；大于 1 时，是双曲线；等于 1 时，是抛物线。

师：课本中的抛物线定义提到动点到定点的距离和到定直线的距离相等，帕普斯用的是两个距离的比值为 1，二者本质是一样的，这就是圆锥曲线的统一定义。在定义中定点是圆锥曲线的什么点呢？（学生齐答“焦点”）定直线是什么线呢？（学生齐答“准线”）

【问题 10】平面截对顶圆锥模型，你认为双曲线的准线在哪里？

【说明】研究双曲线准线问题。

生 14：球与圆锥侧面相切的切点所在的平面与截面的交线为准线。

师：如何证明呢？如图 13，选取过球与截面切点的轴截面作为研究对象，在曲线上任取一点，研究该点到切点和到定直线的距离之比，如何证明该比值为大于 1 的定值呢？

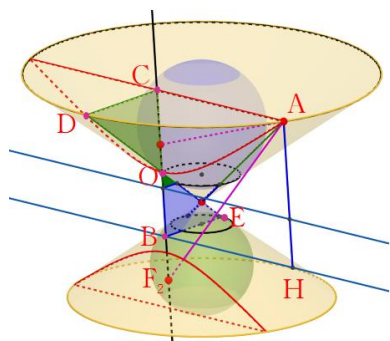


图 13 圆锥双球模型证明双曲线的准线

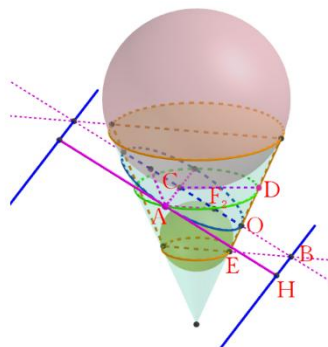


图 14 圆锥双球模型证明椭圆的准线

生 15：在曲线上取点 A ，取球与截面的切点 F ，线段 AF 最终可以转化对顶圆锥的两条母

线之和， A 到直线的距离，构造矩形进行转换，最终关注轴截面内的三角形即可。

师：非常好，最终转化为对顶三角形中边的比值。有一个核心问题，如何证明 AF_2 与 AH 比值大于 1 呢？（小组讨论，教师巡视）

生 15： $AF_2=DO+OE$ ， $AH=CO+OB$ ， AF_2 与 AH 比值等于 OE 与 OB 的比值。要证明比值大于 1，只需要关注三角形 OBE 即可。（学生相互讨论，有学生观察出 $OE=OF_2$ ，完善了生 15 的思路） $OE=OF_2$ ， O 、 B 、 F_2 三点共线， $OB<OF_2$ ，所以 OE 与 OB 的比值大于 1。

师：我们完成了从抛物线的第二定义到双曲线的第二定义论证。

【问题 11】在圆锥和圆柱旦德林双球模型中，如何探究椭圆的准线位置呢？

【说明】研究椭圆准线问题。

生 16：如图 14，在圆锥旦德林双球模型中， $AF_2=DO+OE$ ， $AH=CO+OB$ ， AF_2 与 AH 比值等于 OE 与 OB 的比值。要证明比值小于 1，只需要关注三角形 OBE 即可。由正弦定理， $\frac{OE}{OB} = \frac{\sin \angle OBE}{\sin \angle OEB}$ 。在椭圆截面曲线中，易知 $\angle OBE < \angle OEB$ 。在圆柱旦德林双球模型中，也是类似的。

3.2.5 课堂小结，分享收获

师：今天这节课你有哪些收获？你还有哪些数学问题？

生 4：我意识到可以把我们的数学问题和生活中一些具体实验结合在一起，就像在圆锥瓶中探究液面形状，有助于我们更好地理解数学问题。

生 17：刚开始我们对圆柱容器的液面进行研究，以为有三类曲线，后来经过证明发现得出只有椭圆这一种曲线。数学是一门很严谨的学科，我们要证明结论，不能光看、光做实验，那是不行的，必须要经过严格论证。

生 18：我学习了如何通过旦德林双球寻找圆锥曲线的焦点，还知道如何去寻找身边的圆锥曲线。

生 19：首先我们探究了平面几何和立体几何的关系，将立体几何转化为平面几何，证明了双曲线和抛物线的准线，研究圆锥曲线的第二定义，还有截面与高的夹角问题。提出问题：如何在模型中找到准线？

生 20：在模型中，动点到定点距离和到定直线距离的比值的不同会产生椭圆、抛物线和

双曲线。我有一个新问题：在模型中如何找到双曲线的渐近线？

师：本节课，我也有很多收获。大家提供了不同的思维视角，让我对这些问题有更多的感触。我也提出一个新问题：在旦德林双球模型中，改变圆锥的形状，会对截面曲线椭圆的长轴、短轴、离心率产生哪些影响？

4 评价与反馈

课后对98位学生发放问卷，有86.0%的学生认为制作旦德林内切球模型对探究圆锥曲线的焦点和准线的性质有用，87.7%的学生赞成小组合作探究的学习模式，84.3%的学生认为将历史上数学家探究圆锥曲线的发展过程融入课堂教学有价值，有93.9%的学生认为在教学课件中利用GeoGebra软件制作几何图形及其动画，对他们探究各个数学量间的关系有帮助，有74.3%的学生愿意课后探究三个数学实验中蕴藏的各个量之间的数学关系，89.0%的学生对探究课的教学方式表示满意。对参与听课的16位数学教师进行访谈，他们认为实验探究课的内容新颖，课件中的动画效果良好，对圆锥曲线的性质研究深刻，但是课堂内容难度大，未必适合每位学生。同时，可以针对数学基础好且对数学有兴趣的同学开设这种探究课。圆锥曲线准线位置的探究难度比焦点位置的探究难度大，在设计教学时可以设计层层递进的问题，引导学生探究。

5 结语

圆锥曲线实验探究课通过三个层层递进的实验，提供学生探究三类圆锥曲线之间联系的机会，让学生在小组合作探究的过程中，感悟圆锥曲线的统一性。从梅内克缪斯的三类圆锥曲线分类到旦德林内切球模型的提出，时间跨度超过两千年，恰当地再现了圆锥曲线的历史发展脉络，让学生感悟数学文化的魅力，数学史料融入自然。借助信息技术的力量实现数学史与数学教育的融合，为中学数学课堂注入了新的活力。本节课采用GeoGebra软件绘制了大量的动态图形，能够较好地辅助学生思考立体图形中点、线、面之间的位置关系，便于学生理解圆锥曲线的焦点和准线间的性质。同时，动态图形能够更好地吸引学生深入思考，并能感知数学之美。课堂教学以学生为主体，采取小组合作探究的方式，创设实验情境，让学生经历实验探究的过程，经历观察、猜想、质疑、论证、提问的环节。引导学生用数学的眼光观察生活，在生活中

发现、提出问题，并解决问题。

此外，我们发现在三个实验探究的过程中，学生积极参与实验，并提出自己的猜想然后进行验证，提高了学生的直观想象能力和数学抽象能力。课堂氛围活跃，学生对问题进行讨论和探究。利用旦德林双球模型，建立了截线定义和第二定义之间的联系，在立体图形中寻找焦点和准线，厘清圆锥曲线的本质，培养学生逻辑推理能力和数学建模能力，促进学生对定义的理解和对性质的应用。我们有理由相信，基于数学史的圆锥曲线探究课，可以有效地处理引言中提到的问题1-3。但本节课中较少涉及生活情境下的数学问题，故没能解决问题4所描述的教学困境，需要在今后的教学中进一步改进。

除了增加现实问题外，实验探究课还有一些需要完善的地方。首先，由于实验环节和需要探究的内容丰富，需要师生充分做好课前探究。有些小组合作不充分，导致探究不深入。因此，教师可以多次开展小组活动，培养学生的小组合作能力。其次，圆锥曲线焦点和准线间的关系探究是有难度的，如何设计更好的问题串以降低学生的思维跨度，将是后续教学需要改进之处。再次，基于三个实验的探究发现，学生在课堂上提出的数学问题的数量较少，学生的问题提出能力还有待进一步提高。最后，课堂的时间总是有限的，所以可以将课堂的学习延续到课后。为了方便学生课后进一步探究，教师可以将课堂中的核心内容录制成微视频推荐给学生，给予学生充足的讨论时间，然后收集每组学生讨论的成果，再次组织教学活动。

参考文献

- [1] 花奎. HPM 视角下的“椭圆及其标准方程”教学[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2019(02): 50-54.
- [2] 孙雨琴, 娄慧敏, 朱哲. HPM 视角下高中数学课堂教学的特点初探——基于“椭圆的定义”的同课异构教学案例分析[J]. 中学数学月刊, 2018(11): 45-48.
- [3] 汪晓勤, 王苗, 邹佳晨. HPM 视角下的数学教学设计:以椭圆为例[J]. 数学教育学报, 2011, 20(05): 20-23.
- [4] 张佳淳, 舒适, 秦语真. HPM 视角下的双曲线高三复习课教学研究[J]. 中小学课堂教学研究, 2021(04): 4-9.
- [5] 陆文婷, 韦宏. 基于数学史视角下的双曲线及其标准方程教学设计[J]. 教育教学论坛,

2020(45): 189-190.

- [6] 陈静颖, 陆新生. HPM 视角下的教学设计——以“抛物线及其标准方程”为例[J]. 高中数学教与学, 2022(2): 32-35.
- [7] 王草野. 圆锥曲线学习中存在的问题及对策研究[D]. 江苏: 苏州大学, 2014.
- [8] 徐燕. 高中生对圆锥曲线的理解[D]. 上海: 华东师范大学, 2009.
- [9] 汪晓勤, 柳笛. 平面解析几何的产生(一)——古希腊的三线 and 四线轨迹问题[J]. 中学数学教学参考, 2007(17): 58-59.
- [10] 邹佳晨. 椭圆的历史与教学[D]. 上海: 华东师范大学, 2010.

他山之石

“我是小组的一员，其他人听我说”：建立数学小组活动中的有效倾听框架

杨舒捷

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

已有研究充分表明小组活动有助于数学学习，并积极提倡以小组为单位开展问题解决任务，而在这一过程中，学生需要进行交流和实践，比如解释他们的想法以及听取其他学生的意见，但在小组活动解决数学问题的过程中影响学生倾听的因素尚未得到充分研究。

在此背景下，来自马尔默大学的 Marie Sjöblom 和来自西挪威应用科技大学的 Tamsin Meaney 在“‘我是小组的一员，其他人听我说’：在数学小组活动中建立有效的倾听理论”一文中使用瑞典高中数学课堂的教育设计研究数据，通过检验发现 IC 模型和 Fuentes 框架对分析学生的倾听没有提供足够的信息，为了更好地了解学生在数学小组活动中为什么要听以及如何听的复杂性，研究者建立了一个新的框架——“有效倾听框架”，并使用该框架对学生倾听的复杂性进行了进一步的分析。

1 教育设计研究

为了分析倾听在解决问题的小组活动中的作用，研究者使用了教育设计研究（EDR）这一研究项目的数据。在这一研究中，有 24 名瑞典 16 岁高中一年级学生，他们至少会说九种不同的语言，由于大多数学生表示他们所在的学校教育都是用瑞典语进行的，而且他们很少在课堂上讲母语，因此重点关注学生用瑞典语的互动。

EDR 研究在一个学期内进行了三个周期活动，以 3-4 名学生为一组将全班分为男女混合的小组，赋予学生特定的交流角色，包括确定成员何时发言的组织者、记录小组结论的总结者、发表想法的思考者以及在全班讨论中陈述结论的演讲者，这些角色在每个新的周期中都进行调整。这隐晦地要求学生倾听，因为组织者和总结者角色要求这些学生倾听他人的意见，而思考者和演讲者则要求其他人倾听他们的意见。每个周期中，在学生进行小组活动解决数学问题时，

对给出知情同意的小组进行录音（循环 1 和 2 中有三组，循环 3 中有两组），并在每个周期结束后，对学生进行分组采访，询问他们对解决问题的看法以及他们之间的互动。

2 建立有效倾听框架的三个阶段

第一阶段：使用 IC 模型和 Fuentes 框架进行分析。

在这一阶段，研究者使用了 IC 模型和 Fuentes 框架来理解是什么促成了小组活动中的互动，然后与教师进行讨论，并对下一个周期的任务和支持方式进行更改，从而改变学生的角色，以改善学生与学生之间关于解决问题的互动。

IC 模型是一组与数学交流相关的对话行为，但重点关注学生与教师的互动方式，Fuentes 框架则将学生对话分为八种“问题/评论——回应对”（QCR 对），但大多数 QCR 对都假设互动发生在一对学生之间。通过分析三个周期内小组互动中的 IC 模型和 QCR 对，可以得出关于哪些方面的倾听被捕获和哪些方面被遗漏的结论，这提供了有关小组活动中学生倾听问题的信息。

在 EDR 研究的第一个周期中，学生在小组中的交流对于共同解决问题几乎没有帮助，分析表明，没有 IC 模型和 QCR 对。例如，某小组中只有两名学生在发言，两人都提出了自己的解决策略，但他们并不考虑对方的想法和建议；没有人问后续问题，所以没有 QCR 对；其他小组成员没有回应，似乎对解决这道数学题没有相关贡献。

这一情况在第二周期有了明显改善。该小组的四名学生在这一周期发起并保持了互动，尝试通过倾听对方的建议和提问来建立解决问题的策略。例如，Azad 和 Mohammed 试图通过询问每个人是否理解这项任务展开互动，Nour 发表了自己的观点和想法，Amal 帮助她定位了问题中的数学，两个女生合作找到了解决方案，这体现了“提出策略——尝试策略”和“提问问题——回答问题”两个 QCR 对。

虽然 IC 模型揭示了与倾听有关的某些方面，但还有一些与沟通模式和对话行为不直接相关的其他问题没有得到强调。例如，当学生彼此倾听时，没有提出问题，也没有按照 QCR 对中建议的方式作出反应，我们就无法分析这些互动。而 Fuentes 框架只能在学生回答问题时进行分析，其他有关倾听的框架也没有提供更好的解释。

第二阶段：建立有效倾听框架。

这一阶段发生在两位研究者完成 EDR 循环后，第一阶段使用的框架确定了倾听的某些方

面，但没有确定这些方面是如何协作的，因此只能对解决问题的小组活动中倾听的复杂性提供有限的见解，因此两位研究者在这一阶段建立了有效倾听框架，如图 1 所示。

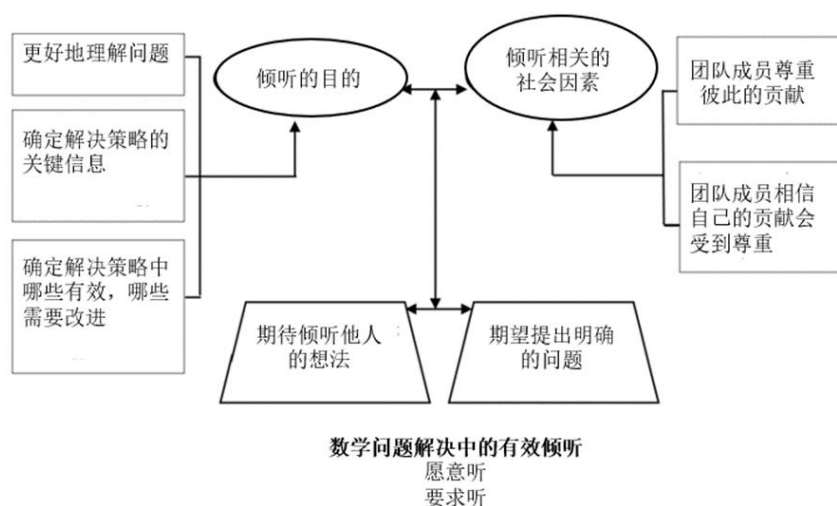


图 1 有效倾听框架

该框架关注与学生表现出愿意倾听和要求他人倾听的能力相关的可观察特征，包括倾听的定义，与问题解决相联系的倾听的目的，以及尊重说话者的贡献并且感觉自己的贡献会被倾听者尊重的社会因素。

鉴于前面提到的区别主动倾听和被动倾听的困难，本框架基于可观察到的行动将小组活动中的倾听被定义为“有效倾听”，例如学生要求其他学生倾听，学生表现出倾听的意愿，以及学生等待问题的答案等。

本框架将倾听的目的分为三个方面，类似于波利亚提出的问题解决的四个阶段。倾听的目的包括更好地理解问题（弄清问题）、识别用于确定解决策略的关键信息（制定计划）以及确定解决策略的工作原理和需要改进的内容（实施计划）。关于检查结果与问题的第四点也可以对应到波利亚解决问题的第四阶段（回顾反思），但在本研究的数据中没有这方面的例子，在未来的工作中，研究者将考虑如何让学生参与到小组解决问题的第四阶段中，进而修改倾听框架。

倾听的社会因素与群体成员的贡献受到倾听者的尊重以及群体成员知道他们的贡献将受到尊重有关。为了促进小组中问题的解决，需要建立社会数学规范，包括期望倾听他人的数学思维和提出澄清问题。

第三阶段：使用有效倾听框架进行分析，研究学生倾听的复杂性。

在这一阶段，研究者利用有效倾听框架对部分数据进行了重新分析，以说明学生为什么和如何进行倾听的复杂性，以及倾听在解决问题的小组活动中的作用。

在第一周期中，学生缺乏对倾听目的的理解。第一，当学生不重视他人对解决数学问题的贡献时，几乎不可能通过积极倾听来共同构建解决方案。例如，这一小组的两个学生都在争抢别人的倾听，这导致他们很难尊重对方的贡献，而这种缺乏尊重的态度使得两人的倾听请求很难得到适当的回应。第二，学生知道他们应该通过问问题来获得信息，但似乎不确定为什么这是必要的。例如，通过采访可以看出，学生认为提出问题并不表明他们在解决问题方面很积极，似乎并没有社会数学规范要求通过提出澄清问题来获得与倾听目的相关的信息，这影响了他们倾听的意愿。第三，一些学生重视他人所提供的信息，但他们不知道如何有效获得这些信息。例如，在访谈中，Amal 和 Nour 谈到了他们小组中的两个男生是多么安静，她们想知道男生知道什么和想什么，这些陈述表明，这些女生愿意倾听，但她们不认为她们有责任来促进这一点，也不认为她们有这样做的能力，这说明小组成员并不是有意忽视其他成员的，而是缺乏有关倾听在解决问题过程中的目的和好处的知识，这限制了有效的互动。

在第二周期中，学生实现了更高效的倾听。四个学生都参与了解决问题的讨论，而作为倾听者，他们开始尊重彼此对共同解决问题的贡献，并认为他们的贡献是有价值的。这样，学生们开始表现出有效的倾听，通过愿意倾听以及要求他人倾听来更好地理解问题，并确定解决问题所需的关键信息。

学生的讨论促进了共同解决问题的过程。学生们问问题，是因为他们希望获得有用的信息。例如，通过不断问问题，Carlos 表示，他并不理解 Mariam 提出的解决方案，但愿意倾听，以确定解决方案是否有效或是否需要改进。期望倾听彼此的数学思维，并提出澄清问题的社会数学规范，似乎在小组成员按照这些规范操作时建立起来。学生通过要求倾听和表现出愿意倾听的意愿，表明他们意识到需要成为有效的听众。例如，在采访中，Amal 描述了在数学问题解决活动中倾听的目的：“我们意识到，倾听每个人的意见更好，因为这样你可以更容易地找到答案。”这种共同解决问题的能力与社会因素有关，即尊重发言者，认为他拥有有价值的知识，并感到自己的贡献会受到他人的尊重。

3 结论

有效倾听框架克服了使用更通用的模型分析倾听在解决问题的小组活动中的作用时发现的一些问题，通过展示不同因素如何影响学生的倾听，以及为什么会影响学生的倾听来实现这一点，提供了一种语言来描述如何通过关注其概述的不同方面之间的相互联系来改善学生与学生之间的互动。

基于早期对数学课堂中倾听的定义中存在的困难，有效倾听框架将有效倾听定义为两部分，即要求他人倾听和愿意倾听他人，这为确定小组中解决数学问题的学生何时以及是否参与有效倾听提供了机会。有效的倾听是多方面因素相互作用的结果，其中包括与波利亚问题解决阶段相关的倾听的目的，因为这些目的专注于理解问题、识别关键信息和确定解决策略是否需要调整。此外，倾听的意愿取决于学生是否尊重彼此在解决问题过程中的贡献，以及是否认为他们自己的贡献会受到尊重，这些社会因素与倾听的目的交织在一起形成了两个社会数学规范，这些规范与期望倾听他人的数学思考和在必要时提出澄清问题有关。

有效倾听框架的建立源于 EDR 研究中遇到的困难，即如何在问题解决的小组活动中改善学生之间的互动。通过使用有效倾听框架重新分析 EDR 研究的数据，确定了学生倾听的变化。在之后的周期中，学生们开始理解倾听的不同目的，以及这些目的与尊重彼此贡献的社会因素的关系，从而建立了关于倾听他人数学思维和提出澄清问题的社会数学规范。因此，该框架可用于进一步的研究项目，也可用于以提高学生通过解决问题的小组活动进行学习的可能性为目的的干预研究。

在未来的 EDR 研究中，研究者将使用该框架来解释它如何支持不同数学主题或不同学生的小组活动，例如那些共享其他多种语言或不共享第一语言的学生。这有助于研究者检查有效倾听框架在其他情况下的有效性。

参考文献

- [1] Sjöblom, M., Meaney, T. "I am part of the group, the others listen to me": theorising productive listening in mathematical group work[J]. *Educ Stud Math*, 2021, 107(01): 565-581.

教师提供实质性反馈的教学情境

韦润蓉

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

随着课堂教学越来越注重师生互动、强调以学生为中心，在数学教育研究中，不少研究人员对教师如何提供反馈进行了广泛的探究。一方面，这种反馈能够对学生的学学习产生实质性影响，另一方面也有利于培养教师的概念理解和从事数学实践的能力。但目前大多数关于反馈研究的内容涵盖较广，且更为集中在教师对家庭作业的反馈上，而专门针对数学课程类反馈则较少被关注。故该研究选择在真实的课堂情境中调查教师的反馈情况，旨在观察教师提供程序性与实质性反馈的教学情境有何区别。

本研究基于学习评估（assessment for learning, AFL）中的反馈概念，并进一步区分程序性反馈与实质性反馈（表 1），以便于在真实课堂中观察这两类反馈发生的情境以及其对应的情境特征。

表 1 程序性和实质性反馈的定义

	程序性反馈	实质性反馈	
		概念反馈	教学实践反馈
定义	关注解决方案过程中正确执行步骤的反馈。	反馈侧重于概念、表示、定义、定理等之间的关系。	关注学生如何参与数学实践的反馈，例如，如何解决问题、构建可行的论点或模型。

这项研究的作者 Roar B.Stovner¹, Kirsti Klette¹ 和 Guri A. Nortvedt 均来自挪威的奥斯陆大学。选取的数据来源于大型视频研究——《教学与学生成绩的联系》，该大型视频记录了 47 所学校（均为八年级）的 47 名教师讲授的 172 节数学课（每节数学课包含 2-4 个课时不等），这些学校的地理位置涵盖了城市及乡村，教师的教龄与教授的内容也各不相同，但为了研究实质性反馈的教学情境，研究人员利用 PLATO（Protocol for Language Arts Teaching observation）这一观察工具，将课程切分为 15 分钟的片段进而观察，筛选出在课堂上提供过实质性反馈的 5 位老师的 16 节课作为最终的数据进行分析。在 5 位老师的班级中，学生的水平相近。

关于具体的研究过程，首先，由第一作者通过观看每节课并记录与确定教学情境相关的教学方面的笔记来进行总结（例如，教师和学生的互动，数学任务与学生的完成情况，以及在这

个过程中教师提供的反馈类型等)。与此同时,第一作者对教师提供程序性和实质性反馈的教学情景进行编码和命名(如传授新知、练习巩固)并观察记录对应的情境特征。第二作者则在最后通过重新观看视频来确保所命名的主题和特征是准确的。

根据观察,作者发现,教师在传授新知以及向学生布置练习任务时,较容易出现程序性反馈,虽然此时对于新内容可能会涉及一些概念性的解释,但关于问题的解决程序、计算步骤正确与否,教师都更倾向于做出简短的程序性反馈。但在纠正学生的数学问题或完成一些需要高认知能力的任务时(这些任务是指学生需要花时间理解其含义,并且没有现成的解决方案),教师更容易提供实质性反馈。在这些情境中,教师更倾向于去引导学生思考、表达、合作,从而自己寻找到问题的答案,因此,出现实质性反馈的情况较上面两种更多。表 2 记录了 5 位教师课上的所有教学情况,可以看到,程序性反馈的情况经常发生,而实质性反馈的情况只能在每个老师的课堂中出现一到三次。在其中两名教师的课堂中,实质性反馈与程序性反馈的区别也并不明显,如在完成高认知能力的任务时,其中涉及了一些练习任务,因此该情境既包含程序性反馈,又包含实质性反馈。

表 2 不同课堂中出现的教学情境及反馈

教学情境	教师编号				
	S01	S07	S40	S47	S49
实质性					
纠正学生的数学问题	●	●		○	●
完成高认知能力的任务	○	●	●	○	●
程序性					
传授新知	●	●		●	●
布置练习任务	●	●	●	●	●

注:●表示教师在该教学情境中提供了特定类型的反馈,○表明无法确定是哪种反馈,没有符号表示在所观察的课程中没有此类教学情境。

为了进一步了解实质性反馈中的情境特点,作者对各个片段进行分析,并利用两个例子来说明这些特征是如何表现出来的。编号为 S07 的老师向学生们布置了一份比较分数大小的作业,在一个例题的讲解后,让他们各自做了 7 分钟的练习。对于一些大部分人都回答错误的题目,老师不再进行程序性的对错反馈,而是选择开展实质性反馈。编号为 S49 的老师则给学生们提

供了一道对认知能力要求较高的规律题，向学生强调，解答的结果并不重要，而是要通过小组合作，弄清楚思考的过程。在这一教学情境中，教师明确提出自己的期望，所提供的反馈也是告诉他们如何按照任务的预期来工作，这属于实质性反馈中关于数学实践的反馈。通过两个具体实例的分析，作者总结出在实质性反馈中的情境特征。主要包括两个方面，对于教师来说，其特征通常表现为：(a) 经常性引导学生思考；(b) 在问题解决过程中强调多种解决办法；(c) 在过程中可能会改变其教学形式；(d) 对学生提出明确的期望或要求。学生的特征主要包括：(a) 在探讨过程中，课堂会变得吵闹，甚至有时讨论会离题；(b) 有的学生渴望尽快得到答案，故而对这类反馈表示抵触；(c) 讨论持续的时间较长。

综上所述，程序性反馈通常发生在传授新知与布置练习任务的情境中，而实质性反馈则更多出现在纠正学生数学问题与完成高认知能力任务时。其中，纠正学生数学问题的教学情境与教师提供程序性反馈的情境有显著不同。在程序性情境下，课堂井然有序，经常是以一致的方式进行。相比之下，当纠正学生的数学问题时，情境则较为混乱的。这一过程涉及到老师和学生之间的反复讨论，甚至有学生会表达他们的抵触情绪。在认知要求高的任务中提供的反馈虽然是实质性反馈，两种情境特点依旧不同，在进行认知要求较高的任务时，尽管学生很难完成任务，但由于教师事先说明了期望，所以过程看起来要比纠正数学问题时顺利一些。

该研究虽然我们提供了真实课堂情境下的教学反馈，但依旧存在一定的不足，如研究结果仅仅基于少数教师得出，并不具有普遍性；由于观察者效应，该研究可能无法捕捉到常规教学中提供的反馈，虽然老师们被告知其课程需要按照常规方式进行，但在教室里放置摄像头和麦克风可能会改变老师的教学方式或学生的行为。故而，作者也提出后续的研究方向，即将该设计扩展为更大的视频研究，来评估教师的反馈质量，以判断教学情境中的反馈模式是否在更大的样本或其他情况下同样适用。此外，还可以检验教师提供程序性和实质性反馈时的教学情境的差异是否能够帮助教师进一步完善其反馈。

参考文献

- [1] Stovner R B, Klette K & Nortvedt G. A. The instructional situations in which mathematics teachers provide substantive feedback[J]. *Educ Stud Math*, 2021, 108(3): 533-551.

活动讯息

华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学联盟第十八次集中 研修活动隆重举行

刘梦哲，杨舒捷

（华东师范大学教师教育学院，上海 200062）

2022 年 5 月 17 日下午，华东师范大学基础教育学科教研联盟初中数学联盟第十八次集中研修活动隆重举行（图 1）。根据目前疫情防控的要求，本次活动全员线上举行，由华东师范大学附属贵阳学校和华东师范大学昆明实验学校联合承办，联盟各成员校初中数学教师、华东师大教师教育学院数学教育方向研究生等 100 余人参加了本次活动。



图 1 初中数学第十八次集中研修活动

【环节一：校长致辞】

华东师范大学附属贵阳学校顾逸飞校长、华东师范大学昆明实验学校陈文斌校长应邀出席本次联盟教研活动并致欢迎辞（图 2-3）。

顾校长首先感谢基础教育集团、教师教育学院安排附属贵阳学校与昆明实验学校联合承办初中数学教研活动，华东师范大学附属贵阳学校始终高举卓越教育旗帜，践行让每一个生命竞相绽放的办学理念，旨在培育拥有强健体魄、高尚情操、家国情怀、国际视野的卓越人才。顾校长指出，办学三年来，在华东师范大学基础教育集团、教师教育学院专家团队及各级领导的帮助和关怀下，学校发展取得了长足的进步。各附校举办联合教研活动，不仅为了让孩子更好地发展、充分地发展、全面地发展，也为了教育更好的明天。



图 2 顾逸飞校长致辞

陈校长在致辞中表示，云贵一家亲，华东师范大学附属贵阳学校和华东师范大学昆明实验学校作为兄弟学校，通过共同的学术活动，以此促进集团附属学校的教学质量不断提升。陈校长指出，近年来学校秉持五育并举的教育理念，在教学质量上稳步提升，本次活动聚焦数学文化融入初中数学课堂教学，以此希望学生能够受到数学文化的熏陶，逐渐喜欢数学、热爱数学。最后，陈校长预祝本次教研活动取得圆满成功。



图 3 陈文斌校长致辞

【环节二：观摩展示课】

在课例展示环节，华东师范大学附属贵阳学校路卿斓老师带来了“利用三角形全等测距离”的展示课（图 4）。路老师和学生携手走入一场动手动脑的时空旅行。在开始旅行前，先让学生“检查装备”，回忆全等三角形的判定定理和性质定理。随后，路老师由古到今，设计了“古人的智慧”、“碉堡测距”和“南明河畔”三个情境，通过小组活动，学生利用全等三角形的知识设计出精彩纷呈的测距方案。最后，将学生的思绪拉回课堂，师生畅所欲言，从知识、思想方法、情感态度等维度对本节课进行总结。

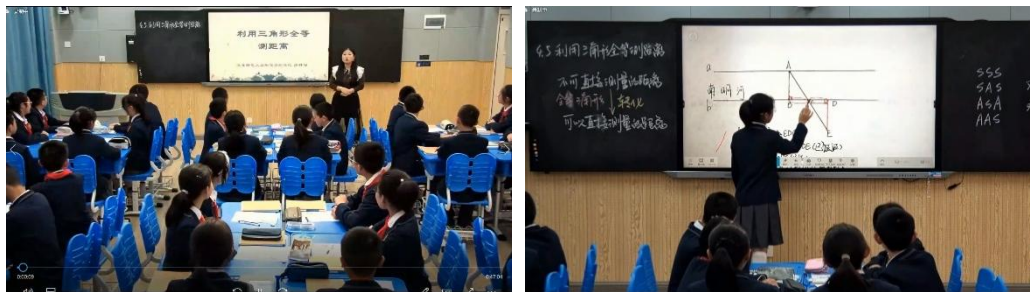


图 4 路卿斓老师执教展示课

接下来，华东师范大学昆明实验学校靳雯老师带来了“正比例函数”展示课（图 5）。靳老师使用旅行者一号的科技视频引入教学，然后呈现一些现实生活中的问题，列出函数解析式。在新知探究环节，先开展第一个小组活动，让学生自主探究，寻找共同特征，给这一类函数起名字，并归纳出正比例函数的定义。在此基础上，播放正比例函数发展历程的微视频，让学生感受他们提出的定义更接近于哪一种，进行古今对话。随后，开展第二个小组活动，让学生写下一个函数解析式，并讨论这个函数是否是正比例函数，在师生交流中，靳老师让学生把一些有争议的例子写到黑板上，然后大家一起分析。最后通过互动小游戏进行巩固应用，并由学生进行课堂小结。



图 5 靳雯老师执教展示课

【环节三：评课交流】

在评课交流环节中，两位执教老师从教学背景、教学过程等方面介绍教学设想、分享实施感受（图 6-7）。

路卿斓老师表示本节课以时间为主线，让学生身临其境，根据实际情境，设计出测量距离的方案，由此学生可以在知识能力、情感德育、团队合作等三方面有所提升。由于教学容量较大，一些学生的想法来不及在课堂上表达，同时，学生的表达也只停留在草图上，故而在作业中让学生将本节课的方案整理成活动报告的形式。



图 6 路卿澜老师分享执教体会

靳雯老师表示本节课是在学生已经学习了正比例关系和函数的概念的基础上进行的，鉴于学生对正比例关系的印象不深，因此教师布置了课前作业。在课堂中，通过两次小组活动，让学生在自主探究和小组合作中自然地生成正比例函数的概念，以及探索归纳判定正比例函数的方法，并通过微视频古今对照。最后，利用小游戏进行课堂巩固，不过由于时间原因，所准备的《九章算术》中的题目没有在本节课中呈现。

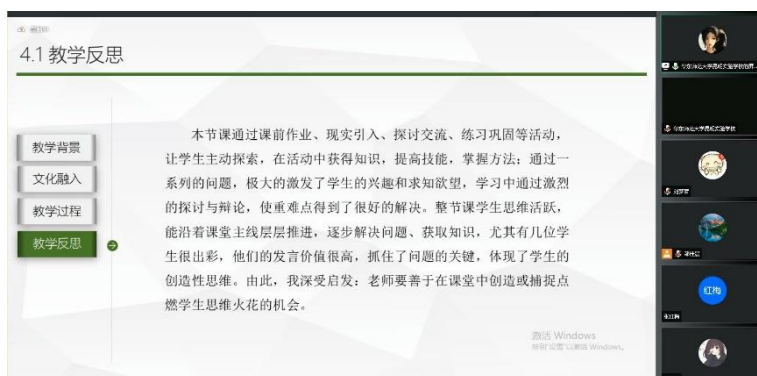


图 7 靳雯老师分享执教体会

华东师范大学附属贵阳学校数学教研组长张冠男老师（图 8）对这两节课予以肯定，两位老师都将数学文化与初中课堂充分融合，起到了很好的示范作用，体现出数学源于生活并应用于生活的理念。张老师指出，路老师的教学设计新颖、教学流程清晰、环节紧凑，在时间线中融入数学文化，体现了数学与生活的联系，通过探究活动，充分调动学生的学习兴趣，引导学生自主思考、合作交流、展示表达，使学生成为课堂的主人，以达到知识学习与能力培养的统一；靳老师注重学生的学而不是教师的教，在小组活动中，让学生自主编写函数解析式，这就是学生思维和方法的形成过程，突出了学生的主体地位，体现了知识的形成过程，有助于突出重点、突破难点。



图 8 张冠男老师点评

华东师范大学昆明实验学校副校长、数学学科负责人董玉华老师（图 9）表示，两位老师给我们带来了精彩的课堂。董老师指出，路老师对数学知识的本质把握到位，课程安排条理清晰、主线明了，教学过程做到了教师留白、学生补白，同时，本节课融入数学文化，让学生体会到数学与社会发展紧密相连，经历应用数学知识解决实际问题的过程，最终让学生感悟思想、积累经验、发展思维、提升素养；靳老师的课堂通过小组合作来探究正比例函数，培养学生用函数的眼光看世界，为后续学习做好铺垫，当然，如果能够在课堂上做到更多地留白，给学生更多探究空间，并合理安排好课程容量和时间，进一步完善古今对照，效果会更好。



图 9 董玉华老师点评

华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师从三方面分析了两节观摩展示课（图 10）。第一，借鉴历史，教师留白。路老师的课堂有一条历史的暗线，通过陈述之白，给学生创设表达的机会，靳老师也在多个环节设计留白，尤其是“给函数起名字”这一环节，体现了“人性化的数学”。第二，创获知识，学生补白。路老师让学生展示测量南明河的多种方案，靳老师带领学生归纳判定正比例函数的条件，这无疑为学生知识的创获带来不一样的体验。第三，总结升华，

课堂生长。两位老师设置的小组活动都对学生的数学信念产生了重要影响，两节课学生在课堂小结时都提到在小组活动中收获了团队的友谊。此外，邹老师还提到，路老师可以让学生进行实地测量，通过实际操作，形成活动报告，体验数学建模的过程，靳老师可以在给函数起名的基础上，设计数学写作业，让学生在课后进一步反思提升。

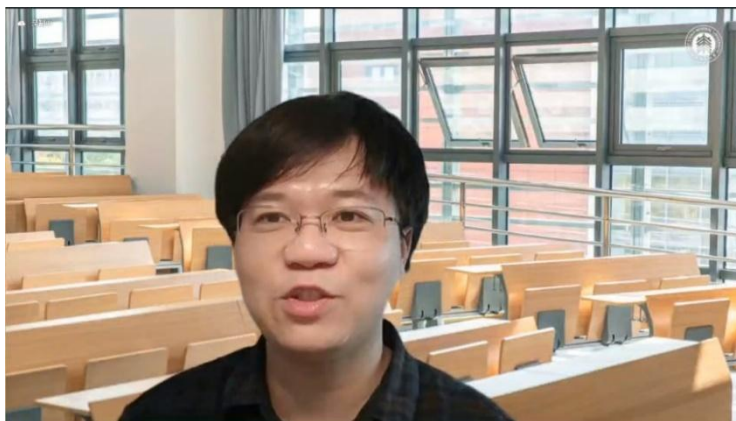


图 10 邹佳晨老师点评

华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授从方法之美、探究之乐、能力之助、文化之魅、德育之效五个维度分析了本节课体现数学文化的教育价值（图 11）。以路老师的课堂为例，留白式教学给予了学生充分的机会，通过探究活动，学生给出了诸多解决方案，并在课堂中交流分享，有助于彰显方法之美；探究式教学的四阶段模式分别是：准备与聚焦、探究与发现、综合与交流、评价与延伸，本节课将数学文化融入探究活动，并将学生的方法与历史上的方法进行古今对照，有助于营造探究之乐；本节课能够培养学生的直观想象、逻辑推理等数学核心素养，有助于实现能力之助；通过实际生活中的应用问题、泰勒斯测距离问题、古代跨步问题等，有助于展示文化之魅；在问题解决的过程中，可以培养学生良好的数学信念和理性精神，在古今对照的过程中，可以在学生心灵深处种下自信的种子，这一过程有助于达成德育之效。可以预见，数学文化发挥着多元的教育价值，期待未来有更多的融入数学文化的数学课堂，让数学课堂洋溢着数学文化的芬芳。



图 11 汪晓勤老师点评

为了进一步提升联盟教研活动实效，促进深度教研，初中数学联盟前期组织了两位观摩课执教教师、承办学校数学组教师共同对这两个课题展开教学设计研讨（图 12）。华东师范大学教师教育学院硕士生杨舒捷和刘梦哲分别介绍了“正比例函数”与“利用三角形全等测距离”的相关史料。随后，靳雯老师和路卿澜老师向大家分享了初步的教学设计及困惑。最后，大家共同对这两节课的教学设计提出建议，董玉华老师表示每一堂课都应重视学生学科素养的提升，关注课程思政融入数学教学；邹佳晨老师表示可以让学生经历知识的发生、发展过程，并让文化在课堂上发挥独有的教育价值；汪晓勤老师表示数学课堂应充分发挥“教师留白，学生补白”的教学模式，保证学生学习的主体性，体现立德树人的目标。



图 12 教学设计研讨

数学文化浸润教学，研有所获引领成长。数学文化作为人类文化的重要组成部分，蕴含着丰富而深刻的文化底蕴与内涵，在数学教学中融入数学文化，将为我们的课堂注入新的品味、赋予新的灵魂。线上参与本次活动的老师和同学们也分享了自己的体会和收获，上海民办华二宝山实验学校施程维老师表示两节课活动设计很有特色，充分展示了学生的聪明才智和表达能

力，执教教师思路清晰，对概念从多方面进行辨析，提升教学质量；华东师范大学附属双语学校邢蹇老师表示两节课充分体现课堂以学生为主体，融入数学文化，渗透数学建模和数学抽象思想，培养学生应用数学的能力；华东师大教师教育学院硕士生王首荐表示要多给学生机会，数学课堂会因学生的奇思妙想而别开生面、精彩纷呈；硕士生禚泳棋表示两节课都强调生活与数学、文化与数学的联系，设计的情境新颖、有趣，能够提高学生学习数学的兴趣。在大家的热烈讨论中，本次线上联合教研活动圆满结束（图 13-14）。



图 13 华东师大附属贵阳学校集中研修现场



图 14 华东师大昆明实验学校集中研修现场

融技术于课堂，展历史之风采

第二期 HPM 高中网络研修班——“微视频制作”研修活动顺利举行

刘梦哲¹，雷沛瑶²

(1.华东师范大学教师教育学院, 上海 200062; 2.华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

2022 年 5 月 14 日晚上 7 点半，第二期数学史与数学教育（HPM）高中教师网络研修班研修活动如期举行，本次研修活动聚焦 HPM 微视频的制作。本次活动由数学史与数学教育（HPM）工作室主办，在华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授及其团队的带领下，来自五湖四海的老师再次相聚线上、共话教研（图 1）。

数学史与数学教育（HPM）工作室 ¹ HPM 网络研修班-微视频制作 ²	
5 月 14 日 晚上 19:30-21:00 ¹ 腾讯会议号：848-569-363 ²	
19:30-20:00 ¹	HPM 微视频制作教程 ² 韩嘉业 上海市格致中学 ²
20:00-20:20 ¹	HPM 课例中的微视频制作经验分享 ² 王智洋 华东师范大学教师教育学院 ¹ 孔雯晴 华东师范大学教师教育学院 ¹
20:20-20:30 ¹	HPM 微视频在课堂中的应用价值交流 ²

图 1 研修活动安排

来自上海市格致中学的韩嘉业老师首先为大家分享了 HPM 微视频的制作教程（图 2-3）。



图 2 韩嘉业老师分享 HPM 微视频制作教程

韩老师先从理论方面介绍了 HPM 微视频的概念、开发流程及内容类型，并指出结合不同的史料，HPM 微视频可用于不同的课型和课堂环节，数学史的运用方式和评价维度也取决于具体

内容。随后，韩老师辅以微视频展示，介绍了制作 HPM 微视频的四种方式，包括 PPT 转视频、平板手写录屏、实物录像及 Python 动画，并详细分享了每一种方法的相关制作技巧。最后，韩老师表示，微视频虽然是一种很好的数学史融入课堂教学的方式，但是，其对学生的学也并非毫无弊端，教师应根据学情和教学需要尝试制作合适的微视频。

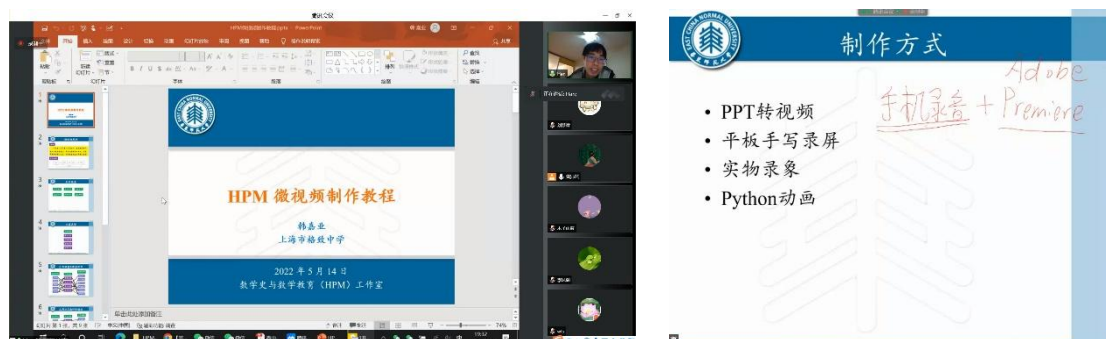


图 3 HPM 微视频制作教程

围绕本学期“导数的概念”及“解三角形”两大课例，来自华东师范大学教师教育学院硕士生王智洋和孔雯晴分别就素材选取、脚本设计等方面分享自己制作微视频的经验（图 4-5）。

王智洋同学主要从材料收集、脚本撰写和微视频录制三方面，依次介绍微视频制作的步骤。针对微视频录制，王同学表示可以利用“来画”等专门制作微视频的软件、网页或 PPT+剪辑软件完成，而后者对于老师更容易上手。

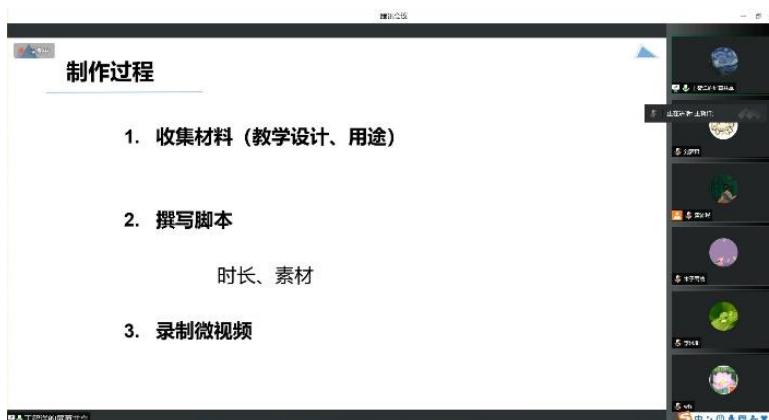


图 4 王智洋同学分享微视频制作经验

孔雯晴同学表示在制作解三角形的微视频的过程中，可以先从三角学的前世今生中选取一些有代表性的事件并撰写脚本，然后按照事件发生的时间线制作 PPT，最后利用 PPT 中的录制功能即可制作出精美的微视频。

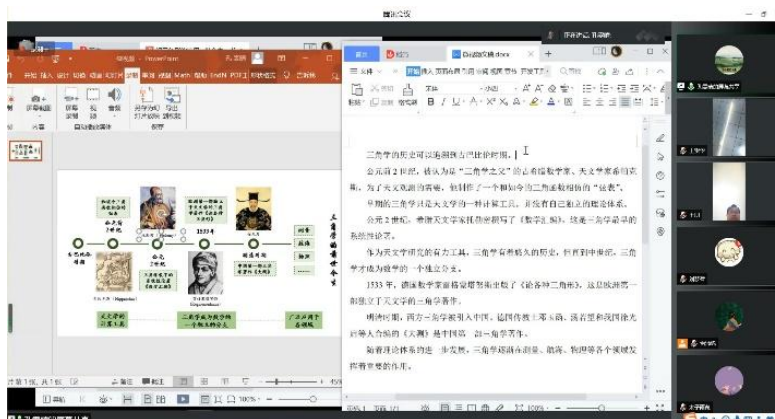


图 5 孔雯晴同学分享微视频制作经验

随后的专家发言环节，华东师范大学教师教育学院邹佳晨老师从四个方面谈及微视频的价值（图 6）。其一，HPM 微视频为培养学生的数学核心素养、落实立德树人根本任务提供契机；其二，在有限的教学时间内，借助多媒体技术，可以集中展示部分内容；其三，教师可以根据自身的信息技术能力，选取合适的史料与方式，提高微视频制作的效果，以激发学生的兴趣；其四，微视频可以在创设学习情境、展示动态的数学观、呈现数学家故事背后蕴藏的思想方法等方面发挥重要作用。

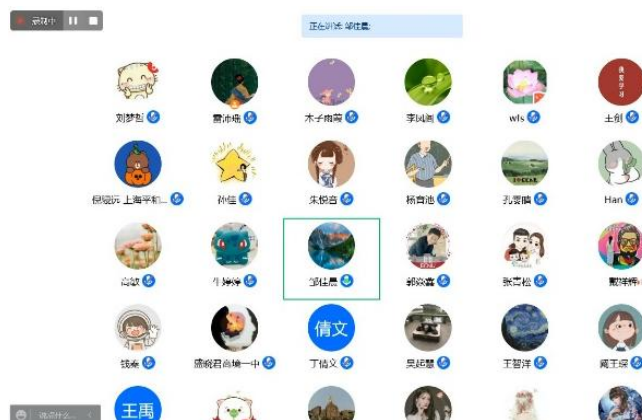


图 6 邹佳晨老师点评

华东师范大学教师教育学院汪晓勤教授也就 HPM 微视频的使用与大家进行了交流（图 7）。汪老师首先向大家展示了一些教师制作的“二项式定理”和“椭圆”两节课例的微视频，微视频既可用于课堂播放，也可供教学研讨使用。随后，汪老师就为何要在课堂中播放微视频，梳理出四大关键词：顺应——顺应技术与数学教育深度融合的时代；弥补——弥补教师对数学史了解欠缺的不足；积累——积累教学资源；辅助——给学生带来耳目一新的感觉。此外，教师可以思考从一个人物、一个故事、一个主题、一种方法四个维度设计微视频的脚本。

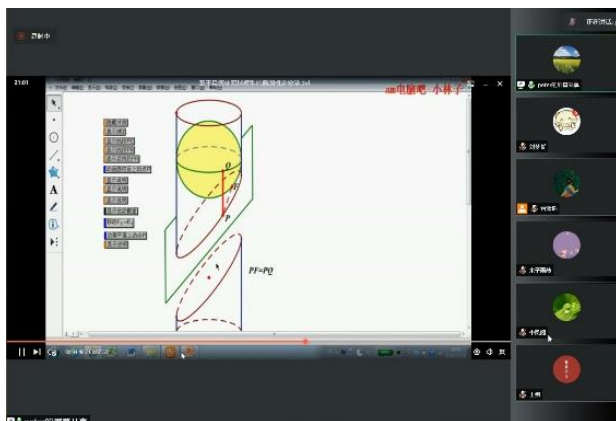


图 7 汪晓勤老师点评

通过交流互动，老师们表示收获颇丰。淮南二中的戴泽莉老师表示微视频有助于 HPM 的传播，同时，若将 HPM 课例浓缩为微课供教师们学习与交流，将对教师专业发展产生很大的帮助。华东师范大学教师教育学院硕士生钱秦表示本次专题学习很实用很精彩，HPM 微视频为数学文化融入数学课堂提供了一个良好的载体，自己也将在未来的教学实践中制作微视频。我们有理由相信，技术为 HPM 插上了腾飞的翅膀，HPM 微视频在教学中必定大有可为，期待老师们在后续的课例中尝试制作微视频为课堂锦上添花。