



# 上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2012 年第 1 卷第 4 期



约翰·福弗尔

(John Fauvel, 1947–2001)

## 《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

副主编：蒲淑萍 吴 骏 黄友初 王 科 邹佳晨

责任编辑：彭 刚 赵东霞

编委(按姓氏字母序)：

高渊露 胡晓娟 黄友初 黄 婷 刘 攀 柳 笛 陆琳琰 彭 刚 蒲淑萍 沈春辉 屠靛韵 汪晓勤

王 芳 王 科 王莹颖 吴 骏 吴晨昊 谢正敏 姚 瑾 张小明 赵东霞 邹佳晨

## 刊首语

江南六月，欣欣向荣。

在各位作者和编委会的共同努力下，《上海HPM通讯》第4期与大家见面了。

本期的封面人物是约翰·福弗尔。他是英国著名数学史家与数学教育家，曾担任英国数学史学会主席(1991-1994)、HPM国际研究小组主席(1992-1996)以及国际数学史委员会执行委员会委员(1994-1998)。

虽然一生短暂，Fauvel却为HPM事业做出了卓越贡献。在担任HPM国际研究小组主席期间，Fauvel多次组织HPM国际会议，讨论在不同背景下如何使数学教师更好地利用数学史工作者整理出来的历史材料、数学课程的设计与历史之间的关系等等。会议报告的论文均由他与其它合作者编辑出版(其中2000年出版的 *History in Mathematics Education: the ICMI Study* 已成为HPM研究的经典文献之一)，这些文集不仅为HPM的发展提供了指导，还为它的进一步发展提供了理论基础。同时，Fauvel本人还写了近30篇有关HPM的文章并编辑了一本数学史原始文献选读(*Mathematics through History: A Resource Guide*,1990)。

据台湾师大洪万生教授的回忆，“Fauvel 待人真诚，很多人见到他的第一个印象都是笑容可掬”。而且“他总是像个 HPM 使者，到全世界各地去发掘 HPM 的新进人才”。因为“作为一位专业的数学史家，Fauvel 深知 HPM 是一个非常值得投入、而且必须好好地呵护的学术领域”。

斯人已逝，“福”音不绝。让我们向大师学习(*Learn from the masters*, 1995)，在HPM的道路上不断前行。

## 目 录

刊首语 ..... I

### 文献研究

阿布·韦发与三角公式 ..... 吴晨昊 1

历史的片段:古埃及数学中的“假位法” ..... 彭刚 8

### 教学实践

对数的历史及其教学 ..... PANAGIOTOU, E. N. 14

融入数学史的导数概念教学设计 ..... 王芳 27

### 数学文化

竹里馆, 听书声 ..... 刘攀 41

# CONTENT

**FOREWORD** ..... I

## **HISTORICALLY SPEAKING**

**Abu Wefa and Trigonometric Formulas**..... **Wu Chenhao 1**

**The False Position in Egyptian Mathematics** ..... **Peng Gang 8**

## **TEACHING PRACTICE**

**Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms** ..... **Panagiotou 14**

**Teaching of the Concept of Derivative from the HPM Perspective**

..... **Wang Fang 27**

## **MATHEMATICS & CULTURE**

**The Magic Squares** ..... **Liu Pan 41**

# 阿布·韦发与三角公式

吴晨昊

(华东师范大学数学系, 上海, 200241)

三角学起源于古埃及人和希腊人的日常生活和生产实践, 此后很长一段时期都从属于天文学。从中世纪到 12 世纪的几百年间, 世界各地的数学家致力于三角学的研究, 为其发展作出了突出的贡献, 阿布·韦发正是其中之一。

阿布·韦发(Muhammad Abū'l-Wafā, 940-998)是阿拉伯著名的数学家、天文学家, 公元 940 年 6 月 10 日生于今伊朗东北部呼罗珊(Khorāsān)省的布山(Būzjān), 所以他也被称为布赞尼(al-Būzjānī)。公元 959 年以后, 阿布·韦发到巴格达定居。当时的统治者阿杜德·道拉(Aduḍ ad-Dawlah)非常支持科学研究, 资助了大批数学家, 其中就包括阿布·韦发。后来, 道拉的儿子继承王位, 于公元 988 年在巴格达宫殿的花园里建立了一个天文台, 阿布·韦发便在此开展研究工作, 成为阿拉伯中世纪数理天文学派的最后一个重要的代表人物。期间, 他翻译并注释了欧几里得(Euclid, 325B.C.-265B.C.)、丢番图(Diophantus, 200-284)和花拉子米(Al-Khwarizmi, 780-850)等人的著作, 不过这些手稿都已经失传。公元 961 到 976 年间, 他撰成《文书和商业算术》。由于当时的官员和商人都还没有使用印度人的符号体系, 因此, 该书所有数字都用文字来表示, 也没有书面的演算过程, 尽管阿布·韦发本人是使用印度数码的专家。全书分为七部分, 每部分又有七个章节, 分别讨论了比例、整数和分数的乘除法、测量(正方形面积、立方体体积、距离等)、税收、(农作物的)交易和分红及其他各种与商业有关的问题。值得注意的是, 书中第二部分在介绍整数和分数运算时, 作者使用了负数。这是中世纪阿拉伯文献中唯一一处使用负数的例子, 阿布·韦发受印度数学的影响, 将负数解释为“负债”<sup>[2]</sup>。

阿布·韦发的另一部实用性著作《手艺人的几何作图法》, 完成于公元 990 年之后。该书分十三章, 其中很多平面和立体几何作图问题来自欧几里得、阿基米德(Archimedes, 287 B.C.-212 B.C.)、海伦(Heron, 10-75)、狄奥多西(Theodosius, 160 B.C.-90 B.C.)和帕普斯(Pappus, 290 - 350)的著作, 也有不少是他原创的。问题的范围非常广泛, 包括绘图仪器的设计与测

试、直角三角形的作图、角的近似三等分、抛物线和正多边形的作图，正多边形的内切圆和外接圆、给定多边形的各种内切多边形、图形的分割(包括平面上多边形的分割以及球面的曲边形分割)等几何问题。他还尝试用直尺和张口固定的圆规解决一系列问题，这种作图曾经出现在古印度和希腊的著作中，但阿布·韦发是最早用此方法解决大量问题的数学家。这些问题之所以会引起人们的兴趣，可能是因为在实践中，用角度固定的圆规得到的结果更为精确。这种方法后来在文艺复兴时期的欧洲曾广为流传，并形成了一般理论<sup>[1][2]</sup>。

阿布·韦发的天文学著作《天文学大全》是对托勒密(Ptolemy, 85 - 165)《天文大成》的继承和发展，部分手稿今藏巴黎的国立图书馆。该书并没有介绍有关天文学的新理论，不过他的观测数据为后来的许多天文学家所采用。

阿布·韦发在数学上的贡献主要在三角学方面。《天文学大全》一书虽然在天文学上没有太多建树，却大大推进了三角学的发展。尤其是在改进弦表和解决球面三角学问题方面，阿布·韦发的成就是毋庸置疑的。在编制新的正弦表时，他依据古希腊数学家塞翁(Theon, 335 - 405)的一个定理，运用自己的方法，更精确地计算了  $\sin 30'$  的值。他编制出每隔  $10'$ 、精确到  $\frac{1}{60^4}$  的正弦表和正切表。为此，他首先运用差角正弦公式：

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} - \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta},$$

然后选定几个接近  $30'$  的弧，如  $\frac{12^\circ}{32}$ 、 $\frac{15^\circ}{32}$ 、 $\frac{18^\circ}{32}$ ，其正弦值可由  $\sin 72^\circ$  和  $\sin 60^\circ$  通过上

述公式得到，如  $\sin \frac{12^\circ}{32} = \sin \frac{72^\circ - 60^\circ}{32}$  等。进而利用不等式

$$\sin \frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{3} \left( \sin \frac{18^\circ}{32} - \sin \frac{15^\circ}{32} \right) < \sin 30' < \sin \frac{15^\circ}{32} + \frac{1}{3} \left( \sin \frac{15^\circ}{32} - \sin \frac{12^\circ}{32} \right),$$

他计算出  $\sin 30'$  的值在半径为 60 的圆中为  $\sin 30' = 31'24''55'''54^{IV}55^V$  (60 进制)，化为小数是  $\sin 30' = 0.008726536673$ ，这一结果精确到  $10^{-8}$ <sup>[3]</sup>。

阿布·韦发首先使用了所有六种三角函数，并提出了用单位圆定义三角函数的方法。正切、余切作为圆的切线段被引入，这样，他首次将正切函数视为一个独立的函数而不是正弦和余弦的商。他还首次引入正割和余割的概念，这项成果在三角学历史上有重大意义。除此之外，他还简化了前人在研究球面三角学时所使用的方法，证明了一般球面三角形的正弦定理。为了纪念他在天文学方面的贡献，月球背面的一座环形山以他的名字命名。

阿布·韦发继承并简化了托勒密等人对三角公式的证明。他说：“尽管希帕克斯、阿波罗尼克斯、托勒密等人已经讨论过这些问题，但本文接下来要介绍的方法与之前的都不同……我们会避开那些理解起来很困难的方法……为了更简便更直接地达到目的……我们从一个新的角度来看问题，并给出新的证明。”<sup>[4]</sup>

根据阿布·韦发的原图，可以简单地推导出同角三角函数的关系、两角和与差的三角公式以及倍角公式等。值得注意的是，16 世纪以前，三角函数并不是用比率，而是用线段表示的，三角函数关系也往往以比例的形式出现<sup>[5]</sup>。

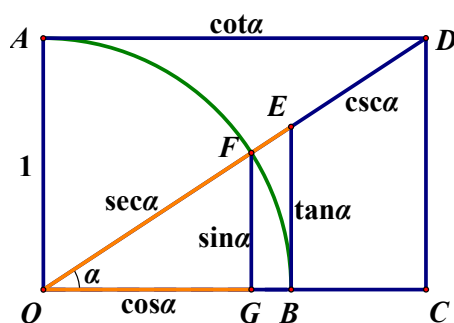


图 1

如图 1，四分之一圆的半径为 1， $\angle COD = \alpha$ ，则在矩形  $A OCD$  中，分别有  $FG = \sin \alpha$ ， $OG = \cos \alpha$ ， $EB = \tan \alpha$ ， $OC = AD = \cot \alpha$ ， $OE = \sec \alpha$ ，以及  $OD = \csc \alpha$ 。

由  $\triangle OFG \sim \triangle OEB$  由  $\triangle OFG \sim \triangle ODC$ ，得

$$\tan \alpha : 1 = \sin \alpha : \cos \alpha \quad (1)$$

$$\cot \alpha : 1 = \cos \alpha : \sin \alpha \quad (2)$$

在  $\text{Rt}\triangle OFG$ 、 $OEB$ 、 $OCD$  中，分别有

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (3)$$

$$\sec \alpha = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \quad (4)$$

$$\csc \alpha = \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} \quad (5)$$

16 世纪德国天文学家雷提库斯(Rhaeticus, 1514 - 1574)在此基础上给出

$$\sec \alpha : 1 = 1 : \cos \alpha \quad (6)$$

$$\csc \alpha : 1 = 1 : \sin \alpha \quad (7)$$

法国数学家韦达(F. Viète, 1540 - 1603)又给出更多类似的比例式。

阿布·韦发利用几何方法证明了两角和与差的正弦公式(只用正弦来表达)。我们改用今天人们熟悉的表达方式；并将他的方法用于证明更多的三角公式。



如图 2, 在单位圆  $O$  中, 作  $\angle AOB = \alpha$ ,  $\angle BOC = \beta$  ( $\alpha > \beta$ ), 过  $B$  作  $BD \perp OA$ ,  $BE \perp OC$ , 垂足分别为  $D$ 、 $E$ , 与圆  $O$  分别交于  $G$ 、 $H$ , 则  $D$ 、 $E$  分别是  $BG$ 、 $BH$  的中点。连接  $DE$ 、 $OG$ 、 $OH$ 、 $GH$ 。过  $B$  作  $DE$  的垂线, 垂足为  $F$ 。于是,  $\angle GOH = 2(\alpha + \beta)$ ,  $GH = 2\sin(\alpha + \beta)$ 。

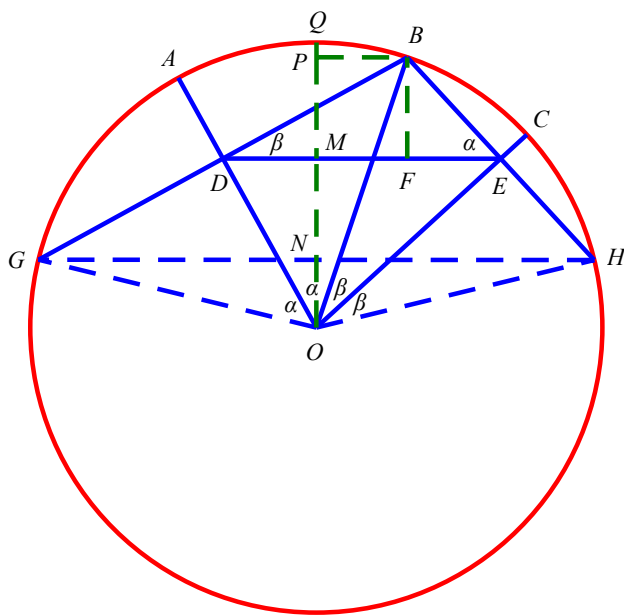


图 2

从而得  $DE = \frac{1}{2}GH = \sin(\alpha + \beta)$ 。因  $BD = \sin \alpha$ ,  $BE = \sin \beta$ , 故得

$$DF = BD \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta, \quad FE = BE \cos \alpha = \cos \alpha \sin \beta。$$

但  $DE = DF + FE$ , 所以有

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (8)$$

现在, 过  $O$  作  $OM \perp DE$ , 垂足为  $M$ ,  $OM$  交  $GH$  和于点  $N$ , 交圆于  $Q$ 。易知  $\angle MOE = \angle BED = \alpha$ ,  $\angle MOD = \angle BDE = \beta$ 。于是

$$ON = \cos(\alpha + \beta), \quad OM = OD \cos \beta = OE \cos \alpha = \cos \alpha \cos \beta,$$

$$MN = BF = BD \cos \beta = BE \sin \alpha = \sin \alpha \sin \beta。$$

由  $ON = OM - MN$  即得

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (9)$$

过  $B$  作  $OQ$  的垂线，垂足为  $P$ 。因  $\angle POB = \alpha - \beta$ ，故有  $PB = \sin(\alpha - \beta)$ ，  
 $OP = \cos(\alpha - \beta)$ 。因  $ME = OE \sin \alpha = \sin \alpha \cos \beta$ ， $PB = MF = ME - FE$ ，

$OP = OM + PM = OM + BF$ ，所以有

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (10)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (11)$$

事实上，利用阿布·韦发的单位圆，我们还可以证明更多的三角公式。如图 2，因

$DM = FE = \cos \alpha \sin \beta$ ， $DF = ME = \sin \alpha \cos \beta$ ，故由

$$DF = \frac{1}{2}(DE + MF) = \frac{1}{2}(DE + PB), \quad FE = \frac{1}{2}(DE - MF) = \frac{1}{2}(DE - PB)$$

分别得

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad (12)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)] \quad (13)$$

又由  $OM = ON + MN = \frac{1}{2}(OP + ON)$ ， $BF = PM = \frac{1}{2}PN = \frac{1}{2}(OP - ON)$ ，

分别得

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (14)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (15)$$

最后，我们来证明和差化积公式。如图 3，过点  $Q$  分别向  $OA$  和  $BG$  引垂线，垂足分别为

$T$  和  $S$ ，连接  $QG$ 。在  $\triangle OQG$  中， $\angle GOQ = \alpha + \beta$ ，故有  $GQ = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ ；在  $\triangle QOB$  中，

$\angle QOB = \alpha - \beta$ ，故有  $QB = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ 。

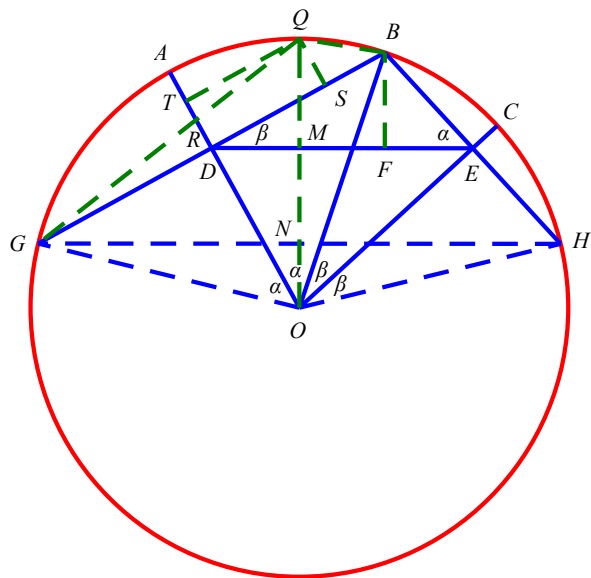


图 3

于是

$$\sin \alpha + \sin \beta = GD + QT = GS = GQ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = BD - QT = BS = BQ \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = OD - OT = -QS = -BQ \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

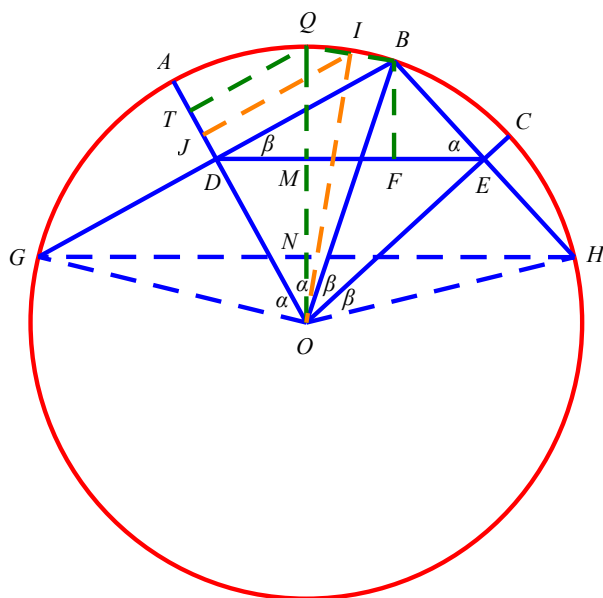


图 4

为了证明剩下的一个公式, 我们过  $O$  作  $QB$  的垂线, 垂足为  $I$ ; 再过  $I$  作  $OA$  的垂线, 垂足为  $J$ , 如图 4 所示。易知,  $J$  为线段  $TD$  的中点。在  $\triangle OJI$  中,  $OI = \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ ,

$\angle IOJ = \frac{\alpha + \beta}{2}$ , 故有

$$\cos \alpha + \cos \beta = OD + OT = 2OJ = 2OI \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}。$$

早期的数学家们在研究三角学时较多地依赖几何方法, 这种情况直到韦达将代数方法引入之后才有所改变。此后的三角学逐渐脱离天文学而独立存在, 并在欧拉等人的努力下彻底脱离了几何学。尽管如此, 阿布·韦发等人用纯粹的几何证明推导三角公式的方法仍然极具价值。从历史发生原理的角度看, 上述这些方法经过改编完全有可能融入中学数学的课堂, 成为很好的教学素材。学生应当有机会了解不同时期数学家们的工作, 这不仅能够开拓他们的视野, 也有助于加深他们对三角函数的理解, 其作用和价值是值得进一步探究的。

#### 参考文献

- [1] O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. Mohammad Abu'l-Wafa Al-Buzjani. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abu'l-Wafa.html>
- [2] Youschkevitch, A. P., 2008. Abū'l-Wafā Al-Būzjānī, Muhammad Ibn Muhammad Ibn Yahyā Ibn Ismāīl Ibn Al-Abbās. In: Dictionary of Scientific Biography. <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830900031.html>
- [3] 梁宗巨, 1995. 世界数学通史. 沈阳: 辽宁教育出版社, 533-534
- [4] Bond, J. D., 1921. The development of trigonometric methods down to the close of the XVth century. *Isis* . 4( 2): 295-323.
- [5] 汪晓勤, 2007. 平面三角公式之几何渊源. 数学传播, 31(3): 53-69

# 历史的片段:古埃及数学中的“假位法”

彭刚<sup>1,2</sup>

(1.华东师范大学数学系,上海,200241;2.广西师范大学数学学院,桂林,541004)

悠悠数学史,灿烂无比,奇葩无数,宝藏无穷。今选择古埃及数学海洋中浪花一朵,供大家欣赏。

## 1 古埃及数学概述

古埃及是文化发达最早的几个地区之一,位于非洲东北部尼罗河两岸,一部分夹在两个高原中间的狭长谷地,叫做上埃及,一部分是尼罗河三角洲,叫做下埃及。早在旧石器时代,那里就有居民。一般而言,古埃及数学指的是公元前6世纪以前这个地区所创造的数学<sup>[1]</sup>。



图1 莱茵德纸草书之一

古埃及人在一种用纸莎草压制成的草片上书写<sup>①</sup>,这些纸草书有的幸存至今,成为反映古埃及文明的珍贵文献。如今我们对古埃及数学的认识,主要是根据两卷用僧侣文写成的纸草书:一卷藏于伦敦大英博物馆,称为莱茵德纸草书,一卷藏于莫斯科普希金精细艺术博物馆,称为莫斯科纸草书。

莱茵德纸草书又称阿姆士纸草书(如图1),是公元前1650年左右<sup>②</sup>的埃及数学著作,属于世界上最古老的数学著作之一。该纸草书是一位叫阿莫斯的人用僧侣文抄录的。由阿姆士所加的前言可知,他抄录的是一部已经流传了约两个世纪的更古老的著作。

<sup>①</sup> “纸草”(或纸莎草)一词,希腊文是  $\pi\acute{\alpha}\pi\upsilon\rho\omicron\varsigma$ , 转成拉丁文 *papyrus*, 欧洲文字的“纸”多源于此: 英语 *paper*, 法语 *papier* 等。

<sup>②</sup> 莱茵德纸草书产生的年代说法不一,多数学者认为是公元前1650年左右,另几种意见是公元前1500,1700,2000年左右。



图 2 莱茵德纸草书之二

莱茵德纸草书最初发现于埃及底比斯古都废墟中, 1858 年为苏格兰人莱茵德(A.H.Rhind, 1833-1863)购得, 因此而得名。该草书现藏伦敦大英博物馆, 长 564 厘米, 宽 33 厘米<sup>①</sup>, 中间有少量缺失, 缺失部分 1922 年意外在纽约一私人收存的埃及医学纸草书中被发现, 现藏美国布鲁克林博物馆。

莫斯科纸草书又叫戈列雪夫纸草书(如图 2), 1893 年由当时在开罗大学任埃及学教授的沙俄贵族戈列尼雪夫(V.S.Golenishchev)购得, 该纸草书是出自埃及第十二朝一位佚名作者的手笔(约公元前 1890 年),

其长度与莱茵德纸草书大致相同, 宽只及后者的四分之一。俄罗斯历史学家土拉叶夫(Б.А.Гурьев, 1868-1920)于 1917 年和斯特卢威(B.B.Струве, 1889-1965)于 1930 年对莫斯科纸草书进行了研究后完成了出版工作, 对进一步研究埃及的数学提供了方便。

通过对这两部纸草书的研究我们可以知道<sup>[2]</sup>: 埃及人很早就使用十进记数法, 但不知道位值概念。古埃及算术以加法为主, 乘法是通过连续加倍来进行的。此外埃及数学的一个重要特色是分数运算的技巧, 其中所有分数都用所谓的“单位分数”(即分子为 1 的分数)来表出。埃及人能解含若干个未知数的一次方程, 但只能处理最简单的二次方程。埃及几何学与实用测量密切相关, 它包括了计算正方形、矩形、等腰梯形等图形面积和像平截头方锥这样的立体体积的准确公式, 对圆面积也能作近似计算, 其中的圆周率相当于 3.1605。埃及人常对问题的数值结果加以验证, 但尚无证明思想。尽管如此, 埃及几何为希腊人构筑严密的演绎体系提供了素材与基础。

## 2 古埃及数学中的假位法

古埃及的这两部纸草书实际上都是各种类型的数学问题集。莱茵德纸草书主体部分由

<sup>①</sup> 由于莱茵德纸草书中间有少量缺失, 因而具体尺寸说法不一, 此处采用的是梁宗巨先生的观点, 其著作《世界数学通史》(上册)(辽宁教育出版社, 2001, p151)中对莱茵德纸草书的尺寸描述是: “全长 564 厘米, 宽 33 厘米。收入博物馆时, 没有那么长, 因为中间有一段残缺遗失”; 李文林先生在其著作《数学史概论》(第二版)(高等教育出版社, 2002, p17)中对此描述是: “长 525cm, 宽 33cm, 中间有少量缺失”; 卡兹(Victor J.Katz)的著作《数学史通论》(第 2 版)(高等教育出版社, 2004, p69)中的表述则是: “长约 18 英尺, 高约 13 英寸”, 换算过来为长约 549 厘米, 宽约 33 厘米。

84 个问题组成<sup>①</sup>，莫斯科纸草书则包括了 25 个问题。这些问题大部分来自现实生活，但纸草书的作者将它们作为示范例子编集在一起<sup>[3]</sup>。

莱茵德纸草书的题目可以分为 4 部分<sup>[4]</sup>：

(1) 单位分数(unit fraction)表。这是埃及数学最特异之处，是一切分数( $2/3$  是例外)都化为单位分数。在 84 个问题之前先用相当的篇幅写出  $2/n$  型分数分解成单位分数的结果。

(2) 第 1-40 题属于算术与代数。

(3) 第 41-60 题是几何学。

(4) 第 61-84 题是杂题。

莫斯科纸草书全书包括 25 个数学问题，内容与莱茵德纸草书并无本质区别，但其中的几何问题反映出了更高的水平。

与其他古文明的人类一样，虽然缺乏一套我们今天所使用的来表示运算或未知量的符号体系，古埃及人还是能够充分利用文字的技巧来解决一些实际数学问题。在解决这些问题中古埃及人发明了一些独特的数学技巧，假位法<sup>②</sup>就是其中的一种，它主要用来解决线性方程以及等差、等比数列问题。

例1 莫斯科纸草书问题24：某数与它的  $\frac{1}{7}$  相加得19，求该数<sup>[5]</sup>。

古埃及人先假设这个数是7，由于7与它的  $\frac{1}{7}$  相加得8，故正确的答案是  $\frac{19}{8} \times 7 = 16\frac{5}{8}$   
 $= 16\bar{2}\bar{8}$ <sup>③</sup>。

例2 柏林纸草6619<sup>④</sup>上面的问题：将一个面积为100的大正方形分为两个小正方形，一个边长是另一个的  $\frac{3}{4}$ <sup>[6]</sup>。

此问题相当于二次联立方程  $x^2 + y^2 = 100, y = \frac{3}{4}x$ ，古埃及人的解法是先假设  $x$  为1，

<sup>①</sup> 莱茵德纸草书现在最常见的本子是美国布朗(Brown)大学校长蔡斯(Arnold Buffum Chace, 1845-1932)整理、翻译、注释的本子：《莱茵德纸草书》(The Rhind Mathematical Papyrus), 1927-1929年由美国数学协会(Mathematical Association of America)出版(1979年重印)。蔡斯本列为84题。有些书说有85题，梁宗巨先生认为原因是有些题分为两部分，可以当做两个题(如59、61、82题)，李文林先生则认为由于莱茵德纸草书最后有一段难以解释的文字，因此有些文献称之为问题85。

<sup>②</sup> 英文表达为 method of false position，梁宗巨先生在其著作《世界数学通史》(上册)(辽宁教育出版社，2001, p159)中翻译成“试位法”，此处采用的是李文林先生在其著作《数学史概论》(第二版)(高等教育出版社，2002, p20)中的翻译；在李文林先生主编的《数学珍宝——历史文献精选》(科学出版社，1998, p7)中翻译成“假设法”。

<sup>③</sup> 古埃及人用  $\bar{2}$  表示  $\frac{1}{2}$ ， $\bar{8}$  表示  $\frac{1}{8}$ ，因此  $16\bar{2}\bar{8}$  表示的即是  $16\frac{5}{8}$ 。

<sup>④</sup> 该纸草书被发现于尼罗河三角洲法尤姆(EI Faiyūm，在开罗西南110公里处的小镇)的卡呼恩(Kahun)，现藏于柏林，年代约为公元前2160-前1700年(见：梁宗巨，《世界数学通史》(上册)，辽宁教育出版社，2001, p145)。

则  $y = \frac{3}{4}$ ,  $x^2 + y^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$ , 由于题设中大正方形的边长为10,  $10 \div \frac{5}{4} = 8$ , 故原问题的答案是  $1 \times 8 = 8$ ,  $\frac{3}{4} \times 8 = 6$ 。

例3 莫斯科纸草书问题40<sup>[7]</sup>: 将100个面包分配给5个人(使成等差数列), 且头两人所得是后3人的1/7。

本题原题中没有给出等差的条件, 但从结果来看作者有这样的意图。古埃及人的解法是先假设数列首项为1, 公差为  $5\bar{2}$ , 于是5人各得  $1, 6\bar{2}, 12, 17\bar{2}, 23$ , 总和等于60。将所有数字都乘以100/60即得所求答案:  $1\frac{2}{3}, 10\bar{2}\bar{6}, 20, 29\bar{6}, 38\bar{3}$ 。

为什么要设首项为1(也许为了简单), 公差为  $5\bar{2}$ ? 原书没有说明, 后人作了一些合理的猜想。M·康托尔认为<sup>[8]</sup>: 若首项为1, 公差是  $d$ , 则按条件列成方程

$$7(1+1+d)=(1+2d)+(1+3d)+(1+4d), \text{自然就推得 } d = 5\bar{2}。$$

蔡斯(A.B.Chace) 另作解释如下<sup>[9]</sup>: 设首项为1, 又公差为1, 则5个数是1, 2, 3, 4, 5。头两数和的7倍( $7 \times 3 = 21$ )比后3数之和多9, 若将公差改为2, 则头两数和的7倍( $7 \times 4 = 28$ )比后3数的和( $5+7+9=21$ )多7。即公差增加1, 差数(头两数和的7与后3数之差)减少2。现问公差增加多少, 才使差数为0(即符合题设)? 答案应该是  $9 \div 2 = 4\bar{2}$ , 加上原设的公差1, 即得  $5\bar{2}$ 。梁宗巨先生认为: 由于当时埃及人还不懂得列方程, 否则就会直接列方程求解而不必绕试位法这个大弯子了, 蔡斯的解释中的方法虽然冗长一些, 但也许更符合当时的水平和习惯<sup>[10]</sup>。

## 2.1 假位法的本质

例1和例2中所使用的假位法的本质用现代符号可表述为: 对于方程  $ax = b (b \neq 0)$ <sup>①</sup>, 任意设一值  $x'$  为其解, 令  $b' = ax', k = b/b'$ , 则真解  $x = kx'$ 。纸草书中的有些问题还相当于求解方程  $x + ax = b (b \neq 0)$ ,  $x + ax + bx = c (c \neq 0)$  或  $x + ax + bx + cx = d (d \neq 0)$ , 本质上与解方程  $ax = b (b \neq 0)$  类似。

例3中所使用的假位法, 无论是康托尔的解释还是蔡斯的解释, 其本质都是任意一个首项不为0的等差数列, 都可以由首项为1的等差数列乘以一个倍数  $k$  得到(如图3)。

<sup>①</sup> 例2中要求解的方程虽然为  $ax^2 = b (b \neq 0)$ , 但从假位法的角度来看本质上与求解  $ax = b (b \neq 0)$  并无区别。



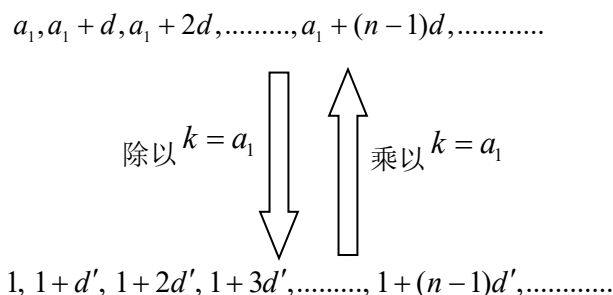


图3

总的来看，古埃及人善用假位法这一点充分说明，他们已经懂得两个量之间线性关系这一基本概念——即其中一个量乘以一个倍数的话，第二个量也乘以相同的倍数。

## 2.2 假位法的“局限”

例1和例2中的方程  $ax = b$  有  $b \neq 0$  的限定，例3的等差数列问题中有  $a_1 \neq 0$  的限定，因此如果一个数学问题不能满足这些要求，那么假位法就可能失效。

比如若我们将莫斯科纸草书问题40题目改为：将30个面包分配给6个人(使成等差数列)，且头三人所得是后三人的1/4，由于此时答案为：0, 2, 4, 6, 8, 10，故不能按照古埃及人的做法先假设第一个人的面包数为1，否则便会出现  $4(1+1+d+1+2d)=(1+3d)+(1+4d)+(1+5d)$  即  $12=3$  的矛盾。

由此看来古埃及人所使用的假位法确实有一定的“局限性”(当然补救也很简单——比如例3中如果得到矛盾不妨设最后一个人的面包数为1即可——因为一个不全为零的等差数列中最多只能有一项为0)。

无独有偶，欧几里得也出现过类似的“局限”，在其名著《几何原本》第9卷中，欧几里得本质上给出了如何得到等比数列求和公式的方法；英国科学史家希思 (T. L.Heath, 1861-1940) 在《几何原本》英译本的注释中给出了具体推导过程(按照今天的习惯符号略作调整)<sup>[11]</sup>：

设  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  为等比数列，公比  $q \neq 1$ ，则  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_2}{a_1}$ ，由分比性质知

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \dots = \frac{a_2 - a_1}{a_1}, \text{再由合比性质得 } \frac{a_{n+1} - a_1}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1} = \frac{a_2 - a_1}{a_1},$$

$$\text{即 } \frac{a_1 q^n - a_1}{S_n} = \frac{a_1 q - a_1}{a_1} \text{ 从而得到 } S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

与当前高中教材中普遍采用的“错位相减法”相比，《几何原本》中的方法同样巧妙但形

式更简洁；当然上述推导过程中也有小小的漏洞，即当  $q = -1$  时存在分母  $S_n = 0$  没有意义的情况(补救同样也不难——可以先单独讨论  $q = -1$  的情况)。

### 2.3 历史的分析

我们在上述讨论时使用加引号“局限”二字，实际上是要说明：这里所谓的局限都是相对的——我们现在可以轻松地使用0并游刃有余地对它进行运算(而且认识到0不能做除数)，然而对于生活在遥远的古代的人们，零的概念和运算远在考虑范围之内；要知道，即使在古希腊最重要的算术著作尼可麦丘（约公元1世纪）的《算术引论》中也没有将零纳入数的系统之中，只是在一处偶然提到“一无所有加上一无所有还是一无所有”<sup>[12]</sup>；而具体到对零作除数的认识，哪怕是1000-1500年间印度最突出的数学家婆什迦罗（Bhaskara, 1114-1185）也仍不十分清楚，欧洲到19世纪初还有一些数学家对零的运算有错误的认识<sup>[13]</sup>。

所以，古埃及人在其纸草书中忽略了零的问题，“具有一定的历史必然性”，“情有可原”。

## 3 小结

读史以明智，温故以知新；学海无涯，学无止境。

### 参考文献

- [1][4][12][13]梁宗巨, 2001.世界数学通史(上册).沈阳: 辽宁教育出版社.134-161
- [2][5]李文林, 1998. 数学珍宝——历史文献精选.北京:科学出版社.3-4,7,11-12
- [3]李文林, 2002.数学史概论(第二版).北京:高等教育出版社.18
- [8]M·Cantor, 1922.Vorlesungen uber der Mathematik, Leipzig, 78. 此处转引自梁宗巨, 2001.世界数学通史(上册).沈阳: 辽宁教育出版社.160
- [9]A.B.Chace, 1979.The Rhind Mathematical Papyrus, The National Council of Teachers of Mathematics, 12. 此处转引自梁宗巨, 2001.世界数学通史(上册).沈阳: 辽宁教育出版社.160
- [11]T.L.Heath,1908.*The Thirteen Books of Euclid's Elements* (VOLUME II), translated from the text of Heiberg. Cambridge :Cambridge University Press.421

## 对数的历史及其教学

谢正敏 编译

(华东师范大学数学系, 上海, 200241)

### 1 引言

我们之所以要学习对数,最初是因为使用对数可以迅速且简便地计算复杂的数值问题,于是我们学习使用对数表。由于计算器和电脑简化了大量的计算问题,这个理由也就不那么充分了。因此,现实使得对数教学的目标和内容发生改变,弱化了对数理论的计算部分。几个世纪以来作为主要计算的工具的对数表已经成为历史。正如巴黎大学科学史教授 Guedj 所说:“数学正渐渐地老去”。

由于对数概念的函数意义备受关注,指数和对数函数性质一直是重要的课题,它们能够描述很多自然的和社会的现象,比如放射性衰变,人口发展以及接触性传染病的扩散等等。因此,在过去的 25 年里教科书都是介绍欧拉的名作《代数学》中的对数定义(用今天的语言来表述):“如果  $x > 0$ , 实数  $y$  满足  $a^y = x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ), 则  $y$  是以  $a$  为底的  $x$  的对数,表示为  $y = \log_a x$ ”。现在的教科书中经常使用上面的定义,但更强调对数的函数形式:“对数函数是同底的指数函数的反函数,即若  $f(x) = a^x$ , 则  $f^{-1}(x) = \log_a x$ ”。

然而,在我们给 11 年级学生进行有关内容的教学时,一直都遇到下面诸多困难:

- 当  $x$  是无理数时,我们如何解释  $a^x$ , 从而使得相应的对数的定义是合理的?
- 我们如何证明指数法则  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ? 这条法则对于证明对数的性质至关重要。
- 我们如何证明对于每一个  $y > 0$ , 都存在一个实数  $x$  使得  $a^x = y$ ?
- 当  $f(x) = a^x$  取名为指数函数看起来还比较合理时,对数(logarithm)这一词又是从

---

<sup>①</sup> Evangelos N.Panagiotou, 2011.Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Science & Education*, 20(1):1-35.有删节。

何而来呢？

- 我们如何理解  $e = 2.7182\dots$  是数列  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  的极限？
- 为什么以  $e$  为底的对数成为自然对数？与以其他数为底的对数比较时，自然对数为什么会特别有用？
- 既然对数教学的最初目的(简化计算)不再适用，为什么现在我们还要继续教它呢？我们希望学生理解对数的重要性，因此我们遵循了它的历史来组织了我们的教学。

## 2 按对数发现的历史足迹设计教学

### 2.1 首次尝试将乘法转变成加法

也许学生们不能体会到在过去人们解决四则运算的问题是多么得困难，因为我们现在可以依靠与之相配的数系以及算法。学生们还会觉得多位数的乘除运算及开平方、立方是多么得费功夫和百无聊赖，因为进行这些运算既需要很多时间，还容易出错。如果能使用计算器，就没有这些问题，但这事实上也就削弱了我们对运算问题的真正理解。

能够让学生很好地理解问题并且不贬低古人所获得的成就的办法，就是在给出算法之前，让学生在课堂活动中亲历古埃及、巴比伦和希腊的计算方法，并且让学生体验计算很大的数。为了构建有关活动从而让学生对古代的数系有所体验，我们参考了 Kline、Struik、Van der Waerden 以及 Resnikoff 和 Wells 的有关著作。

印度阿拉伯的位置计数系简化了日常中的计算，但却满足不了科学计算。天文学中对精确预测需求的日益增加使计算变得既困难又费时。在 16 世纪末和 17 世纪初，人们在大数乘大数的运算中产生了很大困难，于是发明了很多技术来改进运算，这些技术背后的思想就是将乘法转变为加法。

于是我们提出一个基于“百叶窗方法”或者“纳皮尔筹”以及“积化和差”(prosthaphaeresis)的活动。之后我们提出学生：你能用这些方法计算幂吗？能计算除法吗？能计算平方根吗？学生的回答告诉我们问题还没有得到解决。

### 2.2 通过比较算术级数和几何级数将乘法转变为加法

对数的发现源于算术和代数之间的比较，这一点不断吸引着数学家的注意力。关于这两

个级数之间的关系, 法国数学家 Nicolas Chuquet 在其著作 *Triparty en la Science des nombres* 中给出了具体的例子。Chuquet 指出几何级数中两项之间的乘法可以变成算术级数中各自的序号 (“自然顺序”中的数字) 的和。比如  $2 \times 4 = 8$  对应于  $1+2=3$ 。Chuquet 将这种对应性描述为: 2 与 4 相乘得到 8, 1 与 2 相加得到 3, 所以  $2^1 \times 4^2$  得到  $8^3$ 。你将序号为 1 的数与序号为 2 的数相乘就得到序号为 3 的数,...,你将序号为 7 的数 128 与序号为 9 的数 512 相乘, 就会得到序号为 16 的数 65536(表一)。

表 1 Chuquet 的对应表

序号 (Denominations)	数 (Numbers)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576

Chuquet 的这篇文章可以帮助我们理解简化乘法的思想, 但我们注意到 Chuquet 对其应用并不感兴趣。事实上, 他的目的是想定义单项式的乘法(除法)。注意到前面的文章中给出的如  $8^3$  中的 3 并不是 8 的幂而只是 8 在那个位置上的序号——用现在的符号表示就是  $8x^3$ 。两个单项式的乘积可以通过“数”(多项式的系数)相乘, 然后将他们所对应的序号相加而得到, 即  $2x^1 \times 4x^2 = (2 \times 4)x^{(1+2)}$ , Chuquet 用这一法则来求解某些形式的方程。

卓越的德国数学家迈克尔·斯蒂弗尔(M. Stifel, 1487-1567)给出了一个著名的简化基本运

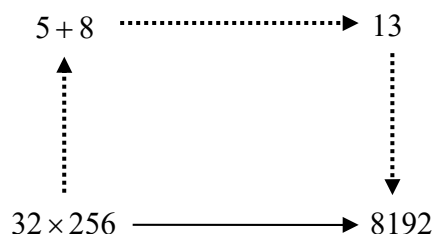
算的方法。他在著作《整数数算术》(*Arithmetica Integra*)(1544年)中采用了与 Chuquet 一样的级数,并十分清楚地阐述了算术级数中的加法与几何级数中的乘法相对应,减法与除法相对应,乘法用来运算幂,除法用来计算开根(见表 2)。

表 2 Stifel 的对应表

Exponent	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
Number	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

Stifel 拓展了这一对应性,指出可以用同样的方式将所有的数放在表格中,并阐述到:几何级数服务于算术级数。64 除以  $\frac{1}{8}$  得 512, 对应着 6 减去 -3 等于 9, 即  $6 - (-3) = 9$  而 9 则是 512 的指数。Stifel 像 Chuquet 一样,使用级数之间的对应来计算单项式以及解代数方程。他的创新之处是使用了 A.M.A.S.I.A.S 规则,它是解任意二次方程的运算法则。

将表 2 (延伸到右边) 给学生的时侯,我们将提问:两行之间是否存在什么关系?如果我们以 2 为底作为基准,那么要得到一个已知数,2 的指数应该增加多少?后一个问题较难回答。针对这种情况,我们应该引导学生观察几何级数中两项的乘积( $32 \times 256 = 8192$ )是通过算术级数中相应项之和( $5 + 8 = 13$ )准确得到的。也就是将乘法转化为加法:



除法转化成减法:  $4096 : 128 = 32 \cdots \cdots \rightarrow 12 - 7 = 5$

幂的增加转化为指数的乘法:  $16^3 = 4096 \cdots \cdots \rightarrow 4 \cdot 3 = 12$

开方运算转变为指数除法:  $\sqrt[4]{4096} = 8 \cdots \cdots \rightarrow 12 : 4 = 3$

继续教学之前,我们将要求学生利用表 2 来计算一些问题。

在 Stifel 的著作一年之后意大利学者卡丹(G.Cardano, 1501-1576)于 1545 年出版了一本很重要的著作《大法》(*Ars Magna*),书中包含了现代代数的迹象。然而在那个时期,一直到 17 世纪初,都不存在被广泛接受的表示幂的代数符号,于是在数学历史上出现了一个悖论:对数的发现先于幂。尽管 Stifel 没有用现代符号写出  $2^m \cdot 2^n = 2^{m+n}$  的关系式,但是他将算术级数项称作与之对应的几何级数项的“指数”(exponents),之后把算术级数项称之为“红色的数”(red numbers),之所以这样命名是因为这些项在表中是用红墨水标记的。同样的,纳皮尔

在使用“logarithms”一词之前，也是将算术级数的项称之为“人造数”(artificial numbers)。而“对数”(logarithms)一词则准确的表示“测量比例的数”，当然，表 2 中对应 64 的数字 6 表示了连续比中需要“多少个比例”可得到 64 (在纳皮尔时代，几何级数被定义为在连续比例中的一列数)：

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = \dots$$

今天我们知道算术级数项(0,1,2,...)是几何级数项(1,2,4,...)以 2 为底的对数。在此我们将向学生介绍现代符号，写出  $\log_2 1 = 0, \log_2 2 = 1, \log_2 64 = 6, \log_2 256 = 8, \dots$  以及性质

$$(1) \log_2(a, b) = \log_2 a + \log_2 b, (2) \log_2(a/b) = \log_2 a - \log_2 b, (3) \log_2(a^n) = n \log_2 a。$$

之后我们提问：由已知的表我们能否处理任何两个数相乘的问题？答案是否定的；如果学生做出肯定回答，那么我们会要求学生依据表格计算  $27 \times 243$ 。因此就能解释乘法到加法的转化只适用于一些特殊的数。我们还可以问学生“底为 3”时是否有同样的性质，并进一步检验是否适用于每一个几何级数。

若要将该性质推广，我们开始考虑非负整数的算术级数以及从 1 开始的、公比为  $r > 1$  的任意几何级数：

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ 1 & r^1 & r^2 & r^3 & r^4 & r^5 & r^6 & r^7 & \dots \end{array}$$

我们再次看到几何级数中的乘法对应于算术级数中的加法。算术级数项是与之对应的几何级数项的底数为  $r$  的对数。我们能处理任何两个数相乘吗？是的，假设我们有无限个几何级数，我们就能很幸运的看到这两个数会出现在某个几何级数中。

如果我们有足够“稠密”的几何级数，那么这种方法将具有很大的价值，因为对于需要计算的任意两个数我们都可以在几何级数中找到它们。增加几何级数  $1, r, r^2, \dots$  稠密性的办法就是插入，比如在 1 和  $r$  之间插入 500 项，同时在算术级数 0 和 1 之间插入相应的 500 项。然后几何级数中插入的  $n$  项对应了算术级数中插入的  $n$  项。若果我们将插入 500 项变为插入 5000 项，那么我们就可能会找到更多数的对数。

### 2.3 较稠密些的几何级数

由于纳皮尔想简化正弦的乘除运算，纳皮尔起初只是研究正弦的对数。那个年代角  $t$  的正弦不是用比例定义的，而是定义为  $2t$  角所对弦长的一半。图 1 中角  $t$  的正弦为  $AD$  之长，显然这个长度取决于圆的半径，计算的精确性取决于半径的选择，如果半径很大，三角函数值

可以都是整数并且可以达到人们所希望的那样准确。因为纳皮尔所处理的正弦表是有 7 位数的数值，于是他选取半径的长为  $10^7$ 。他给出的简化计算的正弦值都是与  $10^7 \sin t$  相近的整数—— $t$  的取值范围是 0 度到 90 度，因为当时使用的量角仪器无法达到更高的精度，所以只能精确到分。由  $10^7 \sin 90^\circ = 10^7$  以及  $10^7 \sin 1' = 2909$  我们知道纳皮尔计算的正弦是介于

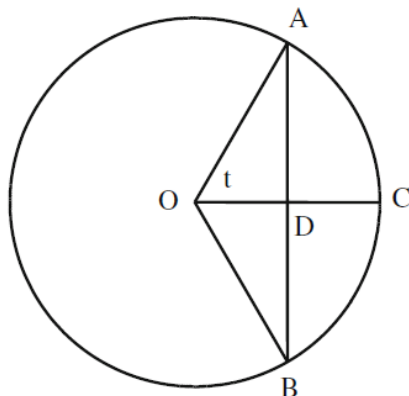


图 1

2,909 到 10,000,000 之间的整数。

由此纳皮尔开始比较算术级数和几何级数。他研究首项  $a_0 = 10$ ，公比  $r = 1 - 10^{-7} = 0.9999999$  的几何级数。选择接近 1 的公比是一个非常天才的想法，因为它可以使级数非常稠密，从而使得相邻项间的差距很小。接着纳皮尔开始比较几何级数  $a_n = 10^7(1 - 10^{-7})^n$  以及算术级数项  $b_n = n$  (表 3)，并首次把  $b_n$  称为  $a_n$  的对数。

表 3 纳皮尔最初使用的级数对应表

$A.P.(b_n)$	0	1	2	3	...	$n$	...
$G.P.(a_n)$	$10^7$	$10^7(1-10^{-7})$	$10^7(1-10^{-7})^2$	$10^7(1-10^{-7})^3$	...	$10^7(1-10^{-7})^n$	...
		9999999	9999998	9999997			

纳皮尔本应计算  $a_n$  中的 81,000,000 多项后才能得到 2,909，然后通过内插法给出他们之间的所有正弦的对数，这意味着相当大的计算量。但纳皮尔发现算到  $10^7 \sin 30^\circ =$

5,000,000 就可以了。因为如果  $b < \frac{10^7}{2}$ ，那么我们就可以找到一个自然数  $m$ ，使得

$a = b \cdot 2^m \geq \frac{10^7}{2}$ ，然后就可以根据对数的性质从 2 和  $a$  的对数中得到  $b$  的对数。通过这种



方法，纳皮尔大概需要计算 7,000,000 项，而不是 81,425,000 项！

这样一来计算量确实降低了很多，但工作量仍很巨大。随后纳皮尔有了新的发现，他只计算几何级数的前 100 项，接着不断地跳过 100 项，并使用首项  $a_0 = 10^7$ ，公比  $r = 1 - 10^{-5}$  的另外一个几何级数。新数列的第二项是 9,999,900，接近第一个数列的第 100 项。于是表单在第 100 项之后就变得稀疏，此时要得到 5,000,000 还是需要至少 69,000 步。但纳皮尔仅仅计算了新级数的 50 项，然后又跳过 50 项，同样地使用以首项是 69，公比是  $1 - 5 \times 10^{-4}$  的几何级数以及首项是 21，公比为  $1 - 10^{-2}$ ，并且一直保持新的几何级数“连接着”上一个(第一个级数的末项是第二个级数的第二项，依次类推)。这种方法只需经过 1,600 步就得到 5,000,000，而不是 81,450,000！

此时纳皮尔必须计算这 1,600 项(除了开始的 100 项)的对数。Edwards 在自己的著作中(1979 年)使用线性插值重新画出了这 1,600 项的对数表。然而，历史上纳皮尔认识到了对数函数的非线性性质，于是引入了一种新的内插法。对于非线性插值 Edwards 写到：“纳皮尔想要的是对数函数的连续定义，而不是基于几何级数的离散定义”。这也许回答了 Coolidge 的疑惑：“很难解释为什么纳皮尔要用我下面即将介绍的笨拙方式来建立对数...”。

纳皮尔对对数定义的好奇是基于一个几何模型，在这个模型中他设想两个联系的点沿着两条直线运动。第一个点  $P$  沿着固定长度为  $10^7$  的  $AB$  以  $10^7$  的初速度做减速运动(在起点  $A$  点处速度为  $10^7$ ，到达  $B$  点时速度为 0)，且瞬时速度大小等于  $PB$  之长。第二个点  $Q$  沿着一条射线  $OL$  的起点  $O$  开始以  $10^7$  的速度大小作匀速运动(图 2)。

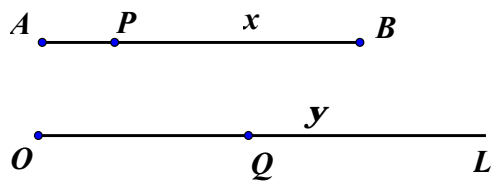


图 2 纳皮尔对数定义： $y = N \log x$

当  $t = 0$  时，使两个点分别从  $A, O$  开始运动。纳皮尔证明了  $P$  的运动是“几何级数”的， $Q$  的运动是“算术级数”的。

若在某个  $t$  时刻，点  $P$  距离  $B$  点为  $x$ ，点  $Q$  距离  $O$  点为  $y$ ，则纳皮尔定义  $OQ = y$  是  $PB = x$  的对数。我们将纳皮尔对数记为  $y = N \log x$ ，以区别于我们今天的标准对数。

纳皮尔研究了与之对应的 1,600 个点, 计算了这些点的对数, 然后再计算介于 0 度到 90 度的角的正弦的对数(借助精细的插值图表使得度数间隔为一分)。值得指出的是,  $a_n = 10^7(1 - 10^{-7})^n$  的纳皮尔对数只是近似等于  $n$ , 如  $N \log(a_1) = 1.00000005$ ,  $N \log(a_{100}) = 100.0000005$ 。

在课堂教学中, 我们不应该给出这么多的细节, 因为那样可能会误导学生, 导致他们不理解我们的目的是强调算术级数和稠密几何级数项之间的对应。我们可以提出这样一个问题: 已知几何级数项  $a_0, a_0r, a_0r^2, \dots$  我们要求其中的每一项接近它的相邻项。我们该怎样得到呢? 这个问题取决于什么样的  $a_0$ ? 以及什么样的  $r$ ? 通过一些尝试我告诉学生纳皮尔考虑的是首项  $a_0 = 10^7$ , 公比  $r = 1 - 10^{-7} = 0.9999999$  的几何级数。 $r$  的选择证明以后, 我们还需要简略解释首项是如何选择出来的, 然后从开始的图表中就能很准确地说明几何级数

$a_n = 10^7(1 - \frac{1}{10^7})^n$  与算术级数  $b_n = n$  (表 3) 之间的对应, 即

$$n = N \log a_n \Leftrightarrow a_n = 10^7(1 - 10^{-7})^n。$$

这里我们可以问这样一个问题: 标准的对数性质  $\log AB = \log A + \log B$  在纳皮尔对数系统中成立吗? 你能否估计  $N \log 1$  的值? 它是否等于 0? 纳皮尔对数有“底”的概念吗? 显然,  $N \log 1 \neq 0$ , 于是纳皮尔对数不满足性质  $N \log AB = N \log A + N \log B$ , 它满足的是  $N \log AB = N \log A + N \log B - N \log 1$ 。

纳皮尔意识到这种对数计算并不方便, 在他晚年时他建议英国数学家 Henry Briggs(1561-1631) 教授使用以下方法: 把 1 作为几何级数项, 并对应于算术级数中的 0, 这样就会简化很多。这一过程以及后来采用 10 为底的对数都是 Briggs 完成的。Briggs 出版的 *Arithmetica Logarithmica* (1642) 一书中给出了以 10 为底的前 20 个介于 90,000 和 100,000 之间的、有 14 位小数的自然数的对数表。这本书由荷兰售书员兼编辑 Adriaen Vlacq 将拉丁文翻译成了法文, 他用 10 个有效小数位数填补了 20,000 到 90,000 之间的空缺, 并出版了 *Arithmetique logarithmique*。这些对数表成为了接下来的 3 个世纪里简化计算的基本工具。

回到纳皮尔对数系统(表 3)中, 我们要指出它的另外一个关键性的不足: 现代定义下的“底”的概念是不适用的。如果用  $10^7$  去除表 3 中的每一项, 那么修正后的纳皮尔对数系统就

会出现底(表 4):  $a = (1 - 10^{-7})^{10^7} = 0.367879441$ , 这与  $\frac{1}{e} = 0.367879441\dots$  中的前 8 位数字一致。

表 4 修正后的纳皮尔对数

A.P.	0	$10^{-7} \cdot 1$	$10^{-7} \cdot 2$	...	$10^{-7} \cdot n$	...
G.P.	$(1 - 10^{-7})^0$	$(1 - 10^{-7})^1$	$(1 - 10^{-7})^2$	...	$(1 - 10^{-7})^n$	...
	1	0.9999999	0.9999998			

在这个修改后的对数体系中我们可以比较近似的、用现代符号系统那样记:

$$\log_{\frac{1}{e}} \left( 1 - \frac{1}{10^7} \right)^n = 10^{-7} n \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{e}} \frac{a_n}{10^7} = \frac{b_n}{10^7} \quad (1)$$

但在纳皮尔系统(表 3)中, 我们有  $N \log a_n = b_n$ , 所以方程(1)变为

$$N \log a_n = b_n = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \frac{a_n}{10^7} \Leftrightarrow N \log a_n = b_n = -10^7 \ln \frac{a_n}{10^7} \quad (2)$$

若令  $x = \frac{a_n}{10^7}, y = \frac{b_n}{10^7}$ , 则方程(2)变为

$$y = -\ln x \quad (3)$$

因此, 如果我们用  $10^7$  去除表 3 中几何级数和算术级数中的每一项, 那么纳皮尔的对数就近似于自然对数的相反数, 所以把自然对数称作“纳皮尔对数”是不准确的。这可以作为讨论换底公式之后的一个有效活动。

#### 2.4 最稠密的“几何级数”

纳皮尔、布里格斯(Briggs)以及他们之后的研究者所给出的对数表变革了数字计算技术。通过不断取平方根和插入几何平均数就可使得几何级数稠密到任何需要的程度, 所有已知的对数表都是利用这一基本性质来完成的。当然, 人们也从对数的计算中寻找到了理论价值, 1647 年 Belgian Jesuit Gregory of St. Vincent 发表的文章中揭示了自然对数函数与双曲线  $xy = 1$  与  $x$  轴所围成的曲边梯形的面积之间的奇妙关系, 这一发现使得对数在微积分发展史中占有一席之地。

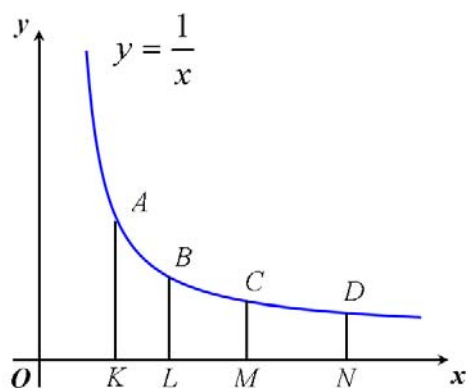


图 3

Gregory 在数学史上第一次给出了双曲线与对数之间的联系：令  $OX$  和  $OY$  是双曲线  $ABD$  的两条渐近线， $OK, OL, OM, ON$  成连续比，则曲边图形  $ABLK, BSML, CDN M$  的面积相同(图 3)。

正如前文所述，成连续比指的是  $OK, OL, OM, ON$  的长构成几何级数。但是 Gregory 没有在任何地方提到过对数，事实证明 Gregory 另有目的，也许这是这位比利时教士研究双曲线求积的第一步。

从理论上讲，双曲线的面积模型使我们寻找一个越来越稠密的几何级数这一过程有望终止，要得到最稠密的几何级数我们就必须抛弃代数范畴的尝试，所谓最稠密的几何级数“是”连续体，必须在连续体中定义对数，有必要规定  $\log 1 = 0$ ，这一点决定了所测的面积是从哪个地方开始的，并且保证了性质  $\log AB = \log A + \log B$  成立。但是，如果在这个最稠密的几何级数中的对数体系中存在底的话，那么底是什么？对数的底是由哪条双曲线决定的，

当然我们会选择  $y = \frac{1}{x}$ ，因为它的简洁性毋庸置疑。我们知道通过不同的双曲线可以构建不

同的对数系统，双曲线  $y = \frac{1}{(\ln K)x}$  对应底是  $K$  的对数，这可以作为另一活动内容。现代教

科书中所定义的  $\log|x| = \int_1^x \frac{1}{t} dt$  就是基于上面的分析得到的。

数学家们花了将近 70 年的时间来研究对数和指数函数这两个概念之间的紧密联系。在 17 世纪末人们意识到对数可以通过指数来定义。根据美国数学史家卡约黎(F·Cajori, 1859-1930)的观点，这种思想最早属于 William Jones(1675-1749)。强调这一新观点的最有影响力的应该是欧拉，他在《无穷分析引论》(1748)中介绍说以  $a$  为底  $x$  的对数就是满足  $a^y = x$  的实数  $y$ 。此书第 7 章中欧拉将指数和对数函数展为无限级数。但欧拉没有用级数这

个数学术语,而且也没有详细说明所有的数包含在级数项中,在这里二项式公式起了关键作用,它搭建了从离散到连续的桥梁,而且计算是独立于任何几何级数的。

第3部分略。

## 4 结论

本文着重探究如何将对数的历史改编为适于11年级学生学习的材料。毫无疑问,将指数函数的反函数定义为对数函数这种抽象的定义对枯燥的分析学来讲一定的实用性,我们可以很简便地从指数函数的性质得到对数函数的性质。但是,这容易使学生产生数学是已经创造好了的印象。通过重温历史,学生就会认识到对数的重要性。按照历史发展的基本轨迹来进行对数的教学有以下几个方面的优势:

(a<sub>1</sub>) 有效诠释了自然对数中“自然”的含义,以及和 $e$ 的关系

(a<sub>2</sub>) 有效诠释了“对数”一词的起源。此外,把三角看成长度而不是比例,这也较好地解释了 sine, cosine, tangent 和 secant 这些术语。

(a<sub>3</sub>) 利用几何模型证明了对数函数的有关重要性质。

(a<sub>4</sub>) 揭示了三角公式在将乘法转变为加法过程中的重要性,它表明三角公式比平时解答常规练习时的用处要有意得多,因为它能够加强学生对三角学的理解,提高估算能力。

(a<sub>5</sub>) 将学习的新知识与函数  $y = \frac{1}{x}$  的图像联系起来。

(a<sub>6</sub>) 使圆锥曲线的学习变得更有价值。

(a<sub>7</sub>) 为以后学习积分学打下一定的基础。

此外,本节内容还可以突显数学的一些特性从而帮助学生更好地理解数学。

(b<sub>1</sub>) 通过强调一个新概念产生的必要性以及在解决问题中构建知识的方法,让学生意识到数学并不是只有结论的知识系统。正如 Bachelard 所言:所有的知识都是对问题的回答,如果没有问题,也就不可能有知识。

(b<sub>2</sub>) 揭示了数学形式的演化历程。

在学习对数时,学生可以欣赏到一个好的符号是如何推进数学的发展的。中学代数学习中,在理解和使用数学符号时产生的困难往往成为数学学习的障碍,因此揭示出一套良好的符号体系的优点(尤其是从 Chuquet 到 18 世纪中期对数的表达形式)仍然是数学教学重要目的之一。

(b<sub>3</sub>) 揭示了数学内容的演化历程。这样学生就能体会到数学的本质属性、发展过程以及

活力。

对数概念是数学中能够改变自己概念角色的极好例子。一开始对数是被用于简化数值计算，但这种作用后来慢慢被削弱，而更多的是应用对数函数来解决问题。比较现今数学与古老的技术可以让我们知道现代数学的价值，并将这一价值传达给学生。我们可以准备一个工作单让学生使用 3 种方法计算很大的两个数的乘积——方法可以是古代的 *prosthaphaeresis*，或是利用对数、计算器。接着给出问题：哪种方法更简单？用 *prosthaphaeresis* 计算乘积需要多少步骤？对数的情况如何？然后再组织一个课题，要求给出 17 世纪到 1942 年计算工具的演变过程；如：纳皮尔筹，计算尺——帕斯卡或莱布尼兹的工具。

(b<sub>4</sub>) 强调数学不同领域知识之间的融合。对数的历史发展融合了数学多个领域知识(算术、代数、三角、圆锥曲线和微积分)的思想。这一点可以帮助学生认识到数学并不是由互相独立、没有关联的部分组成的。

(b<sub>5</sub>) 强调数学的发展是受社会文化环境影响的、与其他学科相互关联的人类活动。

数学知识是相应于社会环境而不断演变的，当环境改变时，数学本性也改变，对数的出现是满足物质和智力的需求。应该组织恰当的课题来展示对数的发展所处的文化和科学背景，首先应该思考这样的问题：谁需要使用大数？课题应该包括从数学角度思考“15 世纪航海问题”、“决定最有效航海路径”等问题。对数的历史发展还提供了对意识形态和社会结构等方面思考的价值取向，我们可以将它作为家庭作业：“为什么 14 世纪出现的商品资本主义使意大利掀起了数学文艺复兴”，“为什么哥伦布航海用的是西班牙国旗而不是葡萄牙的”？

(b<sub>6</sub>) 有利于在课堂中发展多元文化，加强科学世界观的培养。

当前课程中的很多问题在许多年前就有人思考过，区别是采用不同的教学方法。例如，埃及的数系、巴比伦的数系以及我们现在的数系之间的比较可以围绕下面来设计活动：埃及人是如何计算乘法的？巴比伦的情况呢？我们现在的基本运算是怎么演变的？学生如果能欣赏到符号表征所起的重要角色，将我们自己的数系与其他的数系做对比，就能够很好的了解其特征。

(b<sub>7</sub>) 促进学生对数学产生积极的情感。

态度处于教育的核心地位。从本文对数历史的发展中我们知道历史在很多方面会影响学生对数学的态度：

(1) 展示学生做数学的情感观，增加学习的兴趣。如果在教学中我们只是给学生严谨的数学，就会让他们觉得数学是枯燥的。历史可以形成一个探索与研究的课堂氛围，而不仅是传递信息。重构被认为是学习数学最有效的方式，有效教学可能对个人参与、集中关注、感

受成功、发现真正喜悦等心理观产生影响。

(2) 帮助学生理解数学的重要性、有用性，激励他们学习数学。这样学生就能知道问题、概念和证明的来源，以及思想怎样被感知、定义和发展为有用的定理，知道它们是被发现来回答人类活动的具体问题。索然无味的会使学生觉得数学就是黑板上一堆不可思议的规则和公式，于是学生会在真正理解数学时产生心理障碍，在数学的学习和使用中产生焦虑。

(3) 增强学生自信心和毅力，减少焦虑。要让学生知道数学不是仅为天才设计的，数学结果是经过几个世纪的思考发展得到的，在得到最终结果的过程中一定有疑惑、错误和失败。这样学生就能理解不仅仅是他们自己有问题，也就不会因为误解和错误感到沮丧。

# HPM 视角下的导数概念教学

王芳<sup>1,2</sup> 汪晓勤<sup>2</sup>

(1. 浙江省萧山中学, 杭州, 311201; 2. 华东师范大学数学系, 上海, 200241)

如何将数学史融入数学教学已经日益受到一线教育工作者的关注, 许多一线教师都尝试着将数学史融入教学设计, 但已有的 HPM 下的教学设计中, 数学史更多的是教学的序幕, 当教学内容正式登场, 数学史就悄然谢幕! 数学史能否和教学内容有机整合, 成为教学内容不可分割的一部分, 这一直是我们思考与探索的问题。本文给出的导数概念教学设计便是将数学史与数学教学内容有机整合的一次尝试。通过实践, 我们试图回答以下两个问题: 如何将数学史与数学教学内容有机整合, 整合过程中需要注意哪些方面? 整合数学史的数学教学对学生的认知会产生怎样的影响?

## 1 融入数学史的导数概念教学设计

### 1.1 教学设计背景——相关数学史知识

微积分的创立, 主要是为了解决 17 世纪的四类科学问题: 第一类是已知物体移动的距离表示为时间的函数的公式, 求物体在任意时刻的速度和加速度; 第二类是求曲线的切线; 第三类是求函数的最大值与最小值; 第四类问题是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力。(克莱因, 2002)

伽利略是研究第一类问题的代表人物, 他认为当上抛物体时, 物体经过无限多级的缓慢, 最后达到静止, 物体的下落与上抛完全一样, 只是顺序颠倒而已。(波耶, 1977)

古希腊数学家阿基米德在他的《论螺线》一书中给出了切线的静态定义——切线是与曲线仅有一点“接触”且又不通过曲线的直线, 并且借助于生成螺线的两个分运动所确定的速度平行四边形, 发现了螺线的切线。这种确定切线的方法同样为 17 世纪的数学家托里拆利和罗伯瓦尔所采用。(爱德华, 1987)17 世纪科学家之所以会去研究曲线的切线, 主要是为了解决三类问题: 光的反射问题、运动方向问题、曲线夹角问题。为了解决这些问题, 数学家们研究并发现了切线的一些构造法, 并且逐渐形成了切线的动态定义——割线的极限位置。



求炮弹的最佳发射角度等最值问题也是 17 世纪科学家研究的一类问题，费马是其中的代表人物。费马运用无穷小思想处理了极值问题和切线问题。(克莱因, 2002; 波耶, 1977)

求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积等问题可上溯到古希腊，古希腊的双归谬法、括约法便是处理此类问题的经典之作。牛顿以曲线围成的面积为载体，得到了微积分基本定理，沟通了微分与积分，标志着微积分的诞生。(克莱因, 2002; 波耶, 1977; 爱德华, 1987)

## 1.2 教学设计意图

导数概念三课时的教学设计浓缩了微积分诞生的历史，三课时中涉及的八个具体案例均来源于导致微积分诞生的四大类问题，见图 1。

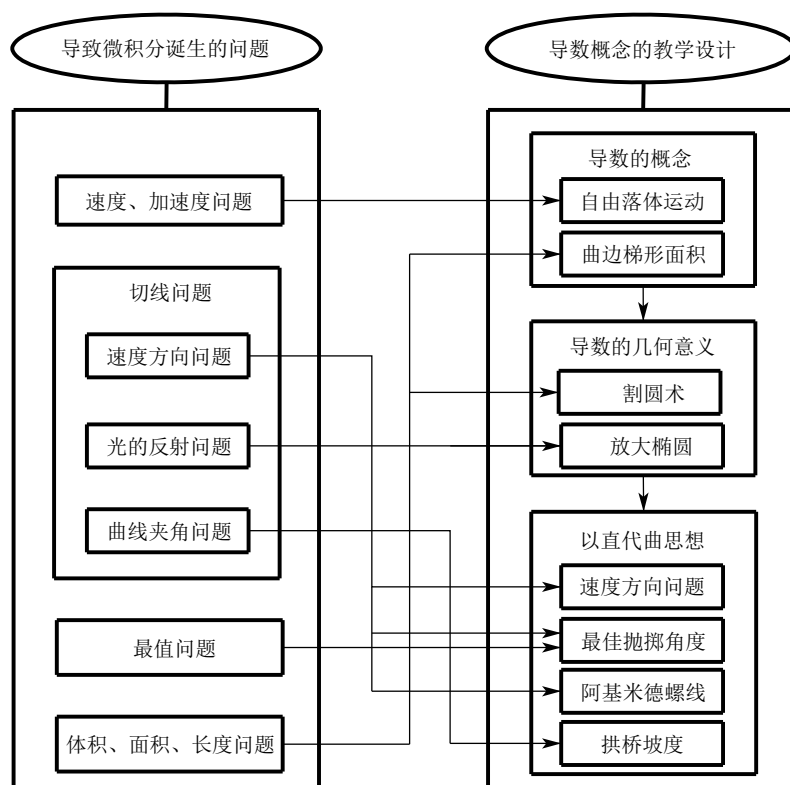


图 1 “导数的概念”教学内容与相关数学史知识

**自由落体运动：**重构了历史上导致微积分诞生的第一类问题，其教学目的是引导学生建构瞬时速度的概念，并在瞬时速度概念与导数概念间建立关联。

**曲边梯形面积：**已知函数求曲边梯形的面积与已知曲边梯形求函数，牛顿用这一数学模型沟通了微分与积分，标志着微积分的诞生。将这一数学史著名案例进行重构，目的之一是帮助学生理解、深化导数概念；目的之二是让学生体会导致微积分诞生的重要历史事件，感受微积分所蕴含的极限思想，不求甚解，但为今后的学习埋下伏笔。

割圆术：首先，利用“割圆术”，可在切线的静态定义与动态定义之间架设一座桥梁，引导学生完成两种定义之间的过渡；其次，“割圆术”中蕴含着“以直代曲”的微积分思想，可以使学生更深刻地认识“以直代曲”的数学思想；再次，“割圆术”本身的生动性以及由几何画板实现“割圆术”所带来的视觉冲击，有助于激发学生学习的兴趣，促使学生去思考、探索。

放大椭圆：重构了 17 世纪数学家研究的光的反射问题，将椭圆放大一百倍，曲线段的“直线化”、曲线段与切线段的重合，就这样不可思议而又理所当然地呈现在了学生的面前。借助于信息技术，让“以直代曲”这一深刻的微积分思想自然而然地流入学生的意识深处。

速度方向问题：源于 17 世纪导致微积分诞生的切线问题中的一类，其教学目的是一是进一步深化以直代曲思想；二是进一步感受学习导数的意义。

最佳抛掷角度问题：问题的设计结合了切线问题与最值问题，同样属于数学史的重构，但更贴近生活实际，让学生了解到掌握速度方向的意义，使他们可以更真切地感受到数学知识的确是来源于生活又服务于生活的。

阿基米德螺线的切线问题：同样源于切线问题中与速度方向有关的类型，属于数学史的重构，这一问题的引入是为了让学生更全面地了解切线方向与速度方向间的联系，能辩证地看待问题——切线方向能确定速度方向，速度方向同样也能确定切线方向。

拱桥坡度问题：源于 17 世纪的曲线夹角问题，设计这一问题的意义，不仅展示切线与导数在生活各个领域中的运用，更为主要的是为今后利用导函数分析原函数性质的教学埋下伏笔。

### 1.3 教学设计内容

导数概念的三课时(导数的概念、导数的几何意义、以直代曲的数学思想)所包含的教学环节如图 2 所示。

#### 第一课时：导数的概念

##### 第一环节：引入

介绍微积分的历史地位及导致微积分诞生的四类问题。

##### 第二环节：情境创设

1589 年，年轻的伽利略在著名的比萨斜塔上做了轰动一时的自由落体实验。自由落体问题引发了大量科学家对于速度问题的思考。在古代，对于速度的思考往往局限于匀速运动，著名的阿基米德螺线(如图 3)就是由匀速圆周运动与匀速直线运动所形成的。然而自由落体不是匀速运动，摆在 17 世纪科学家面前的问题是如何定义变速运动中各个时刻的速度，以

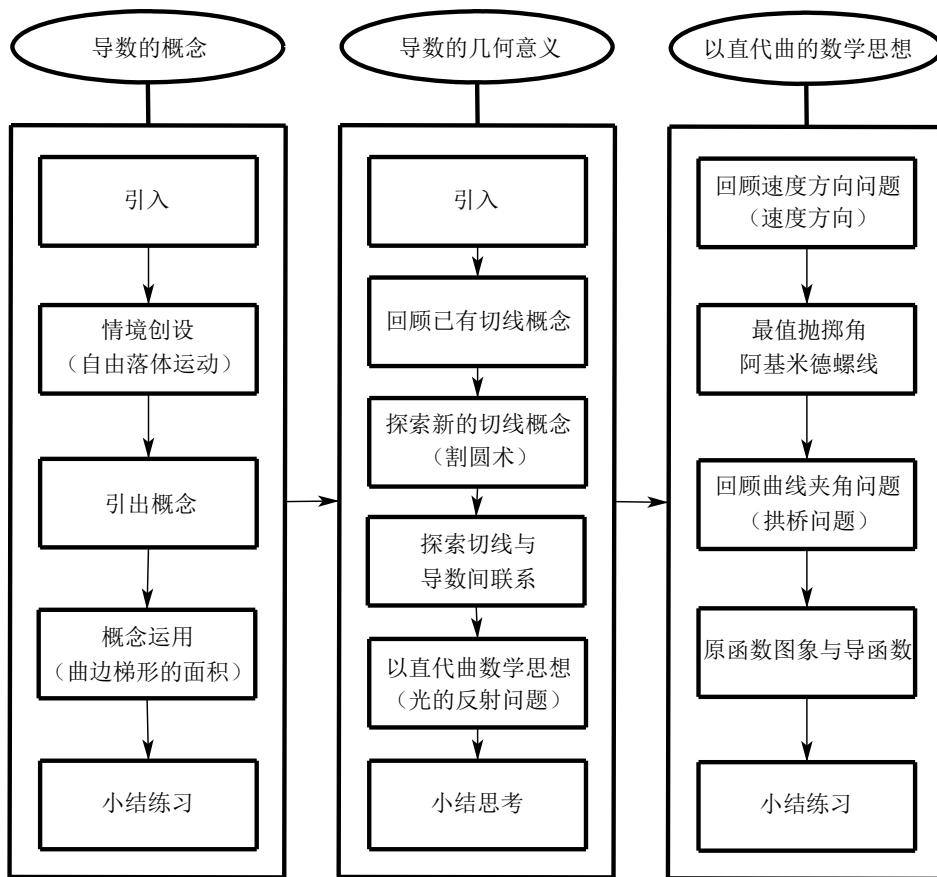


图2 “导数的概念”三课时的教学环节

及如何求变速运动中各个时刻的速度？

例 1. 自由落体运动中物体下落的距离  $s$  (单位米) 与时间  $t$  (单位秒) 近似满足函数关系  $s = 5t^2$ . 我们可以求得给定时间区间中的平均速度, 如求区间  $[1, 2]$  (秒) 的平均速度, 但是各个时刻的速度该怎么求呢? 如  $t = 2$  (秒) 时物体的速度是多少呢?

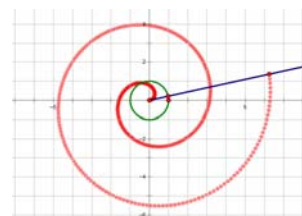


图3 阿基米德螺线

物理上把某个时刻的速度称为瞬时速度。瞬时速度的定义如下:

如果物体做瞬时直线运动, 在运动过程中速度保持不变, 那么它在任何时刻的瞬时速度和整个运动过程的平均速度相同。问题的关键是寻找一个速度保持不变的运动过程!

虽然现在很少能看见铜钱, 我相信大家对铜钱是不会陌生的, 铜钱的设计取的是天圆地方的意思, 古人认为地是方的, 我们现在当然知道地不是方的, 地也是圆的, 但地为什么会给我们以方的感觉? 割圆术是通过不断倍增圆内接正多边形边数来求圆面积的方法, 祖冲之运用割圆术将圆周率计算到小数点后第七位, 为什么祖冲之计算的圆周率会如此准确?

类似地, 如果我们取的时间区间非常非常小, 长度无限逼近于 0, 那么在这个时间区间内是不是可以认为速度保持不变呢?

显示当  $\Delta t$  不断变小的过程中物体在区间  $[2-\Delta t, 2]$  与区间  $[2, 2+\Delta t]$  上的平均速度(如图 4), 不难发现当  $\Delta t$  不断接近于 0 的过程中, 两个时间区间的平均速度都不断接近于 20, 我们完全可以认为当  $\Delta t$  无限接近于 0 时, 物体在时间区间  $[2, 2+\Delta t]$  内所进行的是匀速直线运动, 因此物体在时间区间  $[2, 2+\Delta t]$  的平均速度就是物体在  $t=2$  (秒) 时的瞬时速度。

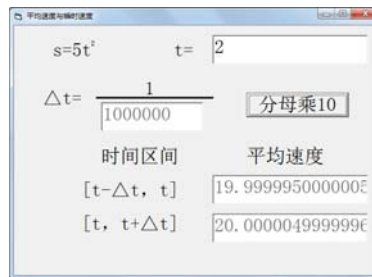


图 4 平均速度

当然计算机的精度有限制,  $\Delta t$  无法做到无限接近于 0, 但人脑可以:

$$v|_{t=2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5 \times (2 + \Delta t)^2 - 5 \times 2^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{20\Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (20 + \Delta t) = 20 \text{ (米/秒)}$$

请同学求一下  $t=a$  (秒) 时的瞬时速度, 并写出速度函数  $v(t)$ 。

### 第三环节: 引出概念

平均变化率:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ; 瞬时变化率:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

函数  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  处的瞬时变化率是  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , 我们称它为函

数  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  处的导数, 记作  $f'(x_0)$  或  $y'|_{x=x_0}$ , 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

当  $x$  变化时,  $f'(x)$  便是  $x$  的一个函数, 我们称它为  $f(x)$  的导函数 (简称导数)。  $y = f(x)$  的导函数有时也记作  $y'$ , 即

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

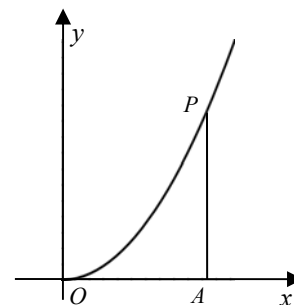


图 5 曲边梯形面积

### 第四环节: 概念运用

例 2. 已知函数  $y = f(x) (x \geq 0)$  的图象如图 5 所示, 过图象上任意一点  $P(x, y)$  作  $x$  轴的垂线, 交  $x$  轴于点  $A$ , 由线段  $OA$ 、 $AP$  与曲线段  $OP$  围成的图形  $OAP$  的面积为  $s(x) = \frac{1}{3}x^3$ 。

(1) 求图形  $OAP$  的面积在  $x \in [\frac{1}{2}, 1]$  上的平均变化率  $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ ; (2) 求当  $x = \frac{1}{2}$  时, 图形  $OAP$  面积的瞬时变化率  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$ ; (3) 求图形  $OAP$  面积函数  $s(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  处的导数  $s'(\frac{1}{2})$ ; (4) 求图形  $OAP$  面积函数  $s(x)$  的导函数  $s'(x)$ 。

思考: 图形  $OAP$  面积函数  $s(x)$  的导函数  $s'(x)$  与函数  $y = f(x) (x \geq 0)$  间有什么联系?

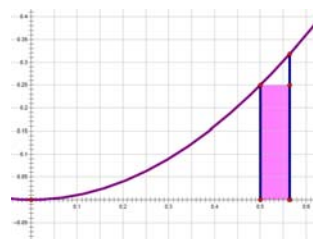


图 6 微积分基本定理

动态演示当  $\Delta x$  不断变小时,  $\Delta s$  与以  $\Delta x$  为宽,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  为高的矩形的面积之间的大小关系 (如图 6), 思考当  $\Delta x$  无限逼近于 0 时,  $\Delta x \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$  无限逼近于  $\Delta s$ , 所以  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = s'\left(\frac{1}{2}\right)$ ,

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = s'(x)。$$

#### 第五环节：小结与练习

练习：1. 求抛物线  $x^2 = y$  在点  $(1,1)$  处的切线；2. 已知  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ , 求  $f'(x)$ ；3. 已知  $f'(a) = 3$ ,  $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$ , 求  $g'(a)$ 。

#### 第二课时：导数的几何意义

##### 第一环节：引入

问题 1：我们很容易画出平面的反射光线，那么在曲面上光是如何反射的呢？

问题 2：已知某物体的运动轨迹，我们如何确定它的速度方向呢？

问题 3：我们很容易确定斜坡的坡度，但拱桥的坡度又如何确定呢？

##### 第二环节：回顾已有切线概念

回顾圆的切线定义；回顾圆锥曲线切线定义；展示曲线  $y = x^3$  与  $y = \sin x$  的切线，让学生产生认知冲突——已有切线定义不足以判定任意曲线的切线。

##### 第三环节：探索新的切线的定义

展示刘徽的割圆术(图 7)：“以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂。割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可歌，则与圆周合体，而无所失矣。”计算圆心到其多边形一边所在直线的距离，我们可以得到结论：圆的切线是圆内接无穷多边形一边所在的直线，进而提升至圆的切线是割线的极限位置，并推广至所有曲线。

##### 第四环节：探索切线与导数的关系

例 1. 求曲线  $C: y = x^3$  在点  $(1,1)$  处的切线方程。

例 2.  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ , 求  $f'(1)$ 。

切线是割线的极限位置！割线的斜率  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  为函数的平均变化率；切线的斜率

$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  为函数的瞬时变化率，即导数。切线的斜率与导数的符号表达是同一对象的两个

不同侧面，在解决问题的过程中我们要注重它们之间的相互转化。

##### 第五环节：以直代曲的数学思想

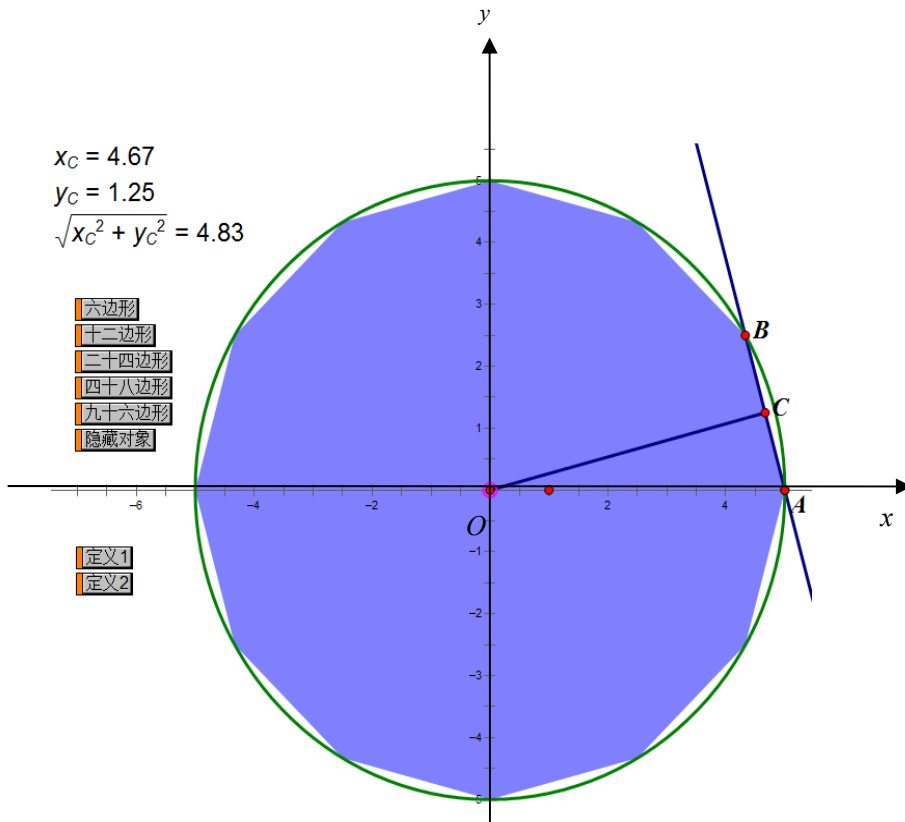


图 7 割圆术

例 3. 已知  $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ , 求  $f'(1)$ ; 思考: 函数  $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$  的图像是什么曲线?

利用几何画板度量  $\angle BAF_1$  与  $\angle CAF_2$ , 发现  $\angle BAF_1$  与  $\angle CAF_2$  相等。思考: 通过椭圆一个焦点的光线, 经椭圆反射后, 其反射光会经过另一个焦点, 即光照射在椭圆上  $A$  点处的反射效果与光照射在椭圆  $A$  点处的切线上的反射效果相同, 为什么?

将椭圆放大一百倍(图 9), 我们可以发现椭圆在点  $A$  附近的曲线段与椭圆在点  $A$  处的

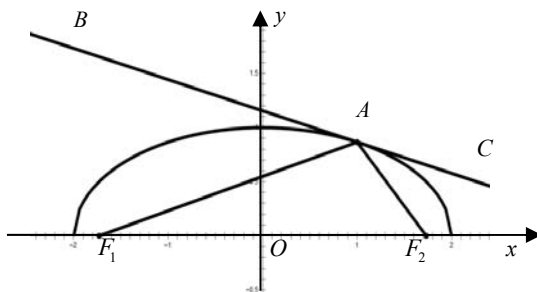


图 8 椭圆的光学性质

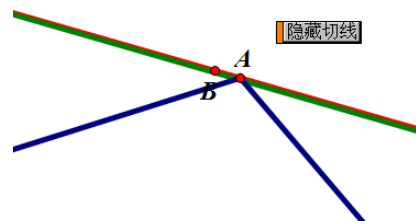


图 9 放大椭圆

切线段重合, 因此光照射在曲线段上与切线段上的效果是一致的, 这就是微积分中重要的以直代曲的思想。

思考: 刘徽的割圆术中同样也包含着重要的微积分思想, 同学们能回答是什么思想吗?

以直代曲的思想：“割之弥细，所失弥少。

割之又割，则与圆合体，而无所失矣”，

用圆内接无穷多边形来替代圆。

**第六环节：小结思考**

思考 1(速度的方向问题)：以 10m/s

平抛的物体的运动轨迹为  $y = 20 - \frac{1}{20}x^2$  (取  $g = 10m/s^2$ ，单位：m)，求物体在 (10,15) (单位：m)位置处的速度方向。

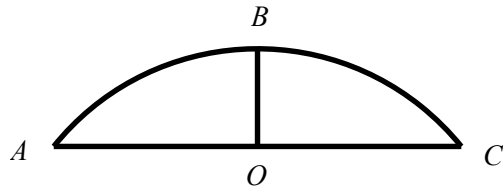


图 10 拱桥问题

思考 2(曲线夹角问题)：如图 10，某地要建造一座抛物线拱桥，要求拱桥最高处距离水面 20m，且拱桥的坡度不能大于  $30^\circ$ ，则拱桥的跨度 BC 至少为多少米？

**第三课时：以直代曲的数学思想**

**第一环节：回顾速度方向问题**

思考：为什么速度方向为切线方向？

**第二环节：探索速度方向与切线方向间的联系**

研究物体的速度方向对我们的现实生活有什么指导意义呢？

例 1. 以  $v_0$  的初速度斜抛位于原点处的物体，则物体的运动轨迹为抛物线

$$y = -\frac{4.9(a^2+1)}{v_0^2}x^2 + ax \text{ 的一部分，问：以与水平面成多大角的方向斜抛地面上的物体，能使物}$$

体的落地点距离物体的抛掷点最远？所以我们在扔铅球或立定跳远时，应注意初速度的方向，这样才能使我们获得最好的成绩。

在导数概念第一课时中，向学生展示了由匀速直线运动与匀速圆周运动形成的点的轨迹——阿基米德螺线，我们能否求得该曲线的切线呢？

例 2. 某物体以 1m/s 的速度沿转轴运动，且旋转轴以  $\frac{\pi}{3}$  rad/s 的速度逆时针旋转，物体运动轨迹形成了如图的阿基米德螺线，若如图 11 建立直角坐标系，

求阿基米德螺线在点 (-3,0) 处的切线方程(提示：线速度  $v = \omega r$ ， $\omega$  为角速度， $r$  为半径)。

简单介绍 17 世纪科学家使用合速度方向来确定切线的方法。

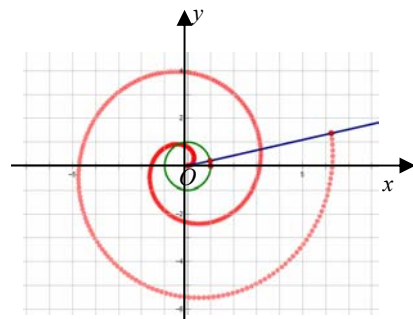


图 11 阿基米德螺线的切线

**第三环节：回顾曲线夹角问题**

思考：什么是拱桥的坡度？拱桥的坡度在何处最陡？

#### 第四环节：探索原函数与导函数间的关联

探索：请学生用笔芯表示曲线切线，让切点在曲线上移动，仔细观察切线斜率的变化过程，描述一下切点处的导数值的变化过程。

思考：导数值的正负决定曲线的什么性质？导数绝对值的大小决定曲线的什么性质？

例 3. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  (函数源于例 1), (1)求函数  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$ ; (2)求曲线  $y = f(x)$  在点  $(-3, f(-3))$ 、 $(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3}))$ 、 $(-1, f(-1))$ 、 $(0, f(0))$ 、 $(1, f(1))$ 、 $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$ 、 $(3, f(3))$  处的切线方程; (3)尝试绘制函数  $y = f(x)$  的图像。

#### 第五环节：小结与练习

已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{5}{3}$ , (1)求函数  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$ ; (2)求曲线  $y = f(x)$  在点  $(-2, f(-2))$ 、 $(-1, f(-1))$ 、 $(1, f(1))$ 、 $(3, f(3))$ 、 $(5, f(5))$  处的切线方程; (3)尝试绘制函数  $y = f(x)$  的图像。

## 2 教学反馈

笔者在一个文科平行班和一个文科重点班开展了融入数学史的导数概念教学实践，为了解学生对这种教学模式的认同程度以及融入数学史的数学教学对学生理解导数概念的作用，笔者在“导数的几何意义”一节课后对 8 位学生进行了访谈，于导数章节教学完成后对任教的两个班级 104 位学生进行了“关于导数教学的反馈”的问卷调查，于全年级学生完成导数教学后对全年级 419 位学生进行了关于“导数知识掌握程度”的问卷调查。

参与访谈的 8 位学生一致认为，融入数学史的“导数的几何意义”的教学可以理解，并能准确表述教学中的核心概念——切线。8 位学生都认为放大椭圆能帮助他们理解以直代曲的数学思想，其中 7 位学生认为割圆术能帮助他们理解切线概念。8 位学生中有 7 位喜欢融入数学史的教学模式，这样的教学模式给他们留下了深刻的印象，能激发他们学习数学的兴趣；1 位学生表示这样的教学模式能接受，但无所谓喜不喜欢。

“关于导数教学的反馈”的问卷调查显示，大部分学生认为融入数学史的教学能够帮助他们更好地理解相关的数学概念，详见表 1。

“关于导数知识的掌握程度”的问卷中，有 6 个问题涉及导数概念的理解，对学生在这 6 个问题上的总成绩进行方差分析显示，全年级对于导数概念的理解不存在统计意义上的显著性差异，但进一步的 Sheffe 检验显示，不同教学层的学生间对于导数概念的理解存在统计



意义上的差异, 详见表 2-4。

表 1 关于导数教学的教学反馈的部分问题统计结果

教学反馈问卷中的部分问题		班级					
		重点班		平行班		合计	
问题1: 你觉得通过平均速度与瞬时速度的模型学习平均变化率与瞬时变化率, 对你理解平均变化率与瞬时变化率的概念, 是否有帮助?	是	41	80.4%	38	71.1%	79	76.0%
	否	10	19.6%	15	28.9%	25	24.0%
问题2: 你觉得通过割圆术来获得切线, 对你理解切线的概念是否有帮助?	是	45	88.2%	42	79.2%	87	83.7%
	否	6	11.8%	11	20.8%	17	16.3%
问题3: 你觉得放大椭圆的过程, 对你理解以直代曲的思想是否有帮助?	是	44	86.3%	47	88.7%	91	87.5%
	否	7	13.7%	6	11.3%	13	12.5%

Sheffe 检验结果显示, 未开展 HPM 教学研究的文科平行班学生对导数概念的理解显著低于其余 4 类学生, 理科平行班学生显著低于理科重点与文科重点学生, 而开展 HPM 教学研究的文科平行班学生只显著低于同样开展 HPM 教学研究的文科重点班学生。

表 2 导数概念调查总成绩方差分析

	平方和	df	均方	F	显著性
组间	430.026	4	107.506	18.311	.000
组内	2430.666	414	5.871		
总数	2860.692	418			

### 3 HPM 教学设计的思考

#### 3.1 注重数学史的教学功能与史学功能的结合

如何将数学史的史学形态转化为教学形态的问题受到学术界的关注, 然而却未见对数学史的教学形态所给出的明确定义或诠释。结合导数概念的教学设计与教学实践, 笔者认为, 具有教学形态的数学史是能同时发挥数学史的教学功能与史学功能的数学史知识, 包括对数

学史知识的重构。所谓数学史的教学功能,指的是数学史作为一种教学元素,它是实现教学

表 3 导数概念调查总成绩 Sheffe 检验同类子集

班级	N	alpha = 0.05 的子集			
		1	2	3	4
文平	85	7.65			
文研	49		9.00		
理平	184		9.04	9.04	
理重	49			10.33	10.33
文重	52				10.94
显著性		1.000	1.000	.061	.719

将显示同类子集中的组均值。

a. 将使用调和均值样本大小 = 64.728。

b. 组大小不相等。将使用组大小的调和均值。将不保证 I 类错误级别。

功能的一个部分,数学史材料的使用对应着特定的教学任务;同时,数学史作为一种史学元素它浓缩了概念的发生发展过程,包含了古人的思想与智慧,是学生完整理解概念,体会概念背后深刻数学思想不可替代的元素,这种不可替代性便是数学史的史学功能。

如,用旦德林球引入椭圆概念,既完成了椭圆概念——椭圆是到两定点距离和为定值的点的轨迹的教学要求,这是数学史的教学功能;同时又让学生了解到椭圆的原始定义——圆锥截线,并且在“圆锥截线”与“距离和为定值”两概念间建立关联,虽然椭圆的概念教学没有掌握“圆锥截线”定义的教学要求,但这样的设计有助于学生更好地理解椭圆概念,对于学生完整把握椭圆概念是不可替代的,因此用旦德林球引入椭圆概念既实现了数学史的教学功能,同时又实现了数学史的史学功能(王芳,汪晓勤,2012)。

要发挥数学史的教学功能,教学中选取或重构的数学史知识必须符合学生的认知水平。在“导数概念”的教学设计中,采用了一个与曲边梯形有关的数学案例,这一案例的第4问原想设计为“求函数  $f(x)$ ”,最后还是把它更改为“求图形  $OAP$  面积函数  $s(x)$  的导函数  $s'(x)$ ”,其实  $s'(x)$  就是  $f(x)$ ,但对于刚接触导数的学生而言,要想理解“ $s'(x)$  就是  $f(x)$ ”是很困难的,也超出他们的认知能力,因此在教学设计中采用的是求  $s'(x)$  而非求  $f(x)$ 。

要发挥数学史的教学功能,就必须通过数学史知识来完成教学任务,而不仅仅是教学引入或教学点缀。导数概念的教学内容包括理解导数、切线的概念,掌握导数的几何意义,体会以直代曲的数学思想,会用定义法求函数的导数,会求曲线的切线方程。数学史的引入能

表4 导数概念调查总成绩 Sheffe 检验多重比较

(I)班级	(J)班级	均值差	标准误	显著性	95% 置信区间	
		(I-J)			下限	上限
1	2	-1.942*	.482	.003	-3.43	-.45
	3	1.353*	.435	.048	.01	2.70
	5	-1.327	.490	.121	-2.84	.19
	6	-.043	.390	1.000	-1.25	1.16
2	1	1.942*	.482	.003	.45	3.43
	3	3.295*	.427	.000	1.98	4.62
	5	.616	.482	.803	-.88	2.11
	6	1.899*	.381	.000	.72	3.08
3	1	-1.353*	.435	.048	-2.70	-.01
	2	-3.295*	.427	.000	-4.62	-1.98
	5	-2.679*	.435	.000	-4.02	-1.33
	6	-1.396*	.318	.001	-2.38	-.41
5	1	1.327	.490	.121	-.19	2.84
	2	-.616	.482	.803	-2.11	.88
	3	2.679*	.435	.000	1.33	4.02
	6	1.283*	.390	.030	.08	2.49
6	1	.043	.390	1.000	-1.16	1.25
	2	-1.899*	.381	.000	-3.08	-.72
	3	1.396*	.318	.001	.41	2.38
	5	-1.283*	.390	.030	-2.49	-.08

\*. 均值差的显著性水平为 0.05。

够加深对导数、切线概念的理解, 让学生体会以直代曲的数学思想, 在教学设计中同样兼顾到对求函数导数与求切线方程的技能性训练, 使之成为实现教学任务的有效载体。

要发挥数学史的教学功能, 还要注重教学的整体性, 要注重各案例间的前后呼应、有机整合。教学是一种整体性的设计, 各环节有各环节的使命, 但彼此相互依存不可分割。现有的一些 HPM 教学设计中, 数学史更像一个独立的环节, 虽可使教学增色, 但去掉它也不影

响教学。导数概念的教学设计是先有一个整体的框架,然后再去选择合适的教学材料,并且更多地关注材料间的相互配合。自由落体运动在导数概念与切线概念中都有出现,但展现的是自由落体运动的不同侧面;曲边梯形面积为今后定积分的学习以及微积分基本定理的学习埋下伏笔;割圆术既帮助学生理解切线的概念,又蕴含着以直代曲的数学思想;导数几何意义的引入是此后三个教学案例的先行:椭圆的光学性质、速度方向、拱桥问题,分别服务于渗透以直代曲数学思想与利用导数研究函数性质等教学任务;阿基米德螺线先给予学生直观感觉,然后再成为研究切线的载体,并培养学生辩证地看待问题的能力;最佳抛掷角度中涉及的函数,又为用导数把握函数图像提供了模型。所以三课时中涉及的八个教学案例彼此是相互配合的,而不是孤立的,它们共同实现了导数概念的教学任务。

能实现数学教学功能的当然并不只有数学史材料,但相比其他材料,数学史知识有其独特的史学功能。

数学概念的发生发展过程是对数学概念本身最完美的诠释,教材中介绍的许多数学概念,简洁、准确,却缺少对数学概念多角度的展现。在教学中融入数学史,让学生体会数学概念的发生发展过程,能够让学生更全面地建构数学概念。切线的概念从静态发展到动态,割圆术实现了从静态到动态的过渡,导数概念的诞生源于历史上的四类问题,八个教学案例浓缩了这四类问题,让学生体会到,要解决生活中的此类问题,就需要一种新的工具,新的思想方法,而导数就是这样的一种工具、一种思想,因而学习导数是必须的也是自然的;通过这些案例,既让学生了解为什么要学导数,也让他们了解如何用导数,还潜移默化地渗透了以直代曲等极限思想。

教学功能与史学功能相结合,才能实现数学史在教学中真正的融入,使得数学史是教学本身而非教学的附属品。

### 3.2 融入数学史的教学教学在认知领域的作用

教学反馈表明,学生对融入数学史的教学模式的认同,不仅激发了学生的兴趣,更重要的是帮助学生更好地理解数学概念,尤其是关于导数概念掌握程度的问卷调查显示,实施教学研究的文科平行班在概念理解上优于同类班级。

数学史独特的史学功能对理解数学概念有着不可取代的作用。数学概念的形成决不是天外来客,有其诞生的背景,有其曲折的发展,也有其不断的完善,教材中那抽象的文字远不足以展现它背后的丰富内涵。对概念的理解有两个维度,纵向与横向,纵向体现了深度而横向则展现了广度,数学教学中利用变式教学、问题驱动等手段有助于挖掘概念的深度,然而

却替代不了概念的广度。利用几何画板可以帮助学生理解切线的动态定义,但是没有割圆术就无法实现切线静态定义与动态定义的统一;记忆求导公式,掌握导数与函数性质的关系当然可以运用导数去分析函数性质,解决最值问题,但如果不经历微积分发展的历史,就不会了解从有限到无限的跨越是导数的核心,微积分基本定理是微积分的根本,没有数学史,导数只是一种工具而不是一种思想。数学史的教学功能指向概念的深度,数学史的史学功能则指向概念的广度,因此,数学史能引导学生更完整地建构数学的概念,对概念理解有着无法替代的作用。

#### 4 结语

数学史融入数学教学的过程是数学史的教学功能与史学功能完美结合的过程,现有的教学设计过于关注数学史的史学功能而忽视了数学史的教学功能,造成了数学史与教学内容的泾渭分明,成就了史学功能却牺牲了教学效率。数学史要真正进入教学,它必须成为教学内容中不可替代的部分,而不是可有可无的环节。笔者虽在这方面有了一些尝试,但与数学史和教学内容水乳交融、浑然一体的目标还有一定距离,数学史融入数学课堂任重道远!

#### 参考文献

- [1] C.B.波耶,1977. 微积分概念史.上海:人民出版社
- [2] M.克莱因,2002. 古今数学思想.上海:科学技术出版社
- [3] C.H.爱德华,1987. 微积分发展史.北京:北京出版社
- [4] 吴甬翔,汪晓勤,2009. 曲线的切线:从历史到课堂.高等理科教育, (3): 38-43
- [5] 王芳,汪晓勤,2012. HPM 视角下的椭圆概念教学的意义.中学数学月刊, (4): 57-61

## 竹里馆，听书声

### —— 相约 4 阶幻方

刘 攀

(华师大数学系, 上海, 200241)

在华师大的数学文化课上, 有作过与“幻方”相关的讲座。回望课上的那段时光, 如梦还幻, 已不甚清晰; 依稀记得那一课的反响还不错。幻方的天地是奇妙的, 这里蕴含着深刻的数学, 这里有着有趣的人文故事……这一期想说说幻方, 更多的是想说说 4 阶幻方。

#### 1 潮起潮落

幻方是古代中国数学一个伟大的创造。它的出现, 有着神话的色彩。话说在易经上记载有两个有趣的故事: 河出图, 洛出书, 圣人则之。如若把洛书中的点阵图画为数字, 则我们得到一个  $3 \times 3$  的方阵(如图 1)。这个正方形的排列具有非常奇妙的性质: 其每一行, 每一列, 和两个对角线上的三个数字和都是同一个数 15。洛书, 是世界上最古老的幻方。

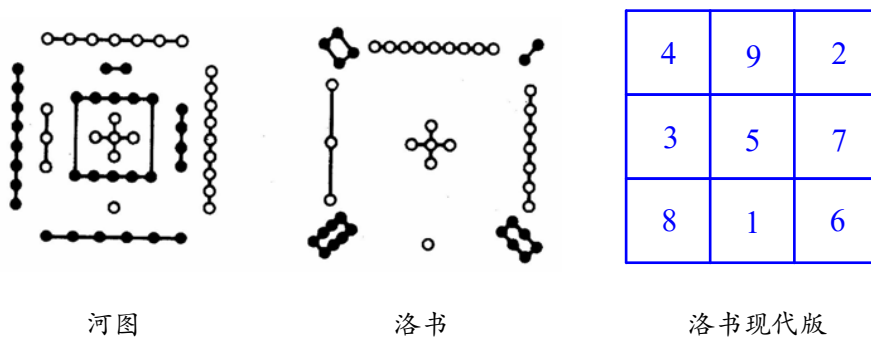


图 1

中国是研究幻方最早的国家。在我国历史上, 幻方也被叫做“纵横图”, 被认为是中国数学的一大源起。时至今日, 这一古老的数学游戏被加以发展, 呈现出知识的多彩。经由现代数学语言, 所谓幻方, 说的是: 一个由自然数排成的  $n \times n$  的方阵, 若其每行, 每列及两条对角线上的  $n$  个数的和都相等, 则称此方阵为一  $n$  阶幻方。特别地, 由  $1, 2, 3, \dots, n^2$  —— 这  $n^2$  个自然数排成的幻方叫做标准幻方。比如洛书是一个 3 阶的标准幻方。

由幻方的定义可以看出，一个幻方的制作相当于求解一组线性的不定方程。经由这样的理解，2阶幻方并不存在。3阶标准幻方本质上只有一种——即形如上的洛书……让我们经由4阶幻方之门而漫步入奇妙的幻方世界。

## 2 体验之旅

让我们由1个例子来看看幻方万千变化中的不变。

完形天空：这里是一个4阶的标准幻方的局部，其中已有若干数字；望在其空格中填上一些数以得到一个幻方(如图2-1)。

	1		
	3		
6		15	
	2		11
		4	

图 2-1

$x$	13	$15-z$	$Q$
6	$y$	15	$13-y$
$21-z$	2	$z$	11
$P$	$19-y$	4	$w$

图 2-2

12	13	1	8
6	3	15	10
7	2	14	11
9	16	4	5

图 2-3

分析与解：设对角线上的数为  $x, y, z, w$  ...注意到4阶标准幻方的幻方常数 = 34，我们有如上图 2-2 的设置。进而利用幻方的相关性质 有

$$P = 7 - x + z = 11 + y - w; \quad Q = 6 + z - x = 10 + y - w. \quad (I)$$

由  $P + 2 + 15 + Q = 34$  得到  $P + Q = 17$ ，进而我们有

$$P = 9, \quad Q = 8. \quad (II)$$

经由  $x + y + z + w = 34$ ；有  $x + y = 15, z + w = 19$ 。 (III)

再由(I)和(II)知有  $z = x + 2, w = y + 2$ ；故只需确定  $x, y$  的值即可。

一些简单的推理验证表明  $x = 12, y = 3$  是唯一的选择… 其它的，一切尽在不言中。

注释间：相关的课堂实践显示，此问对于文科学生来说还是很有难度的。一个折中的问题设计是可以再多给两个数：比如在其上增添 3 和 14 两个数。

## 3 奇妙幻方例证

幻方的世界是一个奇妙的所在[1-5]。除却幻方的常见性质外，还有一些幻方具有其他丰富多彩的性质。如下的幻方具有多种对称性。

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

图 3-1

12	13	1	8
6	3	15	10
7	2	14	11
9	16	4	5

图 3-2

图 3-1 中的这个幻方最早出现在 中国数学家杨辉的经典名著《续古摘奇算法》一书(其有两卷)中, 这是一个对称幻方: 处于中心对称的两个数之和都是 17。它的独特还在于其间至少有 46 组 4 数之和为 34。

图 3-2 是 1947 年由德国学者缪斯纳发现的神奇幻方: 除却 4 阶幻方的基本性质外, 有 86 组 4 数之和为 34。缪斯纳幻方的奇妙还在于其还具有如下的性质:

$$4^2 + 9^2 + 5^2 + 16^2 = 1^2 + 12^2 + 8^2 + 13^2 = 378$$

$$14^2 + 7^2 + 11^2 + 2^2 = 15^2 + 6^2 + 10^2 + 3^2 = 370$$

$$4^2 + 14^2 + 15^2 + 1^2 = 16^2 + 2^2 + 3^2 + 13^2 = 438$$

$$9^2 + 7^2 + 6^2 + 12^2 = 5^2 + 11^2 + 10^2 + 8^2 = 310$$

$$12^2 + 3^2 + 14^2 + 5^2 = 8^2 + 15^2 + 2^2 + 9^2 = 374$$

$$12^3 + 3^3 + 14^3 + 5^3 = 8^3 + 15^3 + 2^3 + 9^3 = 4624 = 68^2$$

西方现存最古老的幻方出现在德国画家丢勒(Albrecht Durer, 1471-1528)著名的铜版雕刻画《忧郁者》上 (如图 4)。这一流芳千古的佳作, 蕴含艺术美与理性美的和谐组合; 有趣的是, 其中幻方最后一行中间的两个数就是画的制作时间: 1514 年。



图 4 《忧郁者》和其中的幻方

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

图 5

上图 5 是印度太苏神庙门楣石碑上的幻方, 刻于 11 世纪。这个幻方上有 85 组和数为 34



的组合。更为奇特的是，如把幻方边上的行或列挪到另一边去，新得的依然是一幻方。这是一个完美幻方——即每个泛对角线上的数字之和也都为 34。

相比于其上的标准幻方，我们还可以邂逅许多奇妙的非常幻方：其中的元素可以有着相对独特的性质，而不见得是前  $n^2$  个连续自然数。

素数幻方。其间方阵中的元素都是素数。这类幻方最早由数学家杜德尼 1900 年提出。我们知道，素数的分布没有规律可言，因此要用素数作成幻方实在是一间难事。可幻方爱好者们还是作出了一些这样的幻方。

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

图 6-1

2173	7417	8597	21817
8837	21577	2377	7177
21517	8297	7717	2437
7477	2677	21277	8537

图 6-2

193	457	659	4483
1709	3433	283	367
3343	479	1597	373
547	1423	3253	569

图 6-3

图 6-1 是一素数幻方，其幻和为 120。而上图中的两个素数幻方则是中国学者的骄傲：图 6-2 中的幻方，其中 16 个素数都以 7 为结尾，其幻和为 39968。奇妙的是，如若把所有数都掐去头尾，得到的依然是一素数幻方。图 6-3 中的素数幻方，其幻和是 5792。其奇妙在于，可 3 级提升：其中各数都加上 2310，依然是一素数幻方，其幻方和是 15032，如若把各数都再加上 2310，得到的依然还是一素数幻方。它们都是素数幻方中的奇石。

回文数幻方。形如 11, 121, 5665, ……的数叫做回文数。其独特在于其顺着读和反着读都是一样的——这些数具有中心对称性。所谓回文数幻方，指的是全由回文数构成的幻方。可以看到下面的幻方是一回文数幻方(如图 7)，其幻和是 13992。除却其间数字的回文特性，这个幻方还另有奇妙：它还是一个完美幻方——在数字的对称和幻方结构的对称的相互映射下，呈现数学的别样美。

黑洞数的幻方：数 6174 是一个很有趣的数，它是一个黑洞数。隐藏在这里的秘密是，任给一个非平凡的 4 位数：比如 3231，由此我们可得到两个数：3321, 1123(前者经由组成原数的这些数字从大到小排列得到，而后者则正好相反，按从小到大排列得到的数)；进而我们作如下的数运算：3321-1233=2088。然后继续演绎上面的数学故事：8820, 0288；8820-0288=8532。其后有 8532-2358=6174。奇妙的是，任何一个不平凡的 4 位数，经由上面的游戏规则都将回归这一“数字的黑洞”：6174。而这个数本身则依然不动：7641-1467=6174。下面的这个幻方与数字 6174 有关。

5665	1001	4664	2662
2442	4884	3443	3223
2332	4334	1331	5995
3553	3773	4554	2112

图 7

1341	1791	1476	1566
1836	1206	1701	1431
1611	1521	1746	1296
1386	1656	1251	1881

图 8

图 8 的这个幻方是 6174 的天下：其 4 行 4 列和 4 对角线上的数之和都是 6174；每一个田字格中的 4 数之和都是 6174；其长方形，平行四边形，梯形间的 4 角中的四数之和，也是 6174 这个数字精灵。一个很有趣的问题是，可以有多少个这样的黑洞数幻方？

奇妙的几何幻方。这可是一种很独特的非常幻方。这类幻方集数学与艺术于一体，其间的元素大多是一些几何图案——比如积木，花纹，蝶之样本……进而可拼作一些整体的几何图形——几何幻方为传统意义上的幻方赋予了新的生命[6]。

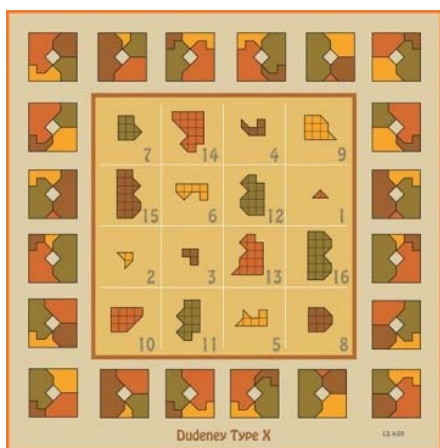


图 9-1

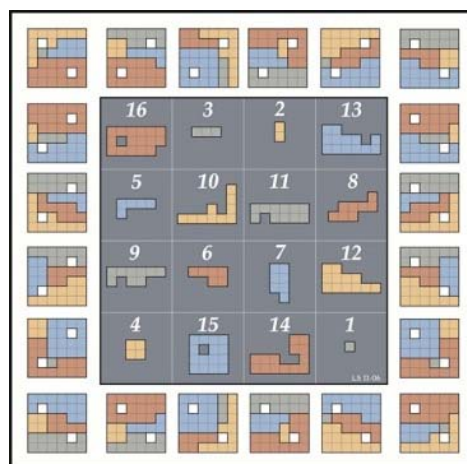


图 9-2

图 9-1，这个被冠以 Dudeney Type X 的几何幻方乃为纪念英国数学娱乐大师 H.E.杜登尼而作。杜登尼被誉为 20 世纪初最伟大的趣味数学题作家，一生写下了不少著作。他曾把所有的 4 阶标准幻方划分为 12 类——上面的数字幻方相应于其分类中的第 10 类。而图形中每一行，每一列和两个对角线上的 4 个几何图案都可拼成同样的方形图案。图 9-2，在此几何幻方中，每一行每一列和两个对角线上的 4 块积木都可拼出相同的方形。若关注这些小小积

木中所包含的小正方形的个数，则其相应的数字方阵却是我们上文中提到的丢勒的名画《忧郁者》(‘Melencolia I’)上的神奇幻方。

图 9-3, 这个四阶几何幻方的奇妙在于：其不但每条线上的四块积木都能拼出  $5 \times 5$  的方形，而且积木里书写的数字加起来也都是 44。

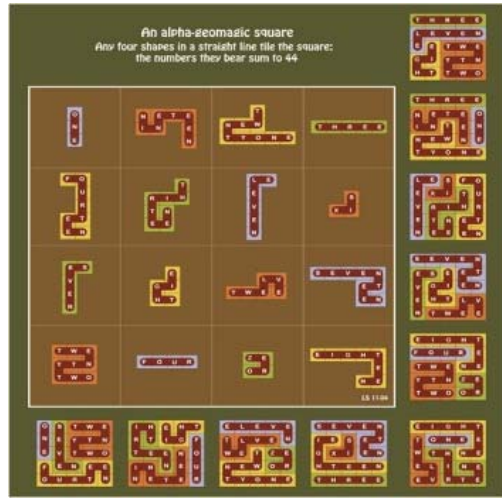


图 9-3

图 9-4, 这个几何幻方中的积木所含的小方格数恰好是前 9 个正整数，并且每条线上的三块积木正好能拼成一个(中间带有空洞的)正方形；奇妙的是，若把其间的空洞看作零，则这些  $4 \times 4$  的正方形本身

又构成了幻方。图 9-5, 这个几何幻方的奇妙在于：其间有着洛书的影踪……

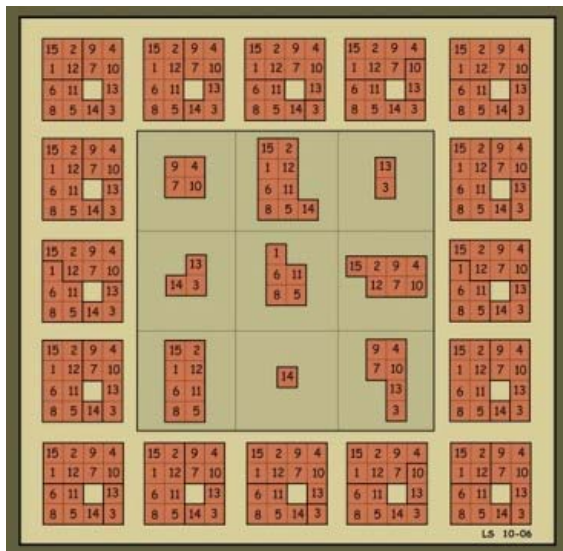


图 9-4

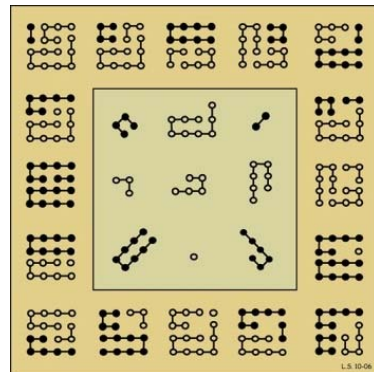


图 9-5

#### 4 注释的画阁

洛书是一个 3 阶的对称幻方，可并不完美。在 4 阶幻方里则有诸多完美幻方的存在，然而在 4 阶幻方的庭落里我们却无缘邂逅一类很有趣的幻方——马步幻方。其构造联系着古代中国象棋游戏中的马步：由方阵中某一个空格起始，按照马走“日”字的规定，经由这个幻方里数的排列顺序，于马蹄声处不重复地跳遍整个棋盘……

图 10-1 的这个  $5 \times 5$  的方阵间，经由马步可走完 1-25 这些数字，只是它还不是一个幻方。而图 10-2 的这个  $8 \times 8$  的方阵由杜德尼所创作，它是一个马步“半幻方”——其每一行，每一列

之和都等于 260, 但两对角线上的数字之和一为 264, 一为 256。图 10-3 则是一个奇妙的追逐, 它是一个 16 阶的马步幻方。

23	18	11	6	25
10	5	24	17	12
19	22	13	4	7
14	9	2	21	16
1	20	15	8	3

图 10-1

46	55	44	19	58	9	22	7
43	18	47	56	21	6	59	10
54	45	20	41	12	57	8	23
17	42	53	48	5	24	11	60
52	3	32	13	40	61	34	25
31	16	49	4	33	28	37	62
2	51	14	29	64	39	26	35
15	30	1	50	27	36	63	38

图 10-2

184	217	170	75	188	219	172	77	228	37	86	51	230	32	38	25
169	74	185	218	171	76	189	220	85	20	229	38	87	24	231	30
216	83	68	167	223	187	78	173	36	227	29	83	42	237	26	39
78	188	215	186	67	174	221	190	19	84	35	238	23	90	41	232
182	213	186	69	178	223	176	79	216	32	82	31	236	43	92	37
165	72	179	214	175	66	191	224	81	18	219	34	91	30	233	34
212	81	70	163	210	177	80	161	48	225	32	95	46	235	28	33
71	184	211	180	65	182	209	192	17	96	47	210	29	94	45	234
202	13	136	61	208	15	138	49	160	241	130	37	148	243	132	103
125	60	203	14	127	64	193	16	129	112	145	242	131	182	149	244
19	201	62	123	2	207	50	113	156	159	98	143	246	147	104	103
59	124	11	204	63	114	194	111	144	255	146	101	124	245	150	
200	3	122	55	206	3	116	51	158	253	142	99	164	247	126	105
121	98	205	10	115	54	195	4	141	110	155	254	135	100	151	248
8	199	56	119	6	197	52	117	252	157	188	139	250	153	106	137
57	120	9	198	55	118	5	196	109	140	251	156	187	198	249	152

图 10-3

在幻方的天地里, 还有一则奇妙而最为壮观的所在——双料幻方: 其独特在于不仅它的

每行，每列及每条对角线上的数字之和都一样，而且它的每行、每列及两条对角线上的数字之乘积也都完全相同。下面的这个 8 阶幻方是这样的一个例证。

46	81	117	102	15	76	200	203
19	60	232	175	54	69	153	78
216	161	17	52	171	90	58	75
135	114	50	87	184	189	13	68
150	261	45	38	91	136	92	27
119	104	108	23	174	225	57	30
116	25	133	120	51	26	162	207
39	34	138	243	100	29	105	152

图 11

图 11 的这个幻方是一个双料幻方：它的每行，每列及每条对角线上的 8 个数字和都是 840；而它的每行、每列及每条对角线上的 8 个数字之乘积也都完全相同，这个常数是

$$2058068231856000$$

天工造物，鬼斧神工。幻方的世界，源自简单的河图洛书，却有着七彩的数学故事……

### 参考文献

- [1] 吴鹤龄, 2006. 幻方及其他娱乐数学经典名题. 科学出版社
- [2] H.E.Dudeney, 1951. *Amusements in Mathematics*, London
- [3] J.Moran,. 1982. *The Wonders of Magic Squares*. New York: Vintage
- [4] Danielsson, H. *Magic Squares*. <http://www.magic-squares.de/magic.html>
- [5] Heinz, H. *Magic Squares*. <http://www.magic-squares.net/magicsquare.htm>
- [6] <http://www.geomagicsquares.com/gallery.php>