上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2014 年第 3 卷第 5 期

勒内 笛卡儿

（René Descartes, 1596-1650）

《上海 HPM 通讯》编委会名单

目 录

Content

刊首语

本期封面人物是法国哲学家和数学家笛卡儿。

1596 年 3 月 31 日笛卡儿生于法国安德尔-卢瓦尔省的图赖讷，1650 年 2 月 11 日逝世于瑞典斯德哥尔摩。他对现代数学的发展做出了重要的贡献，因将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父。他还是西方现代哲学思想的奠基人，是近代唯物论的开拓者且提出了“普遍怀疑”的主张。黑格尔称他为“现代哲学之父”。他的哲学思想深深影响了之后的几代欧洲人，开拓了所谓“欧陆理性主义”哲学。堪称 17 世纪的欧洲哲学界和科学界最有影响的巨匠之一，被誉为“近代科学的始祖”。

笛卡儿在 1637 年发表的《几何学》是历史上最伟大的数学著作之一。它带来了数学观念的革命：用代数和分析表述几何学，解几何学的问题，从而打开了近代数学的大门，创立了解析几何学。他的这部著作还为函数理论的发展奠定了基础，同时也为代数方程理论作出了重大贡献，还独立地创造了新的数学方法——几何代数化的方法，这个方法的核心是：把几何学的问题归结为代数形式的问题，用代数学的方法进行计算、证明，从而达到最终解决几何问题的目的。这个思想方法在《几何学》第一卷中，是通过对古典的、几何学家已经解决的帕普斯问题的解析解法体现出来的。他的解析法不仅解决了这一问题的特殊情况，而且他还把它推广到解决帕普斯问题的一般形式，充分显示了解析法的巨大威力。

笛卡儿建立了曲线和方程的对应关系，这种对应关系的建立，不仅标志着函数概念的萌芽，而且表明变数进入了数学，因而，笛卡儿的《几何学》的发表，使数学在思想方法上发生了伟大的转折——由常量数学进入了变量数学时期。他还进行了摆线所围面积的计算，作曲线的切线及解决切线逆问题的近似解法等方面的工作，这说明笛卡儿的变量数学思想为牛顿和莱布尼茨创立微积分准备了必要的前提。

在《几何学》的第一卷中，他第一个提出用英语字母表中开头的几个字母表示已知数，用末尾几个字母表示未知数，用符号∞表示相等，创用了幂的记号，用印度-阿拉伯数字表示指数，并将指数写在右上方。他运用数与形相对应的思想，用字母表示所用线段的长短，首先规定单位线段，在此基础上，又规定了线段的运算，第一次给出了虚数和实数的概念并用括线的根号表示平方根，用在根号之内写一个字母 c 表示立方根。

让我们谨记先哲的成就，向大师学习!

文献研究

同底数幂运算律的历史

汪晓勤

（华东师范大学数学系，上海，200241）

数学史为教师提供了新课引入的话题以及帮助学生“发现”新概念或新思想的方法[1]，同时，也丰富了教师的知识储备，包括数学问题及其解法等等[2]。然而，许多数学知识点的历史对于教师而言却都是盲点。每当教师在开发 HPM 案例时，他们对历史材料和历史研究的期待总是变得十分迫切。本文的撰写就是出于 HPM 视角下“同底数幂的运算”教学设计的需要，我们试图回答：历史上同底数幂的运算法则是如何产生和发展的？对教学有何启示？

1 阿基米德：大数记法

在日常生活中，我们很少能用到像10^{51}这样的大数。但古希腊大数学家阿基米德（Archimedes, 前 287～前 212）在数沙粒数时，却不得不面对这个大数。今天，1 后面 51 个零这么大的一个数写起来不费吹灰之力，可在 17 世纪以前，人们并没有简便的大数记法。

阿基米德采用了万万进的记数方法：从 1 数到 1 万万为一阶数，从 1 万万数到 1 万万个 1 万万为二阶数，从 1 万万个 1 万万数到 1 万万个 1 万万个 1 万万，为三阶数，……。阿基米德得到，装满整个“宇宙”（以地球为中心，地日距离为半径的球）的罂粟壳那么大的沙粒的数目不超过 1000 个七阶数，即 6 个万万相乘，再乘以 1000，用今天的记数法，就是$10^8\times10^8\times10^8\times10^8\times10^8\times10^8\times10^3=10^{51}$。阿基米德在其《数沙者》中正是出于表达大数的需要而提出如下定理[3]的：

> 已知等比数列A_1，A_2，A_3，…，A_m，…，A_n，…，A_{m+n-1}，…，其中$A_1=1$，$A_2=10$。若取任意两项A_m和A_n相乘，则乘积A_mA_n仍为该数列中的一项，它距离A_n的项数等于A_m距离A_1的项数；它距离A_1的项数比A_m和A_n距离A_1的项数之和小 1。

上述定理的结论是$A_mA_n=A_{m+n-1}$，用今天的记号，即$10^{m-1}\times10^{n-1}=10^{m+n-2}$。

2 丢番图：幂的符号

古代数学家在表达未知数不同次幂的时候，往往采用同底数幂的乘法运算法则。公元 3 世纪，古希腊数学家丢番图（Diophantus）首次采用字母来表示未知数以及未知数的平方和立方两种幂，更高次的幂则用平方和立方的乘积来表示，见表 1。

表 1 丢番图表达诸次幂的方法

今日符号	《算术》中的记法	中文名称
X	ς	未知数
x^2	Δ^Y	平方
x^3	K^Y	立方
x^4	$\Delta^Y\Delta$	平方-平方
x^5	ΔK^Y	平方-立方
x^6	$K^Y K$	立方-立方
……	……	……

从表 1 可见，尽管丢番图采用了字母“ς”来表示未知数，但他却用不同的符号来表示二次和三次幂（与“ς”没有关系），因而远远没有今天的记号简便。不过，丢番图对同底数幂的乘法法则却是了然于心的。

3 阿尔·卡克西：幂的命名

10-11 世纪，阿拉伯数学家阿尔·卡克西（al-Karkhi，又译 al-Karaji, 953～1029）在其数学名著《代数之荣》（*al-Fakhri*）中给出了幂的命名法[4]，见表 2。

表 2 阿尔·卡克西对幂的命名

今日符号	阿拉伯语中的名称	中文名称
a	جذر 或 شيء	根或物
a^2	مال	平方
a^3	كعب	立方

a^4	مال مال	平方-平方
a^5	مال كعب	平方-立方
a^6	كعب كعب	立方-立方
a^7	مال مال كعب	平方-平方-立方
a^8	مال كعب كعب	平方-立方-立方
a^9	كعب كعب كعب	立方-立方-立方
……	……	……

从表 2 可见，与丢番图类似，阿尔·卡克西根据同底数幂的乘法法则，利用平方和立方两种幂来表达更高次的幂，但他并没有采用字母符号。

13 世纪初，意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci, 1170?～1250?）在其《计算之书》中沿用了阿拉伯数学家表达高次幂的方法。他将未知数称为“根”或“物”，将未知数二次幂称为“平方”（census），三次幂称为“立方”（cubus），四次幂称为“平方平方”（census census），六次幂称为“立方立方”（cubus cubus）或“平方平方平方”（census census census），八次幂称为“平方平方平方平方”（census census census census）。

4 等差和等比数列之间的对应关系

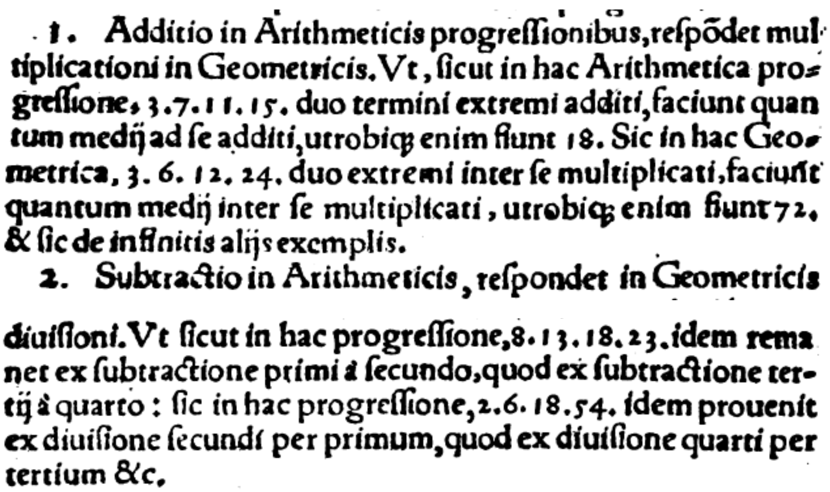
15-16 世纪，同底数幂的运算法则在欧洲已经广为人知，在众多数学家的著作中，这些法则乃是以等差和等比数列之间的对应关系来呈现的。表 3 给出了这个时期运用指数律的主要数学家及其著作[5]。

表 3 15-16 世纪运用指数律的部分数学家信息

年份	数学家	国别	代表作	幂	运算
1484	许 凯	法国	《算学三部》	2^n	乘、乘方
1521	施雷伯	德国	《艺术新作》	2^n	乘、除、开方
1526	鲁道夫	德国	《计算之术》	2^n	乘法
1540	弗里修斯	荷兰	《实用算术》	3^n	乘、乘方
1544	斯蒂菲尔	德国	《整数算术》	2^n	加、减、乘、除、

					乘方、开方
1549	佩勒蒂埃	法国	《算术》	2^n	乘法
1554	布瓦希埃	法国	《算术》	2^n	乘法
1560	雅各布	德国	《算术基础》	2^n	加、减、乘、除
1569	拉缪斯	法国	《算术》	2^n	乘法
1578	肖 维	法国	《算术原理》	3^n	乘法
1583	克拉维斯	德国	《实用算术概论》	2^n	乘、除
1586	肖 纳	法国	拉缪斯《算术》注	2^n	乘法

其中最具代表性的是德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel, 1487～1567），他在《整数算术》中讨论了等差和等比数列之间的四种对应关系[6]：等差数列中的加法对应于等比数列中的乘法，减法对应于除法，简单乘法对应于乘方，除法对应于开方。在首相为 1、公比为 2 的等比数列情形，上述对应关系等价于以下运算律：


1. Additio in Arithmeticis progreſſionibus, reſpōdet multiplicationi in Geometricis. Vt, ſicut in hac Arithmetica progreſſione, 3.7.11.15. duo termini extremi additi, faciunt quantum medij ad ſe additi, utrobiq; enim fiunt 18. Sic in hac Geometrica, 3.6.12.24. duo extremi inter ſe multiplicati, faciunt quantum medij inter ſe multiplicati, utrobiq; enim fiunt 72. & ſic de infinitis alijs exemplis.

2. Subtractio in Arithmeticis, reſpondet in Geometricis diuiſioni. Vt ſicut in hac progreſſione, 8.13.18.23. idem remanet ex ſubtractione primi à ſecundo, quod ex ſubtractione tertij à quarto: ſic in hac progreſſione, 2.6.18.54. idem prouenit ex diuiſione ſecundi per primum, quod ex diuiſione quarti per tertium &c.

图 1 《整数算术》书影

（1）$2^m \times 2^n = 2^{m+n}$（$m \in Z$，$n \in Z$）；

（2）$2^m \div 2^n = 2^{m-n}$（$m \in Z$，$n \in Z$）；

（3）$\left(2^n\right)^m = 2^{mn}$（$m \in N^+$，$n \in Z$）；

（4）$\sqrt[m]{2^n} = 2^{\frac{n}{m}}$（$m \ge 2, m \in N^+$，$n \in Z$）。

值得注意的是，斯蒂菲尔已经将幂指数推广到负整数了。

德国数学家鲁道夫（C. Rudolff, 1499～1545）在其另一部代数学著作《物之术》（1525）中创用了幂的新符号[7]，见表 4。从中可见，与丢番图、阿尔·卡克西、斐波那契的表达方

式不同，鲁道夫采用了同底数幂的乘方法则：四次幂为“平方的平方”，六次幂为“平方的立方”，八次幂为“平方的平方的平方”，九次幂为“立方的立方”。在乘方法则之下，素数次幂显然不能用平方和立方来表示了，只能使用新符号。诸次幂都有各自不同的名称。

表 4 鲁道夫创用的幂的符号

幂	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
符号									

斯蒂菲尔在《整数算术》中都沿用了鲁道夫的符号，还分别用$c\beta$、$d\beta$和$e\beta$来表示十一、十三和十七次幂。

5 韦达：字母表示数

16 世纪，法国数学家韦达（F. Viète, 1540～1603）采用大写元音字母来表示未知数，大写辅音字母表示已知数或一类数，从而发明了符号代数。在韦达之前，世界上没有什么人能够表达出“任意一个数的任意次幂”，韦达用字母表示任意数之后，这样的表达变得可能。与丢番图等人一样，韦达采用了同底数幂乘法法则来命名高于三次的幂，称四次幂为“平方-平方”，五次幂为“平方-立方”，六次幂为“立方-立方”，等等。他将我们今天的A^2，A^3，A^4，A^5，A^6，…分别写成Aq，Acu，Aqq，$Aqcu$，$Acucu$，…。与丢番图、鲁道夫的符号相比，韦达统一了幂的底数 A，为笛卡儿的新记号打下了基础；同时，也使同底数幂的运算变得易于表达，如$Acu \cdot Aqq = Aqqcu$。韦达在《分析引论》中讨论了同底数幂的乘法和除法，但涉及的指数都是特殊的正整数，并没有给出一般指数幂的乘除法则。

让人感到意外的是，韦达在书写方程的时候，却省掉未知数 A，如将方程$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$写成$1\mathrm{QC} - 15\mathrm{QQ} + 85\mathrm{C} - 225\mathrm{Q} + 274\mathrm{N}$ aequatur 120.

韦达统一底数的做法在一段时间内并没有为欧洲其他数学家所沿用。德国数学家克拉维斯（C. Clavius, 1538～1612）在《代数学》（1608）中仍然沿用鲁道夫的符号来表示幂[8]。显然，这种幂的表示方法不如韦达的方法清晰、简便。

6 笛卡儿：幂的新记号

在韦达之后，幂的记法层出不穷[7]。英国数学家哈里奥特（T. Harriot, 1560～1621）用aa表示 a 的平方，aaa表示 a 的三次幂，$aaaa$表示 a 的四次幂，次数越高，书写起来越麻烦。瑞士数学教学比尔吉（J. Burgi, 1552～1632）用$\overset{vi}{8}$表示未知数六次幂的 8 倍，即$8x^6$，这种省略底数的写法对于多个未知数情形完全无效。法国数学家艾里冈（P. Hérigone, 1580～1643）用 $a3$ 表示 a 的三次幂，$a4$ 表示 a 的四次幂，但指数与系数同处一行，容易混淆。比利时数学家罗曼努斯（A. Romanus, 1561～1615）则用$A(3)$表示 A 的三次幂，$A(4)$表示 A 的四次幂。1636 年，苏格兰数学家詹姆斯·休谟（J. Hume）在《韦达的新法代数》中引入新记号，将指数写成罗马数字，且置于右上方，如，A^{iii}表示 A 的立方。

1637 年，法国数学家笛卡儿（R. Descartes, 1596～1650）在其《方法论》附录——《几何学》中创用了幂的新记号，用a^3表示aaa，a^4表示$aaaa$，等等（不过，在平方的情形，他还是更喜欢用aa，因为新记号并没有节省空间）。有了笛卡儿的新记号，同底数幂运算法则的导出就变得自然而然了：

（1）$a^m \times a^n = \underbrace{(aa\ldots a)}_{m个a} \times \underbrace{(aa\cdots a)}_{n个a} = \underbrace{aa\ldots a}_{m+n个a} = a^{m+n}$；

（2）$a^m \div a^n = \underbrace{(aa\ldots a)}_{m个a} \div \underbrace{(aa\cdots a)}_{n个a} = \underbrace{aa\ldots a}_{m-n个a} = a^{m-n}$（$m > n$）；

（3）$\left(a^m\right)^n = \underbrace{(aa\ldots a)}_{m个a} \times \underbrace{(aa\cdots a)}_{m个a} \times \ldots \times \underbrace{(aa\cdots a)}_{m个a} = \underbrace{aa\ldots a}_{mn个a} = a^{mn}$，

其中$m \in N^+$，$n \in N^+$。但《几何学》中并没有给出上述公式。后世代数教科书大多以这种方式推导同底数幂的运算律。

然而，虽然笛卡儿有了新记号a^n，但他并没有给出“a 的 n 次幂”这样的名称，而是利用平方和立方，根据同底数幂乘方法则来命名更高次的幂：将四次幂称为“平方的平方”，六次幂称为“立方的平方”，等等[9]。对于素数次幂，则沿用德国数学家给出的名称。

7 欧拉：同底数幂的运算律

1765 年，瑞士数学家欧拉（L. Euler, 1707～1783）在《代数学基础》中给出了幂（一个数自乘一次或若干次所得乘积称为“幂”）以及二次幂、三次幂、四次幂等等的定义，详细说明了旧记号 aaa，$aaaa$，$aaaaa$ 等的缺点以及笛卡儿记号的便利性，并给出“指数”的概念。接着，通过将 a 的幂依次乘以 a，a^2，a^3，…，引出同底数幂乘法法则：“a 的两个幂相乘，乘积也是 a 的幂，其指数等于原来两个幂的指数之和。”[10]又通过将 a 的幂依次除以 a，a^2，a^3，…，引出同底数幂除法法则：“a 的一个幂除以另一个幂，商也是 a 的幂，其指数等于第一个幂的指数与第二个幂的指数之差。”[10]最后，欧拉给出幂的乘方运算法则。

到了 19 世纪上半叶，法国数学家拉克洛瓦（S. F. Lacroix, 1765～1843）在其《代数学》中讨论过同底数幂的乘法法则[11]。英国数学家德摩根（A. de Morgan, 1806～1871）在其《代数学》中专门讨论了幂的运算[12]，并给出了一般法则：

$$x^a \times x^b = x^{a+b}，\quad x^a \div x^b = x^{a-b}$$

其中 a，b 为任意整数。之后，指数律出现于任何一部代数学教科书中。

8 结语

对历史文献的考察表明，同底数幂的运算最早源于大数的记法，阿基米德已经知道底数为 10 的幂的乘法法则。在符号代数诞生之前，以丢番图、阿尔·卡克西、斐波那契为代表的数学家们在表示四次及四次以上幂时，都运用了同底数幂乘法法则。15-16 世纪的德国和法国数学家通过等差和等比数列之间的对应关系来呈现同底数幂的运算法则，其中德国数学家更胜一筹，给出了乘、除和乘方三种运算律，而鲁道夫在表示高次幂时采用了同底数幂的乘方法则。韦达用字母表示任意数，为改善幂的记法以及表达幂的运算提供了条件。笛卡儿为幂运算的历史写下了最重要的一页，他所创用的幂的记号使得同底数幂的运算律变得水到渠成、自然而然。18 世纪，欧拉详论指数律，由特殊情形归纳出一般法则。直到 19 世纪，德摩根给出指数律的现代形式，为同底数幂（整数指数的情形）运算律的历史画上了句号。

我们可以重构同底数幂运算律的历史来设计课堂教学。首先，通过阿基米德数沙的故事，引入以 10 为底的幂的乘法运算；接着，设计问题，引出以 2 或 3 为底的幂的运算；最后，利用笛卡儿的记号，给出以字母 a 为底的幂的运算法则。我们还可以根据历史材料顺应

式地编制练习题。比如，阿基米德数到万万万时，得到 10 的几次幂？数到 10 的 20 次幂时，用了几个万？如果没有我们今天的幂的符号，如何只用平方和立方来表达十次幂呢？等等。

参考文献

[1] Tzanakis, C. & Arcavi, A. Integrating history of mathmatics in the classroom: an analytic survey. In: J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2000. 201-240.

[2] Jones, P. S. The history of mathematics as a teaching tool. *Mathematics Teacher*, 1957, **50**(1): 59-64.

[3] Heath, T. L. *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publications, 1959. 221-232.

[4] Woepcke, F. *Extrait du Fakhri*. Paris: L'Imprimerie Impériale, 1853. 48-50.

[5] Smith, D. E. The law of exponents in the works of the sixteenth century. In C. G. Knott (Ed.) , *Napier Tercentenary Memorial Volume*, London: Longmans, Green & Company, 1915. 81-91.

[6] Stifel, M. *Arithmetica Integra*. Nürnberg: Iohan Petreium, 1544. 35-36.

[7] Cajori, F. *A History of Mathematical Notations* (Vol.1) . La Salle: The Open Court Publishing Company, 1951. 335-360.

[8] Clavius, C. *Algebra*. Romae: Apud Barthlomaeum Zannettum, 1608. 22.

[9] Smith, D. E., Latham, M. L. *The Geometry of Rene Descartes*. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1925.

[10] Euler, L. *Elements of Algebra*. London: Longman, Hurst, Rees, Orme, & Co. 1822. 48-84.

[11] Lacroix, S. F. *Elements of Algebra*. Boston : Hilliard, Gray, Little and Wilkins, 1831. 29-30.

[12] De Morgan, A. *Elements of Algebra*. London: Taylor & Walton, 1837. 83-86.

译海拾贝

角的概念的发展历史（2）*

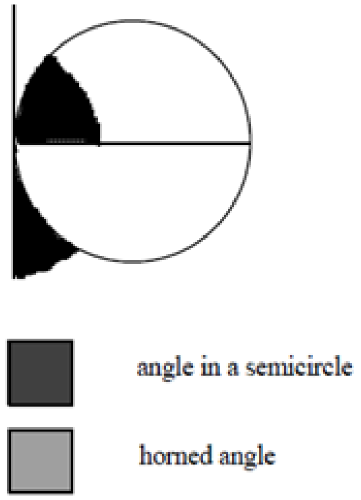
李玲　编译

（华东师范大学数学系，上海，　200241）

在第一部分我们讨论了旧石器时代和新石器时代文化中对方向（directions）的应用。我们看到，角作为一个几何实体，在希腊文化中是有历史根源的。我们还讨论了与之相关的一些问题，并且探讨了其他文化，如中国、印度，是怎样解决几何问题的。在接下来的第二部分，我们将继续讨论中世纪角的概念，以及到 17 世纪狭义上角的概念和到 19 世纪广义上角的概念。最后，我们将简单讨论一下当代关于角的一些方法。

普罗克鲁斯关于角的概念

普罗克鲁斯出生于雅典，卒于 485 年，是中世纪盛期有关几何概念的主要信息来源。他在给欧几里得《几何原本》作注释时(Morrow, 1970)广泛地讨论了角的概念，并且描述了角的分类，这起源于 Geminus 的相关工作 (Heath,1956)。



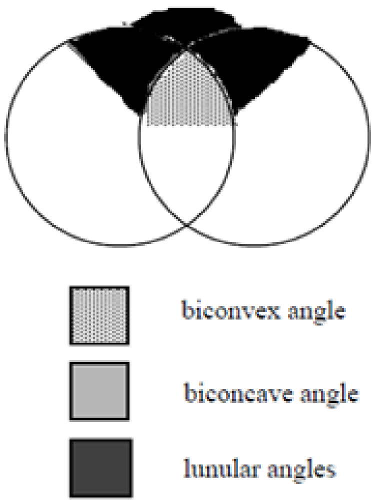


图 1 普罗克鲁斯对圆与其切线所形成的角的描述　图 2 普罗克鲁斯对两圆间的角的描述

普罗克鲁斯出认为角是两个面或者两条线交叉而成，其中面不一定是平面，线不一定是

* 原文信息：José Matos. The Historical Development of the Concept of Angle (2). *The Mathematics Educator*, 1990, 2(1):18-24.

直线。两线间的角分为：锐角、直角、钝角。圆与它的切线所构成的角有半圆角和牛头角两种，这两种角通常也称作混和角，图 1 给出了这两种角。而对于两圆间的角，普罗克鲁斯出将其分成三种：凹形角、凸形角、新月角（图 2)。

下图是普罗克鲁斯出关于角的一个总的分类。

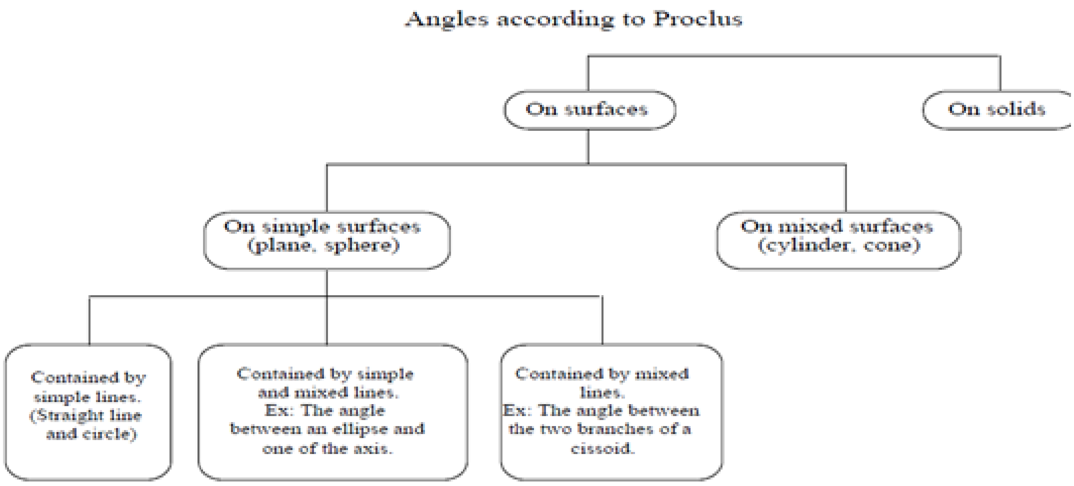


图3 普罗克鲁斯对角的分类

对于普罗克鲁斯来说，角与其他所有几何实体一样，有强烈的哲学、伦理和本位论意义。比如，他将一条线的垂线和从一条线出发通过画一个直角而得到的线区分开来(Morrow, 1970)。在普罗克鲁斯那个时代的数学家中，他们有两个关于角的主题中也体现了"数学实体与哲学，伦理，形而上学问题有密切联系"这样一个观点，这两个主题就是：角的本质，由混和角产生的悖论。首先，让我们来看一下普罗克鲁斯对角的本质的讨论，即角到底是一种关系，面或者立体的一种质，还是一个量。

普罗克鲁斯(Morrow, 1970)认为，角可以被一条线或者一个面分开，就如一个普通的量或者大小。这意味着它不是一个线性量，因为线性量可以被点分开；因此它应该是一个面或者一个立方体。这个事实似乎否认了角是一种质这个属性，因为质是不可分的。

如果我们假定角是一种量，我们就进入到了另一个研究领域。欧几里得《几何原本》第三卷命题16告诉我们，牛头角（即欧几里得术语中的剩余角）小于任何直线角，这表明存在这样一种角，无论它怎样增大都不可能比直角大。因此对于任意给定的剩余角，无论乘以什么数都不会大于直线角。这与公理X.1 (现在我们称之为阿基米德公理)相矛盾，也说明在将角看做一种量的话会存在巨大障碍。

第三种可能是像欧几里得那样，将角看成两条线（或两个面）间的一种关系。然而，指

出，两线之间的关系并不仅仅由这两条线本身决定，并且举了一个例子加以说明。

最后，普罗克鲁斯选择遵从他老师西里阿努（Syrianus）的观点，认为角是这几个种类的结合。他认为一个三角形中的角就同时体现了这三种属性。他总结道，角作为一种量保证了他可分且可被加以比较，它是一个形状这个属性让它可以归到质这一类，而作为关系是因为它需要限制它的两条线或两个面之间的关系(Morrow, 1970)。

普罗克鲁斯也为他那个时代的第二个主题，即非线性角的概念提供了一些有趣的发展。在普罗克鲁斯的对《几何原本》公设4“凡直角都彼此相等”的讨论中，他引用了帕普斯的观点：反过来是不成立的，也就是说，存在非直线构成的角，大小等于直线构成的直角。作为例子，普罗克鲁斯画出了如下图形（图4)。线段AB和BC相等，且它们构成一个直角，∠AEB和∠BFC是半圆角。由半圆角相等知，∠AEB=∠BFC。左右两边同时加上∠ABF，则右边∠ABF +∠FBC=∠ABC，而∠ABC是一个直角；于是左边∠AEB+∠ABF等于一个直角。因此我们有例子说明曲线角也可以等于一个直角。

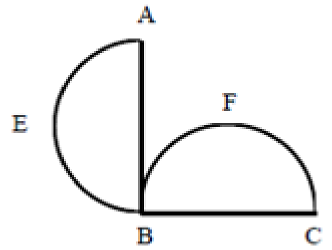


图4 非直线构成的角等于直线构成的角

普罗克鲁斯也说明如果AB和BC构成的角不是直角时，结论同样成立，图5给出了两种

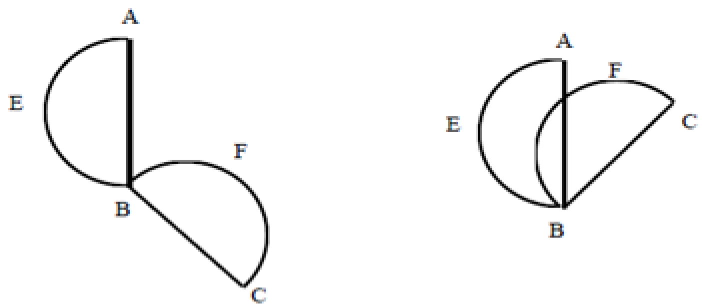


图5 非直角的情形

情形。对于任何给定的直线角，普罗克鲁斯可以画出一个与之相等的新月形角(Morrow, 1970)。注意可以证明“两条相同曲线间的角等于它们的两条切线间的角”。

此外，在对三角形外角（《几何原本》第一卷命题32）和三角形内角和的评论中，普罗克鲁斯补充说，这个定理的逆命题的一定不成立（如图6)。

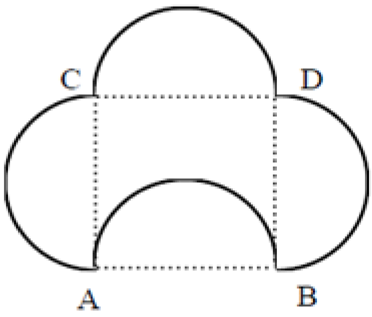


图6 一个曲边的例子

图6中有四个曲面（ACDB是一个正方形），如之前已证明过的，∠A和∠B都等于直角。普罗克鲁斯认为，图中所有内角之和等于两个直角，而且它并不是一个三角形(Morrow, 1970)。我们不清楚的是，为什么普罗克鲁斯没有考虑∠C和∠D。也许可以推测普罗克鲁斯没有意识到图中在点C存在一个内部的混和角。这在另外以后例子中可以得到证实。普罗克鲁斯还认为，不是所有的三角形都是三面的，图7是他自己认为是四面三角形的例子(Morrow, 1970)。

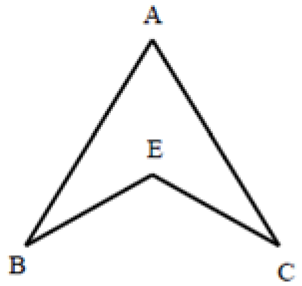


图7 普罗克鲁斯的四面三角形

- 这也是几何悖论之一，即存在四面三角形（BAC）。它由边BA，AC，CE和EB组成，但只有三个角，在点A、B、C处分别有一个角。(p. 257)

普罗克鲁斯认为∠BEC是图形之外的角，这说明他也跟欧几里得一样，不接受比两个直角还大的角(Morrow, 1970; Heath, 1956)。普罗克鲁斯参考了公元前1世纪或者2世纪的一个几何学家芝诺多罗斯（Zenodorus）的观点，将图7叫做空心角(Morrow,1970)。将角定义成两线间的倾斜度是没有价值的，这让我们意识不到图7中内部的角BEC也是一个角。事实上，它让人意识不到任何比平角还大的角。由此可知，普罗克鲁斯是排斥0°角和平角的。他指出，欧几里得在垂线的定义中用语上考究以确保当且仅当两线构成一个角时才成立。他对一条直线能置于同一方向的另一直线的末端的可能性作了如下评论。

- 设想一条直线置于另一直线的一个端点处，并且与之构成一个角。这个角的大小可能等于两个直角的大小吗？显然不能，因为任意直线角小于两个直角，就如任意立体角小于四个直角。即使你把这个角当成最大的钝角，它也会小于两个直角。

普罗克鲁斯关于角的概念的观点与我们今天的观点有很大不同。他认为角是一种质，或者两条线（或者多于两条线，如立体角）间的一种关系，而线不一定是直线。只在一些情形中我们可以量化这种关系或者测量一个角的大小。

普罗克鲁斯时代之后，关于角的本质的争论仍在继续。辛普利丘斯（Simplicius，公元6世纪初）在阿波罗尼奥斯的想法“角是一个平面或者立方体到一个点的收缩”上加以拓展，认为一个平面角（由任意两段圆弧的交点所确定的角）一条线和一个面之间的一种新的实体，一个立体角则是一个面和一个立方体之间的一种新的实体。另外，与辛普利丘斯同时代的一个人说角是两维或者三维的一个量、这些维度的末端交于一点。|菲罗帕纳斯（Philoponus，公元5世纪到6世纪初）广泛地讨论了混合角的本质(Bello, 1983; Knorr, 1986)。

中世纪的观点

11-15世纪，关于角的本质和混合角的争论仍在继续。然而，这个时期更侧重于概念背后的哲学假设，因此没有产生重要的数学发展。

阿维森纳（Avicenna）是11世纪末的一位阿拉伯数学家，他说我们可以“角”作为对它自身的量化，或者作为“求角”的质（尽管他没有用到最后这个词）。对“正方形”和“求面积”也有类似应用。另一个20世纪的阿拉伯数学家阿威罗伊（verroes）称角可以看成第四类，其他三类是点，线，面(Tummers, 1984)。

大阿尔伯图斯（Albertus Magnus，193-1280）是托马斯·阿奎那（Thomas Aquinas）的老师，也是中世纪最早对亚里士多德的著作进行评注的学者之一。在一篇关于欧几里得的《几何原本》的评论中，他延续了亚里士多德关于角到底是一个量、一种质、还是一种关系的探讨。从他的论文中，我们可以看到他对角的概念的一个整体认识。他考虑角的两个维度：“宽度”和“长度”。图8中，α 表示宽度增加的方向，β 表示长度增加的方向。

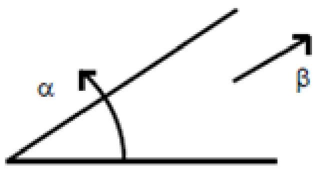


图8 角的两个维度

立体角则还有第三个维度“深度”。大阿尔伯图斯的大部分争论来自于Anaritius (9世纪末)。Anaritius提出如下观点：

（1）由于角有宽度，所以它不是一条线。它也不是一个实体，因为它没有深度。它更不是一个面，因为它不能纵向分割，只能横向分割。角是两条线间一种密不可分的联系。

（2）它也不是一个量，因为当它是一个特殊的直角时，加倍后它将不再是同类型的连续量。

（3）角是一个面或者一个实体的特征，因此它不是一种质。

（4）角可以对一个图形进行分割，而这是质这个属性才具有的一种能力。

（5）但是角可以增大和减小，这看起来又像是一种质。

（6）“锐”和“钝”是量的条件。

（7）一个角有宽度和长度，因此它是一个量(Bello, 1983; Tummers, 1980,1984)。

在大阿尔伯图斯关于《几何原本》的评论中，他总结道，一个角告诉我们关于特定量的一种质。一个角是一个量，但是角的形状，是一种质。然而，在他对亚里士多德《形而上学》的评论中，他提出了一种不同的结论，认为角是一种关系，因为角是一条线和一个面之间的“媒介”(Tummers, 1984)。

中世纪关于混和角的本质的讨论仍在继续。13世纪，《几何原本》编辑者康帕纳斯（Johannes Campanus）对第3卷命题16作了推测并提出了如下问题。如图9，设想直径AC绕C点旋转，只要它切割圆，它会跟它的初始位置形成很多连续的锐角，这些角小于半圆角ADC。但当它停止切割圆时，它形成一个大于半圆角的直角。在这个过程中，直线角不会跟半圆角相等。“从小到大的过渡中，或者从大到小的过渡中，是通过一个中间量而发生的，也将通过相等发生的(Heath, 1926, p.41)”。

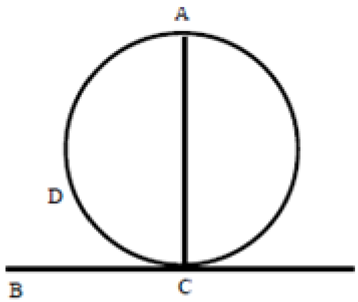


图9 康帕纳斯关于《几何原本》第3卷命题16所作推测的图形阐释

康帕纳斯认为这些角是不同类型的角。16世纪时，卡尔达诺（Cardano）也做了同样的观察，他用到了“接触角”这个术语。

一个是无限数正弦值的出现导出了12世纪和13世纪关于数学的本质的讨论，它也说明了以上问题的关键点所在。

16 世纪的发展

16世纪末见证了法国几何学家 Peletier 和Clavius之间的关于接触角的本质的继续争论，其中接触角是指圆与它的一条切线所形成的角。

- Peletier持有的观点是：接触角不是角；两个圆的接触不是一个量；圆中一条直线的接触也不是一个量；圆的一条直径和其圆周构成的角，不管在圆内还是圆外，都是与一个直线构成的直角相等；所有圆中，一条直径与其圆周构成的角都是相等的(Heath, 1926, p. 41)。

最后一部分的证明如下：

如图10，A，B是同一直线上过同一点的两个大小不同的圆中的半圆角，则A不可能小于B，A也不可能大于B，否则，我们可以画出越来越大的半圆角。最后我们得到一个大于直角的半圆角，这是不可能的。因此，他得到结论“所有半圆角相等(Heath, 1926)”。

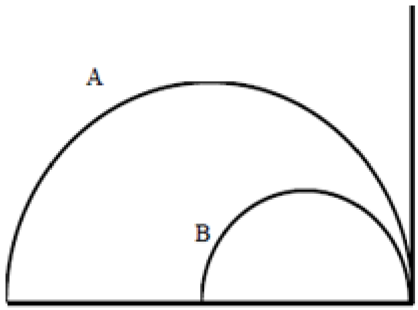


图10 由圆的直径和圆周包含的角

16世纪末17世纪初，韦达（Vieta）做了同样的探讨来支持Peletier 和Clavius。Clavius认为“两个不同大小的圆中的半圆角不可能相等，因为它们不重合”。为使阿基米德公理成立，只需假定这些角是一种与直线角本质不同的量(Heath, 1926)。

这场争论持续到了17世纪。Wallis写了一篇100页的论文，其中包含关于牛头角本质的多种观点 (Kasner, 1945)。他认为，两条线要构成一个角，需要一个倾斜度存在，但是圆与它的切线并不是这样。从接触的观点来看，直线不是在圆的旁边，而是与它相重叠。在这场争论的过程中，Wallis拓展了一些关于角的有趣的概念。下面的语句引用Heath(1926)：

- 点不是线，而是线的起点；线不是面，而是面的起点；因此角不是两线之间的距离，而是它们最初要分离的趋势......

“曲率”这一概念的使用给接触角的讨论提供了一个很好的背景。牛顿和莱布尼兹用分析的方法给出了曲线曲率的定义(Boyer, 1968; Kline, 1972)，并且牛顿对直线角和接触角作了一

个很好的区分(Struik, 1986)，但是他们都没有给出测量这些角的方法。

有趣的是，有证据说明以上所有讨论并不仅限于数学领域。例如伏尔泰（Voltaire）的两本小说里有牛头角这个拓展的概念(Kasner, 1945)。

19 世纪的变迁

关于角的本质的讨论到19世纪发生了重要的变化。罗巴切夫斯基，高斯和波耶尔发展了非欧几何中一种不同的关于角的概念的观点。通过将两条平行线的极限位置所形成的角叫做平行角，罗巴切夫斯基得以将角的概念进行拓展。几何学也不仅限于对物理空间的研究，这意味着不再需要对几何实体作一个直观解释。角的概念的另一个拓展是在19世纪初，角开始用于描述两个周期性事件的时间间隔。一个重要的思想来自于傅里叶（Fourier）三角级数的发展(Kline, 1972)。关于牛头角这个主题，康托给出了一些几何悖论的具体例证，它们并不违背阿基米德公理，解决了曾困扰数学家们好几个世纪的难题。

欧氏几何方面的一些研究继续尝试弄清楚直线角这个概念，并且出现了一些新的观点。Veronese认为，角在一维直线上是与射线相关的一个实体，在二维平面上是与平面上的点相关的一个实体。他将角定义为"由顶点发出的两条射线和它包括在其内部的射线的总和"(Heath, 1956, p.180)。对他来说，一个角是由两条给定射线之间的所有射线的集合(Enriques, 1911)，也就是说"角是两条射线间的射线簇的一部分(Heath, 1956, p. 180)"。另外一种方法是两个半平面重合的部分(Enriques, 1911)。

当代的观点

20世纪见证了角的概念的两个主要发展：一个是受希尔伯特形式主义的影响，另一个是受克莱因埃尔兰根纲领的影响。希尔伯特在他的《几何基础》一书中将角定义为：

- 设*a*是任意一平面，*h*，*k*是*a*上由O点起始的两条不同的射线，把*h*，*k*两条射线所称的线组叫做角(p. 13)。

希尔伯特接着定义了角的内部和外部。如欧几里得一样，希尔伯特的系统中也没有0°角和平角的概念，也没有比平角大的角的概念，因此无法计算凹多边形的内角和。然而，这个系统被当代许多数学家所采用，并在一些国家被引入到数学教材中。

当代关于角的定义，采用布尔巴基的简化的几何观，利用受克莱因影响的代数方法来加以定义。通过线性几何的拓展应用，当前的大部分几何知识可以不用角的概念来加以组织。

然而，这种方法对接触角没有影响。尽管与之相关的悖论已经被康托解决了，但他没有给出一种测量它们的方法。20世纪，人们找到了一些用来比较接触角大小的方法。

Kasner听取了牛顿的建议，牛头角的测量应该以曲线的曲率为基础。他提出(Kasner,1945)，两条曲线g_1和g_2间的牛头角可根据公式进行计算：$M_{12}=\dfrac{(\gamma_2-\gamma_1)^2}{\dfrac{\delta\gamma_2}{\delta s_1}-\dfrac{\delta\gamma_1}{\delta s_2}}$，Kasner证明了它是群的保形变换下的一个不变量。

之后，Waismann (1959)提出了另外一种测量牛头角的方法。"直觉告诉我，我们应该将注意力放在两条曲线间的角形空间，看这些空间是否可以跟其他空间相比较(p. 221)"，由于我们可以用一条直线将角形角（两条曲线组成的角）分成两个混和角，所以我们只需要考虑由一条直线和一条曲线构成的混和角就可以了。Waismann提出，我们可以将这些角进行排序，当直线与两个角的顶点相接，一个角在另一个角之外扩展，就说一个角比另一个角大。他证明了这是一个良序集。

特别地，对圆与它的切线所形成的接触角，我们有一种精确测量这种角的方法。我们只需要将单位圆与它的切线所形成的角定义为1个单位，将$1/r$当作任何半径为r的圆与它的半径所构成的角。对n/r，有$n/r=n\cdot(1/r)$。另外$1/r$和$1/r'$加起来的角是$1/r+1/r'$ (Waismann, 1959)。如我们之前已知的那样，无论r有多大，接触角总是小于任何锐角，这意味着我们不是用同一种测量方法，或者如Waismann提出的那样，我们遇到了他所谓的ultrareal numbers。

这个测量接触角的过程也许是受到克莱因的启发，他在1908年的演讲中给出了一种与Waismann相类似的方法(Klein, 1939)。事实上，Waismann做得更深入。他认为，如果我们考虑过同一点O的所有解析曲线，我们可以将每条曲线变成一些幂级数，其中这些幂级数的系数由其连续阶导数决定。这样我们可以将过一个点的所有解析曲线排序。给定两条解析曲线

$$y_1=a_1x+b_1x^2+c_1x^3+\cdots$$
$$y_2=a_2x+b_2x^2+c_2x^3+\cdots$$

若$a_1>a_2$，就说第一条曲线大于第二条曲线，反之亦然。如果$a_1=a_2$，则接着用同样的方法分析下一个系数。

结 语

人们很早就开始关注“方向”这个概念了。中国人和埃及人通过用一种比率的方法（用到了三角学知识，没有用到角的知识）确定了埃及人所谓的一个金字塔的倾斜度。尽管巴比伦人没有关于“角”的专业术语，但是他们发展了以星星为背景的量化过程以确定方向的不同。

希腊人是最早研究“角”的定义的，但他们概念中的“角”跟欧几里得概念中的“角”一样，是关注于他们的日常空间，因此他们概念中的角是两条直线或者两个平面所构成的这种角。直到 17 世纪才产生这种方法的悖论，“曲率”这个概念的发明给混合角等相关问题提供了一种更精确的方法。悖论还未解决，但是有一种新的数学概念可以避免它们。直到最近我们才能更自信地运用更多改进的数学工具来处理这些角。

有趣的是，不考虑布尔巴基派的代数化直线角的一般化方法，问题并没有结束。事实上，关于角的本质的问题是由一个物理学家提出来的，他是从事量纲分析了，尝试将角的测量公理化(Krantz, Luce, Suppes, & Tversky, 1971)。

- 从量纲分析上来看，角不是一个纯量，这在每个人看来都有点不太舒服…它是说无量纲的，且被广泛测量…因此有一个单位。在所列的物理量的量纲中，它被包括在单位中，但是通常又是被量纲所遗漏；因此，例如报道说角速度是数弧度每秒，但是一般认为它仅有量纲T-1，这里有一些古怪的错误(p. 455)。

尽管由阿基米德系统和非阿基米德系统混合产生的悖论已经解决，但是现在需要发展一些关于可测角的意义的一些新主题。目前尚存的“一些古怪的错误”标志着数学是一个有活力的领域，鼓励我们继续探索新的范例(Kuhn, 1970)。

从一个数学教育者的观点，里面有一个有趣的发现：这几种关于角的概念的发展都能在当今学校数学教材中找到相应的影子。事实上，当今数学教材中有几种角的定义：

（1）一些教材中包含欧几里得和希尔伯特关于角的定义；

（2）在一些地方，角是跟旋转有关的；

（3）在一些高中教材中，角是对周期性事件的度量。

龟标几何中包含一个有创意的角的概念，转向的数量。在龟标几何中，一条线段就是电脑屏幕上的一只乌龟。一个角就是告诉乌龟怎么转动去画下一条线段。从这个过程中提炼出一种有趣的理论“外角理论”，也就是说多边形的外角和总是等于 360°(Abelson & diSessa, 1980)。看角的概念接下来如何发展，以及如何现已存在的观点，这些都是很有意思的。

参考文献

Abelson, H. & diSessa, A. (1980). *Turtle Geometry: The computer as a medium for exploring mathematics.* Cambridge, MA: MIT Press.

Bello, A. (1983). Albertus Magnus and mathematics: A translation with annotations of those portions of the commentary on Euclid's Elements published by Bernhard Geyer. *Historia Mathematica, 10*, 3-23.

Boyer, C. (1968). *A history of mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

Choquet, G. (1964). *L' enseignement de la Géométrie*. Paris: Hermann.

Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris: Hermann.

Enriques, F. (1911). Principes de la geométrie. In J. Molk & F. Meyer (Eds.) *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Tome III, Fondements de la Géométrie*. Paris: Gauthier-Villars.

Heath, T. (1926). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary (Vol. II) (2nd Ed.)*. Cambridge: University Press.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary (Vol. I). (2nd. Ed.)*. New York: Dover.

Hilbert, D. (1902). *The foundations of geometry*. Chicago: Open Court.

Klein, F. (1939). *Elementary mathematics from an advanced point of view. Geometry*. New York: MacMillan.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.

Knorr, W. R. (1986). *The ancient tradition of geometric problems.* Cambridge, MA: Birkhäuser Boston.

Krantz, D., Luce, R., Suppes, P., & Tversky, A. (1971). *Foundations of measurement. Vol. I. Additive and polynomial representations*. New York: Academic Press.

Morrow, G. (1970). *Proclus: A commentary on the first book of Euclid's Elements*. New Jersey: Princeton University Press.

Struik, D. (Ed.) (1986). *A source book in mathematics, 1200- 1800*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Tummers, P. (1980). Geometry and theology in the XIIIth century. An example of their interrelation as found in the Ms Admont 442. The influence of William Auxerre? *Vivarium, 18* (2), 112-142.

Tummers, P. (1984). Albertus Magnus' view on the angle with special emphasis on his Geometry and Metaphysics. *Vivarium*, *22*(1), 35-62.

Waismann, F. (1951). *Introduction to mathematical thinking. The formation of concepts in modern mathematics*. New York: F.Ungar.

他山之石

美国《数学教师》上的 HPM 内容分析*

田方琳

（华东师范大学数学系，上海，200241）

摘 要：对美国《数学教师》杂志 1990-2013 年共 24 卷中的数学史内容进行分析，发现《数学教师》上的数学史论文可以分为 HPM 理论探讨、教育取向的数学史、数学教育史、教学设计与课堂实践四类。这些论文折射出美国 HPM 研究的特点——注重历史研究、关注课堂实践。近年来，技术的运用也促进了数学史在教学上的更有效的运用。

关键词：《数学教师》；数学史；数学教育；内容分析

1 引言

数学史与数学教育之间的关系（HPM）是数学教育中富有魅力、又极具挑战性的研究领域。近年来，由于其巨大的教育价值和丰富的学术内涵，HPM 在我国受到越来越多的关注。从国际 HPM 研究现状来看，将数学史融入数学课堂教学，已成为学术界关注的焦点之一。我国的 HPM 实践研究还远远不够，成功的 HPM 案例凤毛麟角；长期以来，数学史"高评价、低应用"的现状仍有待于改变。数学史素养不足、数学史素材匮乏、HPM 教学设计方法缺失，已经成了制约 HPM 实践研究的主要因素。鉴于此，我们希望借鉴他山之石，从国外数学教育文献中获取资源，为我们的 HPM 实践研究服务。

《数学教师》（以下简称 MT）是全美数学教师理事会（NCTM）的官方杂志，旨在提高 8-14 年级的数学教学并服务于教师教育，为分享活动、教育策略、加深数学思想的理解和联系数学教育研究与实践提供平台，在美国中学数学教育界有着广泛的影响。该刊物自 1906 年创刊以来，在相当长时间内都保持重视数学史和数学文化的传统。从某种意义上，该刊物上的 HPM 论文是美国 HPM 研究的一个缩影，值得我们去研究。本文对该刊 1990-2013 年间共 24 卷、212 期上的 HPM 类论文进行了深入考察，试图回答以下问题：《数学教师》上的 HPM 类论文的研究内容是什么？有何特点？对我们 HPM 教学与实践研究有何启示？

* 课程教材研究所十二五规划重点课题"数学史融入数学教材"部分研究成果。

2 《数学教师》上的数学史

通过对 ***MT*** 共 24 卷的论文深入考察和分析，我们总共发现了 77 篇 HPM 类论文。按照不同的主题，这些论文可以分为四类：HPM 理论探讨、教育取向的数学史、数学教育史、教学设计与课堂实践。图 1 给出了各类论文数量的分布。

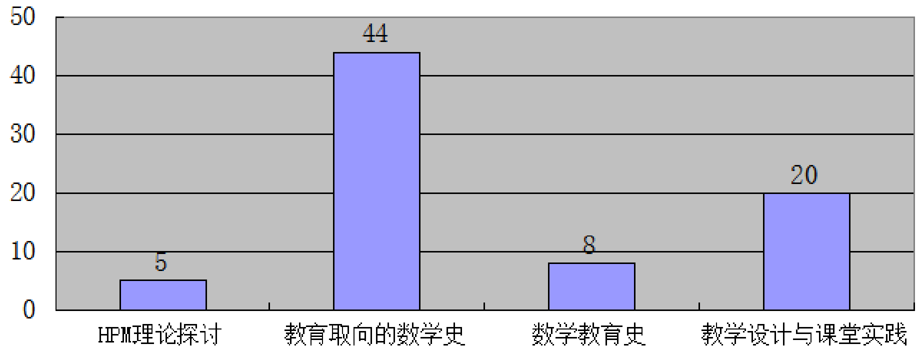


图 1 《数学教师》上的 HPM 论文分类统计

从图 1 可见，***MT*** 中的数学史类论文以教育取向的数学史及教学设计与课堂实践为主，教育取向的数学史类占了总数的 60%，教学设计与课堂实践类占了 26%。HPM 理论探讨及数学教育史也都有涉及，但各只有 5 篇。

2.1 HPM 理论探讨

"HPM 理论探讨"主要是指关于为何以及如何在数学教育中运用数学史。这类文章共有五篇：Bidwell 的"用数学史使课堂人性化"[1]、Marshall 的"历史在数学课中的角色"[2]、Wilson 的"谁？如何？什么？用历史教数学的一个策略"[3]、Loretta 的"数学史旅行"[4]、Po-Hung Liu 的"教师需要在教学中运用数学史吗"[5]。其中有三篇刊于千禧年，最早的一篇是在 1993 年，最后一篇距今也有十年了。表 1 给出了各篇文章关于"为何"和"如何"的观点。

表 1 关于"为何"与"如何"的观点

序号	文章	为何运用数学史	如何运用数学史
1	**用数学史使课堂人性化**	交流、联系和感受数学价值；告诉我们数学的逻辑发展	展示轶事；课程中嵌入；让历史在课堂中重现
2	**历史在数学课中的角色**	将数学置于其历史情境中；展现数学与其作为文化一部分的关系；启发数学学习与教学	

3	**谁？如何？什么？一个用历史教数学的策略**	趣味问题库增强问题解决能力；加深概念理解建立理解的良好基础；建立数学联系数学话题应用其它学科；突出数学与社会的交互作用	师生思考谁做数学？如何做的数学？数学是什么？
4	**数学史旅行**	将数学置于其历史环境中；展示数学与文化的相互作用；指导学习与教学	
5	**教师需要在教学中运用数学史吗**	给教师以教学指导；揭示数学人文的一面；提高学习动机；促进对学习的积极态度	

虽然 ***MT*** 中 HPM 理论探讨的文章并不多，但这几篇我们都可以看到，关于是否要在数学教学中运用数学史这一问题，答案是肯定的。而对于如何在课堂中运用，仁者见仁，智者见智。笔者之一也曾提出四种运用方式，在我们的数学史融入的教学中发挥着作用。而这几也对教师了解、认识数学史进课堂的意义和实践运用有着指导性的作用。

2.2 教育取向的数学史

“教育取向的数学史”指文章讲述了一段或几段数学史，旨在服务于数学教育而又未具体联系课堂实践。这一部分是 ***MT*** 中 HPM 类论文的主流，是中学教师运用数学史的一个资料库。44 篇文章的内容可以分为数学专题、数学人物、数学问题、教学策略等类型，图 2 给出了各类文章数量分布。

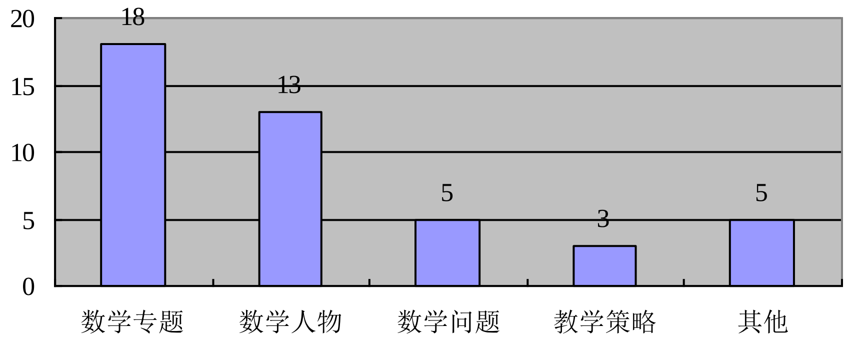


图 2 教育取向的数学史各类主题的数量分布

“数学专题”指文章以某一数学内容相关历史或相关历史的延申为主题的文章。如 Bressoud 在“三角学历史在教学上的应用”一文中，从三角学的开端——圆中的三角学开始，阐述了三角学中的基本问题、角度量的发展、三角形中三角学的出现及教育启示等内容[6]。又如，Lamb 在“埃及的两种测量工具”一文中，通过对水平仪、铅锤水准仪的介绍讲述了埃

及人如何在实践中运用数学[7]。这类文章在"教育取向的数学史"类中占到三分之一，是比较常见的数学史介绍方式。它们的写作目的都是为教育服务。这种或围绕一个数学知识点或围绕一个数学情景展开的文章可以相对深入的对一个内容进行介绍，为教师运用提供了丰富的资料，拓宽了教师视野，促进其专业发展。

"数学人物"是指以人物为主题或线索的文章。或是介绍数学家的轶事，或是介绍人物的同时讲述其一些数学理论。如 Shotsberger 在"开普勒和怀尔斯：坚持不懈的典范"一文中，讨论了怀尔斯（A.Wiles）和开普勒（J. Kepler, 1571-1630）在数学上的贡献[8]。怀尔斯证明了费马大定理，而开普勒在探索宇宙本质的过程中改进了数学方法导致了微积分的发明。他们两个人的道路在许多方面互相映衬，并且吸引我们深入了解数学的创造性过程。关于人物部分的文章占教育取向数学史的近 30%。这大概和数学史本身的特点有关，毕竟，人物线索在历史中是一个重要线索。这些文章通常以激发学生学习动机、学习前人的精神品格为主，也有一些提供了数学方法或数学理论。17 世纪法国数学家瓦里格农（P. Varignon, 1654-1722）第一个给出了中点四边形定理的严格证明，Oliver 介绍了瓦里格农的生平，并对其《数学基础》进行了考察[9]。另外，人物中还有一类文章是值得我们关注的，即女性数学家。这样的文章共有 3 篇，主要都是鼓励女性学习和研究数学的。如 Loretta 在"为什么女数学家那么少"一文中，介绍了六位女数学家的工作，让我们看到历史上并不乏优秀的女性数学家，而同时女性要在数学上有所作为往往要跨越更多的藩篱[10]。

"数学问题"指以展示或解答历史上已有的数学问题展开的文章。如 Howard 在"古埃及纸草书中的数学问题"一文介绍了纸草书上三类古老的数学问题：莱因得纸草书中的圆面积公式与 π 的近似值；莱因得纸草书中的等差数列和等比数列；莫斯科纸草书中的正四棱台体积公式[11]。这些问题可以让学生了解数学的历史，丰富数学课程。

"教学策略"专指通过数学的发展或历史上的教学形式，启发今天的教学策略。3 篇文章中有 2 篇是关于苏格拉底的对话形式与研讨班的，还有一篇借鉴导数的历史展提出"运用-发现-探索/发展-定义"的教学框架。可见，数学史有助于我们选择合适的教学策略。

"其他"的类别中有关于语源学的文章、数学符号的介绍、一个时代或地区数学的发展情况以及通信中的例子。这些对教师的专业发展也都是大有裨益的。

教育取向的数学史除了以上分类，还有多元文化问题是值得我们借鉴的。"西方中心论"的偏见早已成为过去。***MT*** 的"多元文化数学"指的是不同地区、不同文明的数学。Lee-Chua 和 Queena N 就在文章中介绍了菲律宾的数学，涉及计数、测时间、几何与逻辑，数学教师可以将这些整合到数学课程中，帮助学生理解数学在不同地域是广泛存在的，同时增强少数

民族学生的信心与自豪感[12]。这类文章共有 6 篇，虽然数量不多，但对于促进少数民族学生学习、丰富数学史研究内容有重要意义。

2.3 数学教育史

数学教育史类的论文共有 8 篇。

Stein 在“扬的远见”一文中介绍了美国数学教育家扬（J. W. A. Young, 1865-1948）在 20 世纪初前瞻的教育思想。简言之，扬认为，一个人要成为成功的数学教师，不仅要理解数学，还需要许多其他的方法与技能，比如小组学习、在任务中学习、多种评价方式、关注学生的需要与能力等[13]。

4 篇论文讨论数学教育改革。1999 年，在 NCTM《学校数学课程与评价标准》十周年和 F 克莱因（F. Klein, 1849-1925）诞辰 150 周年之际，McComas 设想，Klein 必会欣赏 NCTM 在从死记硬背的学习转变为有意义的数学学习的教育改革上所做的努力[14]；Case 在“荷兰的报告：荷兰的中学数学改革”一文中考察荷兰数学教育改革的情况，试图为美国的数学教育改革提供借鉴[15]；一篇是对 AP 课程与技术改革的回顾[16]；还有一篇叙述了美国“新数运动”和“回到基础”运动的特点[17]。

有 3 篇论文是关于教材的。主要是对历史上数学教材的介绍。让我们可以从中了解以前的数学学习的内容及特点，启发现在的教材编写、数学教学与学习。

上述文章提示我们，数学教育不能割裂历史，今日数学教育的改革和发展需要借鉴历史经验。

2.4 教学设计与课堂实践

MT 注重课堂实践，这在数学史部分也得到了很好的体现。77 篇文章中有 20 篇是关于教学设计与课堂实践的，其运用数学史的方式互有不同。其中，14 篇论文采用了复制式，3 篇采用了顺应式，3 篇采用了重构式。

复制式是 ***MT*** 中运用数学史的主要方式。也就是说，***MT*** 的数学史实践相关内容多以直接采用历史上的问题和解法为主，或是向学生介绍前人的方法、思想，或是将历史上的问题采用一种新的方法解答，用新的眼光加以审视。这于我们是有启发的，除了学习古人的解法，古题新解也是探究式学习重要的部分。

Bruyn 在给 12 年级资优生班讲授的一堂课中，采用费马的方法来求函数

$y = x^2, y = x^3, y = 2^x$ 图形下的面积[18]。首先，先作等宽长方形，再用宽成等比数列的一系列矩形求其面积，如图 3 所示。这节课为学生后面微积分的学习打下了基础。

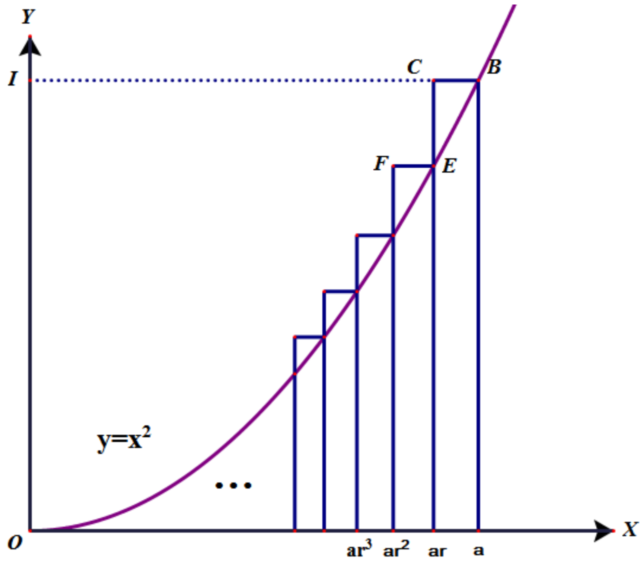


图 3 用宽成等比数列的一系列矩形求图形面积

Shirley 描述了一个以勾股定理为主题的教学活动设计[19]。设计中，作者引用了毕达哥拉斯的问题、语言等。作者认为，数学教育的目的之一是让呈现给学生的数学更生动。学生应该知道数学是不断变化的，是在许多人的参与中不断发展的。

“顺应式”是指根据历史材料，编制数学问题；“重构式”是借鉴或重构知识的发生、发展历史。***MT*** 中这两种方式运用的都比较少，这也许和其运用难度是有关的。Oliver 考察了瓦里格农平行四边形（依次连接任意四边形中点所得到的四边形）的起源，并进一步讨论了与该四边形相关的推论，据此为中学生设计探究活动[20]，运用数学史的方式属于顺应式。Santucci 借鉴阿基米德推导圆面积公式和求 π 的方法，在课堂中用类似的探究方式借助周长对 π 进行估计[21]，属于重构式运用数学史。

复制式是其数学史融入最常用的方式，顺应式与重构式较少，而很多初识数学史的教师最常用的附加式在 ***MT*** 中几乎找不到。

3 《数学教师》上的数学史内容特点

纵观这 24 卷内容，我们不难看到 ***MT*** 数学史内容的以下特点。

3.1 注重文献研究，选题丰富多彩

MT 非常注重文献研究，这一方面可以从“教育取向的数学史研究”的数量上看出，另一方面也可以从 ***MT*** 中的作者身份与引文数量发现。与其它文章不同，数学史方面文章的作者主要来自高等院校和研究机构，所引用的参考文献也常常在 10 篇以上，研究多建立在对原始文献的分析基础上，都具有较高的学术水平。

同时，我们看到 ***MT*** 中的数学史论文有着丰富多彩的选题。论文所涉及的知识领域涵盖代数、几何、概率、微积分等学科；涉及的人物有古代数学家，有近代数学家，也有现代数学家；涉及的问题有化圆为方、本杰明谜题等，此外还涉及语源学、数学符号等话题。

大量的文献研究及选题的多样性为数学教育工作者提供了教学资源，便于教师利用其对自己的课堂进行设计。

3.2 关注课堂教学，活动形式多样

从 ***MT*** 中较多的教学设计与课堂实践的文章中我们可以看到其对课堂教学的关注。不论是理论探讨还是文献研究，终究是为了帮助教师更好地教，帮助学生更好地学，让数学课堂更加有效与丰富。

另外，我们还看到，数学史在课堂中运用的形式也是多种多样的。除了一般的教授、探索，还有许多有趣的活动形式。Benson 安排学生以数学家的身份通过书信向他人介绍该数学家的一项数学发现[22]；Shirley 让教师装扮成毕达哥拉斯来教数学史，讲述毕达哥拉斯的一些思考与成就，让数学课堂更生动[19]；Judith 在牛顿的纪念日让学生撰写以牛顿为中心的各种话题的小文[23]。这些课堂生动活泼，为历史进入课堂提供了多样的形式。

3.3 充分利用技术，沟通历史现实

Daniel 在“动态可视化与证明：一个经典问题的新方法”一文中，讲述了如何通过交互式几何软件，只依靠初等几何方法来解决著名的荒岛寻宝问题[24]。这是 ***MT*** 中首次出现将技术与数学史结合的论文。

2009 年，Burke 和 Burroughs 首次明确提出将数学史与信息技术相结合。他们指出，在高中阶段用现代技术来考察经典数学问题，可以减少计算量，并提高学生的归纳能力[25]。历史上，一些经典问题是用微积分而非代数方法来解决的，而借助计算机代数系统，教师在课堂上就可以避开微积分，在微积分预备课程中讨论那些经典问题。

Althoen 借助图形计算器，用 16 世纪意大利数学家费拉里（L. Ferrari, 1522-1565）的方法来解五次方程[26]。Livermore 则利用几何画板等软件来解决古希腊三大几何难题之一的“化圆为方”问题[27]。

迄今为止，***MT*** 已有8篇论文将技术与数学史结合起来。从这类文论文中，我们看到现代技术可以帮助教师快速再现或重构历史，从而可以更加有效地发挥数学史在数学教学中的作用。有理由相信，从计算器到几何画板、代数系统软件，数学史与技术的结合必将成为 HPM 教学的一种趋势。

4 结论与启示

通过对 ***MT*** 从 1990 年到 2013 年共 24 卷的 HPM 论文的考察，我们发现，HPM 论文在 ***MT*** 中始终占有一席之地，其内容涉及 HPM 理论探讨、教育取向的数学史、数学教育史和 HPM 教学设计与实践四类，从 ***MT*** 上的 HPM 论文可以窥见美国 HPM 研究具有“注重文献研究、选题丰富多彩”、“关注课堂教学、活动形式多样”、“充分利用技术、沟通历史现实”等特点。这些论文对我们的 HPM 研究具有重要的借鉴意义。

（1）从内容上说，***MT*** 以教育取向的数学史为主，这为我们提供了丰富的史料，其中多以数学专题和人物为线索，沿袭了数学史研究的传统。数学史是 HPM 的基础，仅仅利用二手、三手文献是远远不够的，我国 HPM 研究者需要加强数学史的研究，才能提高 HPM 的研究水平。另外，也应适当关注女性主义和多元文化。

（2）教学设计与课堂实践是 HPM 的重要目标。从比较分析中可以看到，复制式与顺应式是 ***MT*** 中最常用的两种方式，而重构式则较少。这表明，借鉴数学历史、再现知识自然发生过程的重构式是 HPM 教学设计与实施中的难点，并非旦夕之功，需要我们做更多的探索与尝试。

（3）美国的 HPM 课堂活动形式多样、生动活泼、极具人情味。为了更有效地发挥数学史的教育价值，我们可以设计更多的 HPM 教学形式，让 HPM 更“接地气”、更具人文气息、更丰富有趣。

（4）技术与数学史的融合已经成为一种趋势，近些年越来越多这样的文章出现，技术可以帮助我们再现或重构历史，简化繁琐的计算，缩短冗长的过程，让古代数学家的思想方法更清晰、更直观、更易于理解。一言以蔽之，技术为 HPM 插上了翅膀。

参考文献

[1] Bidwell, J. K. *Humanize your classroom with the history of mathematics. Mathematics Teacher*, 1993, **86**(6):461-464.

[2] Marshall, G. *The role of history in a mathematics class. Mathematics Teacher*, 2000, **93**(8): 704-706.

[3] Wilson, P. *Who? How? What? A strategy for using history to teach mathematics. Mathematics Teacher,* 2000, **93**(8): 642-645.

[4] Loretta. *A mathematical history tour. Mathematics Teacher*, 2000, **93**(8): 704-706.

[5] Liu, P. H.. *Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching. Mathematics Teacher,* 2003, **96**(6): 416-421.

[6] Bressoud, D. M. *Historical reflections on teaching trigonometry. Mathematics Teacher*, 2010, **104**(2): 106-112.

[7] Lamb, J. F. *Two Egyptian construction tools. Mathematics Teacher*, 1993, **86**(2): 166-167.

[8] Shotsberger, P. G. *Kepler and Wiles: models of perseverance. Mathematics Teacher*, 2000, **93**(8): 680-681.

[9] Oliver, P. N. *Pierre Varigon and the Parallelogram. Mathematics Teacher*, 2001, **94**(4): 316-319.

[10] Loretta, K. *Why were so few mathematicians female. Mathematics Teacher*, 1996, **89**(7): 592-596.

[11] Howard, C. A. *Mathematics problems from ancient Egyptian papyri. Mathematics Teacher*, 2009, **103**(5):332-339.

[12] Lee-Chua, Queena, N. *Mathematics in Tribal Philippines and Other Societies in the South Pacific*. *Mathematics Teacher*, 2001, **94**(1): 50-55.

[13] Stein, S. L. *Young's Vision*. *Mathematics Teacher*, 1993, **86**(4): 330-333.

[14] McComas, K. K. *Felix Klein and the NCTM's Standards: A Mathematician Considers Mathematics Education*. *Mathematics Teacher*, 2000, **93**(8): 714-717.

[15] Case, R. W. *Report from the Netherlands: The Dutch Revolution in Secondary School Mathematics*. *Mathematics Teacher*. 2005, **98**(6): 374-384.

[16] Kennedy, D. *AP Calculus and Technology: A Retrospective*. *Mathematics Teacher*, 2002,

95(8): 576-581.

[17] Roberts, D. L., Walmsley, A. L. E. *The Original New Math: Storytelling versus History*. *Mathematics Teacher*, 2003, **96**(7): 468-473.

[18] de Bruyn, Y. *Fermat's Method of Finding Areas under Graphs*. *Mathematics Teacher*, 2012, **105**(7): 550-553.

[19] Shirley, L. H. *A visit from Pythagoras-using costumes in the classroom*. *Mathematics Teacher*, 2000, **93**(8): 652-655.

[20] Oliver, P. N. *Consequences of the Varignon parallelogram theorem*. *Mathematics Teacher*, 2001, **94**(5): 406-408.

[21] Santucci, L. C. *Recreating history with Archimedes and Pi*. *Mathematics Teacher*, 2011, **105**(4): 298-303.

[22] Horn, J., Zamierowski, A., Barger, R.. *Correspondence from mathematicians*. *Mathematics Teacher*, 2000, 93(8): 688-691.

[23] Schimmel, J. *A Celebration in Honor of Issac Newton*. *Mathematics Teacher*, 1991, **84**(9): 727-730.

[24] Daniel, S. *Dynamic visualization and proof: A new approach to a classic problem*. *Mathematics Teacher*, 2003, **96**(6): 394-398.

[25] Burke, M. J., Burroughs, E. A. *Using CAS to solve classical mathematics problems*. *Mathematics Teacher*, 2009, **102**(9): 672-679.

[26] Althoen, S. *Ferrari's method and technology*. *Mathematics Teacher*, 2005, **99**(1): 68-70.

[27] Livermore, J. M. *Squaring the circle with the Geometer's Sketchpad*. *Mathematics Teacher*, 2012, **106**(5): 390-393.

[28] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望. 中学数学月刊, 2012 (2): 1-5.

教学实践

基于历史相似性的“用字母表示数”教学

叶晓娟[1]，顾海萍[2]

（1.华东师范大学数学系，上海, 200241; 2. 上海师范大学附属经纬实验学校，上海, 200444）

“用字母表示数”是沪教版七年级数学第一课的内容，是学生学习符号代数的开端，因此，这一内容的教学至关重要。从历史上看，从修辞代数到缩略代数，再到符号代数，代数学的发展经历了三千多年的漫长历程。研究表明，在一定程度上，学生对符号代数的认知过程与符号代数的历史发展过程是相似的[1]。因此，我们基于历史相似性，设计了“用字母表示数”的教学过程，以期达成以下三个教学目标：

（1）理解字母表示数的意义；

（2）会用字母替代一些简单问题中的数；

（3）经历代数发展的三个阶段，体会用字母表示数的过程，领会字母表示数的数学思想。

1 代数学的历史发展过程

在代数学发展的早期，人们完全用文字来表达一个代数问题的解法。由于不知道用字母表示数，数列“通项”概念并不存在，所有数列求和的结果都只能针对具体的若干项。公元前 6 世纪，毕达哥拉斯学派对多边形数的研究就是如此[2]。

公元 3 世纪，古希腊数学家丢番图（Diophantus）在其《算术》中用字母“ς”表示未知数，成了缩略代数的先例，使代数学前进了一大步。但由于丢番图并不知道用字母表示任意数，丢番图只能用特殊的数来代替问题中的已知数[2]。

到了 16 世纪，法国数学家韦达（F. Viète,1540～1603）在《分析引论》（1591）中用字母表示未知数和任意数，标志着符号代数的诞生。

基于历史相似性，我们设置了三个问题，让学生经历从修辞代数到缩略代数，再到符号代数的不同过程，体会历史演变过程中字母表示数蕴含的数学思想与文化。随后我们引导学生总结了字母表示数的意义和规范写法。接下来利用三道例题，由浅入深，让学生在实践中

学会用字母表示未知数和已知数，实现从修辞代数到符号代数的尝试性过渡。

2 教学过程

2.1 代数学三阶段的再现

2.1.1 由修辞代数引入

问题 1：如图 1，游乐场的大转盘的最高点、最低点分别离地面 110 米、10 米，那么这个大转盘的半径是多少米？

学生用修辞代数很容易给出了解答：$(110-10)\div 2=50$（米）。通过这一问题的引入，学生体会到公元 3 世纪以前的修辞代数方法。

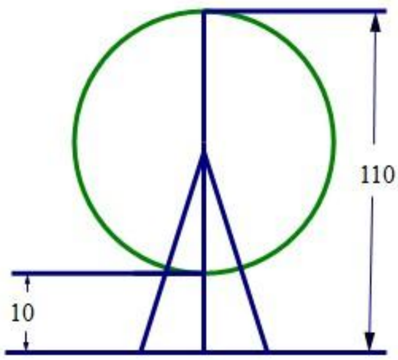


图 1

2.1.2 向缩略代数的过渡

问题 2：有一天，鸡、兔、蜘蛛关在同一个笼子里，一共有 45 个头，240 条腿。第二天早上发现蜘蛛被鸡吃掉一半，白天又有一半的鸡和三分之一的兔逃跑了，到了晚上一数发现剩下的鸡、兔、蜘蛛共有 130 条腿。问鸡、兔、蜘蛛原来各有几只？

在解决该问题时，学生很自然地想到设未知数来求解。于是教师列出了方程。过程如下：

设鸡、兔、蜘蛛分别有 x、y、z 只，则有

$$\begin{cases} x+y+z=45 \\ 2x+4y+8z=240 \\ \dfrac{2x}{2}+\dfrac{4y}{2}+\dfrac{16y}{3}=130 \end{cases}$$

当教师问：你觉得字母在这里表示什么？学生回答：字母表示未知数。教师指出，引入未知数看似简单，历史上却经历了漫长的过程；倘若我们生活在没有字母表示未知数的灰暗岁月里，能否解决该问题呢？

教师与学生一起进行讨论，运用修辞代数的方法解出了这道题。与缩略代数方法相比，修辞代数方法显得复杂而冗长。“用字母表示未知数”这一突破给数学带来了新的气象，那么究竟是谁最早踏出了这一步呢？

教师在 PPT 中向学生展示了丢番图的墓志铭：

行人啊，请稍驻足

这里埋葬着丢番图

上帝赋予他一生的六分之一

享受童年的幸福

再过十二分之一，两颊长胡

又过了七分之一

燃起结婚的蜡烛

贵子的降生盼了五年之久

可怜那迟到的宁馨儿

只活到父亲寿命的半数

便进入冰冷的坟墓

悲伤只有通过数学来消除

四年后，他自己也走完了人生旅途

教师就上述墓志铭进行提问：通过这段文字我们可以得到哪些信息？如何求丢番图的年龄？

此时学生已经可以独立地进行设未知数并列方程求解，由于本节课重点在于用字母表示数，因此我们省去了解方程的过程。学生解答如下：

设丢番图的年龄为 x，则有

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$$

该内容的设置不仅为学生补充了数学文化知识，还使学生感受到数学家对数学的热爱，并经历了用字母表示未知数的过程，学会用字母表示简单的数。

2.1.3 进入符号代数

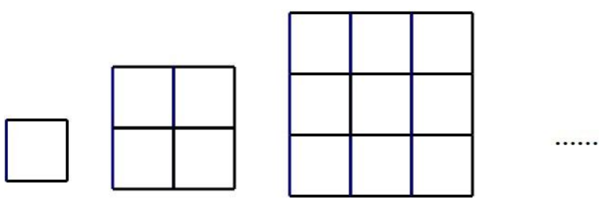


图 2 正方形数

问题 3：如图 2，用若干个大小相同的小正方形，依次拼成大的正方形，第 5 个和第 10 个大正方形需几个小正方形拼成？第 n 个大正方形需几个小正方形拼成？

由学生填写表 1，教师就表 1 进行提问：本题中的 n 表示的是什么？是特定未知数吗？可以求解吗？此时学生可以回答出 n 表示的是任意一个自然数。

表 1 任意一个正方形数

序号	1	2	3	4	5	…	10	…	n
小正方形个数	1	4	9	16		…		…	

公元前 6 世纪，毕达哥拉斯学派已经研究过正方形数了，毕达哥拉斯能轻易说出随便多大的一个具体的正方形数，却无法表达任意一个“正方形数”。此时教师采用复制式将数学史内容呈现在学生面前：丢番图在 3 世纪已经使用字母表示数了，但是在他之后的一千多年间，依然没有人想到用字母来表示任意数。只能用具体的数字来表达。欧洲人非但没有进步，反而倒退回古代两河流域的水平。

直至 16 世纪，法国数学家韦达终于实现历史性突破，在其《分析引论》中使用字母来表示未知数和一类数。字母表示任意数后，代数学告别了旧时代，插上了新翅膀，在人类文明的天空自由地飞翔起来。

2.2 字母表示数的意义及规范写法

在讨论中师生总结了字母表示数的意义：字母可以表示任意数，可以表示特定意义的公式，可以表示符合条件的某一个数，可以表示具有某些规律的数。总之，字母可以简单地将数量关系表示出来。

随后，教师列举了一些公式，如加法交换律、三角形面积公式和圆面积公式等，让学生思考并回答这些公式中字母表示数的意义。

在梳理了字母表示数的意义之后，教师与学生一起总结了字母表示数的规范写法：数和表示数的字母相乘，或字母和字母相乘时，乘号可省略不写，或用“.”来代替，在省略乘号时，要把数字写在字母的前面。

2.3 小试牛刀——学生实践

这部分设置三道习题，主要为了考察学生对字母表示数的认知，通过具体实例强化知识。

练习 1：1 千克桔子价格为 a 元，小明买了 10 千克桔子，用 a 表示小明买的桔子总价。

练习 2：设某数为 x，用 x 表示下列各数：

（1）比某数的一半还多 2 的数；

（2）某数减去 3 的差与 5 的积；

（3）某数与 3 的和除以某数所得的商；

（4）某数的 60%除以 m 的商。

以上两个练习学生均能独立完成，由教师发现学生在书写过程中一些错误并及时纠正，规范学生的书写。

练习 3：已知两个数的和与差，怎样求这两个数？请你给出解决办法。

该问题对应代数学三阶段的解法如表 2：

表 2 练习 3 的三种解法

代数三阶段	具体解法
修辞代数	两数和加两数差再除以 2，得较大数；两数和减去两数差再除以 2，得较小数。
缩略代数（丢番图的解法）	设两数分别为 x、y，两数和为 100，两数差为 40。算得 x，y 分别为 70 和 30。
符号代数（韦达的解法）	设两数分别为 x，y。两数和为 m，两数差为 n。列方程组算得 $x=\dfrac{m+n}{2}$， $y=\dfrac{m-n}{2}$。

全班 33 名学生中，共收集到 31 份有效回答。我们对学生的答案进行了分析，将其分为 4 类，见表 3。图 3-5 分别是三个学生各自给出的解法。

由统计结果可以看出，在“字母表示数”的教学之后，部分学生已经开始抛弃修辞代数方法，向缩略代数和符号代数方法过渡了。在使用符号代数的 11 名学生中，有 8 人给出了完整、正确的解答过程。

表 3 学生的解法分类

类别	人数	百分比
修辞代数	3	9.7%
缩略代数	14	45.2%
符号代数	11	35.5%
看不懂题意或空白	3	9.7%

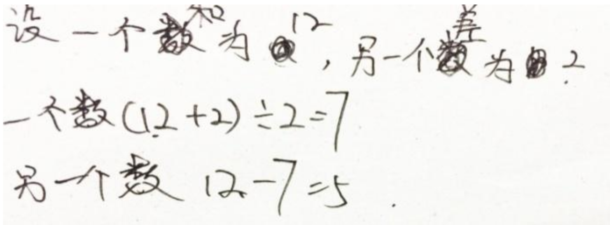


图 3 修辞代数解法

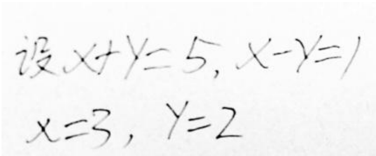


图 4 缩略代数解法

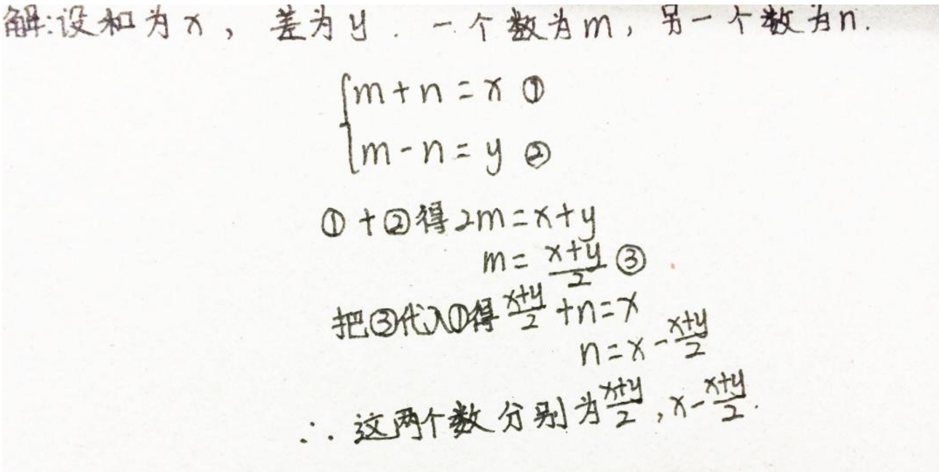


图 5 符号代数解法

在第二类答案中，大部分都是设了两数分别为 x 和 y 之后就无从下手了，一位学生写道：“不知道怎么表示结果（即和与差）”（如图 6）。可见，学生基本掌握了用字母表示未知数，而有相当一部分学生在用字母表示已知数或一类数时仍存在障碍，这也是造成这部分学生无法理解题意或不会做的原因。

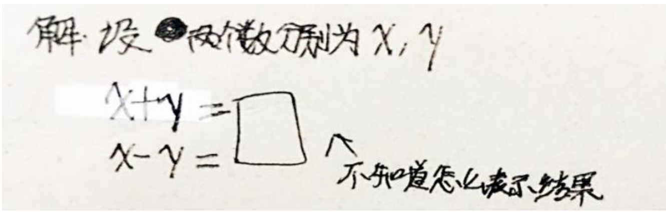


图 6 学生的疑惑

3 学生反馈

课后，我们对 33 名学生进行了问卷调查，共收到有效问卷 32 份。

调查结果表明，31 名学生（96.9%）对“这堂课让我学会了用字母表示数”这一观点持“同意”或“非常同意”态度。30 名学生（93.8%）对“用字母表示数可以解决很多以前解决不了的问题”持“同意”或“非常同意”态度。

27 名学生（84.3%）对于“课堂上的数学历史知识对我的学习有帮助”持“同意”或“非常同意”态度。此外，对于本节课中数学家的故事，学生感受最深的三条依次为：“数学历史的发展给人类带来的进步”（16 名学生），“内容很有趣，提高了我们的学习兴趣”（11 名学生），“数学历史发展的不易”（4 名学生）。

4 结 语

从公元 3 世纪之前的修辞代数到 16 世纪以后日趋成熟的符号代数，代数学的发展经历了漫长而曲折的艰辛历程。借鉴历史的演变，我们在历史相似性的基础上设计了符合历史发展顺序的从修辞代数到符号代数的渐进式教学。在学生解决问题的过程中可以看到，从修辞代数到符号代数的过渡是一个循序渐进的过程。学生在数学理解过程中遇到的障碍正如历史发展过程中所经历的曲折一样，并不是一步就能跨越的。由于学生的个体性差异，并不是所有学生经过一节课的教学就顺利完成从修辞代数到符号代数的过渡。通过“字母表示数”的教学，学生基本上摆脱了对修辞代数的依赖，开始向缩略代数和符号代数过渡，值得指出的是，在 11 位使用符号代数解决问题的学生中，有 8 人完整且准确地完成了练习题，这在学生学习符号代数之初是非常难得的。

要使学生都能完成从修辞代数到符号代数的过渡，教师需要从历史发展过程中吸取古人克服障碍的经验，在学生学习过程中预设性地给予引导，让学生自然地经历这一过渡，有准备地攻克难关。

参考文献

[1] 汪晓勤, 樊校. 用字母表示数的历史. 数学教学, 2011, (9): 24-27.

[2] 张连芳, 汪晓勤. 初中生对符号代数的理解: 历史相似性初探. 中学数学月刊, 2013, (4): 49-51.

HPM视角下的平方差公式教学

李玲[1] 顾海萍[2]

（1.华东师范大学数学系,上海,200241; 2.上海师范大学附属经纬实验学校，上海, 200444）

近年来，如何将数学史融入数学教学，已成为HPM研究者们关注的中心课题之一。汪晓勤教授曾整合各种不同的分类方法，根据数学史在数学教学中的融入程度，将其分为：附加式、复制式、顺应式和重构式四种方式[1]，详见表1。已有的教学实践表明，四种融入方式各有其优势，均有助于实现数学教学的三维目标[2]，不可偏废。

表1 数学史融入数学教学的四种方式

方式	描述	理想效果
附加式	展示有关的数学家图片，讲述逸闻趣事等，去掉后对教学内容没有什么影响	提升兴趣、调节学习、初步感受数学文化
复制式	直接采用历史上的数学问题、解法等	拉近与历史的距离，感受数学的神奇；获得探究机会
顺应式	根据历史材料，编制或改编数学问题	借鉴历史，以帮助知识点的学习；获得探究机会
重构式	借鉴或重构知识的发生、发展历史	体验数学发展中火热的思考过程，促进对知识的理解

为了进一步检验四种运用方式的有效性，我们选取沪教版数学教材七年级上册的“平方差公式”一节，通过研究相关的历史，在分析课堂需求和教学目标的基础上，以趣味性、科学性、可学性、有效性和新颖性五项原则为指导，选取历史素材或对历史素材进行裁剪和加工，最终形成教学设计，并付诸实践。

1 历史材料的选择与加工

关于平方差公式的历史，文[3]已有过一些探讨，其中考察了巴比伦、希腊、中国、印度等古文明的数学文献中有关平方差公式的内容。但在运用重构式，特别是运用数学史来引

入平方差公式时，考虑到可学性原则，我们感到，这些材料都不太合适。于是，我们另外选择了等周问题。

古人对等周问题普遍存在误解。古希腊评注家普罗克拉斯告诉我们，过去有人通过周长来推断城市的大小；而在他自己所生活的时代，有人在分配土地时，将周长大、但实际上面积更小的土地分配给他人，而将周长更小、但面积更大的土地分给自己，还被人们视为无私。公元前 5 世纪，古希腊著名历史学家修昔底德通过绕岛航行一周所需时间来估算西西里岛的大小。公元前 130 年，古希腊历史学家波利比奥斯发现，有人对于周长相等的营地可以容纳不同人数的事实感到困惑不解。公元 1 世纪，著名博物学家普林尼竟也根据周长来估算不同地区的面积[4]。

据此，我们将古希腊发生的欺骗性土地分配事件改编为庄园主和佃户的故事，由此突出平方差公式的必要性，激发学生的学习动机。

接着，我们直接采用公元 3 世纪中国古代数学家赵爽的“面积割补法”来证明平方差公式。赵爽在注释《周髀算经》中“勾股圆方图”时说: “勾实之矩以股弦差为广，股弦并为袤，而股实方其里。……股实之矩以勾弦差为广，勾弦并为袤，而勾实方其里。”[5]这段话的实质就是用面积割补的方法来证明平方差公式：

$$c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$$
$$c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$$

其中，前一个公式如图 1 所示。

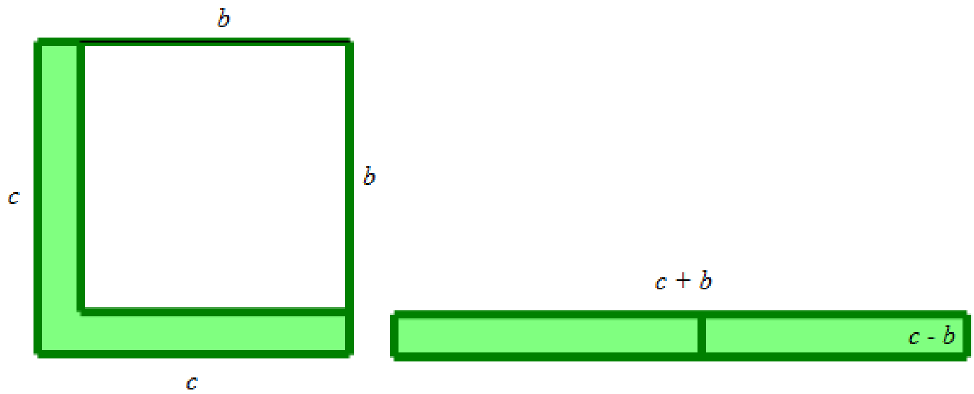


图 1 勾实之矩

在介绍平方差公式的几何证明后，附加式介绍赵爽的故事，以期在情感上触动和激励学生。在本节课中，平方差公式的几何证明方法不仅仅局限于赵爽的“面积割补法”，在拓展与思考中，采取顺应式，将要求面积的图形剪成两个全等的图形，让学生设法用不同的拼接方

式证明平方差公式。

最后，采用公元 3 世纪古希腊数学家丢番图（Diophantus）《算术》中的问题作为例题之一，体现平方差公式的具体应用。此题的解答主要是借鉴古巴比伦人解决“已知两数的和与乘积，或两数的差与乘积，求这两个数”这种二元问题所用的“和差术” [6]，其基本思想是将二元问题转化成一元问题。用今天的代数语言来表达就是，在解方程组$\begin{cases}x+y=a\\xy=b\end{cases}$时，根据第一个方程可将要求的两数分别设为$x=\frac{1}{2}a+t$，$y=\frac{1}{2}a-t$，代入第二个方程，利用平方差公式得到关于$t$的一元方程

$$\left(\frac{1}{2}a+t\right)\left(\frac{1}{2}a-t\right)=\frac{1}{4}a^2-t^2=b$$

从中求出 t，进而求出x,y的值。

2 教学实施

2.1 新课引入

先讲述以下故事引入新课（用 PPT 展示）。

从前，有一个狡猾的庄园主，把一块边长为$a\left(a>5\right)$米的正方形土地租给佃户张老汉。第二年，他对张老汉说：“我把这块地的一边减少 5 米，相邻的另一边增加 5 米，继续租给你，租金不变，你也没有吃亏，你看如何?”张老汉一听，觉得好像没有吃亏，就答应道：“好吧。”回到家中，他把这事和邻居们一讲，大家都说：“张老汉，你吃亏了!”张老汉非常吃惊。你知道张老汉真的吃亏了吗？

引导学生比较边长变化前后的土地面积a^2和$\left(a+5\right)\left(a-5\right)$，从而引出平方差。

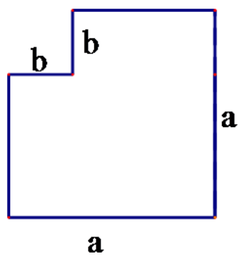
2.2 平方差公式的证明

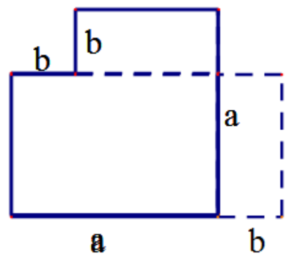
首先通过一个有具体数字的练习题，在一个已知边长的正方形左上角割去一个小正方形，求剩余图形的面积。通过面积割补的方法将原图转化成一个长方形，得出结论：拼凑成的长方形面积与剩余的六边形面积相等。

思考题 1：一个边长为 7.9 的正方形的面积是多少？在这个正方形左上角割去一个边长为 2.1 的正方形，你能求出剩余部分的面积吗？

接着，将问题从特殊推广到一般，我们把思考题 1 中的具体数字换成字母，让学生思考这种情形又该怎样求剩余图形的面积。

思考题 2：图 2，在一个边长为 a 的正方形左上角割去一个边长为 b 的正方形，你能表示出剩余部分的面积吗？





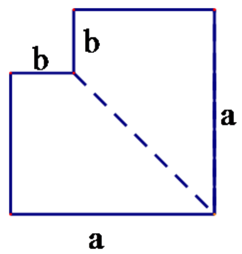


图 2 矩尺形　　图 3 矩尺形的等积割补　　图 4 另一割补法

基于思考题 1 的做法，也可将此题中剩余图形转化成长方形，通过面积相等，得到平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。图形的割补方式如图 3，然后介绍这种方法——面积割补法其实由来已久，最早是由我国三国时代数学家赵爽想出来的，并讲述他的励志故事以激励学生。

面积割补的证明方法是中国数学家赵爽所给出的，赵爽的生平人们知之甚少，在《周髀算经》注的前言里，赵爽说自己“负薪余日，聊观周髀”，意思是说，在打柴的空余时间里，钻研古代天文学著作《周髀算经》，迫于生计，辛苦劳作，却不忘做学问，古人的勤奋，感人至深。

在接下来的拓展与思考中，教师鼓励学生用不同于古人的方法，积极探索其他证明平方差公式的几何方法：

拓展与思考在一个边长为 a 的正方形左上角割去一个边长为 b（$b<a$）的正方形，若沿虚线剪开，如图 4，是否能得到平方差公式？

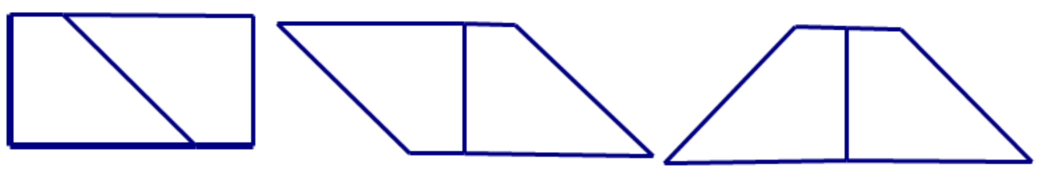


图 5 课堂上学生给出的三种不同的拼法

出乎教师的意料的是，相继有三名学生在黑板上分别用三种不同的图形拼接方式成功证明了平方差公式，分别是将其拼接成长方形、平行四边形和等腰梯形，如图 5 所示。

几何的方法固然精彩，但平方差公式不过是前一节整式乘法的简单应用而已。因此，教师接下来让学生用多项式乘法来推导一遍。

2.3 平方差公式的特征

关于平方差公式的特征这一块的教学没有数学史知识，其重点在于让学生准确掌握平方差公式的特征，在应用时不要乱用、误用。在证明完平方差公式之后，教师让学生用语言对公式加以描述：“两数之和与这两数之差的乘积等于这两个数的平方差。”教师突出该描述中的“这”字，强调“这”字不能省略，并说明公式中的 a,b 可以是任意数或代数式。接下来，用图 6 来表示平方差公式的形式特征，强调在使用公式时要注意找相同项和相反项，以避免套用公式时的错误。

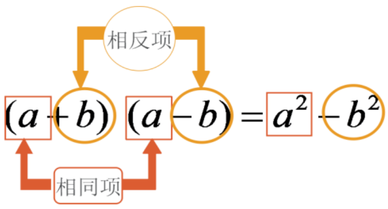


图 6 平方差公式的形式特征

2.4 平方差公式的应用

按照由易到难、循序渐进的原则设计练习题。首先，让学生做一道填表练习，给出两数之和与这两数之差的乘积，据此填写其相同项、相反项和平方差形式，旨在强调平方差公式的特征。接着，通过一个计算题的练习加深学生对平方差公式的理解，其中前四个小题都是代数式运算，基本都是直接套用平方差公式，第 5 小题是求具体数字乘积的问题：30.2×29.8。引导学生分析平方差公式的特征，所要找的两个数分别是30.2 与 29.8 的和与差的一半，这实际上就是平方差公式的变形：

$$xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中已经用几何方法得到上述公式的等价形式。

趁热打铁，以这一小题为基础，让学生解答古希腊数学家丢番图的《算术》中的二元问

题：

练习 3 已知两个正数的和为 20，乘积为 96，求这两个数。

公元 3 世纪，古希腊数学家丢番图（Diophantus）在其《算术》第 1 卷中运用“和差术”，通过平方差公式来解上述问题。其解法是：假设所求两数分别为$10-x$和$10+x$，则$(10+x)(10-x)=96$，即$10-x^2=96$，故$x^2=4$，$x=2$。于是，所求两数分别为 12 和 8。

不少学生表现出困惑：为什么将两数设为$10-x$和$10+x$？教师引导学生从上一练习中寻找答案。

最后，回到开头的土地问题上来。佃户张老汉真的吃亏了吗？答案不言而喻，学生基本都能迅速回答这个问题，并用几何和代数两种方法证明张老汉所得的土地少了 25 平方米。教师引导学生得出更一般的结论：两个多边形周长相等时，其面积不一定相等。

3 学生反馈

课后，我们及时对全班 33 名学生进行了问卷调查。

当问及通过几何割补方式证明平方差公式对其理解平方差公式是否有帮助时，29 人表示确实是有帮助的，只有 4 人表示帮助不明显、没什么感觉。可见，绝大多数学生对几何割补法的教学效果是认同的。在几何割补与多项式相乘这两种不同方法的倾向性上，有 9 人表示更喜欢几何割补法，8 人表示更喜欢多项式乘法，另外 16 人表示两者一样喜欢。关于问卷中的“推导平方差公式”问题，用多项式乘法的学生人数是用割补法人数的 3 倍。可见，虽然学生认同几何割补法，但在实际操作时，多数人还是选择更为简便的代数方法。

关于本节课印象最深的内容，超过半数的学生表示，“拓展与思考”题，即用多种拼图方法推导平方差公式，给他们留下的印象最深。其他的回答还有：丢番图“已知两数的和与积分别是 20 和 96，求这两个数”这道题及其解法让其印象深刻；“庄园主与张老汉”的故事很有趣，有教育意义；几个历史故事给他们留下很深的印象；赵爽的故事让人感触很深，感受到“时间就像海绵里的水，挤挤总会有的”，要珍惜时间。从学生的回答来看，数学史相关知识给绝大多数学生留下深刻印象，在技能方面于学习有帮助，在情感方面也带来了不少正能量。

4 结语

以多种方式运用数学史是本节课的一大亮点。表 2 给出了四种方式的具体运用情况。

表 2 本节课对数学史的运用

方式	内容
附加式	数学家赵爽打柴之余钻研数学问题的故事
复制式	赵爽的“面积割补法”；丢番图的二元问题，“和差术”
顺应式	庄园主与佃户的故事
重构式	平方差公式的引入、推导与应用

数学史恰到好处的各种融入方式，并不仅仅是增加了课堂的趣味性，更重要地，它能帮助教师更好地实现教学的三维目标。结合本节课分析，学生掌握了平方差公式的特征，并能运用平方差公式灵活计算，实现了“知识与技能”这一教学目标；从课堂表现和课后的问卷调查结果知，学生理解了平方差公式的推导过程，并且大部分学生会自己推导，或用代数的方法，或用几何的方法，部分学生已经熟练掌握了这两种方法，说明本节课基本实现了“过程与方法”这一教学目标；另外，丰富的数学史素材增加了课堂的趣味性，让学生得以在一种更生活化、更轻松的氛围中学习，而且，赵爽的故事给学生带来了正能量，庄园主和张老汉的故事又是具有教育意义的，这些都是“情感与信念”这一教学目标实现的标志。

基于以上分析可知，本节课中数学史融入数学的四种方式和三维教学目标是相辅相成、和谐统一的关系。一节课上较难做到所有四种方式的运用，而本节课却提供了较为成功的范例。在 HPM 教学设计中，我们可以尽可能多地采用不同方式，让数学史知识在课堂上充分发挥其应有的价值。

参考文献

[1] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望.中学数学月刊，2012, (2): 1-3.

[2] 汪晓勤. 数学史与数学教育. 教育研究与评论, 2014, (1): 8-14.

[3] 汪晓勤，张安静. 平方差公式的历史. 中学数学教学参考, 2010, (11): 64-66.

[4] Heath, T. L.*A History of Greek Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1921. 206-207.

[5] 赵爽.《周髀算经》注, 见郭书春主编, 中国科学技术典籍通汇 数学卷(一), 郑州: 河南教育出版社, 1994, 11-12.

[6] van der Waerden, B. L. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*.Berlin: Springer-Verlag, 1983. 62-63.

会议讯息

第三届上海数学史会议召开

沈中宇

（华东师范大学数学系，上海 200241）

2014 年 9 月 27 日，华东师大 HPM 团队的部分成员在汪晓勤教授的带领下在复旦大学光华楼参加了第三届上海数学史会议。本次会议由复旦大学历史学系承办，有来自复旦大学，上海交通大学、华东师范大学、东华大学、上海师范大学的师生参会。

本次会议共设 4 组报告，每组均有一个主题，围绕每个主题均有 2 到 3 场报告，一共 10 场报告，每场报告一般持续 25 分钟。在每组报告后均有 10 分钟的讨论环节供大家根据前面的报告提出讨论，交流思想。接下来，我们将围绕此次会议的 4 组报告和大家一起分享其中的部分观点。

第一组：近代早期的东亚数学与历法

东华大学的徐泽林教授以建部贤弘与《授时历》为题，指出建部贤弘(1664～1739)是江户时代最伟大的数学家之一，学术界对其数学成就与数学思想的研究颇多，尤其是最近几年围绕《大成算经》(1683～1711)与《缀术算经》(1722)的研究成果较为显著。但学术界对其天文历学方面的业绩研究尚存不足。建部的天文历学活动与德川幕府的历法改革运动密切相关，其天文历学研究的内容是以《授时历》与《梅氏历算全书》所承载的知识为中心的，报告主要论述了建部在《授时历》研究方面的业绩。对建部贤弘在《授时历议解》中值得注意的地方如“冬至刻”、“日躔”、“月行九道术”、“白道交周”进行了深入细致的讲解。特别对比了关孝和的《授时发明》，认为建部贤弘对《授时历》中的“白道交周”问题的注解更为详细、明白。

随后，上海交通大学的研究生姚妙峰以关于《测量法义》的研究为题，描述了《测量法义》在明季传入中国的背景及意义。此外，关于《测量法义》的拉丁原本问题，杨泽忠等很多学者都认为是译自利玛窦老师丁氏所作的《实用几何学》，而安大玉先生更进一步列表说明了此二书各题的对应情况，然而关于丁氏的《实用几何学》是否确为《测量法义》的最佳

拉丁底本的问题却较少人讨论。经初步研究，姚妙峰认为，选择《实用几何学》作为测量法义的底本实属无奈之举，根据方豪先生对底本优劣的分类，应该认为是最差的第一种类型。最后，姚妙峰以徐光启的《量算河工及测验地势法》和孙元化的《西法神机》为样本，探讨了《测量法义》一书所含知识对当时中国水利工程建设及军事武器制造形成的影响，希望对推进明末清初东西方文明交流以及数学史的研究能有所助益。

第二组：数学史与数学教育

华东师范大学的研究生田方琳以融入数学史的对数概念教学为题，指出 HPM 领域中关于“why”和“how”的理论研究已有不少，而实证研究的数量仍然较为匮乏。寻找适合融入数学史的知识点，借助数学史让知识更加自然地呈现，帮助学生加深对数学概念、定理的理解，体会数学是一门不断发展变化并具有现实意义的学科，都是 HPM 领域中需要解决的问题。本报告探讨了将数学史融入对数概念教学的研究，从对数的历史谈起，指出了对数发明的天文学背景，通过对数可以简化天文学中的大数运算，为天文学家的工作带来了极大的便利。此后对数才逐渐从实用性工具演变到理论性工具。田方琳指出虽然现如今我们有了计算器、计算机，不再需要通过查表的方式计算对数、简化大数的运算，而这种乘法变加法、除法变减法的数学思想仍是值得现代学生去学习和感悟的。随后阐述了这种想法与教育实践融合的过程。最后在对学生的问卷及访谈中，发现绝大多数学生喜欢这种融入数学史的课堂；这样的方式达到了起初期望的让对数真实起来的目的；同时，这样的设计也达到了课程标准中提出的让学生掌握指数与对数互化的教学目标。

随后，华东师范大学的研究生林佳乐以中学数学文化校本课程开发为题，认为目前国内外有关数学文化的探讨很多，而在数学文化与数学教育关系的研究中，讨论“为何”的较多，而探索“如何”却很少。国内关于数学文化的教育价值有很多讨论，但是真正将数学文化融入数学教学的案例很少，尤其针对中学阶段。基于此，林佳乐提出研究问题，并采用行动研究的方法在中学中合作开设了数学文化选修课程。在对学生问卷及访谈进行定量和质性分析，对学生课后感谢进行横向以及纵向统计分析，并根据已有课堂评价框架进行评价。发现初中开设数学文化选修课十分必要，学生认为本门课程不仅能够激发其学习兴趣，而且对于今后相关方面数学知识的学习具有很大的促进作用，即在其认知方面也有些作用；同时本门课程开发过程有利于教师的专业成长。

第三组：西方中世纪及近代早期的数学

上海师范大学的研究生贾洪岩以早期意大利数学家对于"点问题"的解法为题。阐述了点问题在概论论发展中的重要作用， 详细系统地梳理了"点问题"在解决之前的发展历史，尤其详细地阐释了早期意大利一些数学家，如帕乔利、卡尔丹诺、塔尔塔利亚等人关于这个问题的解决方法。主要是从数学史的角度，利用数学史的研究方法和研究成果对"点问题" 在十七世纪中期彻底解决之前的发展历史进行阐释，争取为进一步理清概率论产生的历史提供一个更加清晰的线索。

随后，上海师范大学的研究生杨诗敏以初探数学对斯宾诺莎哲学的影响为题，说明了斯宾诺莎对数学的理解，随后重点描述了斯宾诺莎数学思想在哲学系统中的体现，包括了《伦理学》中的几何演绎法和数学中的无限问题，最后研究了斯宾诺莎数学和哲学的综合并简要评价斯宾诺莎数学思想在其哲学中的意义。

来自上海交通大学的研究生王宏晨以拉丁语版《原本》之流变：从阿德拉特到克拉维乌斯为题从体例结构、公理的选择与应用、数学概念的表述与理解、命题论证四个方面对 Adelard 本，Campanus 本, Zambertus 本, Commandino 本和 Clavius 本等拉丁语版《原本》进行比较研究，梳理它们的历史流变。

第四组：东方上古中古数学

中山大学的朱一文教授以儒学中的数学初探——以贾公彦对《周礼 考工记》一段注疏为中心为题，通过解读、分析唐代学者贾公彦对《周礼》"氏为量"，说明在儒家经典中存在另一种计算文化——不同于我们先前通过数学著作认识到的计算文化。 指出其特色主要体现在：注疏和算法的结构，对于数和图形的认识，以及对于逻辑和推理的运用。

中国科学院的研究生郭圆圆以 13-15 世纪阿拉伯高次方程数值解研究 ——以萨拉夫丁图西和阿尔卡西数学著作为例为题，指出对 13-15 世纪阿拉伯高次方程数值解的深入研究不仅可以进一步剖析阿拉伯中晚期代数学的发展脉络，而且是研究以中算为代表的东方数学传统对其影响的极具代表性的切入点，对相关内容的跨文明比较研究有积极意义。而以往的研究较少，因此有较深入的研究空间。接下来分别对萨拉夫丁图西的《方程》中三次方程解法和阿尔卡西的《论圆周》中圆周率数值解部分进行了深入的分析。

最后，复旦大学的欧阳晓莉教授以两河流域六十进制位值记数法早期发展的新证据及其

分析为题，指出学者们在研究乌尔第三王朝时期使用的六十进位记数法时，所依据的材料几乎都是数学文献，主要是屈指可数的几份倒数表以及一道已知长宽高求体积的应用题。唯一的例外是一篇藏于耶鲁大学巴比伦尼亚藏品部的经济管理文献，作者在研究这一时期的经济管理文书时，发现了若干与六十进位记数法相关的新证据，即一些书写在文书正文外空白处的数字。基于对以上文献所记载的边缘数字的研究，从而得出结论，在乌尔第三王朝时期出现的六十进位记数法，既包括后来在古巴比伦时期广为使用的完全六十进位记数法，又包括这一时期特有的部分六十进位记数法。前者可能与乘法运算联系密切，而后者则成为加减法运算的重要工具。这两篇文献所涉及的运算都是借助某种工具（可能是陶筹）在其它媒介上完成的。

（与会人员合影）