



上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2024 年第 13 卷第 03 期



立方村（海尔蒙德，P. Blom 设计，1977）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：邹佳晨 栗小妮

责任编辑：朱轶萱 刘梦哲

编委（按姓氏字母序）：

韩 粟 胡永强 孔雯晴 栗小妮 刘梦哲 刘倩雯 刘思璐 钱骏霖 秦语真 沈中字 孙丹丹 汪晓勤

岳增成 朱轶萱 邹佳晨

刊首新语

法国巴黎的 HPM 在职教师培训

刘思璐

(华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

2019 年, 法国国家教育和青年部发布了新的高中教学大纲, 给出了关于数学史的指导方针: “通过历史、认识论或文化背景来启发数学课程的内容可能是明智的。事实上, 历史可以被看作是问题的根源, 它澄清了某些概念的含义。标有‘数学史’的段落指出了沿着这条线的一些可能性。教师可以通过对历史文献的研究来实施它们。”这使得“数学史”成为法国教学大纲的三条指导主线之一。

然而, 大多数的法国数学教师缺乏数学史的学术背景和课程资源。为了发展教师的数学史知识和在课堂上运用数学史的教学经验, 法国的数学教育研究所 (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 简称 IREM) 面向数学教师和数学教育研究者组织了一些关于数学史的继续教育课程和一些暑期大学。另外, 法国的一些大学也为数学教育硕士开设了数学史课程, 如索邦大学巴黎学院的国立高等教师教育研究所。为了较为系统地介绍和中学知识相关的数学史内容, 法国南特大学的 HPM 学者 Évelyne Barbin 于 2019 年出版了一本面向高中数学教师的数学史用书《在高中用历史做数学》。

为进一步了解法国数学史与教师专业发展方面的研究, 笔者于 2023 年 10 月至 2024 年 3 月以访问博士生的身份在巴黎西岱大学和索邦大学进行了为期半年的访学, 期间的指导教师是 HPM 研究方向的学者 Chorlay Renaud。在 Dr. Chorlay 的引荐下, 笔者主要参与了数学史课程、M.:A.T.H. 小组 (Mathématiques: Approche par les Textes Historiques)、HPM 在职教师培训、小学数学课堂观摩、学术讲座等活动, 笔者也向法国巴黎的一些 HPM 研究者介绍了中国上海 HPM 工作室的课例研究和《九章算术》的部分内容, 并与一些巴黎的研究者进行了中西方数学史和 HPM 研究方面的交流与讨论。这里, 笔者将主要介绍一个为期三天的 HPM 在职教师培训项目。

巴黎的数学教育研究所 (IREM de Paris) 成立于 1968 年, 是法国第一批 IREM, 目前的办公地点在巴黎狄德罗大学的苏菲·热尔曼大楼。IREM de Paris 每年都会举行一次以数学史为主

题为为期三天的在职教师培训活动。笔者参加了其组织的 2023-2024 年度在职教师培训活动，此次活动主题为“高中数学史”。阅读资料主要由 M.:A.T.H.小组提供，该小组致力于在数学教育中引入历史视角。M.:A.T.H.小组成员包括 IREM de Paris 的部分成员和一些对数学史感兴趣的中学数学教师。

1 计划

活动开始前，参与培训的高中教师会提前收到活动安排，从而向所在学校请假以全程参与培训。本次活动的具体安排见表 1。

表 1 “高中数学史”课程计划

时间	学习的主题和文本
2024.01.15 9:15-12:15	运算部分的文本选择 <ul style="list-style-type: none"> • Pappus (毕达哥拉斯三段论); • Al-Khwarizmi: 平方加根等于数; • 欧拉 (牛顿的方法, 课堂应用实例);
2024.01.15 13:30-16:30	复数的历史 <ul style="list-style-type: none"> • Cardan, 解三次方程; • 展示TG (数学专家)班上介绍复数的实验性活动; • 几何现实主义与复数: 19 世纪复数几何表示的尝试和研究Argand、CV Mourey 和 Wessel 的文章。展示以 Mourey 的文本为基础介绍向量概念的活动;
2024.01.26 9:15-12:15	对数的历史: 观点的多样性 <ul style="list-style-type: none"> • 对数发明的历史背景, 介绍在 TG 班上尝试的活动, 基于不同文本的不同观点;
2024.01.26 13:30-16:30	<ul style="list-style-type: none"> • 根据所学课文设计课堂活动的工作坊 (小组合作); • 文献资源;
2024.03.25 9:15-12:15	<ul style="list-style-type: none"> • 收集和分享所开展的活动;
2024.03.25 13:30-16:30	<ul style="list-style-type: none"> • 补充信息。

2 实施

每次活动开始前会发放当天所学的纸质版阅读材料，所有资料的电子资源也会通过邮件的形式分享给这些教师。培训的活动形式包括教师教育者讲授计划中主题的数学史，教师教育者介绍数学史和数学文化相关的学术网站和参考文献，教师自行阅读原始的数学史材料并提出不懂之处与教师教育者讨论，教师根据自己的教学进度以小组为单位阅读某个主题的数学史材料并设计教学，最后教师分享融入数学史的课堂教学设计与学生反馈。接下来，笔者将介绍一些活动的例子。

2.1 教师教育者向教师提供原始史料及其出处

无论所选取的数学史原文是否是法语，教师教育者都会给教师提供原始的文献片段和来源，例如图 1 所示。如果是意大利语或拉丁语等其他国家的语言，教师教育者会提供法语翻译。同时，教师教育者鼓励教师在课堂上也呈现原文，即便原文不是法语。对此，笔者与教师教育者交流了其中的原因。使用原始材料的意义之一在于，让教师和学生对数学史有真实感和满足感。



图 1 Bombelli 的《代数学》片段

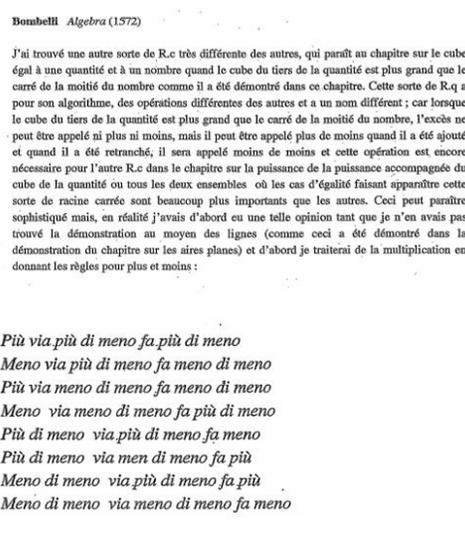


图 2 Euler 的《代数基础》片段

笔者根据旁听笔记和翻译软件进行翻译。图 1 中下半部分的小诗是意大利数学家邦贝利 (R. Bombelli, 1526-1572) 在《代数学》一书中为解三阶方程而引入“più di meno” (负数的正平方根, 即 i) 和“meno di meno” (负数的负平方根, 即 $-i$) 来表示复数的运算规则。其中,

第一句话意大利语“Più uia più di meno, fà pià di meno.”可译为“一个正数乘以一个负数的正平方根等于一个负数的正平方根”。整段话所表示的复数运算规则为：

$$\begin{aligned} 1 \times i &= i & (-1) \times i &= -i & 1 \times (-i) &= -i & (-1) \times (-i) &= i \\ i \times i &= -1 & i \times (-i) &= 1 & (-i) \times i &= 1 & -i \times (-i) &= -1. \end{aligned}$$

2.2 教师与教师教育者深入讨论史料的数学内容

在三天的时间里，有一半多的时间是用来学习数学史材料。一些材料是教师教育者直接讲解，如图 2 所示的文本片段。一些材料是让教师自己阅读，并让他们提出不懂之处一起讨论。

图 2 是欧拉（L. Euler, 1707-1783）的《代数基础》中求方程近似解过程的片段，该方法源自于牛顿（I. Newton, 1643-1727）。笔者翻译其问题和过程如下：

问题：求方程 $x^2 = 20$ 的近似解。

可知 $4 < x < 5$ ，则 $x = 4 + p$ ， $x^2 = 16 + 8p + p^2 = 20$ ，

忽略非常小的 p^2 ，有 $16 + 8p = 20$ ，即 $8p = 4$ ，于是 $p = \frac{1}{2}$ ， $x = 4\frac{1}{2}$ ，此时已接近精确解。

再使 $x = 4\frac{1}{2} + p$ ，忽略更小的 p^2 ，有 $x^2 = 20\frac{1}{4} + 9p = 20$ ，即 $9p = -\frac{1}{4}$ ，

则 $p = -\frac{1}{36}$ ， $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$ 。

如果想进一步接近事实，则使 $x = 4\frac{17}{36} + p$ ，有 $x^2 = 20\frac{1}{1296} + 8\frac{34}{36}p = 20$ ，

则 $p = -\frac{1}{11592}$ ， $x = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{5473}{11592}$ ，这个值非常接近精确解，误差可忽视。

在讨论这个方法本身的过程中，教师教育者还提出了一些和教学相关的问题，例如“如何向学生解释 p^2 非常小？”同时展示了之前的案例中教师如何使用这段文本，以及一些帮助学生思考的问题。

2.3 教师设计“问题串”引导学生探究数学史过程

在最后一天的培训活动中，教师进行了教学设计和学生反馈的分享。这里，笔者将介绍花拉子米（Al-Khwārizmī, 约 780-约 850）《代数学》中一个问题及其解法在中学数学中的应用，其教学活动分为 3 步：

第一步，引出任务“在一个等腰三角形中放置一个正方形”，并且介绍 9 世纪数学家花拉子米曾提出问题：“假设一块三角形土地的边长为 10、10、12，其中包含一块正方形土地，那么这块土地的边长是多少？”

第二步，让学生使用今天所学的方法来解决花拉子米的问题，即用毕达哥拉斯定理（即勾股定理）和泰勒斯定理（即相似三角形对应边成比例）列方程求边长。

第三步，展示花拉子米的一个问题和解法的原文与法语翻译，见图 3。并且给学生提供一系列的问题串，引导学生探究和理解花拉子米的解法。

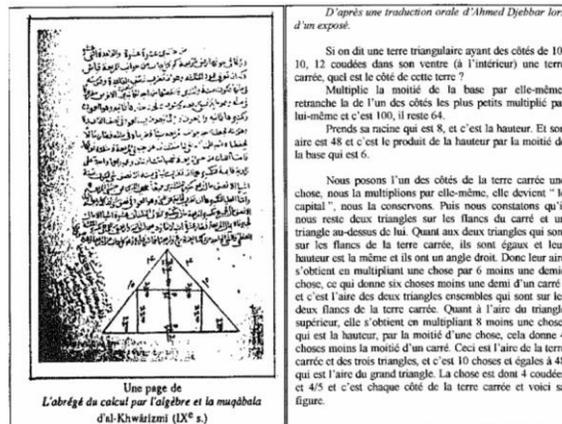


图 3 Al-Khwarizmi 的《代数学》片段及其法文翻译

笔者将图 3 中法文内容译为中文，其解法如下：

将底边的一半乘以自身，再从其（三角形）的最小边的自乘（即 100）中减去它，剩下 64。取其平方根为 8，这就是（三角形的）高。其（三角形）面积是 48，通过高乘以底边的一半（即 6）得到。

我们将正方形土地的一个边记为一件事物（une chose），将它乘以自身，成为“资本（le capital）”，将其保留。然后我们发现剩下两个在正方形边上的三角形和一个在其上方的三角形。至于在正方形土地边上的两个三角形，它们相等，其高度相同且有一个直角。因此，通过将一件事物乘以 6 减去半个正方形来获得其面积，得到六件事物减去半个正方形；这就是在正方形土地两边上两个的三角形的总面积。至于上部的三角形的面积，通过将 8 减去一件事物，即得到其高度，再乘以半件事物，结果为 4 件事物减去半个正方形。正方形土地和三个三角形土地的总面积，也就是 10 件事物等于 48，即大三角形的面积。因此每边为 4 加 4/5，这就是正方形土地的每边。

教师设计了一系列问题引导学生一步一步去理解和探究历史上的方法。例如问题 1 是这样子表述的：设三角形中 $AB = AC = 10, BC = 12, x$ 是正方形 $DEIH$ 的边。问文本中的事物 (la chose) 对应的是什么？资本 (le capital) 对应的是什么？哪个边是 8？哪个三角形的面积是 48？

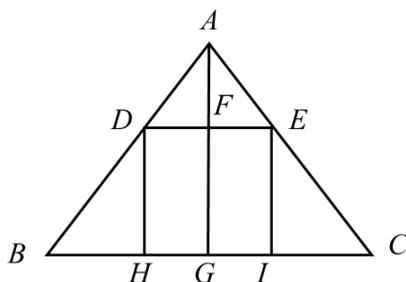


图 4 教师提供给学生的图

3 评价

活动结束后，每个教师需要填“IREM 课程评估表”。评估表会询问教师以下方面：

- 是否全程参与了整个课程。如果没有，请说明原因；
- 对“内容”“活动的安排（时间、节奏、持续时间、地点）”“与参与者的交流”“与主持人的交流”“申请阶段（申请书）”“符合期望”进行评价，包括非常不满意、不满意、满意和非常满意四个程度；
- 优点和需要改进的地方；
- 是否会将课程中所学进行实践，并具体说明；
- 是否会推荐给同事；
- 是否遇到了行政方面的困难，并具体说明。

对于这个评估表的结果和用途，笔者并未和活动组织者进一步交流。通过评价表的问题设计，可以发现活动组织者非常关心参与者的体验和遇到的问题，同时关心课程学习对实践的影响。

综上，巴黎 HPM 在职教师培训活动有着原始性、知识性和实践性的特点。首先，无论是教师教育者还是教师，在教师培训或课堂教学过程中都注重呈现原始史料。其次，无论是教师还是学生，他们都被提供机会以深入学习数学史知识。此外，教师教育者虽然不干预具体的教学设计，但是他们鼓励教师进行数学史融入课堂的教学实践，并分享其教学经验与学生反馈。

目 录

刊首新语

法国巴黎的 HPM 在职教师培训 刘思璐 I

历史研究

方出于矩：中算史上的一元二次方程配方法 汪晓勤 1

拉德涅《代数几何》中的解析几何历史知识 汪晓勤 15

专题研究

基于中算史料的无字证明构造 汪晓勤，谢宇欣 44

教学实践

跨学科视角下导数的应用教学 石城，汪晓勤 57

学生习作

利用数形结合思想解决一道函数最值问题 邹易宸，胡永强 68

他山之石

数学定义中的歧义：三个案例 朱轶萱 73

CONTENT

FOREWORD

In-service Teacher Training Focused on HPM in Paris Liu Silu I

HISTORICAL STUDY

Completing the Square for Quadratic Equations in Traditional Chinese Mathematics
..... Wang Xiaoqin 1

Historical Knowledge in Lardner's *A Treatise on Algebraic Geometry*
..... Wang Xiaoqin 15

THEMATIC RESEARCH

Proof Without Words Based on the Traditional Chinese Mathematics
..... Wang Xiaoqin, Xie Yuxin 44

TEACHING PRACTICE

The Teaching of Applications of Derivatives from an Interdisciplinary Perspective
..... Shi Cheng, Wang Xiaoqin 57

STUDENT WRITING

Using the Combination of Algebraic and Geometric Approaches to Solve a Minimum
Problem Zou Yichen, Hu Yongqiang 68

LITERATURE READING

Definitional Ambiguity in Mathematics: Three Cases Zhu Yixuan 73

历史研究

方出于矩：中算史上的一元二次方程配方法

汪晓勤

(华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

虽然中国古代数学家解一元二次方程的几何方法在今日数学教科书中已有所涉略, 但在该主题上, 人们对历史的了解往往是碎片化的。已有的相关 HPM 课例所运用的史料大多局限在古代阿拉伯数学家花拉子米 (Al-Kwarizmi, 约 780-约 850) 的配方法, 而很少融入中算史上的配方法。为了开展“中算史融入一元二次方程解法”的课例研究, 需要走进中算史, 在解读有关文献的基础上, 对有关几何方法进行深入探讨。

1 从开方术到配方法

我国古代数学家很早就会用几何方法解一元二次方程

$$x^2 + px = q \quad (p > 0, q > 0) \quad (1)$$

中 q 称为“实”, p 称为“从法”。方程 (1) 对应的问题是“已知矩形面积为 q , 长比宽多 p , 求宽”。

《九章算术》勾股章设题: “今有邑方不知大小, 各中开门, 出北门二十步有木。出南门一十四步, 折而西行一千七百七十五步见木。问: 邑方几何?” (郭书春, 2004, 419) 解法是: “以出北门步数乘西行步数, 倍之, 为实。并出南、北门步数为从法, 开方除之, 即邑方。”

如图 1 所示, 设邑方为 x , 则由 $\triangle TAE \sim \triangle THG$ 得

$$\frac{20}{\frac{1}{2}x} = \frac{(20+14)+x}{1775},$$

整理得

$$x^2 + 34x = 71000 \quad (2)$$

刘徽称 $(20+14)x$ 为“隅外之幂”, 而对方程的求解不着一字, 可见, 这类方程的求解已为人们所熟知。事实上, 《九章算术》少广章给出了“开方术”, 利用开方术的第二步及以后

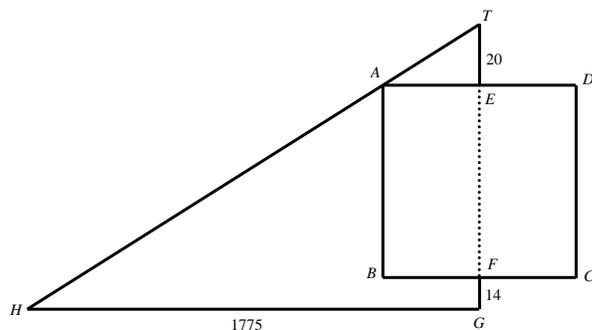


图 1 《九章算术》“邑方”问题

各步即相当于解二次三项方程 (1)。刘徽详细解释了“开方术”的几何意义：求多位正整数 A 的算术平方根，即相当于求面积为 A 的正方形的一边，如图 2 所示。先估出平方根 a ，则从正方形中挖去面积为 a^2 的黄色正方形，得到面积为 $A - a^2$ 的曲尺形。相当于说，设 $x = a + y$ ，则方程 $x^2 = A$ 变成

$$y^2 + 2ay = A - a^2 \quad (3)$$

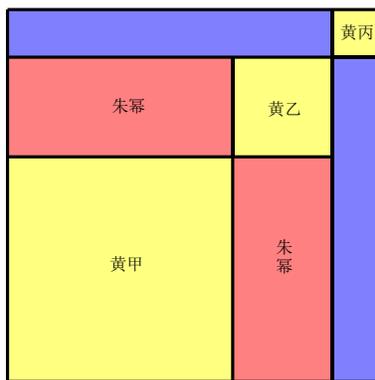


图 2 开平方的几何意义

再估计方程的根 b ，设 $y = z + b$ ，得到

$$z^2 + 2(a+b)z = A - (a+b)^2,$$

在开得尽的情形中，重复估根、减根的过程，最后可得所求的平方根。

可见，从几何上看，刘徽完全知道方程 (3) 与方程 $(y+a)^2 = A$ 的等价性。换言之，一元二次方程配方法的几何形式已为他所掌握。在方程 (1) 中， x^2 为“隅幂”， px 为“隅外之幂”，如图 3，将“隅外之幂”一分为二，将其中一部分移至隅的上方，得到一个曲尺形，再将

曲尺形补成正方形，于是就将方程（1）转化为方程

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \frac{p^2}{4} \quad (4)$$

即转化为开平方问题。由此，方程（2）可转化为 71289 的开平方问题。

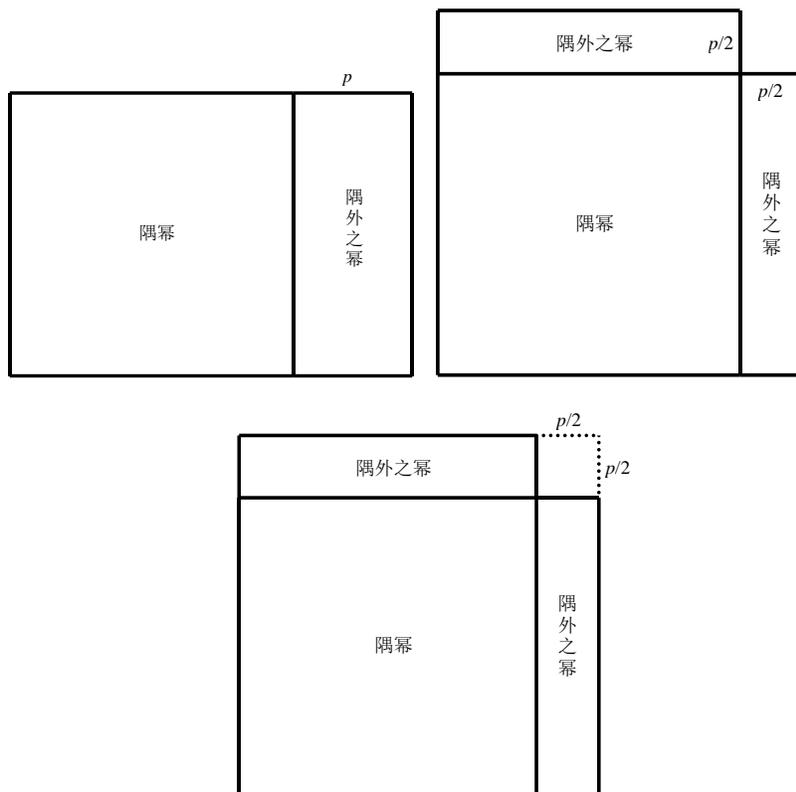


图 3 配方法的几何形式之一

2 从勾股术到配方法

《九章算术》设题：“今有户高多于广六尺八寸，两隅相去适一丈。问：户高、广各几何？”（郭书春，2004，413-414）这是一道解直角三角形问题：设直角三角形的勾、股、弦分别为 a 、 b 和 c ，已知 $b-a$ 和 c ，求 a 和 b 。原书给出的解法是：

$$a = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}} - \frac{b-a}{2},$$

$$b = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}{2}} + \frac{b-a}{2}.$$

刘徽在注中说：“按图为位，弦幂适满万寸，倍之，减勾股差幂，开方除之，其所得即高广并数。以差减并而半之，即户广；加相多之数，即户高也。……其勾股合而自相乘之幂者，令弦自乘，倍之，为两弦幂，以减之。其余，开方除之，为勾股差，加差于合而半之，为股；减差于合而半之，为勾。勾、股、弦，即高、广、袤。”

如图 4，比较两个“弦幂”和一个“勾股合幂”可见，前者比后者多出一个“勾股差幂”，即

$$2c^2 = (b+a)^2 + (b-a)^2,$$

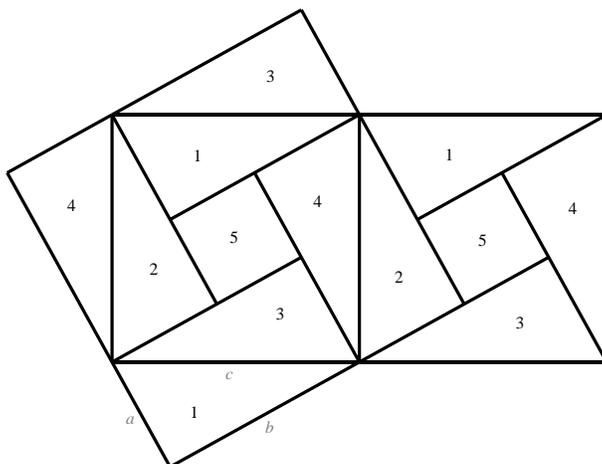


图 4 两弦幂与勾股并幂的比较

已知 c 和 $b-a$ ，可得

$$b+a = \sqrt{2c^2 - (b-a)^2} \quad (5)$$

于是得

$$a = \frac{-(b-a) + \sqrt{2c^2 - (b-a)^2}}{2} \quad (6)$$

$$b = \frac{(b-a) + \sqrt{2c^2 - (b-a)^2}}{2} \quad (7)$$

又，已知 c 和 $b+a$ ，可得

$$b - a = \sqrt{2c^2 - (b + a)^2} \quad (8)$$

于是得

$$a = \frac{(b + a) - \sqrt{2c^2 - (b + a)^2}}{2} \quad (9)$$

$$b = \frac{(b + a) + \sqrt{2c^2 - (b + a)^2}}{2} \quad (10)$$

刘徽在注中提出了另一种解法：“以勾股差幂减弦幂。半其余，差为从法，开方除之，亦勾也。”从图 4 中一个弦图的构成可知

$$ab = \frac{c^2 - (b - a)^2}{2} \quad (11)$$

利用等式 (11)，又可将问题转化为“已知 $b - a$ 和 ab ，求 a 和 b ”的问题，刘徽以一元二次方程

$$x^2 + (b - a)x = \frac{c^2 - (b - a)^2}{2} \quad (12)$$

加以解决，(6) 给出了方程 (12) 的正根。

与刘徽同时代的数学家赵爽在注释《周髀算经》时，不仅给出了勾股定理的一般证明，而且对相关的勾股理论作了总结，其“勾股圆方图注”称（郭书春，1994a，11-12）：

勾、股各自乘，并之为弦实。开方除之，即弦。按弦图，又可以勾、股相乘为朱实二，倍之，为朱实四。以勾股之差自相乘，为中黄实。加差实，亦成弦实。**以差实减弦实，半其余，以差为从法，开方除之，复得勾矣。**加差于勾，即股。凡并勾、股之实，即成弦实，或矩于内，或方于外，形诡而量均，体殊而数齐。勾实之矩以股弦差为广，股弦并为袤，而股实方其里。减矩勾之实于弦实，开其余，即股。**倍股在两边，为从法。开矩勾之角，即股弦差，**加股为弦。以差除勾实，得股弦并。以并除勾实，亦得股弦差。令并自乘，与勾实为实，倍并为法，所得亦弦。勾实减并自乘，如法为股。股实之矩以勾弦差为广，勾弦并为袤，而勾实方其里。减矩股之实于弦实，开其余，即勾。**倍勾在两边为从法，开矩股之角，即勾弦差，**加勾为弦。以差除股实，得勾弦并，以并除股实，亦得勾弦差。令并自乘，与股实为实，倍并为法，所得亦弦。股实减并自乘，如法为勾。两差相乘，倍而开之，所得，以股弦差增之，为勾。以勾弦差增之为股。两差增之为弦。倍弦实，列勾股差实，见弦实者，以图考之，**倍弦实，满外大方，而多**

黄实。黄实之多，即勾股差实。以差实减之，开其余，得外大方。大方之面，即勾股并也。令并自乘，倍弦实乃减之，开其余，得中黄方。黄方之面即勾股差。以差减并而半之为勾；加差于并而半之为股。其倍弦为广袤合，令勾、股见者自乘为其实，四实以减之，开其余，所得为差。以差减合，半其余为广。减广于弦，即所求也。

这段文字中包含了较为丰富的一元二次方程内容。

(1) 以差实减弦实，半其余，以差为从法，开方除之，复得勾矣。

这句话相当于说，已知 $b-a$ 和 c ，由弦图（图 5）可得等式（11），将问题转化为“已知矩形面积与长宽之差，求矩形宽”，则 a 为一元二次方程（12）的根。

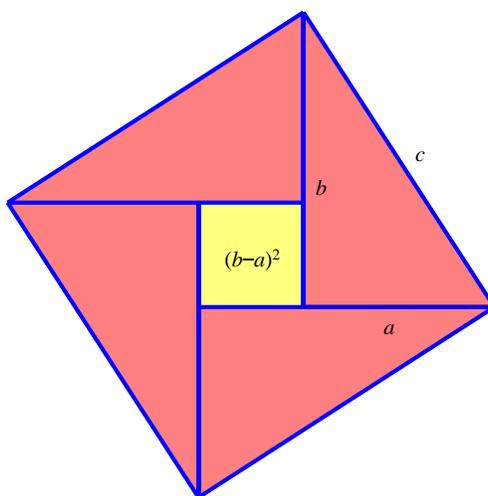


图 5 涂色弦图

(2) 倍股在两边，为从法。开矩勾之角，即股弦差。

如图 6 所示，从边长为 c 的正方形中挖去边长为 b 的正方形，余下面积为 a^2 的曲尺形，称为“勾实之矩”，其中所含边长为 $c-b$ 的小正方形称为“矩勾之角”。上面这句话相当于说，已知 a 和 b ，则“矩勾之角”的边长为一元二次方程

$$x^2 + 2bx = a^2$$

的根。

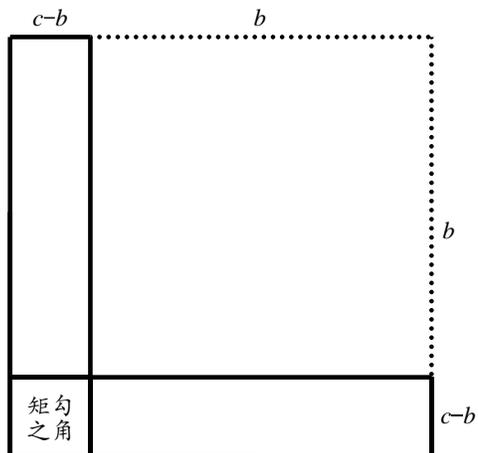


图 6 勾实之矩

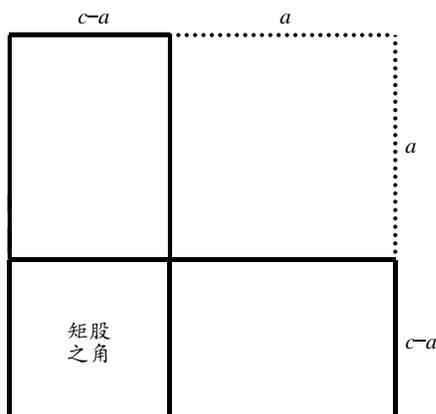


图 7 股实之矩

(3) 倍勾在两边为从法，开矩股之角，即勾弦差。

如图 7 所示，从边长为 c 的正方形中挖去边长为 a 的正方形，余下面积为 b^2 的曲尺形，称为“股实之矩”，其中所含边长为 $c-a$ 的小正方形称为“矩股之角”。上面这句话相当于说，已知 a 和 b ，则“矩股之角”的边长为一元二次方程

$$x^2 + 2ax = b^2$$

的根。

“勾实之矩”和“股实之矩”正是一元二次方程配方法的几何模型，两者印证了上文关于刘徽解一元二次方程方法的分析。

(4) 倍弦实，满外大方，而多黄实。黄实之多，即勾股差实。以差实减之，开其余，得外大方。大方之面，即勾股并也。令并自乘，倍弦实乃减之，开其余，得中黄方。黄方之面即勾股差。以差减并而半之为勾；加差于并而半之为股。

如图 8 所示，赵爽将以 $a+b$ 为边长的正方形称为“外大方”，由长、宽分别为 b 和 a 的四个同样的红色矩形和一个边长为 $b-a$ 的“中黄方”构成，或由一个以 c 为边长的弦方外加四个同样的红色直角三角形构成。这段话给出了以下问题的解法：已知 c 和 $b-a$ ，求 a 和 b 。与刘徽一样，赵爽将两个弦方与一个“外大方”加以比较，发现前者多了一个“中黄方”，由此得到等式 (5)、(6) 和 (7)。

又，已知 c 和 $a+b$ ，可得等式 (8)、(9) 和 (10)。其中 (9) 和 (10) 给出了方程

$$-x^2 + (b+a)x = \frac{(b+a)^2 - c^2}{2} \quad (13)$$

的两个正根，该方程对应的问题是“已知矩形面积与长宽之和，求宽”。

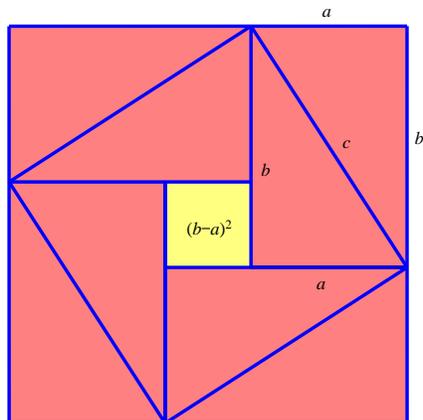


图 8 外大方图

(5) 其倍弦为广袤合，令勾、股见者自乘为其实，四实以减之，开其余，所得为差。以差减合，半其余为广。减广于弦，即所求也。

赵爽在前文中已提及“勾实之矩以股弦差为广，股弦并为袤”，“股实之矩以勾弦差为广，勾弦并为袤”，即将“勾实之矩”（即刘徽所说的“矩勾”）和“股实之矩”分别转化成矩形，其面积分别为 $c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$ ， $c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$ ，如图 9 和 10 所示。

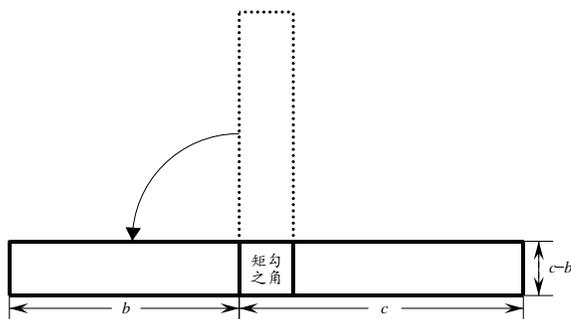


图 10 股实之矩的等积变形

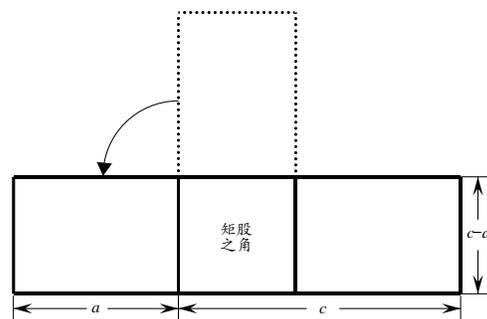


图 9 勾实之矩的等积变形

这里，赵爽实际上用几何方法证明了平方差公式。在这段话中，赵爽要表达的是如下问题的解法：在由“勾实之矩”转化而成的矩形中，已知面积和长宽之和，求宽 $c-b$ 、长 $c+b$ 以及 b ；在由“股实之矩”转化而成的矩形中，已知面积和长宽之和，求宽 $c-a$ ，长 $c+a$ 以及 a 。如图 11 和 12 所示，分别将四个与“勾实之矩”等积的矩形和四个与“股实之矩”等积的矩形

拼成大方图，则有

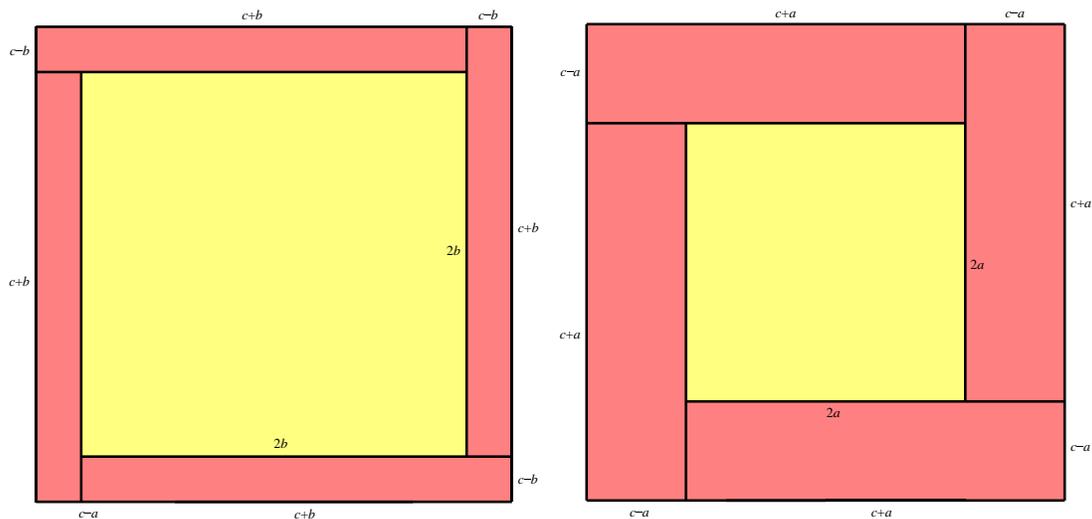


图 11 以倍弦为边长的“外大方”图之一 图 12 以倍弦为边长的“外大方”图之二

$$(c+b)-(c-b)=\sqrt{(2c)^2-4(c-b)(c+b)},$$

$$c-b=\frac{2c-\sqrt{(2c)^2-4(c-b)(c+b)}}{2},$$

$$b=c-\frac{2c-\sqrt{(2c)^2-4(c-b)(c+b)}}{2};$$

$$(c+a)-(c-a)=\sqrt{(2c)^2-4(c-a)(c+a)},$$

$$c-a=\frac{2c-\sqrt{(2c)^2-4(c-a)(c+a)}}{2},$$

$$a=c-\frac{2c-\sqrt{(2c)^2-4(c-a)(c+a)}}{2}.$$

由上可见，赵爽已能用几何方法解决“已知矩形面积与长宽差，求宽”或“已知矩形面积与长宽和，求宽”这两类问题，其方法就是利用“矩表方里”图或“外大方”图来配方。

“勾股圆方图注”仅局限于解直角三角形的情境，事实上，赵爽的解法具有更一般的意义。

首先，已知矩形面积为 q ，长宽之差为 p ，求宽，即解方程 $x^2+px=q$ ($p>0, q>0$)。利用

图 13 所示“外大方”图可得：

$$x = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \quad (14)$$

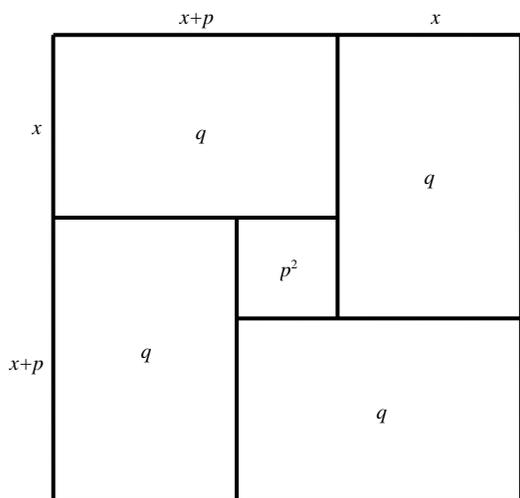


图 13 方程 $x^2 + px = q$ 的几何解法

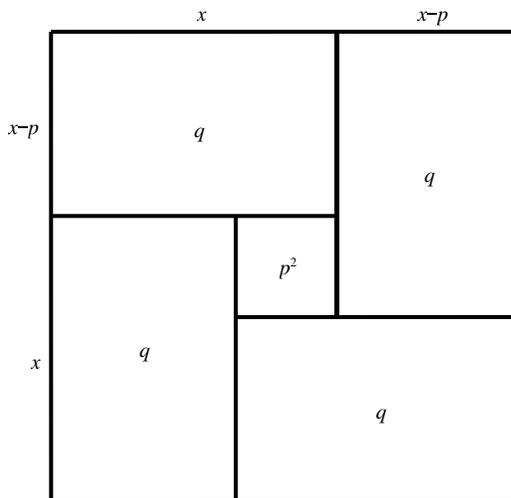


图 14 方程 $x^2 - px = q$ 的几何解法

其次，已知矩形面积为 q ，长宽之差为 p ，求长，即解方程 $x^2 - px = q$ ($p > 0, q > 0$)。利用

图 14 所示“外大方”图可得：

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (15)$$

再次，已知矩形面积为 q ，长宽之和为 p ，求宽和长，即解方程 $-x^2 + px = q$ ($p > 0, q > 0$)。

利用图 15 所示“外大方”图可得：

$$x = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (16)$$

或

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad (17)$$

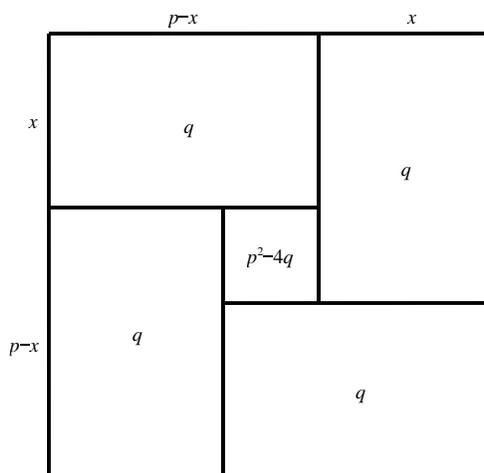


图 15 方程 $-x^2 + px = q$ 的几何解法

以方程 $x^2 + px = q$ 为例，从代数的角度看，上述方法相当于在方程两边乘以 4，得到

$$4x(x + p) = 4q,$$

两边同加上 p^2 得

$$4x(x + p) + p^2 = p^2 + 4q,$$

即

$$(2x + p)^2 = p^2 + 4q,$$

于是得方程的一个正根

$$x = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.$$

3 配方法之应用

刘徽和赵爽解一元二次方程的几何方法为北宋数学家刘益（12 世纪）将系数推广到负数情形打下了坚实的基础。南宋数学家杨辉在《田亩比类乘除捷法》序言中写道：“为田亩算法者，盖万物之体，变段终归于田势，诸题用术，变折皆归于乘除。中山刘先生作《议古根源》，序曰‘入则诸门，出则直田’，盖此义也。撰成直田演段百问，信知田体变化无穷，引用带从开

方、正负损益之法，前古所未闻也。”（郭书春，1994a，1073）由此可知，刘益在《议古根源》中已经系统解决了具有正根的一元二次方程问题。

杨辉记载了刘益《议古根源》（已失传）的一些问题与解法（图 16）。这里，我们摘录其中的二问。

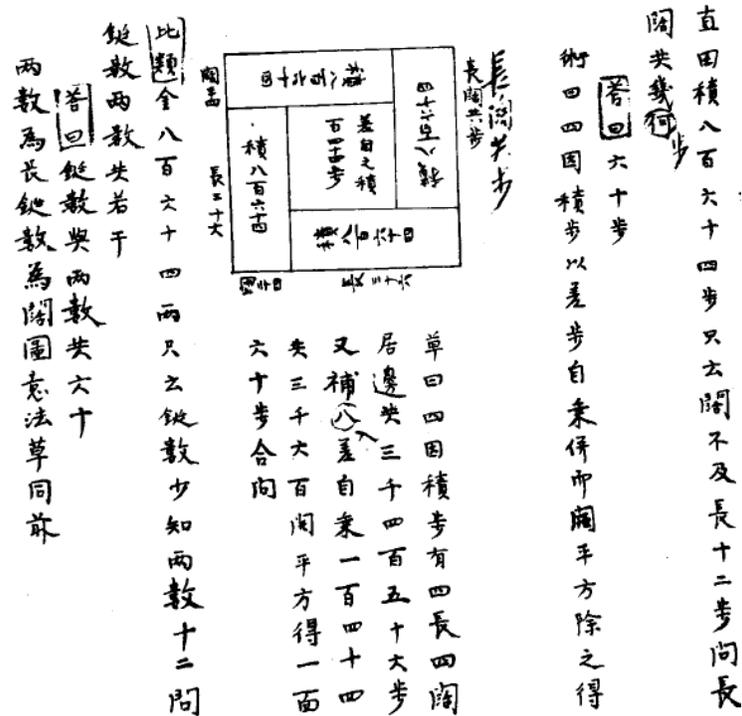


图 16 杨辉《田亩比类乘除捷法》书影

问题 1: 直田积八百六十四步，只云阔不及长十二步，问长阔共几步？术曰：四因积步，以差步自乘，并而开平方除之，得长阔共步。

题意是：已知长方形面积为 864，长宽之差为 12 步，求长宽之和。利用图 17，将四个长方形连同以长宽之差为边长的小正方形拼成一个大正方形，其边长即为长宽之和，故得所求长宽和为 $\sqrt{4 \times 864 + 12^2} = 60$ 。

明代数学家王文素（15 世纪）在《算学宝鉴》中补充称：“先要见长步，以差、并和折半；先要求阔，以差减和，余折半。”（郭书春，1994b，546）即，若将上述问题改为求长、阔，杨辉的解法就相当于用赵爽的配方法来解二次方程

$$x^2 - 12x = 864 \quad (x \text{ 为长}),$$

$$x^2 + 12x = 864 \quad (x \text{ 为阔}),$$

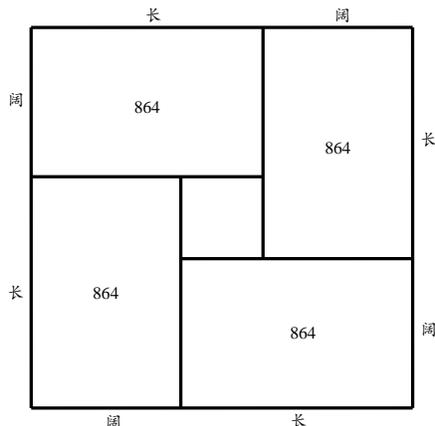


图 17 配方法的应用之一

其正根分别为

$$x = \frac{\sqrt{4 \times 864 + 12^2} + 12}{2},$$

和

$$x = \frac{\sqrt{4 \times 864 + 12^2} - 12}{2}.$$

问题 2: 直田积八百六十四步，只云长阔共六十步，问长多阔几何？术曰：四之积步，减和自乘之积，余，开平方除之，得长阔之差步。

题意是：已知长方形面积为 864，长宽之和为 60 步，求长宽之差。仍利用图 17，可得所求长宽差为 $\sqrt{60^2 - 4 \times 864} = 12$ 。类似地，若将上述问题改为求长、阔，杨辉的解法就相当于用赵爽的配方法来解二次方程

$$-x^2 + 60x = 864 \quad (x \text{ 为长或阔}).$$

其正根为

$$x = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \times 864}}{2}.$$

明代数学家程大位在《算法统宗》中也给出了若干矩形问题，如（郭书春，1994）：

问题 1: 今有直田积一千九百二十步，长阔相差二十八步，问：长、阔各若干？

问题 2: 今有直田积一千九百二十步，长阔相和九十二步，问：长、阔各若干？

程大位分别以歌诀表达了上述问题的解法：

长阔相差歌：“长阔相差要识情，积数将来以四乘。差步自乘加入积，开方得数以和名。和步加差须折半，此为长数更无零。以长减差便为阔，学者留心仔细寻。”

长阔相和歌：“长阔相和不识情，四因积步莫差争。和步自乘减去积，余用开方差步名。却将和步加差步，折半当为长数成。要知阔步如何见，长步减差阔便明。”

上述诗歌表达的就是一元二次方程的求根公式 (14) - (17)。

4 结语

从刘徽、赵爽到刘益、杨辉和程大位，中算家往往是在几何情境中讨论一元二次方程问题的，涉及的问题是勾股测量和勾股算术，这些问题可归结为两类：一是“已知矩形的面积与长宽之差，求长和宽”，二是“已知矩形面积与长宽之和，求长和宽”，基本解法是“以矩成方”。“以矩成方”的路径有两条，分别建立在两个基本的几何模型之上：一是“勾实之矩”或“股实之矩”，二是“大方图”。用今天的符号代数语言来表达，第一条路径就是将方程 $x^2 + px = q$ 的左边视为宽为 x 、长为 $x + p$ 的矩形面积，再将该矩形转化成由一个边长为 x 的正方形、两个长、宽分别为 $\frac{p}{2}$ 和 x 的矩形所构成的曲尺形，补上边长为 $\frac{p}{2}$ 的正方形，就得到一个面积已知的正方形；第二条路径仍将方程 $x^2 + px = q$ 的左边视为一个矩形的面积，再用四个这样的矩形拼成一个面积已知的正方形。

因此，中算家已利用配方法之几何形式，解决了一元二次方程的正根问题，时间上早于印度和阿拉伯数学家，且薪火相传、不绝如缕。在提倡中华优秀传统文化融入教学的今天，中算家的配方法完全可以在数学课堂上大放光彩。

参考文献

- 郭书春(1994a). 中国科学技术典籍通汇·数学卷(一), 河南教育出版社.
郭书春(1994b). 中国科学技术典籍通汇·数学卷(二), 河南教育出版社.
郭书春(2004). 汇校九章算术. 沈阳: 辽宁教育出版社.

拉德涅《代数几何》中的解析几何历史知识

汪晓勤

(华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

在西方早期解析几何教科书中, 只有极少数涉及数学史, 如 Lardner (1831)、Tanner & Allen (1898)、Siceloff, Wentworth & Smith (1922)、Murnaghan (1946)、Kells & Stotz (1949) 等。这几种教科书或在开篇、或在附录、或在注解中介绍了解析几何的一般历史或特定专题的历史, 其中, 英国数学家拉德涅 (D. Lardner, 1793-1859)《代数几何》(Lardner, 1831) 中的历史叙述和注解最为详尽。

在该书出版以前, 英国并没有出版过现代意义上的内容完整的解析几何著作, 即使是在解析几何的发祥地法国, 虽从 18 世纪开始先后出版过若干解析几何专著 (如 Guisnée, 1705; Lefrancois, 1804; Garnier, 1808; Bourdon, 1828), 但这些著作大多局限于二次曲线, 且对其性质的讨论也不够全面; 也没有一部著作运用微积分知识来研究曲线的性质。拉德涅显然带着创造历史的宏伟目标来打造他的鸿篇巨制。本文对其中的主要内容加以详解。

1 不定几何与不定几何

在平面几何学发展的早期, 人们只研究可用尺规作出的直线和圆。到了公元前 4 世纪, 柏拉图学派的数学家开始研究圆锥曲线。梅奈克缪斯 (Menaechmus) 用垂直于圆锥母线的平面去截不同顶角的圆锥, 得到锐角圆锥曲线、直角圆锥曲线和钝角圆锥曲线, 合称“梅氏三线”, 如图 1 所示。梅奈克缪斯发现了三种曲线的若干基本性质。之后, 亚里士泰奥斯 (Aristæus) 著《圆锥曲线》(五卷) 和《立体轨迹》(五卷), 可惜都已失传。

被誉为“大几何学家”的阿波罗尼奥斯对圆锥曲线的性质作了更深入、系统的研究。他的《圆锥曲线论》包含八卷, 其中希腊文前 4 卷、阿拉伯译文第 5-7 卷保存至今, 最后的第八卷失传, 17 世纪英国数学家哈雷 (E. Halley, 1656-1742) 试图复原出这一卷。

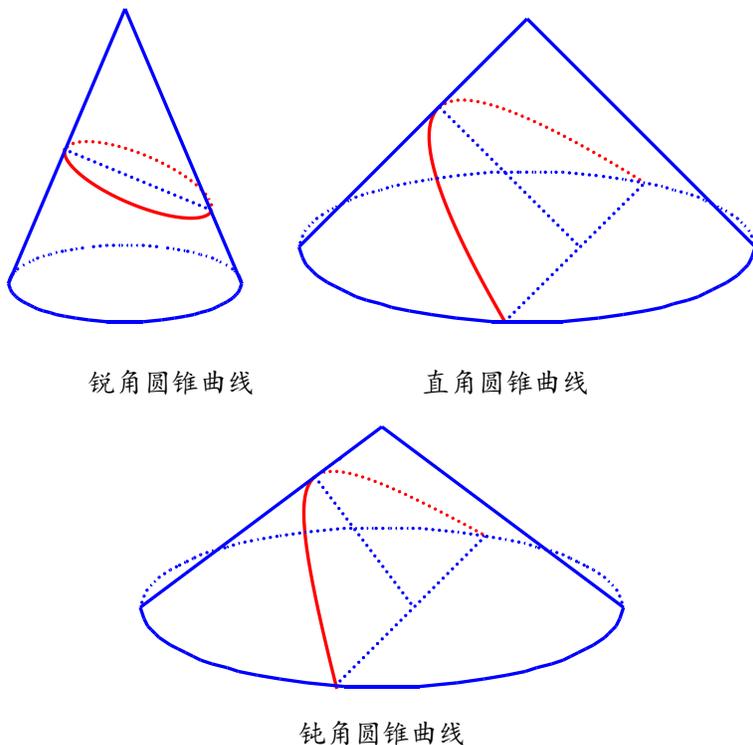


图 1 梅氏三线

柏拉图学派的数学家已将曲线视为动点的轨迹，而轨迹是由不定几何问题产生的。一开始，轨迹是用来解决适定几何问题的。例如，《几何原本》命题 I.1 要求在一条已知线段 AB 上作一个等边三角形，欧几里得的作法是，分别以线段端点 A 和 B 为心、以 AB 的长度为半径作圆，两圆交点确定了等边三角形的第三个顶点。这里，两个圆都是“到定点的距离等于定长的动点轨迹”。又以同书命题 IV.10 “作一个等腰三角形，使其底角为顶角的二倍”为例，如图 2 所示，给定线段 AB ，作黄金分割点 C ，以 A 为心、 AB 为半径作圆；以 B 为心， AC 长度为半径作圆

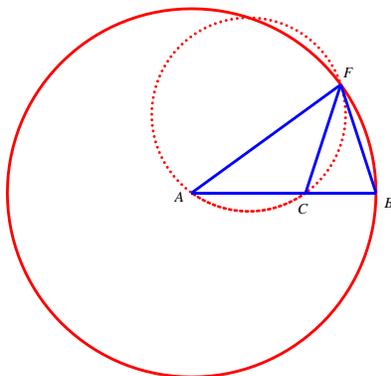


图 2 《几何原本》命题 IV.10

弧，交圆 A 为点 F ，连结 AF ，则 $\triangle ABF$ 为所求的三角形。这里，点 C 和 F 均由交轨法得到。

拉德涅举了一个《几何原本》以外的例子：已知一个三角形的底边、面积和两腰之比（不等于 1），求该三角形顶点的轨迹。已知三角形底边和面积，顶点轨迹为一条直线；已知三角形底边与两腰之比，顶点轨迹为圆。因此，所求轨迹为一条直线与圆的交点。

三大几何作图难题是适定几何问题，梅奈克缪斯利用交轨法解决了其中的倍立方问题。先是，希波克拉底（Hippocrates）将倍立方问题转化为在两条线段之间求两个比例中项的问题。用我们今天的代数符号表达，即已知 $a > 0$ ，要求 $x > 0$ ，使得 $x^3 = 2a^3$ 。该方程等价于求 x 和 y ，使得

$$a : x = x : y = y : 2a,$$

而上述比例式又等价于方程组

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases},$$

或

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ xy = 2a^2 \end{cases}.$$

上述第一个方程组对应于梅奈克缪斯的第一种解法。如图 3，设 $OA = 2OB = 2a$ ， OM 和 ON 满足 $OA : OM = OM : ON = ON : OB$ ，则有 $ON^2 = PM^2 = OB \cdot OM$ ，故知点 P 位于以 O 为顶点、 OM 所在直线为对称轴、 OB 为通径的抛物线上；又因 $OM^2 = PN^2 = OA \cdot ON$ ，故知点 P 同时又位于以 O 为顶点、 ON 所在直线为对称轴、 OA 为通径的抛物线上。因此，点 P 为两条抛物线的交点， $PM = ON$ 即为所求的比例中项。

第二个方程组对应于梅奈克缪斯的第二种解法。如图 4，因 $OM \cdot ON = PM \cdot PN = OA \cdot OB$ ，故知点 P 位于以 O 为心、 OM 和 ON 所在直线为渐近线的双曲线上。因此，点 P 为抛物线和双曲线的交点， $PM = ON$ 即为所求的比例中项。

伴随着适定几何问题的研究，古希腊数学家逐渐开始专门研究轨迹问题。阿波罗尼奥斯在《论平面轨迹》中研对平面轨迹作了系统的研究。虽然该书已失传，但根据后世希腊数学家帕普斯（Pappus）的记载，书中含有以下命题（Heath, 1921, pp.185-189）。

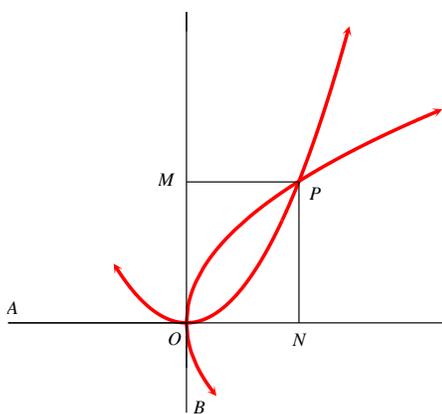


图 3 解倍立方问题的第一种交轨法

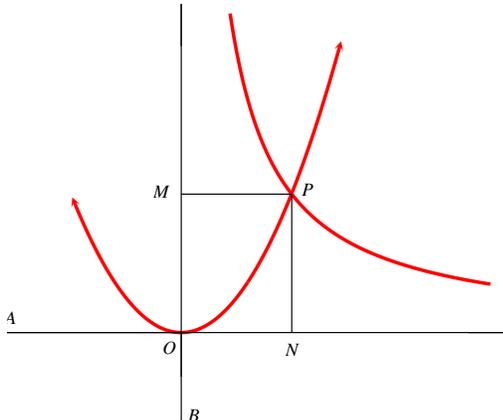


图 4 解倍立方问题的第二种交轨法

命题 1 到两定点距离的平方差等于已知数的点的轨迹为直线。

命题 2 到两定点距离之比等于常数的动点轨迹为直线或圆。

命题 3 已知直线 AQ , A 是其上一固定点, P 为直线外一动点, 过点 P 向 AQ 引垂线, 垂足为点 Q , $AP^2 = aAQ$ (a 为正的常数), 则点 P 的轨迹为圆 (图 5)。

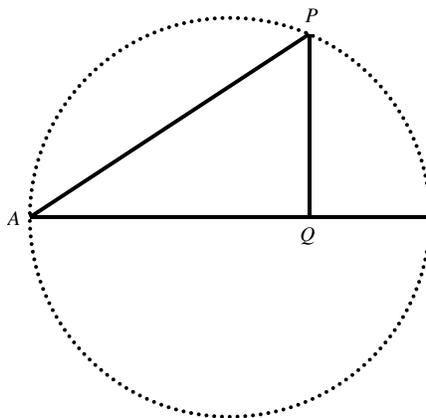


图 5 阿波罗尼奥斯平面轨迹命题 3

命题 4 若动点 P 到定点 A 和 B 的距离满足 $PA^2 = mBP^2 + k^2$ (m, k 均为正的常数), 则 P 的轨迹为圆。

命题 5 动点 P 到 n 个定点 A_1, A_2, \dots, A_n 的距离满足 $k_1A_1P^2 + k_2A_2P^2 + \dots + k_nA_nP^2 = k$ (k_1, k_2, \dots, k_n, k 均为正的常数), 则点 P 的轨迹为圆。

命题 6 已知直线 AX , A 和 B 是其上固定两点, P 为直线外一动点, 过点 P 向 AX 引垂线,

垂足为点 M ，若 $\alpha \cdot AP^2 + \beta \cdot BP^2 = a \cdot AM$ (α, β 和 a 均为正的常数)，则点 P 的轨迹为圆 (图 6)。

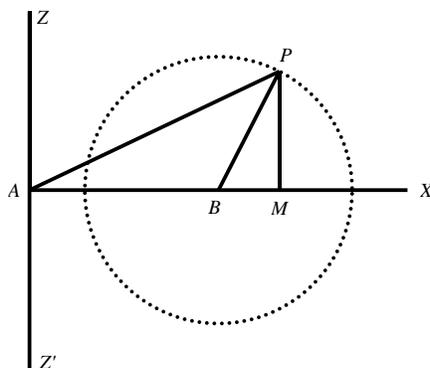


图 6 阿波罗尼奥斯平面轨迹命题 6

命题 7 PQ 为过圆 C 内一固定点 O 的弦， R 是 PQ 延长线上一点，若 $OR^2 = PR \cdot RQ$ ，则点 R 的轨迹为直线 (图 7)。

命题 8 给定点 O 和直线 l ，在 l 上任取一点 R ，动点 P 和 Q 位于直线 OR 上，若 $OR^2 = PR \cdot RQ$ ，则 P 和 Q 的轨迹为圆 (图 7)。

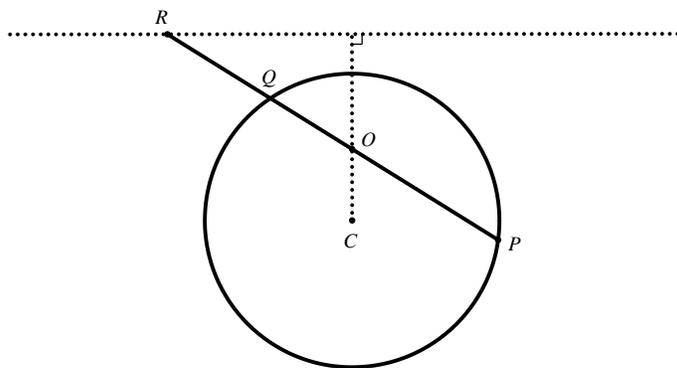


图 7 阿波罗尼奥斯平面轨迹命题 7 和 8

后世数学家费马、舒腾、辛普森 (R. Simpson, 1687-1768) 等都试图复原阿波罗尼奥斯的这部专著。

2 圆锥曲线的词源¹

如图 8，过圆锥 SXY 上一点 A 作平行于母线 SY 的平面，截圆锥得到曲线 GAF 。在曲线上任取异于顶点 A 的一点 P ，过点 P 作对称轴 AE 的垂线，垂足为点 Q ，过点 Q 作 XY 的平行线，交母线于点 C 和 D 。因 $PQ \parallel FG$ ，故得三点 P 、 C 、 D 所确定的平面与圆锥的底面平行，因而它们位于平面截圆锥所得的圆上。利用射影定理和相似三角形的性质知：

$$PQ^2 = CQ \times QD = \left(XY \times \frac{AQ}{SY} \right) \times \left(XY \times \frac{SA}{SX} \right) = AQ \times \left(\frac{XY^2}{SX^2} \times SA \right).$$

在平面 AFG 上过点 A 作 $AR \perp AE$ ，使得 $AR = \frac{XY^2}{SX^2} \times SA$ ，于是有

$$PQ^2 = AQ \times AR \quad (1)$$

也就是说，在 AR 上可以贴合一个长为 AQ 、宽为 AR 的长方形，其面积恰好等于 PQ^2 。故称曲线 GAF 为齐曲线（parabola，汉译“抛物线”），其中 AR 称为齐曲线的通径。

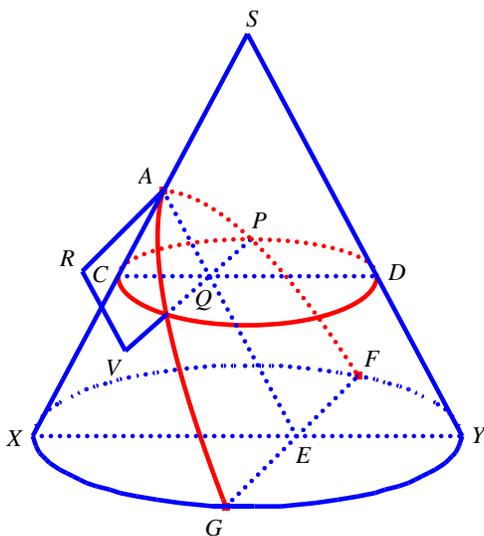


图 8 抛物线的基本性质

如图 9，过圆锥 SXY 上一点 A 作一平面与母线 SY 相交于点 B ，截圆锥得到曲线 PAB 。在曲线上任取异于顶点 A 的一点 P ，过点 P 作对称轴 AB 的垂线，垂足为点 Q ，过点 Q 作 XY 的平行线，交母线于点 C 和 D 。易知三点 P 、 C 、 D 所确定的平面与圆锥的底面平行，因而它们位于

¹ 参阅汪晓勤(2024).

平面截圆锥所得的圆上。利用射影定理和相似三角形的性质知：

$$PQ^2 = CQ \times QD = \left(XZ \times \frac{AQ}{SZ} \right) \times \left(YZ \times \frac{QB}{SZ} \right) = AQ \times \left(\frac{XZ \times YZ}{SZ^2} \times QB \right).$$

在平面 PAB 上过点 A 作 $AR \perp AB$ ，使得 $AR = \frac{XZ \times YZ}{SZ^2} \times AB$ ，于是有

$$PQ^2 = AQ \times \left(\frac{AR}{AB} \times QB \right) = AQ \times QV \quad (2)$$

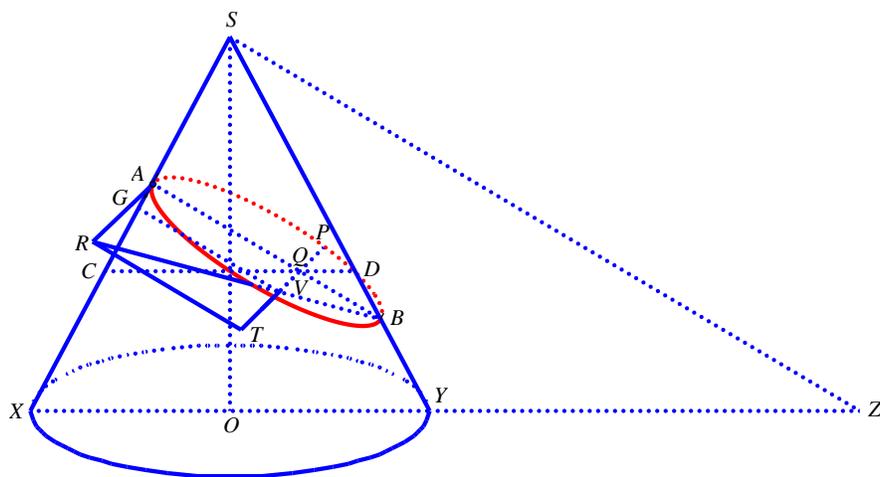


图 9 椭圆的基本性质

也就是说，在 AR 上可以贴合一个长为 AQ 、宽为 QV ($QV < AR$) 的长方形 $AGVQ$ ，其面积恰好等于 PQ^2 ，不足于 AR 的部分 $GRTV$ 与长为 AB (设为 $2a$)、宽为 AR 的长方形相似，故称曲线 PAB 为亏曲线 (ellipse, 汉译“椭圆”)，其中 AR 称为亏曲线的通径。

当 $AQ = QB = a$ 时， $PQ = b$ ，由 (2) 得 $AR = \frac{2b^2}{a}$ ，(2) 也可写成

$$PQ^2 = \frac{b^2}{a^2} (AQ \times QB) \quad (3)$$

如果以椭圆的中心为原点，以长轴所在直线为 x 轴建立坐标系，由 (3) 可得椭圆的标准方程。

如图 10，过圆锥 SXY 上一点 A 作一平面与母线 SY 的反向延长线相交于点 B ，截对顶圆锥得到曲线 EAF 和 MBN 。在曲线一支 EAF 上任取异于顶点 A 的点 P ，过点 P 作对称轴 AB 的垂线，垂足为点 Q ，过点 Q 作 XY 的平行线，交母线于点 C 和 D 。易知三点 P 、 C 、 D 所确定的平面与圆锥的底面平行，因而它们在平面截圆锥所得的圆上。利用射影定理和相似三角形的性质知：

$$PQ^2 = CQ \times QD = \left(XZ \times \frac{AQ}{SZ} \right) \times \left(YZ \times \frac{QB}{SZ} \right) = AQ \times \left(\frac{XZ \times YZ}{SZ^2} \times QB \right).$$

在平面 EAF 上过点 A 作 $AR \perp AB$ ，使得 $AR = \frac{XZ \times YZ}{SZ^2} \times AB$ ，于是有

$$PQ^2 = AQ \times \left(\frac{AR}{AB} \times QB \right) = AQ \times QV \tag{4}$$

这就是说，在 AR 上可以贴合一个长为 AQ 、宽为 QV ($QV > AR$) 的长方形 $AGVQ$ ，其面积恰好等于 PQ^2 ，且超出 AR 的部分 $RGVT$ 与长为 AB (设为 $2a$)、宽为 AR 的长方形相似，故称曲线 $EAF-MBN$ 为超曲线 (hyperbola, 汉译“双曲线”)，其中 AR 称为超曲线的通径。类似可得 $AR = \frac{2b^2}{a}$ ，其中 b 为虚半轴长。

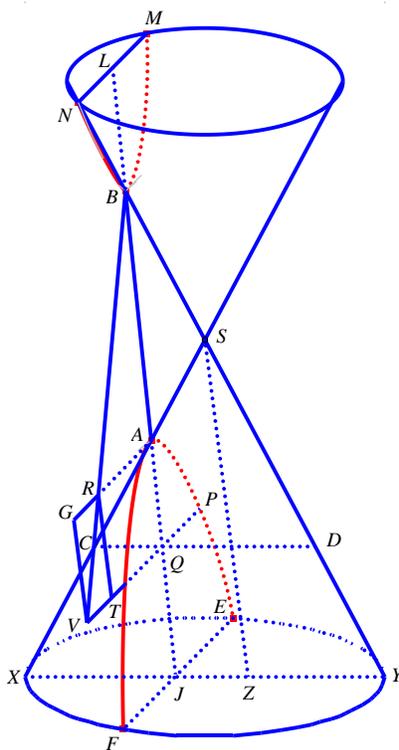


图 10 双曲线的基本性质

分别以抛物线的顶点、椭圆的左顶点和双曲线的右顶点为原点建立坐标系，设通径为 p ，则由 (1)、(2) 和 (4) 依次可得三种圆锥曲线的方程为

$$y^2 = px,$$

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2,$$

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2。$$

3 解析几何的诞生

在笛卡儿之前，代数在几何学上的应用已见于雷吉奥蒙塔努斯（J. M. Regiomontanus, 1436-1476）、塔尔塔利亚（N. Tartaglia, 1500-1557）、邦贝利（R. Bombelli, 1526-1572）、韦达等数学家的著作，但用二元方程来表示曲线并利用代数方法导出其性质，则完全是笛卡儿的发明²。

导致笛卡儿发明解析几何的动因是对古希腊“ n 线轨迹”（ $n \geq 2$ ）的研究。所谓“ n 线轨迹”问题指的是：平面上给定 n 条直线，当 n 为偶数时，动点到其中 $\frac{n}{2}$ 条直线距离³的乘积与到另 $\frac{n}{2}$ 条直线距离的乘积之比等于一个常数；当 n 为奇数时，动点到其中 $\frac{n-1}{2}$ 条直线距离的乘积与到另 $\frac{n+1}{2}$ 条直线距离的乘积之比等于一个常数，求动点的轨迹。阿波罗尼奥斯已经知道 $n=2$ 、 $n=3$ 和 $n=4$ 三种情形。

考虑具有特殊位置关系的直线。如图 11，已知两条直线 l_1 和 l_2 ， $l_1 \perp l_2$ ，动点 P 到 l_1 的距

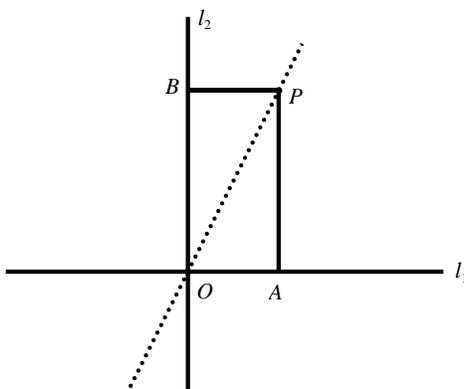


图 11 “二线轨迹”问题

² 同时期的法国数学家费马也独立发明了解析几何，但费马的著作在当时并没有产生影响。

³ 实际上，古希腊数学家研究的是更一般的情形：从动点分别向已知直线引直线，使所引直线与已知直线构成已知的角，于是，考虑动点和所引直线与已知直线交点之间的线段长度。为了便于读者理解，本文仅考虑所引直线与已知直线垂直的情形。

离与到 l_2 的距离之比等于 2:1，则点 P 的轨迹为直线（不含点 O ）。

如图 12，已知三条直线 l_1 、 l_2 和 l_3 ， $l_1 \perp l_2$ ， $l_1 \perp l_3$ ，垂足分别为点 A 和 B ，动点 P 到 l_1 的距离的平方与到 l_2 和 l_3 的距离乘积之比等于 1:1，则由圆的几何性质可知，点 P 的轨迹为圆（不含点 A 和 B ）。

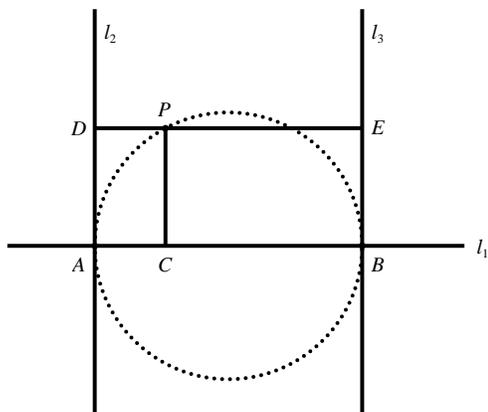


图 12 “三线轨迹”问题之一

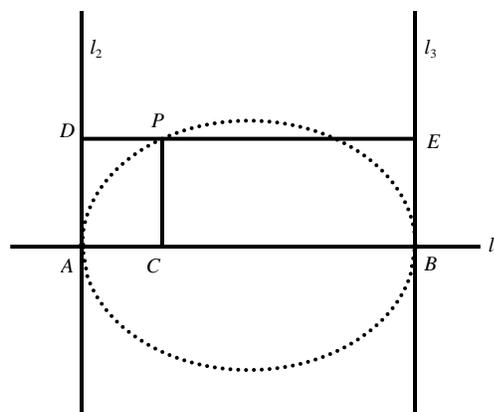


图 13 “三线轨迹”问题之二

如图 13，已知三条直线 l_1 、 l_2 和 l_3 ， $l_1 \perp l_2$ ， $l_1 \perp l_3$ ，垂足分别为点 A 和 B ，动点 P 到 l_1 距离的平方与到 l_2 和 l_3 距离乘积之比等于 9:16，则由椭圆的几何性质可知，点 P 的轨迹为椭圆（不含点 A 和 B ）。

如图 14，已知三条直线 l_1 、 l_2 和 l_3 ， $l_1 \perp l_2$ ， $l_1 \perp l_3$ ，垂足分别为点 A 和 B ，动点 P 到 l_1 的距离与到 l_2 和 l_3 距离乘积之比等于 1:2，则点 P 的轨迹为抛物线的一部分（不含点 A 和 B ）。

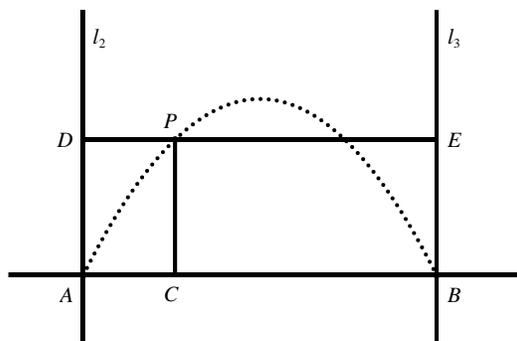


图 14 “三线轨迹”问题之三

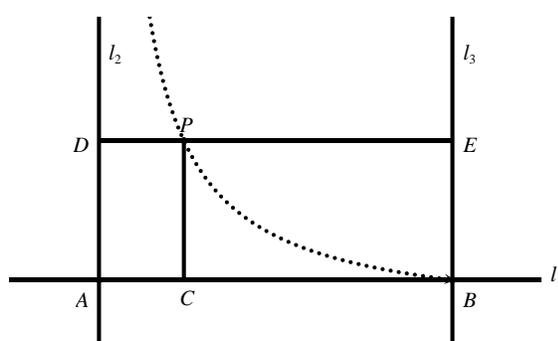


图 15 “三线轨迹”问题之四

如图 15，已知三条直线 l_1 、 l_2 和 l_3 ， $l_1 \perp l_2$ ， $l_1 \perp l_3$ ，垂足分别为点 A 和 B ，动点 P 到 l_3 的距离与到 l_1 和 l_2 距离乘积之比等于 2:1，则点 P 的轨迹为双曲线一支的一部分（不含点 A 和 B ）。

如图 16，已知四条直线 l_1 、 l_2 、 l_3 和 l_4 ， $l_1 \parallel l_2$ ， $l_1 \perp l_3$ ， $l_1 \perp l_4$ ，垂足分别为点 A 、 B 、 C 和 D ，动点 P 到 l_3 和 l_4 距离乘积与到 l_1 和 l_2 距离乘积之比等于 1:2，则点 P 的轨迹为双曲线（不含点 A 、 B 、 C 和 D ）。

一般的三线轨迹和四线轨迹都是圆锥曲线或圆，有关问题都已为阿波罗尼奥斯利用几何方

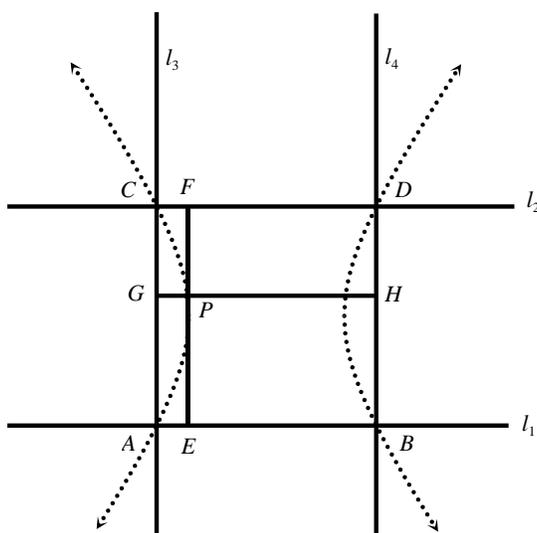


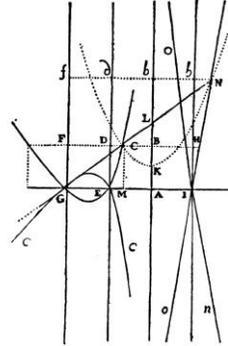
图 16 “四线轨迹”问题

法所解决。但是，对于 $n \geq 5$ 的情形，几何方法不再奏效，古希腊数学家无奈止步于此。

为了解决一般的“ n 线轨迹”问题，笛卡儿创造性地使用了代数方法：选择某一条已知直线为坐标轴，其上一点为原点，设动点的坐标⁴为 x 和 y ，根据已知条件，建立关于 x 和 y 的二元方程，这个方程表示的就是所求的动点轨迹。

⁴ 笛卡儿并未使用“坐标”一词。1692 年，莱布尼茨使用了“横坐标”（拉丁文 *abscissa*）和“纵坐标”（拉丁文 *ordinata*）二词。但根据德国数学史家康托（M. Cantor, 1829-1920）的考证，意大利数学家安格利（S. Angeli, 1623-1697）于 1659 年最早使用了“*abscissa*”一词；根据美国数学史家卡约黎（F. Cajori, 18-1940）的考证，16 世纪意大利数学家康曼迪诺（F. Commandino, 1506-1575）已使用过“*ordinata*”一词。17 世纪意大利天文学家拉希尔（P. de Lahire, 1640-1718）可能最早使用了“原点”（*origin*）一词。

Soient par exemple les lignes cherchées A B, I H, E D, G F, & G A. & qu'on demande le point C, en forte que tirant C B, C F, C D, C H, & C M a angles droits sur les données, le parallelepiped des trois C F, C D, & C H soit egal a celui des 2 autres C B, & C M, & d'une troiefime qui soit A I. Je pose C B $\propto y$. C M $\propto x$. A I, ou A E, ou G E $\propto a$, de façon que le point C estant entre les lignes A B, & D E, iay C F $\propto 2a - y$, C D $\propto a - y$. & C H $\propto y + a$ & multipliant ces trois l'une par l'autre, say $y - 2a y y - a y + 2a$ egal au produit des trois autres qui est $a x y$. Après cela ie considere la ligne courbe C E G, que i' imagine estre descrite par l'interfection, de la Parabole C K N, qu'on fait mouvoir en telle forte que son diametre K L est toujours sur la ligne droite A B, & de la regle G L qui tourne cependant autour du point G en telle forte quelle passe toujours dans le plan de cete Parabole par le point L. Et ie fais K L $\propto a$, & le costé droit principal. c'est a dire celui qui se rapporte a l'aissieu de cete parabole, aussy egal à a , & G A $\propto 2a$, & C B ou M A $\propto y$, & C M ou A B $\propto x$. Puis a cause des triangles semblables G M C & C B L, G M qui est $2a - y$, est à M C qui est x , comme C B qui est y , est à B L qui est par consequent $\frac{xy}{2a - y}$. Et pourceque L K est a , B K est $a - \frac{xy}{2a - y}$, ou bien $\frac{2a^2 - a y - xy}{2a - y}$. Et enfin pourceque ce mesme B K estant vn segment du diametre de la Parabole, est à B C qui luy est appliquée par ordre, comme celcy est au costé droit qui est a , le calcul montre que $y - 2a y y - a y + 2a$, est egal à $a x y$. & par consequent



quent que le point C est celui qui estoit demandé. Et il peut estre pris en tel endroit de la ligne C E G qu'on veuille choisir, ou aussy en son adiointe e E G e qui se descrit en mesme façon, excepté que le sommet de la Parabole est tourné vers l'autre costé, ou enfin en leurs contreposées N I o, & I O, qui sont descrites par l'interfection que fait la ligne G L en l'autre costé de la Parabole K N.

Or encore que les paralleles données A B, I H, E D, & G F ne fussent point également distantes, & que G A ne les coupast point a angles droits, ny aussy les lignes tirées

图 17 笛卡儿《几何学》书影（采自 D·E·史密斯的英译本）

利用代数的方法，笛卡儿轻易解决了“五线轨迹”问题（图 17）。为了便于理解，我们用今天习惯的坐标设法来呈现笛卡儿的解法。如图 18 所示，已知五条直线 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 和 l_5 ，其中 l_2 、 l_3 、 l_4 和 l_5 均与 l_1 垂直，垂足分别为点 A、B、C 和 D， $AB = BC = CD = a$ ($a > 0$)，动点 P 到 l_2 、 l_4 和 l_5 距离的乘积与到 l_1 和 l_3 距离的乘积之比等于 $a:1$ 。设 $BE = GP = x$ ， $BG = EP = y$ ，则由已知条件可得

$$(a + x)(a - x)(2a - x) = axy,$$

即

$$x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3 = axy.$$

对于 x 的一个值，由上述方程可解得 y 的值，从而确定轨迹中的一点；当 x 连续不断变化时 ($x \neq 0$)， y 也随之连续不断地变化，因而相应的点通过运动形成了一条轨迹。这种新的轨迹是古希腊数学家无法驾驭的。

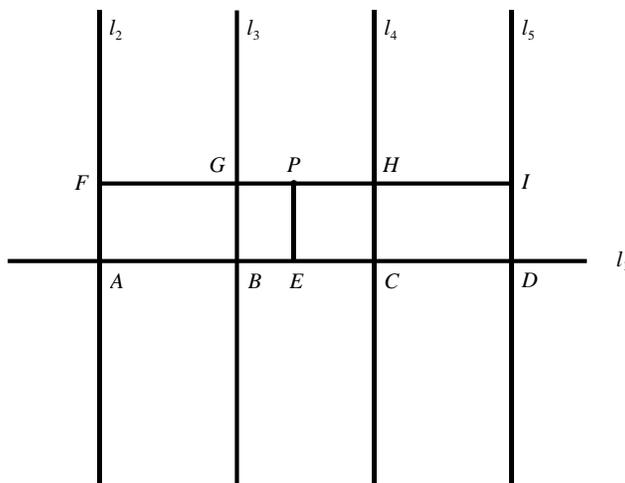


图 18 “五线轨迹”问题

拉德涅总结了笛卡儿解析几何方法的重要意义 (Lardner, 1831, pp. xxiii-xxiv)。

“通过二元方程的恰当应用，几何学得到了彻底的变革。任一给定法则所描绘的曲线可以用由该法则导出的二元方程来表示，因而该曲线成了代数的囊中之物。该方程蕴含了曲线的本质，由方程可以导出它的各种不同性质、它的不同分支、它的范围、它的渐近线、直径和中心、它的拐点和尖点。一言以蔽之，它的一切性态都可根据方程已代数方式导出来。因此，可将方程视为体现曲线所有性质的短小精悍的公式，通过固定的一般法则，分析学家总能从方程中推导出这些性质。这些固定的一般法则，并非仅仅适用于特定曲线的方程，而是适用于一切曲线的方程。

这一值得纪念的发现直接导致的结果是，几何学立即跳出长期以来一直束缚它的狭小范围，而进入无限广阔的新天地。以往几何学的对象仅仅是一些简单的特殊曲线，但现在几何学家可以根据方程的次数讨论一类曲线的性质。于是，曲线的种类和方程一样变得无穷无尽。古代的几何学并无通法，它由一些随意拼凑在一起的零散命题组成，这些命题并非通过必要的纽带或一般的法则加以联系。因此，每一个特殊性质的发现，都让几何学家殚精竭虑；即便取得了成功，也是一半靠聪明、一半靠运气。以切线为例。一条曲线的切线作图，并不能为另一条曲线的切线作图提供什么思路，当几何学家遇到新曲线时，他依然会面临同样的困难。代数的应用立即消除了这些缺陷。不论什么曲线，代数为其性质的探究提供了一致的、通用的规则。不，它不仅有助于推理能力的发挥，实际上还为层出不穷的曲线的发现提供了用武之地。任何一个二元方程的提出都会导致相应曲线的发现，其本质和性质成了几何探索的课题。”

4 曲线的切线

尽管笛卡儿发明了解析几何，但这一新学科并未臻于完善。笛卡儿并未给出求曲线长度和曲线所围面积的方法。一些数学家认为曲线长度问题根本就无法解决；而在曲线所围面积问题上，古希腊数学家仅仅解决极少数特殊曲线（圆、椭圆和抛物线）的情形。17 世纪数学家十分关注的曲线切线问题，也并未得到彻底的解决。

笛卡儿给出了两种求切线的方法。第一种方法见于他的书信。已知点 $P(x_0, y_0)$ 和曲线 $F(x, y) = 0$ ，要求过点 P 且与曲线相切的直线方程。过点 P 的直线方程为

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

与方程 $F(x, y) = 0$ 联立，消去 y ，得到关于 x 的方程，令方程的其中两个根相等，可得 $\frac{a}{b}$ 的值⁵，从而得到过点 P 的切线方程。拉德涅在书中将上述方法用于一般二次曲线，并认为，在微积分之前，学习这样的方法是有必要的。

笛卡儿的第二种方法见于《几何学》。如图 19 所示，要作曲线 $F(x, y) = 0$ 在其上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线，在 x 轴上取点 $C(x_1, 0)$ ，以 C 为圆心， CP 为半径作圆，交曲线于另一点 Q 。

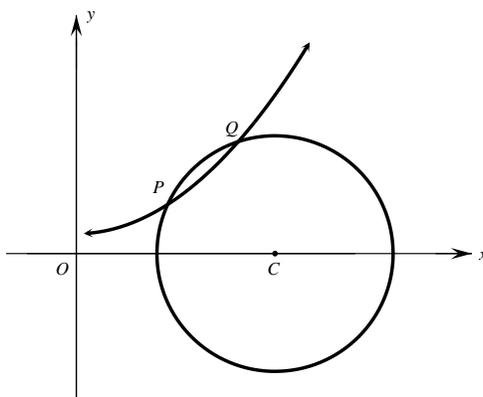


图 19 笛卡儿求切线的方法

将圆的方程

⁵ 笛卡儿的方法是构造一个与所得方程的次数相同、且有两个等根的方程，将该方程与所得方程的系数进行比较。

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (x_0 - x_1)^2 + y_0^2$$

与曲线方程联立，消去 y 得到关于 x 的方程，令方程的其中两个根相等，即可求得 x_1 ，此时，圆与曲线只有一个公共点，圆心与该点连线即为曲线在该点处的法线，从而得到曲线在该点处的切线。

费马则从次切距入手来求曲线的切线。如图 20 所示，要求曲线 $F(x, y) = 0$ 在其上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线。假设切线已作出，次切距 $TM = a$ ， $MN = e$ ，过点 N 作 x 轴的垂线，交切线于点 Q ，利用相似三角形的性质，可得点 Q 的坐标为 $\left(x_0 + e, y_0 \left(1 + \frac{e}{a}\right)\right)$ ，把点 Q 当作曲线上的点，则有

$$F\left(x_0 + e, y_0 \left(1 + \frac{e}{a}\right)\right) = 0。$$

令 $e = 0$ ，由 $F(x_0, y_0) = 0$ 即可求得 a ，从而求得切线。

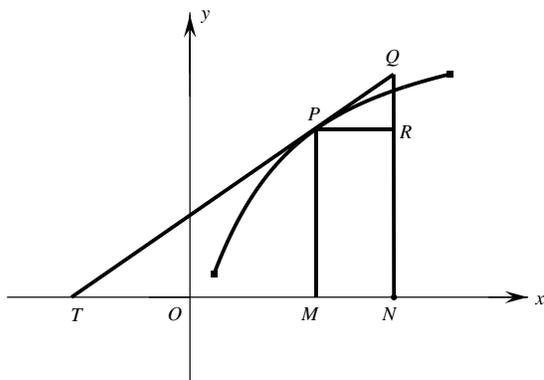


图 20 费马求切线的方法

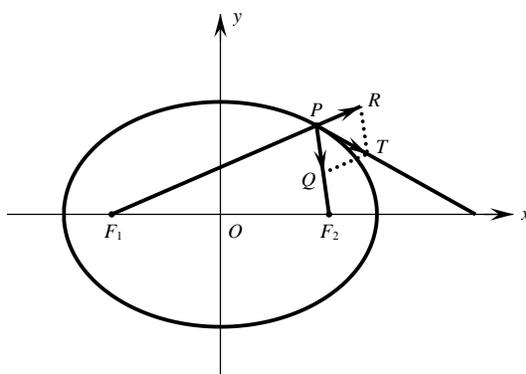


图 21 罗伯瓦尔求椭圆切线的方法

17 世纪法国数学家罗伯瓦尔 (G. P. de Roberval, 1602-1675) 从运动的视角来求曲线的切线。将曲线视为同时作两种运动的质点的轨迹，在曲线上某一点处，两种运动的速度的合速度方向即为曲线在该点处的切线方向。

如图 21，设 P 是椭圆上一点，因 $PF_1 + PF_2 = 2a$ 是定值，故知 F_1P 增加的速度与 F_2P 减小的速度大小相等，故在 F_1P 延长线上取点 R ， F_2P 上取点 Q ，使得 $PR = PQ$ ，以 PR 和 PQ 为邻

边作平行四边形，则对角线 PT 所在的直线即为椭圆在点 P 处的切线，也就是说， $\triangle F_1PF_2$ 在顶点 P 处的外角平分线就是所求的切线。类似可求得双曲线在其上一点 P 处的切线，如图 22 所示。

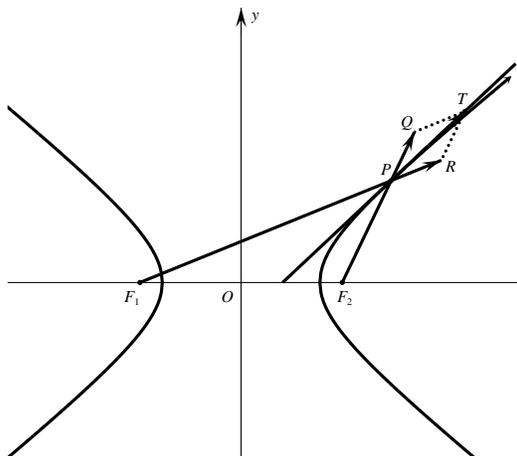


图 22 罗伯瓦尔求双曲线切线的方法

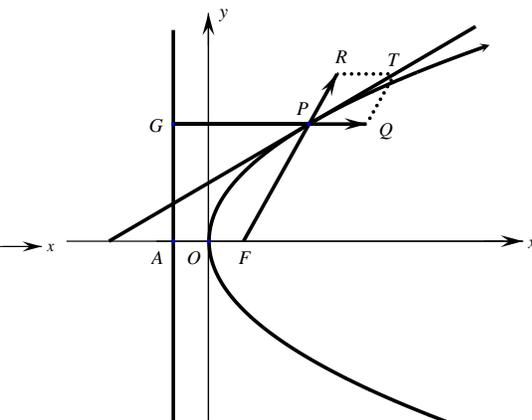


图 23 罗伯瓦尔求抛物线切线的方法

如图 23，设 P 是抛物线 $y^2 = 2px$ 上一点， AG 是其准线，因 $PG = PF$ ，故在 FP 和 GP 方向上的速度大小相等，故在 FP 延长线上取点 R ， GP 延长线上取点 Q ，使得 $PR = PQ$ ，以 PR 和 PQ 为邻边作平行四边形，则对角线 PT 所在的直线即为抛物线在点 P 处的切线，故 $\angle RPQ$ 的平分线 PT 即为抛物线在点 P 处的切线。

牛顿的老师、英国数学家巴罗 (I. Barrow, 1630-1677) 利用后人所称的“微分三角形”来求曲线的切线，这种方法实际上与费马的方法十分相近。

虽然笛卡儿、费马、罗伯瓦尔、巴罗等数学家的求切线方法对于某些曲线是有效的，但难度很大，且无法适用于超越曲线。只有牛顿和莱布尼茨发明的微积分才真正成为求切线的通法。

有了微积分中的导数概念，曲线 $F(x, y) = 0$ 在其上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$y - y_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0),$$

自此，曲线的次数和曲线的类别不再成为求切线的障碍，微积分诞生以前的各种不同方法完全为简单、普适、有效的导数法所取代。

拉德涅盛赞微积分，称该学科的发明“无疑是人类头脑所能产生的最壮丽的构想”。

5 一些著名的曲线

拉德涅在书中对于许多著名曲线的历史都作了注解，这些曲线包括狄奥克勒斯蔓叶线、尼可米德蚌线、希皮亚斯割圆曲线、阿基米德螺线、笛卡儿卵形线、卡西尼卵形线、伯努利双扭线、阿涅西箕舌线、对数螺线、摆线、外摆线、对数曲线、三角曲线、悬链线等。第 16 章对其中一些曲线的历史都有介绍，这里不再赘述。

5.1 三角曲线

英国数学家赫顿 (C. Hutton, 1737-1823) 在《哲学与数学词典》中推测，正弦曲线、余弦曲线、正切曲线等的产生源于英国数学家赖特 (E. Wright, 1560?-1615) 对墨卡托 (G. Mercator, 1512-1594) 的地图绘制原理的研究。(Hutton, 1815, p.512)

荷兰地图学家墨卡托在绘制地图时采用了“等角圆柱投影”：设想将地球仪的经纬线投影（点光源在球心）到一个与球外切于赤道的圆柱面上，再展开圆柱面，即得地图上正交的经纬线，每个相同的角度，经线等距离分布，纬线离赤道越远，间隔越大。1569 年，墨卡托出版了著名的世界地图，但他并没有交代自己是如何具体确定纬线间隔的。赖特于 1599 年出版《航海中的某些误差的矫正》一书，书中利用正割函数复原了墨卡托的方法。如图 24 所示。设地球上一一点 A 的经纬度分别为 λ 和 φ ，点 C 的经纬度分别为 $\lambda + \Delta\lambda$ 和 $\varphi + \Delta\varphi$ ，点 A 和 C 在地图上的对应点是 $A'(x, y)$ 和 $B'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ，其中 $\Delta x = R\Delta\lambda$ ， R 为地球半径。由投影的保角性知，球面矩形 $ABCD$ 的两邻边之比等于地图上对应矩形 $A'B'C'D'$ 两邻边之比相等，故得

$$\frac{\Delta y}{R\Delta\lambda} = \frac{R\Delta\varphi}{R\cos\varphi\Delta\lambda},$$

从而得

$$\Delta y = R \sec \varphi \Delta \varphi \quad (5)$$

利用公式 (5)，赖特从赤道开始（纬度为 $\varphi = 0^\circ$ ， $\sec \varphi = 1$ ，纬线为 $y = 0$ ）开始，纬度每增加 $\Delta\varphi = 1'$ ，依次算出相应的 Δy ，最终得到纬度在 $0^\circ \sim 75^\circ$ 之间的各条纬线， Δy 确定了相邻两条纬线的间距。

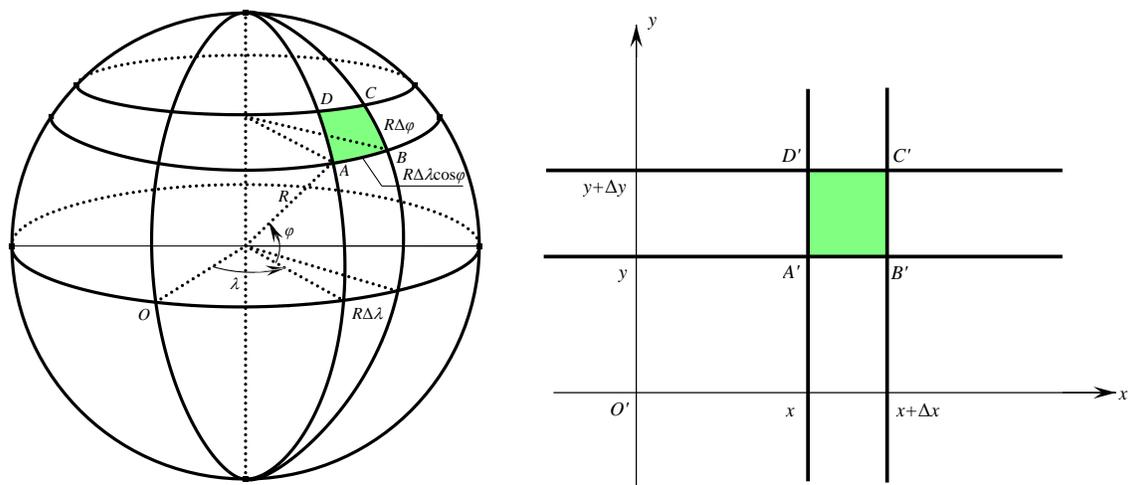


图 24 墨卡托投影

赖特生活在没有微积分的时代，他的计算耗费时间，十分不易。有了微积分知识，他的方法就变得十分简易了。事实上，由公式 (5) 得

$$\frac{dy}{d\varphi} = R \sec \varphi,$$

故得

$$y = R \int_0^{\frac{5\pi}{12}} \sec \varphi d\varphi \quad (6)$$

(6) 相当于求正割函数 $y = \sec x$ 在区间 $\left[0, \frac{5}{12}\pi\right]$ 上的定积分，或正割曲线某一段下的面积 (图 25)。因此，在 16 世纪，正是地图的绘制促使人们开始研究三角曲线。

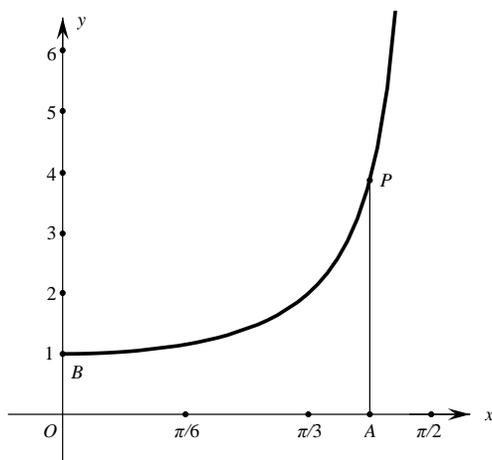


图 25 正割曲线某一段下的面积

拉德涅还给出了正弦曲线 $y = \sin x$ 或正弦型曲线 $y = a \sin x (a > 0)$ 的一个性质。如图 26 所

示，已知圆柱的底面半径为 1，用与底面构成 45° 角的平面截圆柱，得到一个椭圆，如果沿过点 A 的母线剪开圆柱面并将其平展，即得正弦曲线。事实上，用过点 A 且平行于底面的平面截圆柱，得到圆 ATS ，过椭圆上点 P 处的母线与圆 ATS 交于点 Q ，过 Q 作 OA 的垂线，垂足为 R ，则 $\triangle PQR$ 为等腰直角三角形，若 $\angle AOQ = x$ ，则 $AQ = x$ $PQ = QR = \sin x$ 。

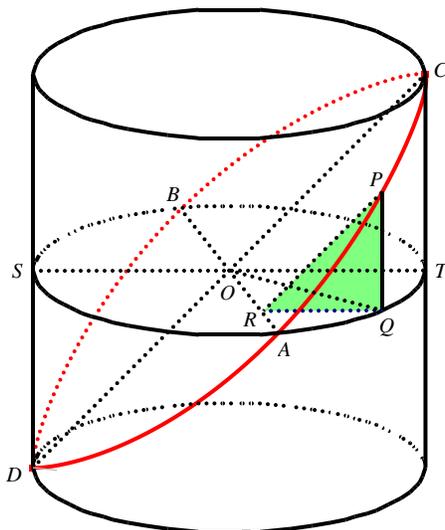


图 26 正弦曲线与椭圆

当平面与底面构成的角不等于 45° 时，平展圆柱面后，椭圆变成了正弦型曲线。反过来，在纸上画出正弦曲线在一个周期上的一段，那么，将纸卷成圆柱面，使曲线两端重合，则得到一个椭圆。由此可知，正弦曲线在一个周期上的一段的长度等于一个椭圆的周长。

5.2 笛卡儿卵形线

笛卡儿将椭圆的焦半径性质加以推广，发现了一类新的曲线。平面上有两个定点 F_1 和 F_2 ，

$|F_1F_2| = 2c$ ($c > 0$)，动点 P 到 F_1 和 F_2 的距离满足

$$|PF_1| + k|PF_2| = 2a \quad (a > 0),$$

以 F_1F_2 的中点为原点， F_1F_2 所在直线为 x 轴，因

$$|PF_1| - k|PF_2| = \frac{|PF_1|^2 - k^2|PF_2|^2}{2a}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[(x+c)^2 + y^2] - k^2[(x-c)^2 + y^2]}{2a} \\
 &= \frac{(1-k^2)(x^2 + y^2 + c^2) + 2c(1+k^2)x}{2a},
 \end{aligned}$$

故得

$$|PF_1| = a + \frac{(1-k^2)(x^2 + y^2 + c^2) + 2c(1+k^2)x}{4a},$$

于是得

$$\left[(1-k^2)(x^2 + y^2 + c^2) + 2c(1+k^2)x + 4a^2 \right]^2 = 16a^2 [(x+c)^2 + y^2].$$

当 $k \neq \pm 1$ 时，方程表示一条四次曲线（图 27 为 $k=2$ ， $a=3$ ， $c=1$ 的情形）；当 $k=1$ 时，方程表示椭圆， $k=-1$ 时，方程表示双曲线。

卵形线的发现源于对折射光的研究。笛卡儿发现，若光从一种媒质中的已知点出发经过某个界面发生折射，折射光经过另一媒质中的已知点，则该界面必为由卵形线绕焦点所在直线旋转而成的旋转曲面。

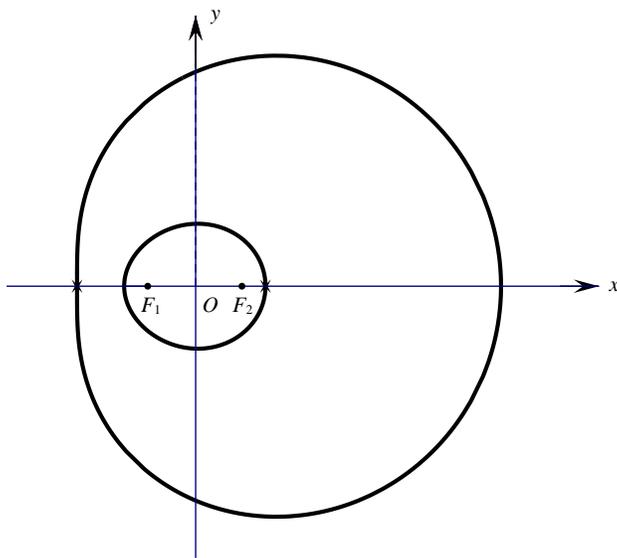


图 27 笛卡儿卵形线

5.3 半立方抛物线

半立方抛物线是抛物线的渐屈线⁶（即曲率圆圆心的轨迹），最早由英国数学家内尔和荷兰数学家侯莱特（H. van Heuraet, 1634-1660）各自独立发现。

设抛物线方程为 $y^2 = 2px$ ， $P(x_0, y_0)$ 是其上一点，则该点处的曲率圆圆心坐标满足

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}, \\ y-y_0 = -\frac{1}{y'}(x-x_0) \end{cases},$$

将 $y'|_{x=x_0} = \sqrt{\frac{p}{2x_0}}$ ， $y''|_{x=x_0} = -\frac{\sqrt{2p}}{4x_0\sqrt{x_0}}$ 代入，解得

$$\begin{cases} x-x_0 = 2x_0 + p \\ y-y_0 = -\frac{(2x_0+p)y_0}{p} \end{cases},$$

故得

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}(x-p) \\ y_0 = -p^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} \end{cases},$$

代入抛物线方程，整理得

$$py^2 = \frac{8}{27}(x-p)^3,$$

这是一条尖点为 $(p,0)$ 的半立方抛物线，如图 28 所示。

内尔和侯莱特成功地将半立方抛物线的弧长问题转化为相应的抛物线弓形的面积问题。如图 29，设半立方抛物线的方程为 $py^2 = x^3$ ，其上任一点 P 的坐标为 (x, y) ，过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为点 Q ，又作曲线的法线，交 x 轴于点 R ，延长 QP 至点 $P'(x, y')$ ，使得 $\frac{PQ}{PR} = \frac{m}{P'Q}$ ，其中 $m > 0$ 为常数，于是有

⁶ 曲线的渐屈线理论最早是由荷兰数学家惠更斯（C. Huygens, 1629-1695）创立的。

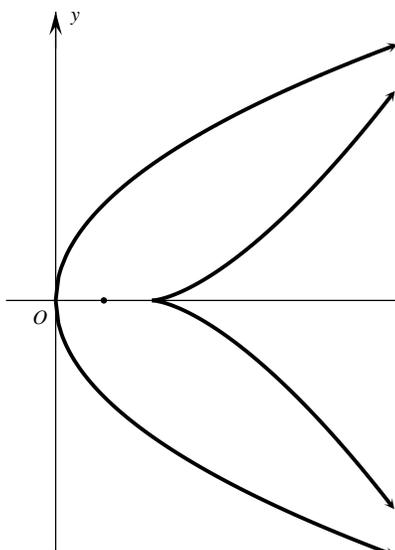


图 28 抛物线的渐曲线

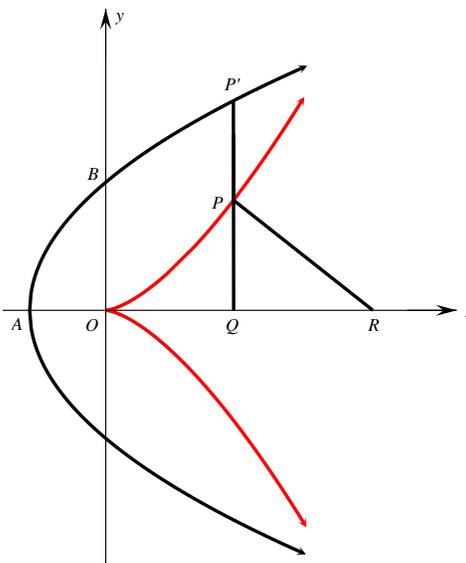


图 29 半立方抛物线的求长

$$\frac{y}{\sqrt{\frac{9x^4}{4p^2} + \frac{1}{p}x^3}} = \frac{m}{y'}$$

从而得

$$y'^2 = \frac{9m^2}{4p} \left(x + \frac{4p}{9} \right).$$

可见，点 P' 位于以 $\left(-\frac{4p}{9}, 0\right)$ 为顶点、以 x 轴为对称轴的抛物线上，故得半立方抛物线的一段弧

OP 的长度为

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{3x^2}{2py}\right)^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9x}{4p}} dx = \frac{3}{2\sqrt{p}} \int_0^x \sqrt{x + \frac{4p}{9}} dx,$$

而曲边形 $OBP'Q$ 的面积为

$$A(x) = \frac{3m}{2\sqrt{p}} \int_0^x \sqrt{x + \frac{4p}{9}} dx,$$

故有

$$s(x) = \frac{1}{m} A(x).$$

于是，半立方抛物线求长问题就被转化成了抛物线弓形求积得问题，而抛物线弓形求积问题已经为古希腊数学教学阿基米德所解决。以上我们用定积分知识对内尔和侯莱特的方法加以

解释，但事实上他们当时并没有微积分，因此，这一转化确实是十分精彩的发现。

5.4 对数螺线

对数螺线最早是由笛卡儿发现的。关于斜面上的物体运动，笛卡儿认为，严格地说，斜面上物体所受的重力并非恒定不变，其方向是连续变化的，由此产生了以下问题：物体在一条曲线上作加速运动，加速度大小保持不变；所受的力大小不变，方向始终指向某个固定点，求这条曲线。笛卡儿推断，这条曲线是螺线。后来，梅森（M. Mersenne, 1588-1648）向他求教，希望他能对这条曲线作出更详细的介绍。笛卡儿的回复是：这条曲线具有这样的性质：其上任意点处的切线与该点的矢径所成夹角始终保持不变⁷。设 $P(x, y)$ 是曲线上任意一点，则上述性质就是

$$\frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + \frac{yy'}{x}} = k \quad (k \text{ 为常数, } k \neq 0)。$$

整理得

$$k(x + yy') = xy' - y,$$

于是有

$$k \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2},$$

即

$$kd \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) = d \left(\arctan \frac{y}{x} \right),$$

设 $k = \frac{1}{\ln a}$ ($a > 0, a \neq 1$)，则有

$$\log_a \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x},$$

或即

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a^{\arctan \frac{y}{x}},$$

⁷ 因为这一性质，对数螺线又被称为“等角螺线”。

对应的极坐标方程为

$$\rho = a^\theta.$$

于是，后来的数学家发现了对数螺线的更多的性质。利用微积分方法，瑞士数学家雅各·伯努利对该曲线的性质进行了系统深入的研究，他发现，对数螺线的渐屈线、渐开线、焦散线仍然是对数螺线。伯努利对该曲线可谓情有独钟，生前他要求在自己的墓碑（图 30）上刻

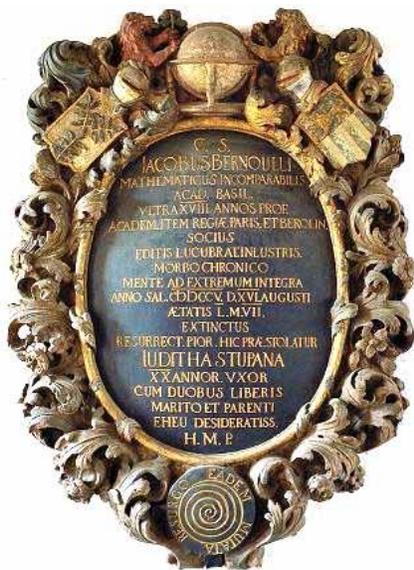


图 30 雅各·伯努利的墓碑（巴塞尔大教堂）

上这条曲线以及墓志铭——“历经沧桑，依然故我”（*Eadem Mutata Resurgo*）。

《代数几何》介绍了对数螺线在天文学、力学、航海等领域的应用。例如，在球的一个大圆所在平面上，以球心为极点作一条对数螺线，将该螺线沿与平面垂直的方向投影到球面上，得到一条恒向线。若船在大海上航行时，罗盘指针的指向保持不变，则船的航线为恒向线，恒向线与所有经线构成的角是相等的。因此，恒向线又可以被视为“在球面上作出的对数螺线”，其极点为球极，一点处的矢径为经线上位于该点和极点之间的一段弧。

拉德涅还给出了由指数曲线 $y = a^x$ 得到对数螺线 $\rho = a^\theta$ 的方法。

6 基于数学史的问题

《代数几何》的许多问题或命题都源于数学史，这里，我们举几个典型的例子。

问题 1: 已知三角形的底边和顶角，求顶点的轨迹。

该问题源于欧几里得《几何原本》中的命题 III.21：“在圆中，同一弓形内的角相等。”

问题 2： 已知三角形的底边和两腰之比（不等于 1），求顶点的轨迹。

这个问题源于阿波罗尼奥斯的《论平面轨迹》，所求轨迹即后人所称的“阿波罗尼奥斯圆”。

改变已知条件，拉德涅还给出了更多类似的轨迹问题，如：

- 已知三角形的底边和两腰的平方和，求顶点的轨迹。
- 已知三角形的底边和两底角之差，求顶点的轨迹。
- 已知三角形的底边和两底角正切之积，求顶点的轨迹。
- 已知三角形的底边和两底角正切之和，求顶点的轨迹。
- 已知三角形的底边和两底角正切之差，求顶点的轨迹。
- 已知三角形的底边和顶角，求三角形重心、内心和垂心的轨迹。

问题 3： 求到若干定点距离的平方和等于常数的动点轨迹。

这个问题源于阿波罗尼奥斯的《论平面轨迹》，是上文中命题 5 的特殊情形。设 $P_i(x_i, y_i)$

($i=1, 2, \dots, n$) 是已知点，常数为 k^2 ，则动点 $P(x, y)$ 满足方程

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) x - \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) y + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) - k^2 \right) = 0$$

问题 4： 若干已知点到直线的距离之和等于常数，求直线的方程。

该问题源于阿波罗尼奥斯的《论平面轨迹》。如图 31，设所求直线 l 的法向式方程为 $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ，点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 到 l 的距离之和为 k ($k > 0$)，不妨设 P_1 和 P_2 位于

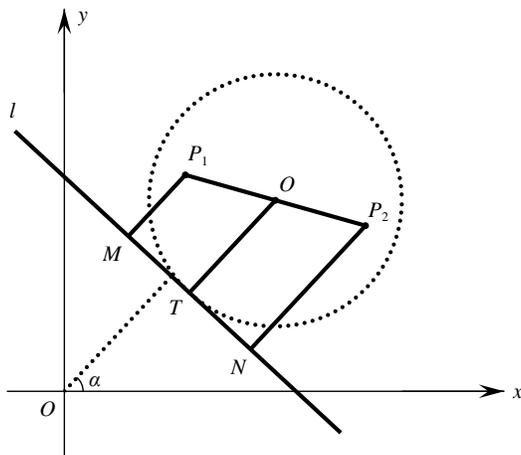


图 31 源于《论平面轨迹》的问题

l 的同侧，则有

$$(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p) + (x_2 \cos \alpha + y_2 \sin \alpha - p) = \pm k,$$

即

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cos \alpha + \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \sin \alpha - p = \pm \frac{1}{2}k,$$

于是得

$$\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cos \alpha + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \sin \alpha = \mp \frac{1}{2}k.$$

其几何意义是直线 l 与过线段 P_1P_2 的中点 O 且平行于 l 的直线的距离为 $\frac{k}{2}$ 。因此，所求直线 l 为

以 O 为心、 $\frac{k}{2}$ 为半径的圆的切线。

类似地，若已知 n 个点 $P_i(x_i, y_i)$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$)，则所求直线为以点 $O\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}\right)$ 为心、 $\frac{k}{n}$ 为半径的圆的切线。

问题 5: 试证明：在椭圆中，一对共轭直径的平方和等于长、短轴长度的平方和；在双曲线中，一对共轭直径的平方差等于实、虚轴长度的平方差。

该问题源于阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》卷七中的一个命题。如图 32 所示，以椭圆中心为原点、长轴所在直线为 x 轴建立直角坐标系，设 PQ 和 $P'Q'$ 为椭圆的一对共轭直径，点 P 的坐标为 (x_1, y_1) ，点 P' 的坐标为 (x_2, y_2) ，易知

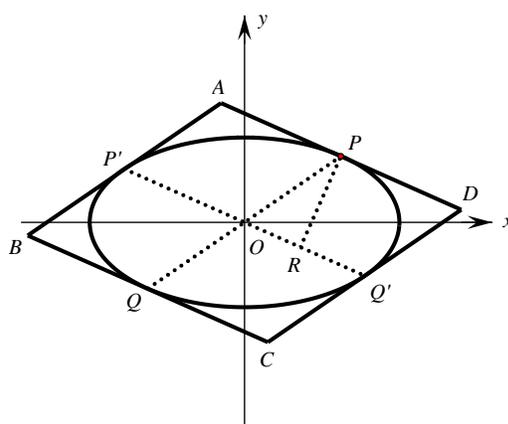
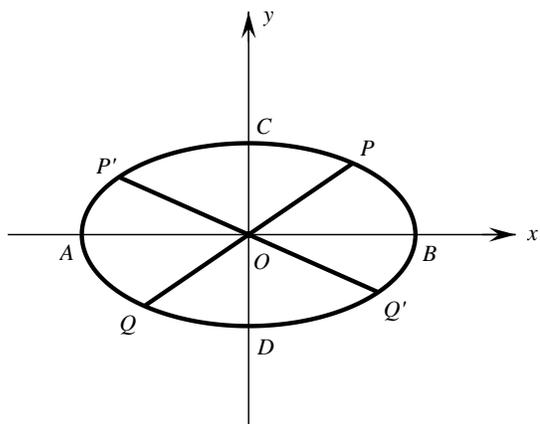


图 32 源于《圆锥曲线论》的问题之一 图 33 源于《圆锥曲线论》的问题之二

$$OP^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2 \right) = b^2 + e^2 x_1^2 \quad (7)$$

因直线 $P'Q'$ 的方程为 $b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = 0$ ，与椭圆标准方程联立，解得

$$\begin{aligned} x_2^2 &= \frac{a^2}{b^2} y_1^2, \\ y_2^2 &= \frac{b^2}{a^2} x_1^2, \end{aligned}$$

故得

$$OP'^2 = OQ'^2 = x_2^2 + y_2^2 = a^2 - e^2 x_1^2 \quad (8)$$

由 (7) 和 (8) 可得

$$OP^2 + OP'^2 = a^2 + b^2,$$

或即

$$PQ^2 + P'Q'^2 = 4(a^2 + b^2).$$

同理可得双曲线的相应结论。

问题 6: 在椭圆或双曲线的一对共轭直径的端点处作切线，求所切线所构成平行四边形的面积。

该问题源于阿波罗尼奥斯《圆锥曲线论》卷七中的一个命题。如图 33 所示，设 PQ 和 $P'Q'$ 为椭圆的一对共轭直径，点 P 的坐标为 (x_1, y_1) ，点 P' 的坐标为 (x_2, y_2) ，过 P 、 P' 、 Q 和 Q' 的切线构成了平行四边形 $ABCD$ ，过点 P 作 $P'Q'$ 的垂线，垂足为点 R ，则由 (6) 和 (7) 可得

$$\begin{aligned} PR &= \frac{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^4 y_1^4}} \\ &= \frac{a^2 b^2}{\sqrt{b^4 x_1^2 + a^2 (a^2 b^2 - b^2 x_1^2)}}, \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 - e^2 x_1^2}} \\ &= \frac{ab}{OP'} \end{aligned}$$

设 $\angle POQ' = \theta$ ，则

$$\sin \theta = \frac{ab}{OP \times OP'},$$

故得

$$S_{\square ABCD} = 4OP \times OP' \sin \theta = 4ab。$$

问题 7: 求抛物线弓形的面积。

该问题源于阿基米德《抛物线弓形求积》一书。拉德涅认为，在阿基米德的各种数学发现中，抛物线弓形面积的解法是最引人注目的，是史上最早的求曲线所围面积的完整的几何方法。

7 结语

作为英国第一部解析几何教科书，《代数几何》包含了较为丰富的数学史内容，这与后世同一学科的教科书形成了鲜明的对照。由于没有现成的解析几何教科书作参照，拉德涅在许多主题上都需要直接利用或参考数学史；历史上数学家，如阿波罗尼奥斯、笛卡儿、费马、雅各·伯努利等的相关工作成为解析几何问题、命题、思想、方法的源泉。可以说，对于解析几何教科书来说，其原创性的强弱与利用数学史料的多少息息相关。

《代数几何》中的解析几何历史知识为今日教学提供了诸多启示。

其一，透过表象，认清本质。今天，人们往往通过几何来源和第二定义来认识三种圆锥曲线的联系，但并未真正理解它们之间的统一性。ellipse、hyperbola 和 parabola 在古希腊的词源告诉我们，三者的统一性在于共同的几何特征。在教学中，只有从圆锥曲线的标准方程出发去寻找背后的几何意义，才能透过表象认清本质。

其二，否定属性，编制问题。古希腊数学史为问题编制提供了丰富的素材，如，将阿波罗尼奥斯的“到两个定点距离之比为常数”这一条件改为到两定点距离之和、差、积、平方和、平方差、连线夹角、连线与两顶点连线夹角之差、…，可以得到一个轨迹问题串；将二线轨迹问题、三线轨迹问题到四线轨迹问题的条件特殊化，也可编制出一个问题串，等等。

其三，跨越鸿沟，探寻动因。尽管拉德涅所引用的赫顿关于三角函数图像缘起的推测尚有待于进一步考证，但地图绘制导致正割函数图像的诞生这一史实告诉我们，函数图像与函数概念并不一定同时出现，对函数图像的研究往往是滞后的，其背后必然存在特定的动因，这种动因很可能来自其他知识领域。

其四，确定进阶，统整单元。17 世纪，曲线的切线是数学家十分关注的课题，在“导数的应用”单元教学中，可以先让学生用代数方法求圆在其上一点处的切线或求过圆外一点的切线；

接着让他们求圆锥曲线在其上一点处的切线或过圆锥曲线外一点的切线，学生可能使用笛卡儿的方法；然后，让学生探究三次曲线或超越曲线（正弦曲线或指数切线）在其上一点处的切线，学生在运用笛卡儿方法时遇到了困难，从而揭示了导数方法的必要性；最后，再让学生探究更复杂曲线（如笛卡儿的叶形线）的切线。由此实施“曲线的切线”单元的教学。

参考文献

- Bourdon, M. (1828). *Application de l'Algèbre à la Géométrie*. Paris: Bachelier.
- Descartes, R. (1954). *The Geometry of Rene Descartes*. Tr. by D. E. Smith & M. L Latham. New York: Dover Publications.
- Garnier, J. G. (1808). *Éléments de Géométrie Analytique*. Paris: Chez Courcier.
- Guisnée, M. (1705). *Application de l'Algèbre à la Géométrie*. A Paris: Chez Jean Boudot et Jacques Quillau.
- Heath, T. L. (1921). *A History of Greek Mathematics*. London: Clarendon Press.
- Hutton, C. (1815). *A Philosophical and Mathematical Dictionary (Vol. 1)*. London: S. Hamilton.
- Kells, L. M. & Stotz, H. C. (1949). *Analytic Geometry*. New York: Prentice-Hall.
- Lardner, D. (1831). *A Treatise on Algebraic Geometry*. London: Whittaker, Treacher & Arnot.
- Lefrancois, F. (1804). *Essais de Géométrie Analytique*. Paris: Chez Courcier.
- Murnaghan, F. D. (1946). *Analytic Geometry*. New York: Prentice-Hall.
- Siceloff, L. P., Wentworth, G. & Smith, D. E. (1922). *Analytic Geometry*. Boston: Ginn & Company.
- Tanner, J. H. & Allen, J. (1898). *An Elementary Course in Analytic Geometry*. New York: American Book Company.
- 汪晓勤(2024). 当阿波罗尼奥斯“遇见”旦德林. 数学通报, 63(1):1-5, 15.

专题研究

基于中算史料的无字证明构造

汪晓勤, 谢宇欣

(华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

1 引言

无字证明 (proof without words, 简称 PWW) 是一种在图像或图形中蕴含数学命题的证明方法, 图像或图形中可以包含数学符号或等式, 但不使用文字^[1], 其核心在于利用简单的几何图形直观地呈现抽象、复杂的数学理论。无字证明可以帮助学生直观地理解和掌握有关数学主题, 促进其直观想象、数学抽象和逻辑推理能力的发展。此外, 无字证明提供了一种不同于传统代数方法的视角, 有助于学生从多个角度理解和探索数学问题, 进而激发对数学的兴趣和好奇心。

在中算史上, 无字证明常常作为一种独特的数学表达和思考方式出现于数学著作中。例如, 赵爽为证明勾股定理所采用的“弦图”、刘徽为证明勾股定理所采用的“青朱出入图”、杨辉为推导重差术所采用的“勾中容横、股中容直”图, 杨辉为解决等差数列求和问题所构造的“良马图”^[2]等等, 都是人们熟悉的无字证明。古代数学家的图形还可加以再利用, 成为新主题的无字证明, 如赵爽的“弦图”被用于不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 的无字证明, 刘徽的“勾股容方”图被用于均值不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ($a > 0, b > 0$) 的无字证明^[3], 等等。虽然已有文献已经利用弦图来推导三角公式^[4], 利用“勾股容方”图来推导均值不等式^[5], 但有关方法还不完全具备无字证明的特征。

在提倡中华优秀传统文化融进课程、进课堂、进学生头脑的今天, 如何在教学中有效利用中算史料, 使其发挥应有的教育价值, 是人们十分关注的问题。本文拟从若干典型的中算史料出发, 构造对应于高中数学课程中特定主题的若干无字证明, 试图为中算史融入高中数学教学提供一种策略。

2 利用大方图构造无字证明

赵爽在为《周髀算经》“勾股圆方图”作注时提出：“以图考之：倍弦实，满外大方而多黄实，黄实之多，即勾股差实。以差实减之，开其余，得外大方。大方之面，即勾股并也。”^[6]如图 1 所示，将以直角三角形斜边为边长的正方形（面积为 $c^2 = a^2 + b^2$ ）与以直角三角形勾股之和为边长的正方形（面积为 $(a+b)^2$ ）进行比较，可知前者的两倍比后者多了一个“黄实”（面积为 $(b-a)^2$ ），由此可得不等式

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \quad (1)$$

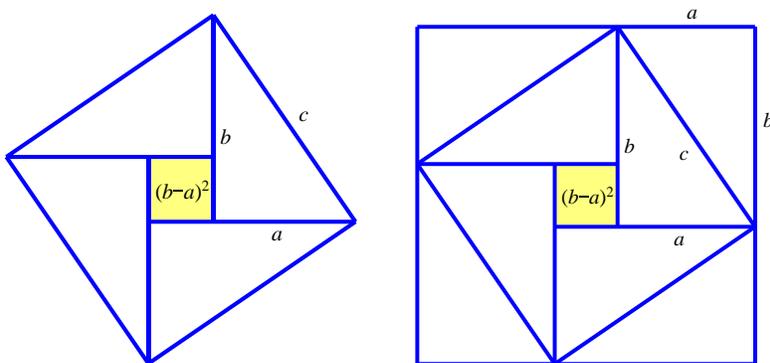


图 1 弦方与外大方的比较

据此，可以构造出关于不等式（1）的无字证明。如图 2，设 a 和 b 分别为直角三角形的勾和股，以 $a+b$ 之和为边长作正方形，在该正方形的右上和左下分别作以 b 为边长的小正方形，当 $b > a$ 时，两个小正方形部分重叠，当 $b = a$ 时恰无重叠，故得不等式（1）。

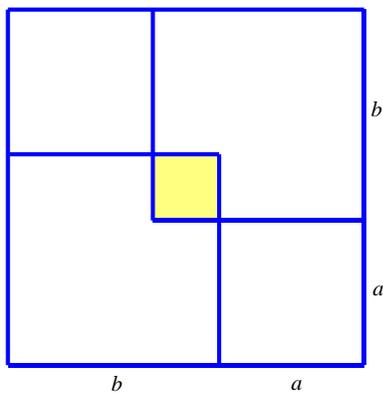


图 2 赵爽大方图的分割

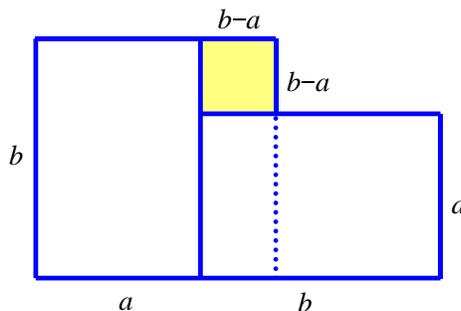


图 3 基于大方图一部分的无字证明之一

刘徽在《九章算术》勾股章的注文中利用大方图的 $\frac{1}{4}$ 来求勾股和的一半，这启示我们，可以利用大方图的一部分来构造无字证明。图 3 是大方图的一部分，从中可得 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a > 0, b > 0$)。若取其中的两个等腰直角三角形（图 4），易见：这两个直角三角形的面积之和大于或等于斜边长为 $a+b$ 的等腰直角三角形的面积，而后者又大于或等于一个上、下底分别为 $b-a$ 和 $a+b$ 、高为 a 的等腰梯形的面积，故有

$$ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2 \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad (2)$$

此即

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (3)$$

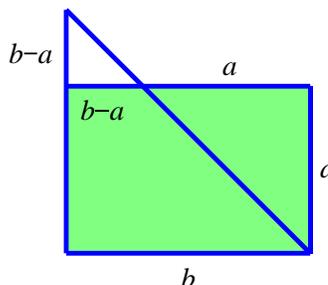
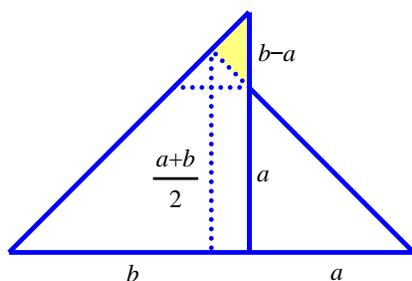


图 4 基于大方图一部分的无字证明之二

图 5 基于大方图一部分的无字证明之三

图 5 和图 6 分别提供了不等式 $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ 的一种无字证明：以 a 和 b 为边长的两个正方形面积之半，大于或等于长为 a 、宽为 b 的矩形面积，或以两个正方形对角线为直角边长的直角三角形的面积。

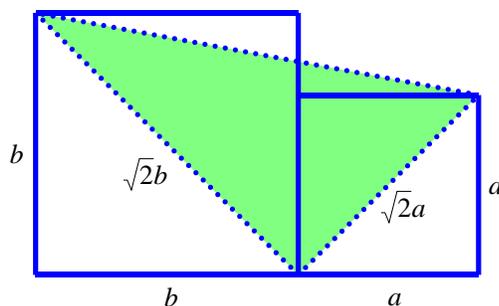


图 6 基于大方图一部分的无字证明之四

3 利用弦图构造无字证明

弦图的要义是利用四个相同的直角三角形“环而共盘”构成正方形，通过面积的不同表达，得到勾股定理的结论。如果改变弦图中的直角三角形，或同时改变直角三角形及其“环而共盘”的方式，即可得到某些三角公式的无字证明。

如图 7，将斜边为 1、一个锐角分别为 α 和 β 的两对直角三角形“环而共盘”，拼成一个菱形，其面积为 $\sin(\alpha + \beta)$ ；移动该菱形中的两个直角三角形，得到由两个矩形构成的阶梯形，其面积又可写成 $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ ，故得和角正弦公式。

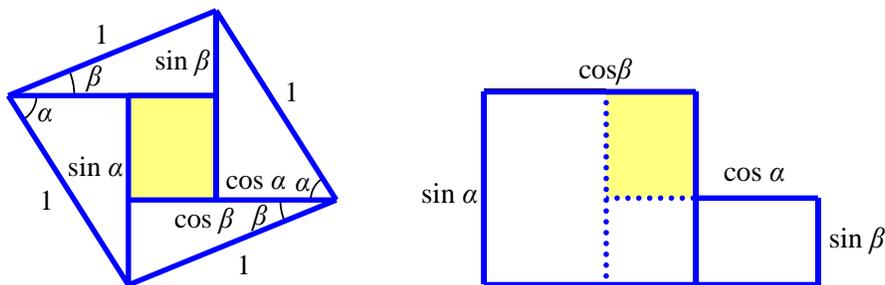


图 7 弦图的推广之一

如图 8，将两对直角三角形以另一种方式“环而共盘”，并将图形补成一个矩形，中间是一个边长为 1 的菱形，其面积为 $\sin(\alpha - \beta)$ ；然后，在该矩形中移动其中的两个直角三角形，得到与菱形等积的曲尺形，其面积为两个矩形面积之差，即 $\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ ，故得差角正弦公式。

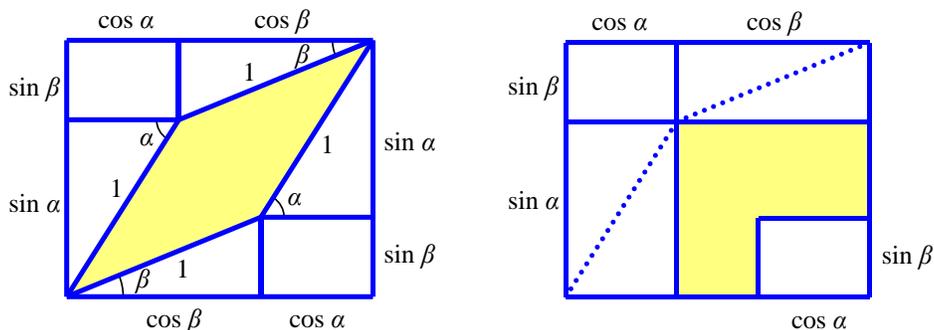


图 8 弦图的推广之二

如图 9，将弦图中四个全等的直角三角形换成钝角三角形，可得余弦定理的结论。由左图得

$$\begin{aligned}
 c^2 &= 4 \times \frac{1}{2}(b - a \cos \alpha) \times a \sin \alpha + (b - a \cos \alpha - a \sin \alpha)^2 \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,
 \end{aligned}$$

由右图得

$$\begin{aligned}
 c^2 &= 4 \times \frac{1}{2}(a - b \cos \alpha) \times b \sin \alpha + (a - b \cos \alpha - b \sin \alpha)^2 \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,
 \end{aligned}$$

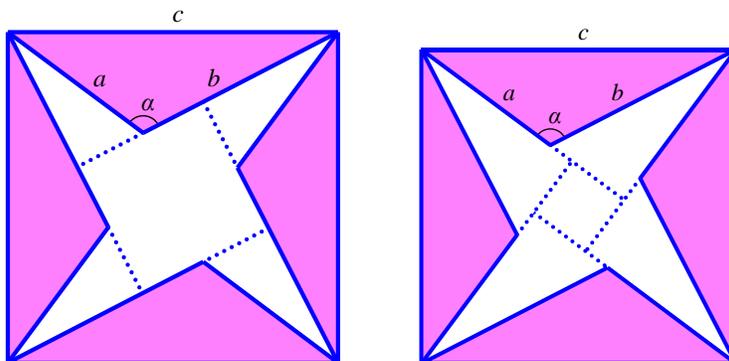


图 9 弦图的推广之三

4 利用勾股容方图构造无字证明

“勾股容方”问题出自《九章算术》勾股章：“今有勾五步，股十二步，问勾中容方几何？……术曰：并勾、股为法，勾、股相乘为实。实如法而一，得方一步。”^[7]刘徽运用出入相补原理推导了问题的解法。若结合直角三角形内接矩形问题，则可构造出关于均值不等式的不同无字证明。

如图 10，将两个勾为 a 、股为 b 的直角三角形以不同的方式加以组合，其中，在第一种组合中，两个直角三角形的斜边部分重合，且其内接正方形在斜边上的顶点重合；第二个组合中，两个直角三角形的斜边完全重合，它们构成一个矩形。易知

$$4 \left(\frac{ab}{a+b} \right)^2 \leq ab \tag{4}$$

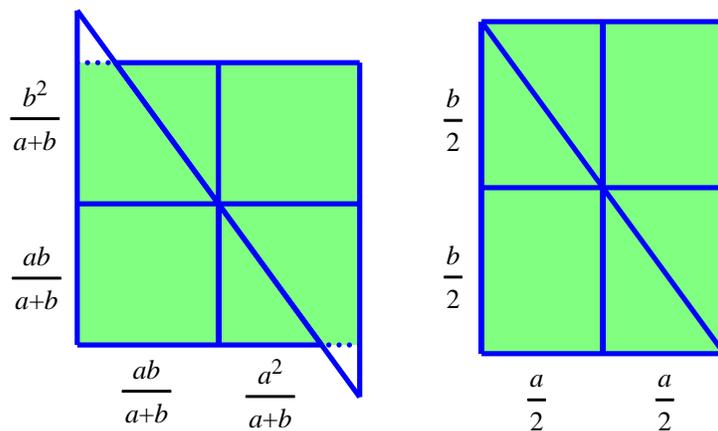


图 10 基于勾股容方图的无字证明之一

由 (4) 可得

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (5)$$

类似地，如图 11 所示，将同样的两个直角三角形以两种不同方式组合，其中，第一种组合中，斜边部分重合，内接矩形在斜边上的顶点重合，第二种组合中，两个直角三角形的斜边完全重合。

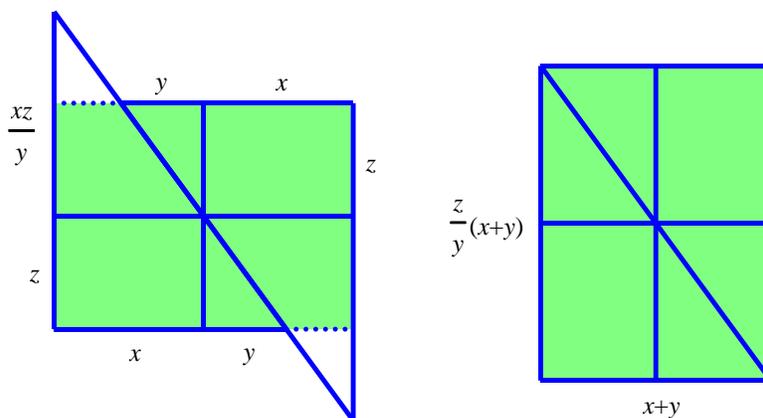


图 11 基于勾股容方图的无字证明之二

设第一种组合中的内接矩形的长和宽分别为 x 和 z ，则易知

$$4xz \leq \frac{z}{y}(x+y)^2,$$

或即

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad (x > 0, y > 0).$$

如图 12，设以直角三角形内接正方形两边上的小直角三角形的勾和股分别为 a 和 b 。过直角三角形内接正方形的右下顶点作斜边的平行线，得到阴影部分的直角三角形，其直

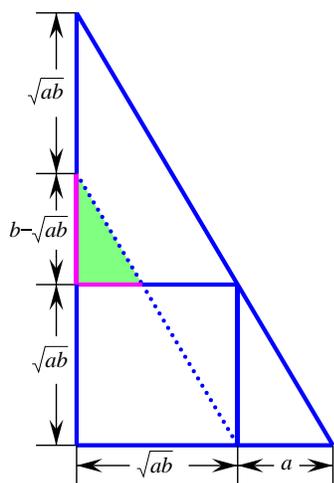


图 12 基于勾股容方图的无字证明之三

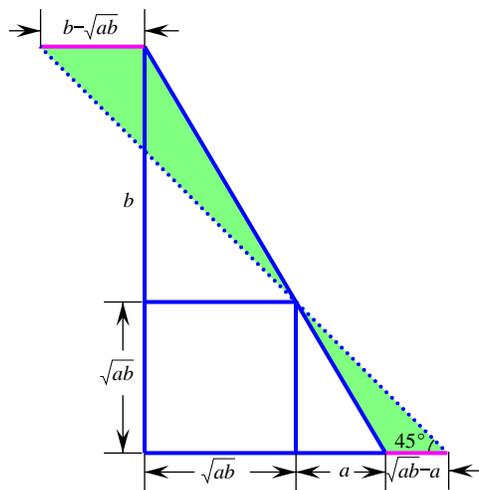


图 13 基于勾股容方图的无字证明之四

角边长分别为 $\sqrt{ab} - a$ 和 $b - \sqrt{ab}$ ，当 $a \leq b$ 时，有

$$\sqrt{ab} - a \leq b - \sqrt{ab} \quad (6)$$

如图 14-15，也可以通过构造相似三角形得到不等式 (6)。

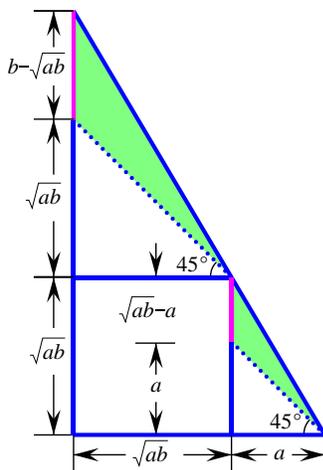


图 14 基于勾股容方图的无字证明之五

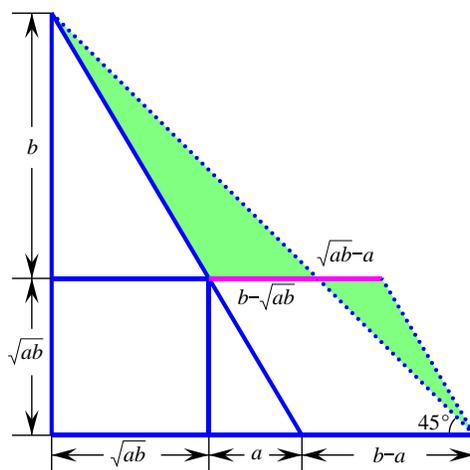


图 15 基于勾股容方图的无字证明之六

又如图 16 和 17，延长直角三角形内接正方形的对角线，过锐角顶点作对边的平行线，分别得到两个梯形，比较梯形的中位线与内接正方形边长，即得均值不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

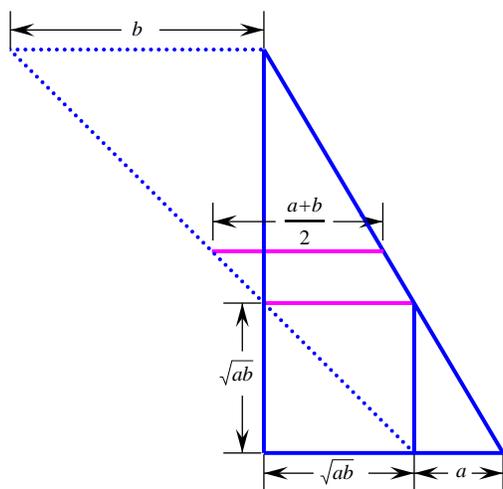


图 16 基于勾股容方图的无字证明之七

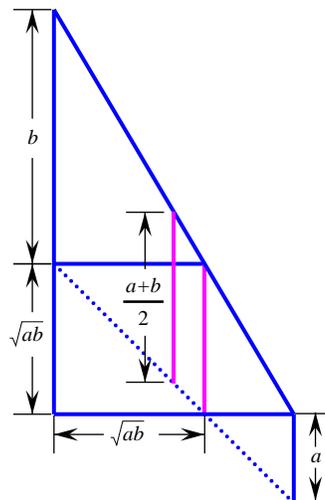


图 17 基于勾股容方图的无字证明之八

5 利用“容横容直”图构造无字证明

南宋数学家杨辉在《续古摘奇算法》中提出：“弦之内，分二勾股，其一勾中容横，其一股中容直，二积之数皆同。”^[8]实际上，杨辉的上述定理也可以通过出入相补原理得到，如图 18 所示。

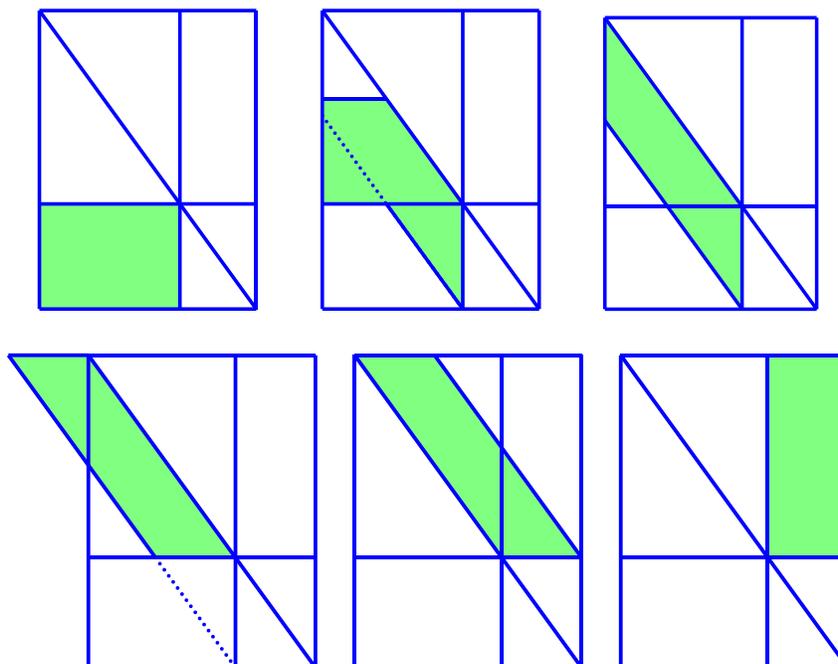


图 18 从勾中容横到股中容直

利用杨辉定理可以构造关于同角三角函数关系式的无字证明。如图 19-24 所示，由面积关系分别可得商数关系：

$$\tan \theta \cos \theta = \sin \theta ,$$

$$\cot \theta \sin \theta = \cos \theta ,$$

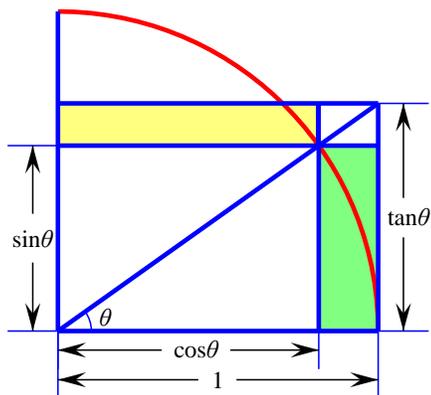


图 19 关于 $\tan \theta \cos \theta = \sin \theta$ 的无字证明

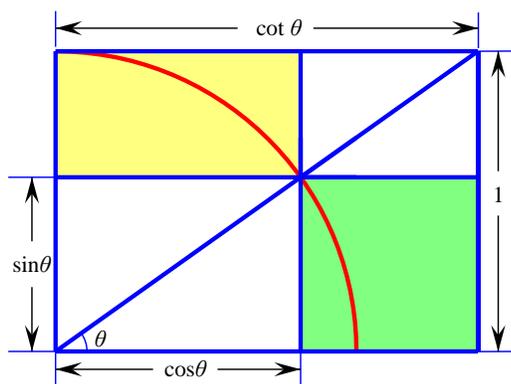


图 20 关于 $\cot \theta \sin \theta = \cos \theta$ 的无字证明

$$\sin \theta \sec \theta = \tan \theta ,$$

$$\cos \theta \csc \theta = \cot \theta ,$$

$$\tan \theta \csc \theta = \sec \theta ,$$

$$\cot \theta \sec \theta = \csc \theta .$$

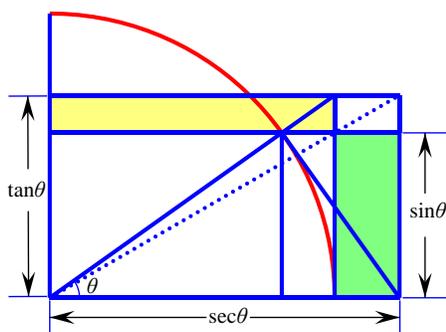


图 21 关于 $\sin \theta \sec \theta = \tan \theta$ 的无字证明之一

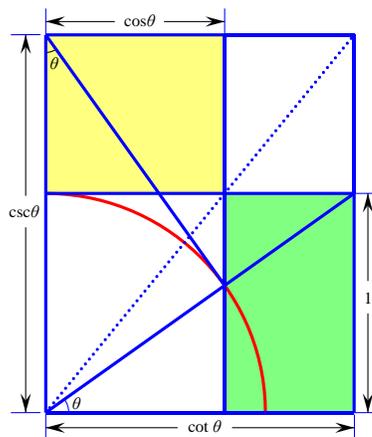


图 22 关于 $\cos \theta \csc \theta = \cot \theta$ 的无字证明之一

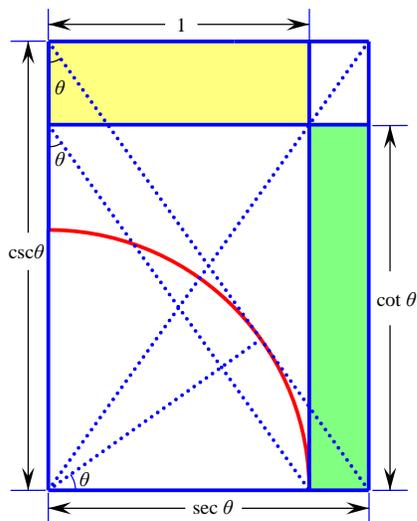
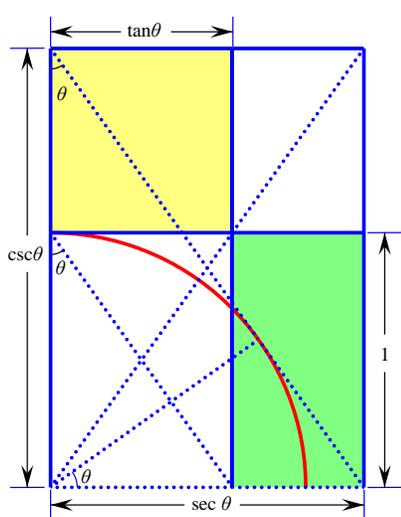


图 23 关于 $\tan \theta \csc \theta = \sec \theta$ 的无字证明之一 图 24 关于 $\cot \theta \sec \theta = \csc \theta$ 的无字证明之一
关于同角三角函数的商数关系，也可构造图 25-30 所示的无字证明。

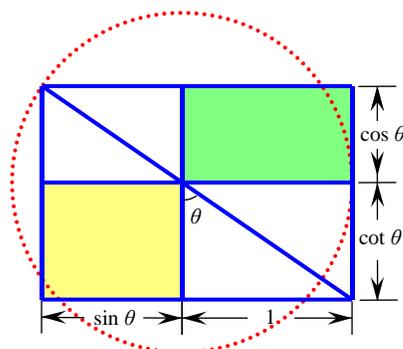
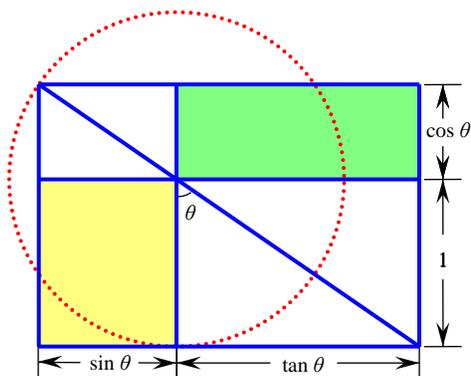


图 25 关于 $\tan \theta \cos \theta = \sin \theta$ 的无字证明之二 图 26 关于 $\cot \theta \sin \theta = \cos \theta$ 的无字证明之二

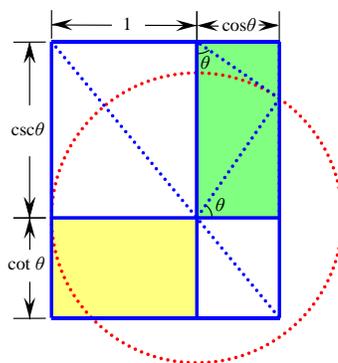
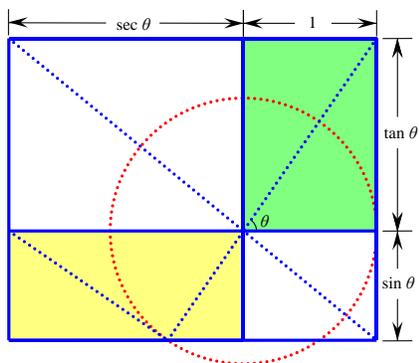


图 27 关于 $\sin \theta \sec \theta = \tan \theta$ 的无字证明之二 图 28 关于 $\cos \theta \csc \theta = \cot \theta$ 的无字证明之二

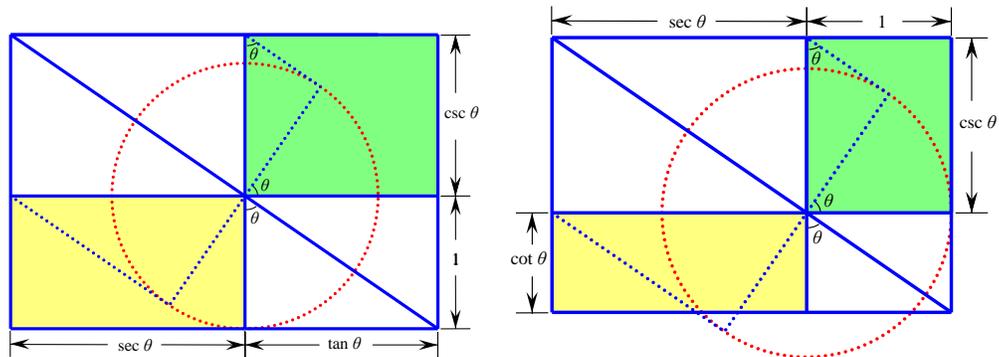


图 29 关于 $\tan \theta \csc \theta = \sec \theta$ 的无字证明之一 图 30 关于 $\cot \theta \sec \theta = \csc \theta$ 的无字证明之二

利用杨辉定理，也可以构造倒数关系的无字证明，如图 31-33 所示。

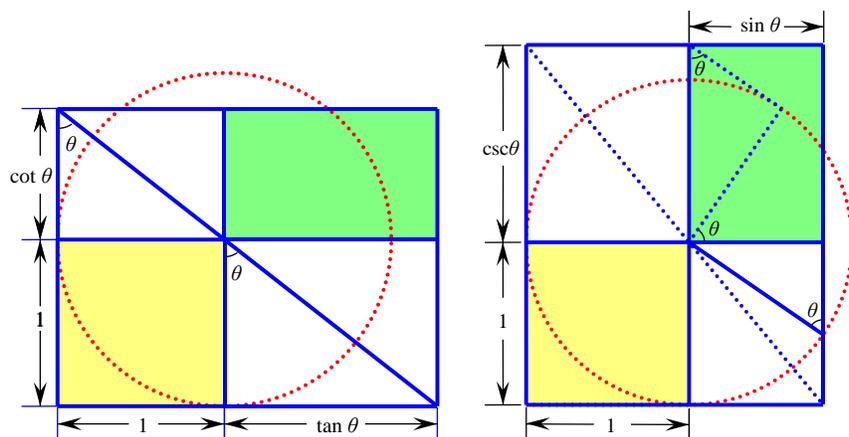


图 31 关于 $\tan \theta \cot \theta = 1$ 的无字证明

图 32 关于 $\sin \theta \csc \theta = 1$ 的无字证明

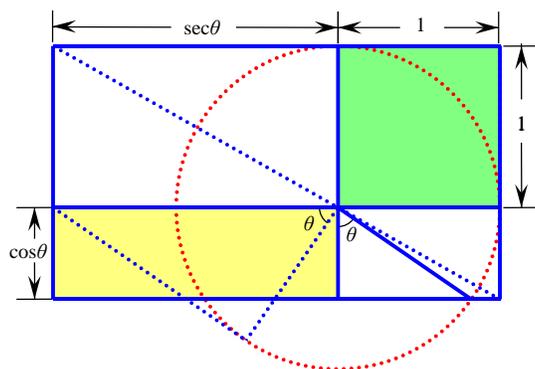


图 33 关于 $\cos \theta \sec \theta = 1$ 的无字证明之一

此外，利用杨辉定理，可将边长分别为 a 和 b 的两个正方形转化成矩形，如图 34 所示，从而得到不等式

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b} \quad (a > 0, b > 0).$$

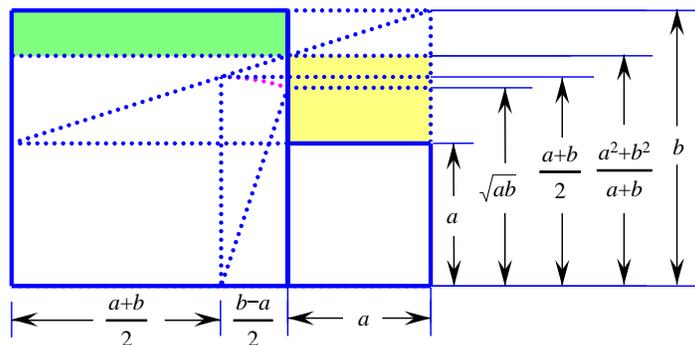


图 34 关于几何、算术、反调和平均大小关系的无字证明

6 结语

从本文所呈现的无字证明可见，利用中算史料构造无字证明的具体策略有以下几种。

其一，形诡量均，体殊数齐。赵爽在“勾股圆方图”注中指出：“凡并勾、股之实，即成弦实。或矩于内，或方于外。形诡而量均，体殊而数齐。勾实之矩，以股弦差为广，股弦并为袤，而股实方其里；……股实之矩，以勾弦差为广，勾弦并为袤，而勾实方其里。”^[6]这里，赵爽表达了两层意思：一是，在以弦为边长的正方形中分别割去一个以股和勾为边长的正方形，余下的曲尺形的面积分别等于以勾和股为边长的正方形面积，曲尺形和对应正方形的形状不同而面积相等；二是，上述两个曲尺形的面积分别等于以股弦并为长、股弦差为宽的长方形、以勾弦并为长、勾弦差为宽的长方形面积，曲尺形和对应长方形的形状不同而面积相等。如果画出图形，就得到 $a^2 = (c+b)(c-b)$ 和 $b^2 = (c+a)(c-a)$ 的无字证明。

实际上，赵爽所说的“形诡而量均，体殊而数齐”（刘徽也有类似的表述），正是构造等式无字证明的重要策略之一。基于弦图、容横容直图的代数恒等式或三角公式无字证明，都是利用出入相补原理，对有关图形进行等积变换得到的。

其二，同源分流，大同小异。上文提及，赵爽将两个弦图与一个大方图进行比较，发现前者比后者多了一个以勾股差为边长的小正方形；无独有偶，刘徽在《九章算术》勾股章注中，也通过两个弦图与一个大方图的比较来求勾股之差。根据某个图形的构成，对整体与部分加以比较，求“大同”而存“小异”，是构造不等式无字证明的重要策略。基于勾股容方图、大方

图或它的一部分的均值不等式无字证明，都是利用图形整体大于部分的事实得到的。

其三，相与之势，不失本率。刘徽在《九章算术》“勾中容方”问题的注中提到：“方在勾中，则方之两廉各自成小勾股，而其相与之势，不失本率也。”^[7]意思是说，在直角三角形中作与其有公共直角的内接正方形，则正方形外的两个小直角三角形与原直角三角形的对应直角边分别成比例。从勾股容方图出发构造均值不等式的一种策略是构造相似三角形，利用其中一组对应边“不失本率”的性质，由原直角三角形的“本率”得到其大小关系。

在中算史原始文献中，赵爽的大方图和弦图、刘徽的勾股容方图、杨辉的容横容直图等，原与现代数学课程中的均值不等式、三角公式等主题无关，但这些图形蕴含了丰富的数学内涵，如图形的相似性、图形的等积变换、整体与部分的关系等，可以说，中国古代数学家为后人留下了“发现之白”。基于中算史料的无字证明构造，提供了一种补白的思路。有理由相信，有关无字证明在教学中的运用，是中算史进课程、进课堂、进学生头脑的有效路径之一。

参考文献

- [1] Nelsen, R. B. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*[M]. Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 1993: vi.
- [2] 汪晓勤, 陈君煜. HPM视角下数列教学中的直观想象素养初探[J]. 中小学数学(高中版), 2019(4): 57-60
- [3] 汪晓勤. 中华优秀传统文化数学文化融入高中数学教学的若干路径[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2022(9): 27-34.
- [4] 汪晓勤, 邵铭宇. 三角公式的若干几何模型[J]. 数学通报, 2017, 56(6): 1-5, 49.
- [5] 汪晓勤. 从勾股容方到均值不等式[J]. 数学通报, 2015, 54(2): 7-9.
- [6] 赵爽. 《周髀算经》注. 见: 郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇·数学卷(一)[M]. 郑州: 河南教育出版社, 1994: 11-12.
- [7] 郭书春. 汇校《九章算术》[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2004: 409, 422.
- [8] 杨辉. 续古摘奇算法. 见: 郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇·数学卷(一)[M]. 郑州: 河南教育出版社, 1994: 1114.

教学实践

跨学科视角下导数的应用教学

石城¹, 汪晓勤²

(1.南京师范大学附属中学, 江苏南京 210003; 2.华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

1 引言

高速发展的新时代呼唤创新型和复合型人才, 跨学科应运而生。虽然开展跨学科教学已然成为国际数学课程改革的大趋势, 但相关教学案例的缺失仍是中小学一线教师在实施跨学科教学时面临的最大困境^[1]。现有教学案例多数停留在引入跨学科情境、提出跨学科任务, 且难以与课程内容匹配, 甚至出现数学被作为边缘学科的情况^[2]。数学跨学科教学案例集中于初中和小学学段, 鲜有针对高中的完整教学案例。

真正的跨学科教学案例不仅是多个学科知识的并置, 更是有效整合各个学科之间的知识来解决真实合理的复杂问题情境。跨学科教学也不应该是将各科知识均等融入, 而是应有一门学科起主导作用, 参照中心学科的课标要求, 在学科本身的内在逻辑和连贯性的基础上, 融入其他学科的理论、思维、工具、技术, 建立学科之间有意义、有价值的联系, 并以此联系为纽带进行整合^[3]。因而本文采用相关学者的定义, 以高中数学为主导的跨学科教学, 是指由教师或团队在高中数学课程中选择合适的中心题目, 运用其他学科的思维、知识、工具、技术、理论等, 围绕中心题目进行开发、设计、实施及评价而展开的教学^[4]。

本文尝试从高中数学的主干知识和核心思想出发, 以导数这一重要知识模块为主题, 找到数学与其他学科的交叉点, 进行深入的探究。研究者基于现行教科书、课程标准、已有教学设计, 同时考虑学生认知基础, 以跨学科视角开设了一节展示课——“导数的应用”, 拟定了如下教学目标。

(1) 运用数形结合, 类比归纳等方法解决生活中有关导数的实际问题, 体会导数的实用价值。

(2) 理解费马原理和光的折射定律, 利用物理学方法解决数学问题。

(3) 将数学方法和物理方法作比较, 体会两种学科思维上的差异。提升数学抽象、逻辑推理、数学运算素养。

2 跨学科素材选取和加工

物理学与数学具有天然的联系, 两门学科之间相辅相成、相互交融。物理学探究自然世界中的现象和规律, 而数学则提供了一种精确而可靠的语言来描述这些现象和规律^[5]。19 世纪以前, 数学与物理是分不开的, 数学与物理同属于一门自然哲学。一位数学家同样也是一位物理学家, 因为物理学的研究大多是建立在观察基础上的理论研究, 需要较强的数据分析与数学建模的能力, 所以数学家自然而然地承担起了物理学研究的任务。而对于自然现象的研究通常也会启发数学家, 找到新的研究方向。

极值问题是实现数理结合的有效载体: 很多涉及极值的问题往往都有物理和数学两种解决方案。

折射定律便是最好的例子, 折射定律的证明经历了漫长而曲折的过程, 曾经是让数学家和物理学家都束手无策的难题。早期的物理学家如托勒密 (C.Ptolemaeus, 约 90-168)、开普勒 (J.Kepler, 1571-1630)、斯涅尔 (W.Snell, 1591-1626), 只能通过物理实验, 结合测量和统计分析来探索入射角和折射角的关系。物理实验虽然直观, 但都只是实验结果, 没有理论上的推导^[6]。1637 年, 数学家笛卡尔 (R.Descartes, 1596-1650) 尝试推导折射定律, 但失败了。之后的数学家, 如哈密顿 (W. R. Hamilton, 1805-1865) 和高斯 (C. F. Gauss, 1777-1855) 等都进行了努力, 但是都没有得出完满的结果。作为 17 世纪最伟大的数学家之一, 费马 (P.de Fermat, 1601-1665) 巧妙地将数学极值问题和物理学现象建立起了联系, 根据费马原理, 借助于导数给出了证明。当然费马的证明还不是现代数学的证明, 我们今天所进行的证明则是由莱布尼兹 (G. W. Leibniz, 1646-1716) 给出的^[7]。从这段历史, 我们不难看出导数的意义和价值和用数学工具解决物理问题的威力。

而折射定律的应用不仅仅局限在物理的光学中, 对于数学极值问题的求解也有简化作用。借助折射定律可以不必繁琐的求出根式函数的导函数及其零点, 关注整个单调性变化的过程, 再讨论原函数的最值。物理方法只需弄清楚最终结果和状态, 重点研究临界值, 给出简洁的解

答。让学生体会物理方法与数学方法的异同,对多种解法进行比较,可以帮助他们开拓思维视野,明确问题本质。

3 教学设计与实施

一、问题引入

教师介绍数学家费马,由费马对物理学的贡献引入费马原理,并请学生思考光的直线传播定律、光的反射定律、光的折射定律是否都符合费马原理(图1)。

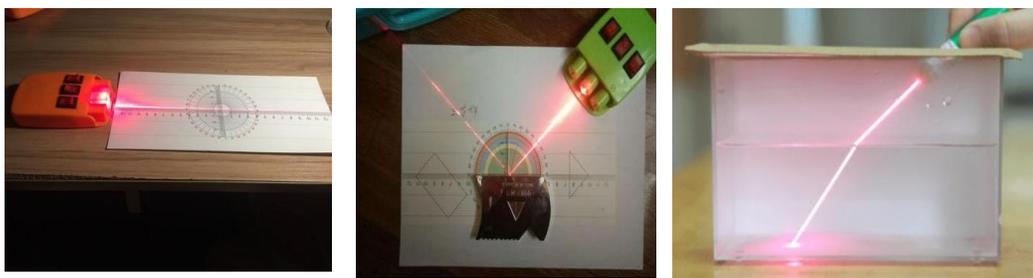


图 1 光的三种定律与费马原理的联系

师:同学们认识这个人吗?

生 1:费马。

师:没错,毫不夸张的说,费马是 17 世纪最伟大的数学家,他在解析几何、概率论和数论、微积分方面都有巨大贡献。今天我们要谈一谈他在物理学上的一个重大发现——费马原理。

费马原理(最小光程原理):光波在两点之间传递时,自动选取费时最少的路径。

师:同学们你赞成这个原理吗?

生 2:赞成,光沿直线传播。

师:没错,在同种均匀介质中光沿直线传播,的确是最短路径,两点之间线段最短,那在不同介质中呢?

生 2:光会反射。

师:那光的反射走的是费时最少的路径吗?

生 2:可做对称点证明。

师:很好。那除了反射,是不是还有可能发生折射,那光的折射符合费马原理吗?

生(群):可能是。

【设计意图】 从人物介绍自然过渡到教学内容，既吸引学生的学习兴趣，又帮助学生理解物理学与数学的联系。费马原理（Fermat's principle）是物理光学的重要理论，它将原先看似独立的光的直线传播定律、反射定律、折射定律高度概括，统一成了一个简洁、优美的表述。它描述的是光的这样一种特性：光线传播的路径是需时最少的路径。简单来说，光是聪明高效的。

二、定律证明

请学生证明猜想，即利用费马原理和导数，证明光的折射定律：如图 2，设光在 A 、 B 两种介质中传播速度之比为 $n_1:n_2$ ，则 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2}$ 。

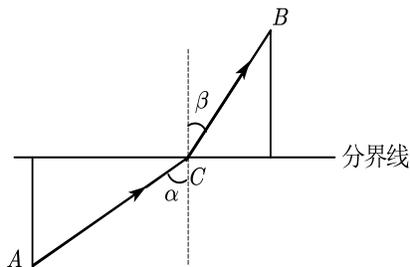


图 2 光的折射定律

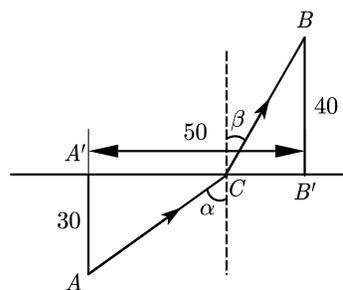


图 3 简化后的折射定律证明

(1) 教师先将问题简单化：设光在 A 、 B 两种介质中传播速度之比为 $3:5$ ， $AA'=30$ ， $BB'=40$ ， $A'B'=50$ （图 3）。

(2) 教师再将问题指向具体化：其用时为 t ，当 t 取最小时，是否满足 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{5}{3}$ ？

(3) 教师给予学生时间尝试求导证明。并猜想一般的情况下该结论是否也成立。

师：同学们如何解决这个问题？

生 3：可以设 $A'C=x$ ，则 $CB'=50-x$ ，我们可以表示出 AC 和 BC 的长度，从而得到时间 t 关于 x 的函数：

$$t = \frac{\sqrt{30^2 + x^2}}{3} + \frac{\sqrt{40^2 + (50-x)^2}}{5}。$$

师：然后如何求出这个复杂函数的最小值？

生 3：对 x 求导，可得

$$t' = \frac{x}{3\sqrt{30^2 + x^2}} - \frac{50 - x}{5\sqrt{40^2 + (50 - x)^2}}.$$

师：这位同学的复合函数求导掌握的很好，那接下来求这个导函数的零点怎么办？

生 3：没求出来。

师：不要忘记，我们要求证的结论是什么？我们不用知道 x 具体值，只需证明正弦之比等于速度之比。

生 4：根据图形，可以整理得

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\frac{x}{\sqrt{30^2 + x^2}}}{\frac{50 - x}{\sqrt{40^2 + (50 - x)^2}}} = \frac{3}{5}.$$

师：我们初中物理中通过实验得到光的折射定律，现在我们利用导数给予了证明。那在一般的情况下该结论是否也成立？

生（群）：成立。

师：那就交给同学们课后完成证明。

【设计意图】 折射定律是初中物理所学，当时需要经过多次实验，才能找到规律。现在借助数学工具，轻松证明折射定律。教师引导学生从所给的情境中提取数学信息，并转换成数学语言，利用导数求解。这些将帮助学生更深入地理解导数的应用，因为题目证明难度较大，这里适当简化模型，给一些具体数据，帮助学生理解。

三、学以致用

例题 1 如图 4，有一批货物需要由 A 城经水路 AD 和公路 DB 运到 B 城，货物走公路的运费是走水路的两倍， $AC = 40\text{km}$, $BC = 30\text{km}$ ，问：码头应建在何处，才能使运费最省？

教师鼓励学生设边、设角分别去解决，再引导学生思考运费的表达式，利用费马原理将运费最少转化为时间最短，与折射定律建立联系，将这几种方法进行比较。

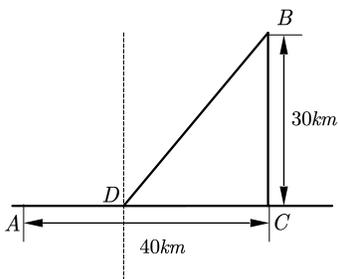


图 4 运费问题

师：这个问题我们又该如何解决？

生 5：跟之前问题有点类似，同样可以设 $AD=x$ ，则 $DB=\sqrt{30^2+(40-x)^2}$ ，利用导数知识求出 $y=\frac{1}{2}x+\sqrt{30^2+(40-x)^2}$ 的最值。

师：可以的，完全与之前一致。只是同之前一样，这个导数的零点有些难解。大家还有没有其他想法？

生 6：也可以设角，设 $\angle BDC=\alpha$ ，则 $DB=\frac{30}{\sin \alpha}$ ， $DC=\frac{30}{\tan \alpha}$ 。接着求出

$$AD=40-\frac{30}{\tan \alpha},$$

可以得到

$$y=\frac{1}{2}\left(40-\frac{30}{\tan \alpha}\right)+\frac{30}{\sin \alpha}=20+15\cdot\frac{2-\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

利用三角知识求出最值。

师：这两位同学说的都很好。除了以上想法，刚刚有同学说这个问题跟之前的问题很像，除了列式，图形上有没有什么地方像的地方？

生：像光线折射的路径。

师：那我们能不能也用折射定律去求解？在这个运费问题中

$$\text{运费}=\frac{1}{2}AD+DB=\frac{AD}{2}+\frac{DB}{1},$$

这与我们折射定律有没有什么相似之处？

生：运费之比的 2:1 可以看成速度之比 2:1，运费最少就转化为时间最短。

师：那这个问题我们就转化成将此问题转化为光线从 A 入射，经过 D 到 B，其中 AD 段的速度和 AC 段速度之比为 2:1，求用时最少。

生 5: 由费马原理知, 在两种不同种介质中, 光发生折射时用时最少。设光从 A 入射到 D 的入射角为 90° 时, 对应的折射角为 θ 。根据折射定律, $\frac{\sin 90^\circ}{\sin \theta} = \frac{2}{1}$, 解得 $\theta = 30^\circ$ 。所以

$$CD = BC \tan 30^\circ = 10\sqrt{3}, AD = AC - CD = 40 - 10\sqrt{3} \approx 22.68$$

因此把码头建在距 A 城约 22.68km 的地方, 运费最省。

师: 大家可以理解这位同学所说吗? 这种方法相较于前两种方法怎么样?

生: 更快捷。

例题 2 如图 5, 已知某公司的三个办公地点分别在点 $O(0, 0)$ 、 $A(3, 3)$ 、 $B(3, -3)$, 现要为三个办公地点构建一个通信网络, 决定将交换器构建在 x 轴上的点 C 处, 试确定 C 点使通信线路最短。

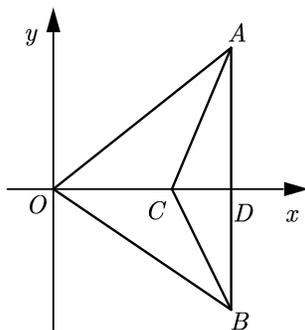


图 5 线路问题

生: 通信线路的长度为 $OC+CA+CB$, 就是在三角形中找一点到三个顶点距离之和最小, 通过旋转应该每个角都是 120° 。

师: 这位同学课外学习过费马点, 还有其他的方法吗?

生: 这个问题跟刚刚一样。

师: 怎么个一样法?

生: 由对称知 $CA=CB$, 那么路线长转换为 $OC+2CA$ 。类比刚刚的方法, 将路线长写为 $2\left(\frac{OC}{2} + \frac{CA}{1}\right)$, 然后利用折射定律求解。

师: 同学们很棒, 学会了触类旁通。请同学自己动手算出结果。

【设计意图】 通信线路长短问题本质上与运动问题一致, 也是不同线段权重问题, 也可利用最小光程原理和折射定律简化问题, 该题可以拓展学生对于折射定律运用的认识。

四、课堂小结

教师带领学生回顾本节课所学的内容，归纳总结思想方法。

第一，本节课以费马原理和折射定律为出发点，解决了路程问题、运费问题和线路问题。

这三类问题都可以建立目标函数，且目标函数的形式都为

$$f(x) = m\sqrt{a_1x^2 + b_1x + c} + n\sqrt{a_2x^2 + b_2x + c_2} \quad (mn > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, \Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \leq 0),$$

其中的根式可看成距离，因此与路程 S 有关的量 P 只要可以表示成

$$P = \frac{S}{k} \quad (S \text{ 为路程, } k \text{ 为常量}),$$

都可以根据费马原理确定物体从一个定点到另外一个定点的运动过程中，选择不同路径时 P 的最小值。

第二，本节课由始至终渗透转化思想，引导学生将看似不同问题转化为统一模型，用统一方法求解。

第三，本节课将数学问题转化为物理问题，类比物理学中的定律证明过程，巧妙构建了数学学科和物理学科的联系，用物理方法解决数学问题，大大简化了运算难度。提升了学生的跨学科素养的同时启示学生换个角度看问题，学科之间不是孤立的。

【设计意图】费马原理对理解光学的物理本质有着不可替代的作用，同时它渗透了数学中求极值的思想，架起了数学与物理沟通的桥梁。本节课设计的三个问题都紧紧围绕物理与数学的联系，运用物理的思想方法解决数学问题，由特殊到一般，由抽象到具体，形成一个有机整体，可总结归纳出统一的方法与模型。本质上来说，用物理方法解决数学问题是赋予一个抽象的数学问题实际内涵，这需要构建出适宜的物理场景，表示出数学问题。再依据物理理论、实验结论或生活经验，对问题作出简化解答。

4 教学反思

笔者之一于 2024 年 1 月 10 日至 2024 年 1 月 18 日于上海市 C 中学实施了四节高中数学跨学科课程，其中本节课因其难度大，选在高三重点班实施，并于课后对所在班的 35 位学生进行了教学效果的问卷调查和访谈。总结得出如下结论：开展跨学科教学可以对学生的创造性思维产生更多积极影响。学生通过本节课的学习，能对与已经结论类似的结论进行推测，能够根据

单一的知识点衍生出一维或多维的想法。少量学生能够提出具有独创性且有深度的数学问题，提出不同的方法。不少学生对思想方法上有了心得认识和思考：各个学科都在寻找资源最有效利用的途径，即使得寻找一条最高效路径，以最小资源使用获得最大收益。

我以为在数学学习的过程中，最便捷快速地解题是我们所追求的。比如费马原理，同样的问题我们可以用求导解决但过程繁琐。我们类比光路折射所得到的费马原理，可以快速地解决，不断地在万物中寻找光路，便是数学的魅力所在之处

图 6 学生对导数的应用这节课的思考

问卷中有学生提到了对这节课的感受，费马原理化繁为简，便捷快速地解决问题，让他体会到了数学的魅力所在（图 6）。还有学生写道：“在通过数学方法验证费马原理的过程中，我们运用导数，计算出折射光由起点至终点的最短时间，神奇地与大自然所找到光费时最短的路径相吻合，仿佛印证了毕达哥拉斯认为的“万物皆数”，将数学应用至生活，能解释许多问题。大自然也是我们最好的老师，广袤的自然有着许多问题等待我们探索，它是干练的，表象不仅是表象，更是深层次原因的投影，如极值原理所多次为我们展示的一般。”

这些原理无一例外，都是以“简便性”“效率性”作为指导思想，用最简洁、高效的研究方法。无论是自然界的运行还是人类社会的运动，都彰显了这些原则，体现出万事万物之间虽存在一定的差异性，但彼此之间必然存在着一些相似之处，彰显了一种“和”的精神，而我们应该具备这种思维，去发现这些相似，并用以解决更多未知问题（类比、外推思想）。

此外，在研究极值的过程中，我们往往会着手研究函数的整体，并以此进行验证，从而促使我们用大局观来考虑问题，使自身思维更严密，结论更可行。

再者，这些学科之间的相似性，也告诉我们学科之间并非孤立的、片面的，而是联系的、整体的，运用其他学科的知识来解决问题，可以使我们以全新的方法、高效地研究问题，并使人“柳暗花明又一村”之感。

图 7 学生对跨学科研究方法的思考

还有学生提到了跨学科的研究方法带来的优势（图 7）。“从大局上看，这些原则虽然外表有一定的差异性，但彼此之间内部有相似性，体现一种‘和’的精神。发现这些相似，运用类比、外推思想解决更多未知的问题。学科之间不是片面的，孤立的，而是联系的、整体的，运用其他学科的知识来解决问题，可以使我们用全新的方法、高效地研究问题，给人‘柳暗花明

又一村’之感。”这些知识的跨学科应用，殊途同归，都基于为人们生活提供便利，让生活更美好。

5 教学启示

本文根据学科发展脉络，以导数的应用为主题，深入挖掘相关素材，经过多次研讨，设计了一节跨学科课例并付诸实践，整理成文，供一线教师学习、参考，以期给未来的跨学科教学提供丰富的素材和宝贵经验。

(1) 围绕中心学科整合。不少教师在进行跨学科教学时面临两种困境：“学科至上”和“去学科化”^[8]。前者“跨”不出去，使得跨学科流于形式，其他学科仅仅走个过场，没有真正融入。后者“跨”不回来，使得跨学科教学变成多个学科教师在教室内进行的拼盘式传授。跨学科教学并非为了“跨”而“跨”，分清主次，才能明确出发点和落脚点。以本节课而言，课堂的主题是解决数学上的极值问题，物理上的方法原理仅仅只是辅助工具，当导数很难求解这类问题时，我们可以借助折射定律设而不求地避开复杂的计算。跨学科整合正是为了综合应用不同学科的知识与技能，解决单一学科无法解决的问题。“万山磅礴必有主峰，龙袞九章但摯一领。”以中心学科为导向，利用其余学科知识的迁移促进中心学科的理解，提升中心学科核心素养。才能真正落实跨学科的目的。

(2) 梯度设计核心问题。在教育领域有一个著名的钟摆问题：课程应该以学生为中心还是以学科为中心？^[9]这决定了课程设计的方向。以学科为主导，容易变成“满堂灌”。以学生为导向，难以实施课程标准，课堂容易走偏。跨学科课程同样面临这个问题，跨学科教学不是知识的被动接受，而是经验的自主建构。但开展跨学科活动无疑具有开放性和探究性，如折射定律的证明，学生会有各种各样的想法，关键在于教师如何整合，将这个问题数学化、具体化、简单化，从特殊到一般的推广，继而充分利用课堂有限的实践，保证学科本身的内在逻辑和连贯性，又建立学科之间有意义、有价值的联系。

(3) 多学科教师集体备课。目前，数学跨学科课例如雨后春笋般涌现，但缺乏系统、完善、可执行的跨学科课例开发流程。单个教师难以熟练掌握多学科的细碎知识，尤其是高中学段，课程内容难度加深，学科壁垒相较于初中小学阶段更甚，因而多学科教师的通力合作必不可少。本节课中理清折射定律和费马原理二者之间的关系，站在更高的角度设计问题串，以及

如何让理解学生费马原理选择时间最短而不是路程最短的路径，这都少不了对物理光学的深入理解。

参考文献

- [1] Colucci-Gray, L., Burnard, P., Gray, D., & Cooke, C. *A critical review of STEAM (science, technology, engineering, arts, and mathematics)* [M]. Oxford: Oxford University Press, 2019: 1-26.
- [2] 郝安南, 徐斌艳. 小学数学跨学科主题活动案例分析与思考——以“夏日阅读”活动为例[J]. 小学数学教师, 2021(10): 85-88.
- [3] 程龙. 重申跨学科学习的学科立场[J]. 全球教育展望, 2023, 52(3): 25-34.
- [4] 华志远. 以高中数学为主导的跨学科教学探索与思考[J]. 数学通报, 2022, 61(6): 30-33, 37.
- [5] 黄荣, 高转玲. 光的反射与折射定律的数学探源[J]. 中学生数学, 2023(17): 35-37.
- [6] 唐得志, 杨三春. 折射定律建立的历程和变迁[J]. 物理教师, 2008(1): 47-49.
- [7] 王芳, 汪晓勤. HPM 视角下的“导数应用”教学[J]. 数学通报, 2014, 53(9): 28-32.
- [8] 任学宝. 跨学科主题教学的内涵、困境与突破[J]. 课程.教材.教法, 2022, 42(4): 59-64, 72.
- [9] 吴柳燕, 唐昌国. 新课程标准背景下的跨学科融合教育[J]. 教学研究, 2023, 46(3): 82-87.

学生习作

利用数形结合思想解决一道函数最值问题

邹易宸，胡永强

(苏州市阳山实验初级中学，苏州 215151)

在数学解题中，经常会遇到完完全全陌生的题目，这些题目往往会让我们不知所措，甚至无从下手。此时，我们不仅需要灵活转换，更需要方法创新，才能更好地解决这类问题。

1 原题呈现

求函数 $y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3} - 1)x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + 1}$ 的最小值。

2 思考分析

这个函数我们没有学习过，甚至没有见到过。如果直接进行研究则工作量特别大，因此我们使用单个分析的方式，逐个研究。

先从组成函数表达式的第一个二次根式 $\sqrt{2x^2 - 2x + 1}$ 开始，先看根号下的部分，首先把 $2x^2$ 拆开，将式子变形为 $\sqrt{x^2 + x^2 - 2x + 1}$ ，而其中的 $x^2 - 2x + 1$ 可以变形为 $(x - 1)^2$ ，所以第一个式子可以转换为 $\sqrt{x^2 + (x - 1)^2}$ 。我们观察这个式子，发现它特别像一个公式：平面直角坐标系中的两点之间距离公式。我们对它进行简单的处理，让它符合两点之间距离公式的形式，即要让 x^2 变成一个单项式减去一个单项式的形式，这里可以直接转换为 $(x - 0)^2$ ，则第一个二次根式可以转化为 $\sqrt{(x - 0)^2 + (x - 1)^2}$ 。结合数形结合思想，发现这个式子在平面直角坐标系中的几何意义是点 $(0, 1)$ 到点 (x, x) 的距离。

有了这个经验，我就想把另外两个二次根式也转化为这样的形式，让它们也变成某个点到 (x, x) 这个点的距离。由于最后要转化为 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 的形式，我采取的策略是先分

成两个可以用完全平方公式因式分解的二次三项式，再进行局部因式分解。

把第二个式子拆分成 $\sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} + x^2 + x + \frac{1}{4}}$ ，再对它进行局部分解，转化为

$\sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2}$ ，这个式子在平面直角坐标系中的意义是 (x, x) 这个点到 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 这个点的距离。

重复上面的方法，把第三个式子拆分成 $\sqrt{x^2 + \sqrt{3}x + \frac{3}{4} + x^2 + x + \frac{1}{4}}$ ，再局部因式分解，转

化为 $\sqrt{\left[x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2 + \left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2}$ ，这个式子在平面直角坐标系中的意义是 (x, x) 这个点到 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 这个点的距离。

那么现在题目就变成了求函数

$$y = \sqrt{(x-0)^2 + (x-1)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2} + \sqrt{\left[x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2 + \left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2}$$

的最小值，而后面的三个二次根式分别表示 (x, x) 这个点到 $(0, 1)$ 、 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 、 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 这三

个点的距离。为了方便研究，我们把这三个点在平面直角坐标系中画出来，如图 1，其中点 P 的坐标为 (x, x) ，显然点 P 在直线 $y=x$ 上，现在要在直线 $y=x$ 上找一点 P ，使点 P 到点 A 、 B 、 C 距离之和最短。

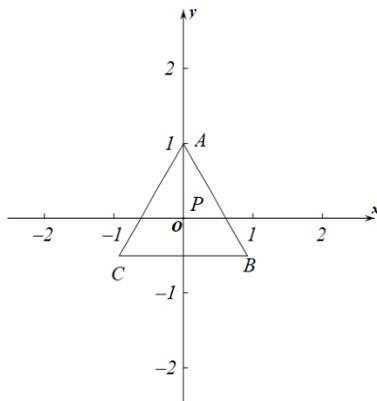


图 1 直角坐标系下 P 到点 A 、 B 、 C 距离之和

如何寻找点 P 呢？这时，转化已经不能起作用了，我们需要方法的创新。下面我们把这个问题进行专门研究。

已知 $\triangle ABC$ ，在 $\triangle ABC$ 内找一点 P ，使点 P 到点 A 、 B 、 C 的距离之和最短。

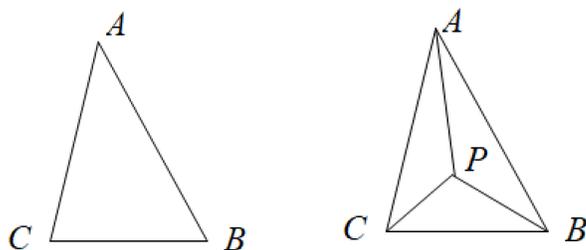


图 2 $\triangle ABC$ 内 P 到点 A 、 B 、 C 的距离之和

对于作图题，可以尝试逆向思考，先随便标出一个点 P ，如图 2。我们有一个朴素的想法，构造一些辅助线使得 PA 、 PC 、 PB 能在同一直线或折线上。

这时我想到借助平移、翻折和旋转三种全等的几何变换来实现目标。通过尝试，我发现平移与翻折无法实现将三条线段变成一条线段的目的，于是我考虑旋转，如图 3，根据以往学习经验，我把 $\triangle CPB$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 60° 后得到 $\triangle CP'B'$ 。

连接 PP' 、 BB' ，因为旋转，所以 $PB=P'B'$ 、 $CP=CP'$ ， $\angle PCP'=60^\circ$ 。所以 $\triangle PCP'$ 是等边三角形，所以 $CP=PP'$ 。这样， $PA+PC+PB=AP+PP'+P'B'$ ，根据两点之间线段最短，可知所求最小值为线段 AB' 的长。于是，后续任务是计算出线段 AB' 的长。

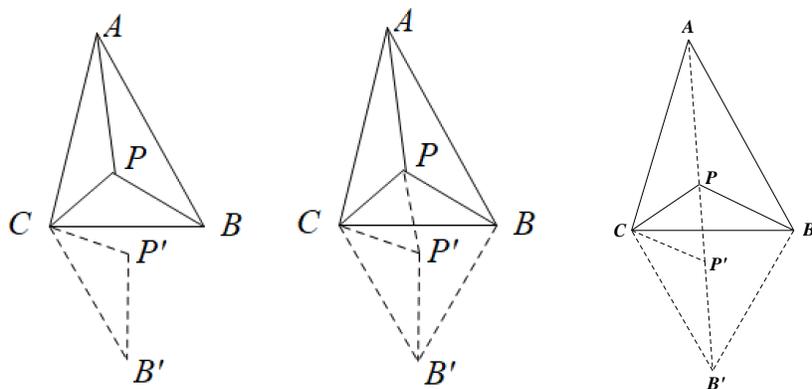


图 3 旋转示意图

因为 $\triangle CPP'$ 是等边三角形，所以 $\angle CPP'=\angle CP'P=60^\circ$ 。点 A 、 P 、 P' 、 B' 共线时， $\angle APC=\angle CP'B'=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ 。因为 $\triangle CP'B'$ 是由 $\triangle CPB$ 旋转得到的，所以 $\angle CPB=\angle CP'B'=120^\circ$ ，于是 $\angle APB=120^\circ$ 。由此可得出结论：到三角形三个顶点距离之和最短的点与三角形三个顶点的

连线夹角都为 120° 。

回到原来的题目。如图 1，点 A 的坐标为 $(0,1)$ ，点 B 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ，点 C 的坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ，在平面内有一点 $P(x,x)$ 。求当 $(PA+PB+PC)$ 最小时点 P 的坐标。

因为点 $A(0,1)$ 、点 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 、点 $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ，所以 $AB=BC=AC=\sqrt{3}$ ，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形。因为 $A(0,1)$ ，所以 $AO=1$ ，因为 $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 、 $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ，所以 $BO=CO=1$ 。在 $\triangle APB$ 中， $AP=BP=1$ ， $AB=\sqrt{3}$ ，可求得 $\angle AOB=120^\circ$ ，同理 $\angle COB=\angle AOC=120^\circ$ 。所以 $\angle CPB=\angle APB=\angle APC=120^\circ$ 。根据平面内到三角形三个顶点距离之和最短的点与这个三角形的三个顶点的连线的夹角都为 120° ，可得当点 P 与点 O 重合时， $(PA+PB+PC)$ 最小。

3 多法求解

华罗庚说：“数形结合百般好。”因此，对于本题，我们可以从几何和代数两个角度思考，并得到两种不同的计算方法。

3.1 几何法

因为点 P 与点 O 重合， $OA=OB=OC=1$ ，所以 $(PA+PB+PC)$ 最小值为 3，因此函数 $y = \sqrt{(x-0)^2 + (x-1)^2} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2} + \sqrt{\left[x - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^2 + \left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2}$ 的最小值是 3。

3.2 代数法

因为点 $P(x,x)$ 与点 O 重合，所以 P 的坐标是 $(0,0)$ ，所以 $x=0$ 。将 $x=0$ 带入函数 $y = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3}-1)x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3}+1)x + 1} = 3$ 。

4 小结反思

以上我们可以看出，数形结合是解决数学问题的利器。在数形结合思想的指导下，将每个根号下的式子配方成两个完全平方式的和的形式，从而将问题转化为两点间距离问题并加以求解。除此以外，我们还需要结合问题的特征拓展新的方法，运用新的结论解决问题。本题中运用旋转变换将三条线段转换成一条折线段，再根据两点线段最短的事实转化为直线段，进而探究出蕴含在这个问题中的一般规律，最终运用规律解决问题。最后，我们解决问题时要从多个角度加以思考，寻找不同的解法，并进行方法的比较与选优。比如，本题使用代数法和几何法均可以实现求解的目标，对于本题来说，两种方法都较为简单。

他山之石

数学定义中的歧义：三个案例

朱轶萱

(华东师范大学数学科学学院, 上海 200241)

1 引言

定义作为演绎大厦的基石、促进学习者精确交流的工具，对于数学的重要性不言而喻。同一数学概念时常存在不止一种定义，对于严格的数学演绎系统而言，不同定义之间的等价性是必要的，此时便可选定其中之一作为定义，其余则列为待证明的定理。然而，在数学学习过程中，有时会遇到同一概念出现非等价定义的情况，例如函数在初高中教材中的不同定义，它们都被数学界所认可，经过各自自洽的推理却可能得出不同的结果，我们将其视为“数学定义中的歧义 (definitional ambiguity)”。本文作者对这种歧义抱有十分乐观的态度，认为歧义不仅有机会成为激发学生创造力的源泉，亦有助于教师更深入地理解基本概念和数学的本质。本研究重点关注后者，并探索面对非等价定义导致命题可能产生不同结论时，影响教师决策的因素，这些因素可以揭示教师如何应对甚至利用数学定义中的歧义。鉴于此，设置研究问题为：参与者如何应对数学中包含定义歧义的情况？具体而言，哪些决策因素影响了参与者的反应？

2 三个非等价定义

为了便于读者理解后文所涉三个命题的设计意图，本部分将分析其背后对应的三个非等价定义，值得注意的是，它们分别属于小学、中学与大学三个学段的数学知识，一定程度上反映了本研究的可推广性。此外需声明三点：其一，研究者无意表达自己对于不同定义的倾向性；其二，给出这些定义并非要限制定义的多样性，仅仅表示研究者预设学生或教师提出的典型定义类型；其三，这些预设定义是任务设计的基础，但不会呈现给研究对象。

2.1 分数的定义

学生对分数最直观的认识即“整体的一部分”，但将其转化为严谨的数学定义时，分歧便

悄然而至。本文预设了以下两类非等价定义：

预设定义 1： 分数表示形为 $\frac{b}{a}$ 的数字，其中 a 和 b 是整数且 $b \neq 0$ 。

预设定义 2： 分数是形为 $\frac{b}{a}$ 的数字，表示 a 除以 b 。

前者与后者相比增加了分子、分母均为整数的限制，因此对诸如“ $\frac{1}{6.5}$ 、 $\frac{3}{\pi}$ 是否为分数”等问题，两类定义将导致相反的判断。本文研究团队此前已借助脚本写作任务探索过教师在面对“学生认为 $\frac{1}{6.5}$ 不是分数”的虚拟情境时可能做出的反应，并认为这种探讨歧义的过程对教师专业发展是有益的。

2.2 连续函数的定义

通过查阅教科书和维基百科，归纳出了点连续概念的两类主流定义，并发现以它们为逻辑起点将推出不同的连续函数的定义。具体而言，第一种点连续定义将“点在定义域内”作为默认的前提条件；第二种则将“点在定义域内”与“极限存在”“极限与函数值相等”三者并列作为点连续的判定条件之一。由此，可分别推出以下两类不等价的连续函数的定义。

预设定义 1： 连续函数是在其定义域内每个点上连续的函数。

预设定义 2： 连续函数是在实数（或任何连通域）上连续的函数。

例如，对于图 1 所示的函数 $g(x)$ ，由定义 1 可知其为连续函数，由定义 2 则不然。再如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ ，基于定义 1 可将其视为连续函数，但若考虑定义 2，一方面，函数在 $x=0$ 处无定义，从而定义域无法构成连通域，另一方面，函数在 $x=0$ 处的左右极限不一致，两点之中的任何一点均可成为判定函数不连续的理由。

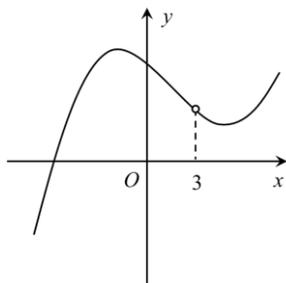


图 1 函数 $g(x)$ 图象

2.3 梯形的定义

梯形的常见定义有以下两种，其中定义 1 所构成的图形集合实则为定义 2 所构成集合的子集，作者将它们称为“具有包含关系的定义 (consequent definitions)”，此外，若两种定义存在非空子集，但无法构成包含关系时，称为“具有冲突关系的定义 (competing definitions)”。作者认为，当同一数学术语存在具有包含或冲突关系的定义时，与该术语相关的陈述可能会存在歧义。

预设定义 1: 梯形是有且仅有一组对边平行边的四边形。

预设定义 2: 梯形是具有一组对边平行边的四边形。

3 研究设计

3.1 理论基础

Milewski 等人的团队在一项关于教师关注的研究中运用了条件解释 (conditional construals) 理论，即，当教师注意到他们需要额外的因素来判断给定的教学行为是否合适时，他们就会做出有条件的解释，这些因素包括但不限于：对学生的熟悉程度、时间限制、特定内容在教学序列中的位置、学生所处的水平等。本研究将这些因素视为“教学变量”，并在此基础上创造性地引入了“数学变量”。以“13 除以 5，商是 2 还是 2.6？”为例，有人或许认为，这仅取决于教学变量，例如教材编排的顺序、学生所在年级。但作者表示，整数除法和有理数除法同样有机会出现在中学课堂的同一教学环境中，故有必要引入数学变量，例如商的定义或除法中涉及

的数字类型。

3.2 数据收集

本文研究对象是即将毕业的在读职前教师与参加专业发展课程的在职教师 ($n=29$), 编码为 T-1 至 T-29, 他们被要求以书面形式回答以下三个命题。具体而言, 回答须包含三部分: (1) 判断该命题的真假; (2) 阐明理由; (3) 站在相反的立场预设: “为什么有人可能不同意你的观点? 提供他们的可能论据”, 作答结果将构成一个分析语料库。

命题 1: $\frac{1}{6.5}$ 是个分数;

命题 2: $f(x) = \frac{1}{x}$ 是一个连续函数;

命题 3: 正方形是 (一类特殊的) 梯形。

接着对语料库采用主题分析法加以编码。第一步是语义编码, 即借助“如果…则…”“取决于”等明显条件假设的标志性短语完成初步筛选, 如“我相信这是真的, 因为这取决于你使用的分数定义”得到“不同定义”这一变量; 第二步, 借助上下文推断的潜在编码进行补充, 如通过“因为[它]没有满足分子和分母都是整数”, 推断出参与者持有的观点为预设定义 1。由此, 通过编码得到的变量类型来回答研究问题一, 并进一步判断参与者使用这些变量是否旨在解决定义中的歧义, 从而回答研究问题二。

4 研究结果

图 2 给出了 29 名参与者对三个命题判断结果统计, 可见绝大多数教师愿意承认 $\frac{1}{6.5}$ 是分数、正方形是一类特殊的梯形, 至于 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是否为连续函数, 持有对立观点的人数基本持平。本节将分别归纳影响参与者作答每一题的条件解释变量, 其中“不同定义”这一变量贯穿始终, 说明每个命题均有参与者考虑到了其背后的定义歧义。

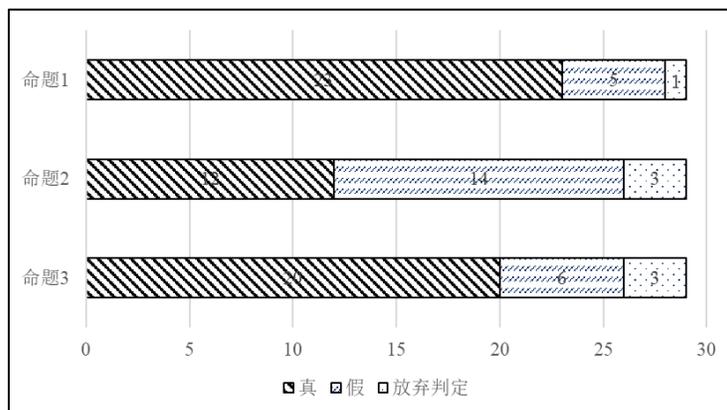


图 2 命题判断情况统计

4.1 命题 1 的条件解释变量

4.1.1 变量一：不同定义

有 20 名参与者涉及到了分数的多种定义，并在论证自己的回答或假设的反驳时考虑了这些定义。比如 T14 采取“整体一部分”的非正式定义：“根据定义，分数是等于整数的一部分的数字，而你不能将一个物体分为 6.5 部分。” T-27 认为：“如果一个数可以表示成形为 $\frac{b}{a}$ 的数字，其中 a 和 b 是整数且 $b \neq 0$ ，即为分数，因此 $\frac{1}{6.5} = \frac{10}{65} = \frac{2}{13}$ 是分数。”

4.1.2 变量二：对教学背景的依赖

第二类变量立足教育取向，如 T-3 考虑到学段的差异：“小学生不会认识到这是一个分数，因为许多教科书显示分数须为整数之比。此外，他们可能不常与这种分数打交道，而这在高等数学中是司空见惯的。” T-21 在选择放弃判定真或假时，承认了这种对教学背景的依赖，他认为他的判断取决于该课程的“教育目的”。

4.1.3 变量三：惯例

第三类变量涉及数学中不言自明的惯例或共识。T-20 认为分子分母都是整数是分数不言而喻的书写格式：“我上面选择的定义中的术语‘分数’是一个不定义数字的术语，而是定义它们的形式。”故她认为 $\frac{1}{6.5}$ 不应被视为分数。然而在换位思考时，T-20 又坦诚道：“仅基于形式的定义是否真的代表了数学惯例？”她指出，依靠外观作为决定变量，即使它被嵌入到定义的上

下文中，也可能不是“数学上的精确”。

4.1.4 变量四：个人见解

最后一类变量是参与者富有主观性的个人见解，如 T-26 解释道：“就我个人而言，我认为分数是一种符号方法，即若一个数字的顶部有一个分子，那么下面有一个分母，用条形分隔它们，对我来说，这看起来像一个分数。”参与者在教育过程中生成了关于数学对象的个人信念，并从这些信念中提取他们用来解决歧义的非正式定义。使用与预设定义 2 相似的定义的受访者承认，他们的选择是基于对不同类型的数字的更多包容的愿望，如其中 T-9 指出，预设定义 2 “允许更令人兴奋的分数类型”。

4.2 命题 2 的条件解释变量

4.2.1 变量一：不同定义

绝大多数参与者持有两种预设定义中的一种，并时常将另一种用来假设反驳自己的观点。特别地，有参与者提出了一种非正式定义，认为连续函数是一个可以在不抬起铅笔的情况下绘制的函数，并称“据我观察，这种质朴的教学语言时常出现在教师的课堂教学中”。

4.2.2 变量二：惯例

参与者所展现出的惯例变量有时存在分歧。T-25 一方面认为：“由于命题未指定定义域，因此我们默认谈论的是整个实数范围。”然另一方面，在考虑对自己的结论进行假设性反驳时，T-2 毫不留情地写道：“只有纯粹主义者会争辩说，从负无穷到正无穷上的所有点都应该被证明是连续的，才能使函数是连续的。”

4.2.3 变量三：个人见解

T-11 发现两本微积分教科书中采取的不同定义，其中一本要求连续函数在整个实数域上连续，而另一本仅要求在定义域内的每个点上连续。T-11 最终拒绝了第二个定义：“我不喜欢后者，这种方式允许某些函数在某些点上不连续。”

4.3 命题 3 的条件解释变量

4.3.1 变量一：不同定义

三名参与者清晰地意识到梯形存在两类主流的非等价定义，并坦率地表示其无法做出判断，因为“这完全取决于梯形的定义”。

4.3.2 变量二：文化背景

一些参与者表示，他们选择定义是基于地理背景，例如世界特定区域使用定义的趋势。T-9 和 T-12 都选择了更具包容性的定义 2，并且他们认为使用数学界公认定义一致的的定义很重要。T-9 解释说，“北美普遍采用这种定义，因此应该是在谈话中使用的定义。”尽管 T-11 选择更狭义的定义-T1，但他指出，在英国，梯形的第三种定义也很普遍，即“两对边均不平行的四边形”。溯其源流，是因为 *trapezoid* 和 *trapezium* 这两个中译均为梯形的单词在美式和英式英语中表达的含义恰恰相反。

4.3.3 变量三：个人见解

不少参与者表达了自己对于两类定义的主观倾向。例如，有些人专门选择使用定义 2，因为它更具包容性。T-6 更喜欢这样的定义，因为它允许梯形的已知属性扩展到它的子对象集：“[包容性]定义更有用，这样梯形的所有属性都可以适用于平行四边形。”相反，一些参与者基于他们个人的信念选择了梯形的排他性定义，即定义对于促进沟通很重要。T-25 说：“我相信只有一对平行边的梯形的定义在数学中是更有用的定义，因为它唯一地定义了一种形状。当试图在言语对话中精确区分形状时，替代定义……很快就变得没那么有用了。”T-20 选择包容性定义，但也承认 T-25 论点的合理性。她预计有些人可能会觉得“标签的存在是为了更好地与其他人交流物体及其特征”，并且即使梯形的定义包括正方形，也没有人会真正将正方形称为梯形。从这个意义上说，排他性定义更有助于区分形状。

5 结语

综上，面对隐含定义歧义的数学命题，影响教师决策的因素包括：对不同定义的认识、对教学背景的依赖、文化背景、惯例、个人见解等。此外，注意到本文的三个案例不仅横跨学段，

也恰恰代表了三类定义歧义的情况：第一类，由经验提取型定义转化为严谨定义时产生歧义，例如分数的定义；第二类，从相关既有定义的不同表述中推断出非等价定义，例如连续函数的定义；第三类，同一数学概念在学界存在多种非等价的规定定义，例如梯形的定义。纵览三个案例，可进一步发现以下共性特征：其一是参与者对直观的依赖，在所有案例中均能发现，隐含的图象表征往往会导致“明显”的定义选择；其二是参与者试图平衡个人观点和外部权威之间的紧张关系，这种权威一方面可以理解为数学本身的严谨性和权威性，另一方面也指教科书、课程标准以及自身所处的文化背景等等。最后，许多参与者声称这项任务是一次“大开眼界”的经历，改变了他们对数学的看法。几位参与者展现出了他们对歧义情况的不满以及对“正确”定义的追求，正如先前研究所论证的：富有成效的歧义可用于丰富课堂讨论，足见数学定义中的歧义在促进教师知识与信念发展方面的潜力。

本文对 HPM 学习共同体的借鉴价值主要体现在以下两个层面：第一，提供研究理论。条件解释理论为考察 HPM 课例研究对教师知识和信念方面的影响提供了一个新的视角。第二，开拓研究思路。不同的数学定义的背后往往隐含着其概念的历史发展脉络，因此可以将数学定义中的歧义作为抓手，考察教师如何协调历史序、逻辑序与认知序的冲突，从而丰富教师教育取向的 HPM 实证研究。

参考文献

- [1] Bergman, A.M., Kercher, A., Gallagher, K. et al. Definitional ambiguity in mathematics: three cases [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2024, 115(1): 93-110.