



上海 HPM 通讯

SHANGHAI HPM NEWSLETTER

2015 年第 4 卷第 4 期



洛利亚

(Gino Benedetto Loria, 1862-1954)

《上海 HPM 通讯》编委会名单

主编：汪晓勤

责任编辑：齐春燕 洪燕君 邹佳晨

编委（按姓氏字母序）：

洪燕君 黄友初 李玲 林佳乐 刘攀 彭刚 蒲淑萍 齐春燕 任芬芳 沈金兴 沈中宇 田方琳

汪晓勤 王芳（义乌） 王科 吴骏 徐章韬 杨懿荔 叶晓娟 岳增成 张小明 朱琳 邹佳晨

刊首语

本期封面人物是意大利数学家和数学史家洛利亚（G. Loria, 1862~1954）。

洛利亚于 1862 年出生于曼托瓦的一个犹太人家庭，早年在帕多瓦接受教育。1879 年进图灵大学学习，1883 年以其关于球面几何方面的论文而获得博士学位。1883-1884 年间，他任教于帕维亚大学。1884-1886 年间，他在母校图灵大学担任他的博士导师的助教。1886 年 7 月，他成为图灵大学的无薪教师。同年 11 月，他被聘为热那亚大学的高等几何学教授。此后，他一直在热那亚大学任教，直到 1935 年退休。

虽然洛利亚的专业是几何学，但他却成了那个时代意大利最著名的数学史家。他发表了大量的数学史论文，著有《古希腊的精密科学》（1893）、《特殊代数与超越曲线：理论与历史》（1902）、《古今画法几何的历史》（1921）、《古希腊数学史》（1929-33）、《从文明之初直到 19 世纪的数学史》（1929）等。1898 年，洛利亚创办数学史期刊《数学科学文献与历史通报》。

与柯萨里（P. Cossali, 1748~1815）、利布里（G. Libri, 1803~1869）、博恩康帕尼（P. B. Boncompagni, 1821-1894）等前辈数学史家不同，洛利亚十分关注数学史的教育价值。1899 年，他发表了一篇题为“数学史是联结中学教学和大学教学的纽带”的论文，指出：数学教师在走上讲台之前，需要修读数学史课程。1904 年，在德国海德堡召开的第三届国际数学家大会上，洛利亚和美国、德国、法国等国的数学家和数学史家一道，起草决议，强调数学史在数学教学中的作用，倡导在大学里开设精密科学史课程，并建议在中学课程中介绍精密科学的历史。1907 年和 1922 年，洛利亚先后两次荣获法兰西学院的比努奖。1932 年 9 月，在瑞士苏黎世举行的国际数学家大会上，洛利亚受国际数学教育委员会的委托，作了数学教育方面的大会报告。1936 年 7 月，国际数学教育委员会授予他荣誉会员称号。

1935 年，洛利亚退休。在退休之后的短短三年里，他笔耕不辍，发表了 15 篇数学史论文。然而，到了 1938 年，他的学术活动被迫终止。意大利政府出台了反犹太人的法令，犹太人被剥夺了教职，他们出版的书被禁止出售。到了 1943 年，盟军从西西里岛登陆，作为轴心国之一的意大利无条件投降，继而被德国占领。洛利亚以及其他许多意大利的犹太人得到了韦尔多教派的保护，在托雷佩利切地区的山谷中避难。1945 年，洛利亚回到了热那亚，继续著书立说，直到去世的前一年。

作为 HPM 领域在欧洲的先驱者之一，他为我们留下了一笔丰厚的精神财富。

目 录

刊首语 I

教材研究

20 世纪中叶以前西方三角学教科书中的三角函数概念 沈中宇 1

20 世纪中叶前西方解析几何教科书中的“点到直线距离公式” 杨懿荔 9

“点到直线距离公式”的三角形面积推导法 汪晓勤 20

20 世纪中叶以前西方三角学教科书中的弧度制 周杰 27

教学实践

HPM 视角下的三角形内角和教学 唐秋飞 34

HPM 视角下的“抛物线及其标准方程”教学 徐超 43

CONTENT

FOREWORDi

TEXTBOOK RESEARCH

The Concept of the Trigonometric Function in Western Trigonometry Textbooks
up to the Middle of 20th CenturyShen Zhongyu 1

The Formula of Distance from a Point to a Line in Western Analytic Geometry
Textbooks up to the Middle of 20th Century Yang Yili 9

Derivations of the Formula of Distance from a Point to a Line by Triangle Area···
..... Wang Xiaoqin 20

Radian Measure in Western Trigonometry Textbooks up to the Middle of 20th
Century..... Zhou Jie 27

TEACHING PRACTICE

Teaching of the Sum of the Interior Angles of Triangles from the Perspective of
HPMTang Qiufei 34

Teaching of the Definition and Standard Equation of Parabola from the
Perspective of HPM..... Xu Chao 43

20 世纪中叶以前西方三角学教科书中的三角函数概念*

沈中宇

(华东师范大学数学系,上海,200241)

近年来,将数学史融入数学教学的实践与案例开发是 HPM 领域的重要课题之一,即将在德国召开的第 13 届国际数学教育大会将“数学史在数学教育中的作用”列为第 25 个研究专题,该专题的一个重要主题是“历史与认识论在数学教育中的实施:课堂实验与教学材料”。然而,数学史资源的匮乏往往成了中学 HPM 教学实践的主要障碍之一。

另一方面,在高中数学教材即将开始修订之际,“数学史融入数学教材”成了人们关注的研究课题,而数学史是该课题的基础。

三角函数的概念是我们在教学实践与课题研究过程中所关注的重要知识点。为了开发有关 HPM 案例,并为教科书的修订提供参考,我们对 17-20 世纪的 92 种西方三角学文献进行考察(限于篇幅,大部分文献未在参考文献中列出),试图勾勒出 20 世纪中叶以前三角函数概念的演进过程。

1 三角函数概念的起源

三角函数概念有着悠久的历史。古希腊天文学家希帕克斯(Hipparchus, 公元前 2 世纪)、梅内劳斯(Menelaus, 1 世纪)和托勒密(C. Ptolemy, 2 世纪)因为天文学的需要而相继制作了弦表,相当于计算半角正弦的两倍。公元 6 世纪,印度数学家阿耶波多(Aryabhata)使用了半弦,我们今天所说的“正弦”即源于此。而余弦源于“余角的正弦”,也为阿耶波多所用。古代阿拉伯天文学家经常使用“横影”和“竖影”(图 1),今日的“余切”和“正切”即源于此。阿拉伯天文学家阿尔·哈希布(al-Hasib, 9 世纪)、阿尔·巴塔尼(Al-Battani, 10 世纪)、阿布·韦发(Abu-Wefa, 10 世纪)相继制作了正切或余切表。阿布·韦发最早使

* 人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”(课题批准号:KC2014—010)系列论文之一。

用正割和余割，但没有给出其名称。16 世纪奥地利天文学家雷提库斯（G.J.Rheticus, 1514-1574）则制作了正割和余割表，并称之为直角三角形的斜边。^[1]

16 世纪以前，三角函数似乎并未统一在同一个圆上。

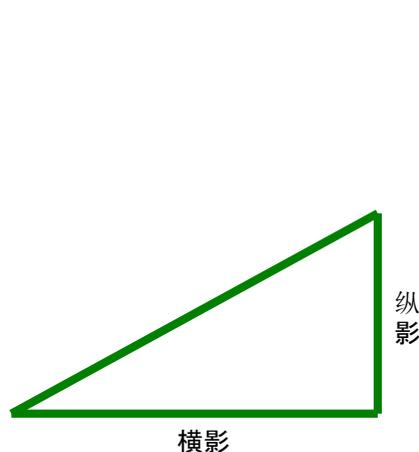


图 1 横影和竖影

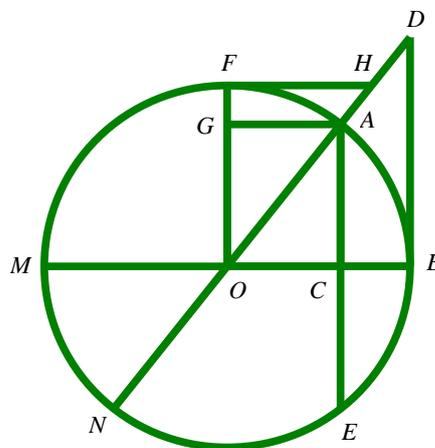


图 2 锐角的三角函数定义

2 锐角时期

17 世纪的三角学著作，如荷兰数学家斯内尔（W. Snell, 1591-1626）的《三角学》^[2]、法国数学家奥泽南（J. Ozanam, 1640-1717）的《新三角学》^[3]只涉及锐角所对圆弧的三角函数。

如图 2 所示， $\angle AOB$ 为圆心角，过点 A 作 OB 的垂线，垂足为 C ；过点 B 作圆的切线，交 OA 的延长线于 D 。则 AC 、 DB 、 OD 、 CB 分别为 \widehat{AB} 的正弦、正切、正割和正矢； AG 为 \widehat{AB} 的余弦（sinus complementi）。

斯内尔没有提及余切、余割和余矢。奥泽南则进一步定义了这三种三角函数。图 2 中， \widehat{AB} 的余切、余割和余矢分别为 FH 、 OH 和 FG 。

17 世纪三角学著作中的三角函数仅仅局限于锐角所对的圆弧，圆的半径可以是任意的，而正弦、正切和正割均为与圆相关的线段。

3 从锐角到钝角

18 世纪三角学著作沿用了 17 世纪的三角函数定义，但部分著作将三角函数从锐角扩展到了钝角所对圆弧。英国数学家威尔斯（E. Wells）的《年轻绅士的三角学》^[4]即为其中之

一。

如图 3, $\angle BOQ$ 为钝角, 作 $QR \perp OM$, 垂足为 R ; 延长 QO , 交点 B 处的切线于 T , 则 \widehat{BAQ} 的正弦、正切、正割和正矢分别为 QR 、 BT 和 OT 和 BR 。而余弦、余切、余割、余矢则只定义在锐角所对的圆弧上: 一个角的余角所对弧的正弦、正切、正割、正矢即为该角所对弧的余弦、余切、余割和余矢。注意, 这个时期, 三角函数仍然定义在角所对应的圆弧上。

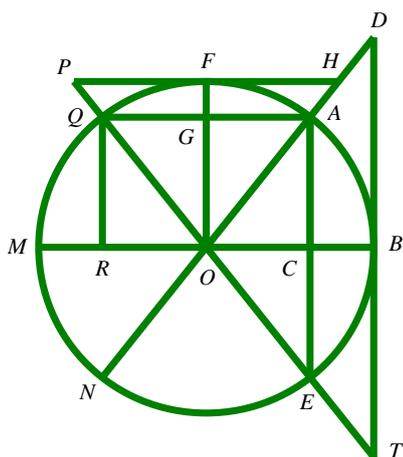


图 3 钝角三角函数的定义

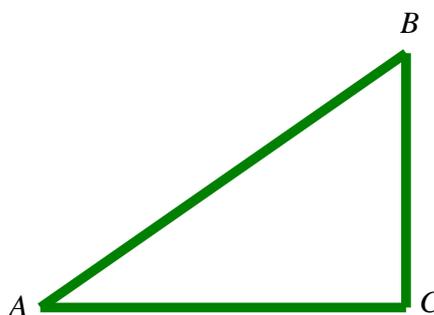


图 4 锐角三角函数的定义

英国数学家哈尼斯 (S. Heynes) 在其《平面与球面三角学的理论与实践》^[5]中将余弦定义为从圆心到正弦的线段, 从而使余弦摆脱了锐角的限制。

到了 18 世纪末, 英国数学家辛普森 (T. Simpson, 1710-1761) 在其《平面和球面三角学》^[6]中开始考虑钝角所对弧的三角函数的正负问题, 并指出: 钝角所对弧的余弦是负的。

4 任意角三角函数概念的出现

在我们所考察的 19 世纪的 49 种三角学教科书中, 出现了三角函数的四类定义。

第 1 类: 延续 18 世纪的几何线段定义, 并作相应的改进。

正弦、正切、正割、正矢均沿用了 18 世纪的定义。余弦定义为圆心到正弦的线段, 余切定义为从第一象限的终点引垂线到角终边的线段, 余割则定义为从圆心到余切的线段, 并规定: 以圆心为起点, 不同方向的线段的赋予不同的正负号, 从圆心向右或者向上的为正, 从圆心向左或者向下的为负。美国数学家尼克尔斯 (F. Nichols) 在《平面与球面三角学》^[7]中讨论了所有三角函数的符号问题。这类定义仍然针对圆弧。

第 2 类：在直角三角形中定义锐角三角函数。

如图 4，在直角三角形 ABC 中， $\angle A$ 的六种三角函数定义如下：

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \cos A = \frac{AC}{AB}, \quad \tan A = \frac{BC}{AC},$$

$$\cot A = \frac{AC}{BC}, \quad \sec A = \frac{AB}{AC}, \quad \csc A = \frac{AB}{BC}.$$

美国数学家哈斯勒 (F. R. Hassler) 在《解析几何基础》^[8]中采用了上述定义。这类定义用比值取代了线段，以角取代了圆弧，但只局限于锐角。

第 3 类：基于直角坐标系的终边定义法。

49 种教科书中，共有 24 种教科书采用了第 3 类定义，又分为四种不同情形。

- (1) 从锐角三角函数过渡到任意角的三角函数；
- (2) 直接定义任意角的三角函数；
- (3) 从锐角三角函数过渡到钝角三角函数；
- (4) 仅仅局限于锐角三角函数。

图 5 给出了四种情形的分布情况。从图中可见，大多数教科书采用从锐角三角函数过渡到任意角三角函数的方式来定义三角函数。

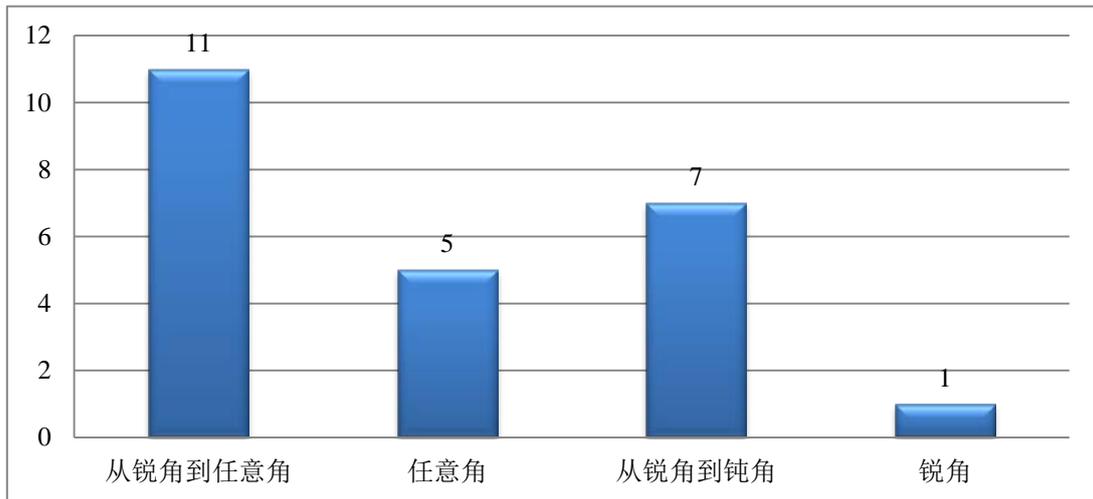


图 5 19 世纪坐标系定义的四种情形分布情况

柯伦索 (J. W. Colenso) 在《平面解析几何》^[9]中采用了第 (1) 种情形。如图 6，将锐角置于直角坐标系的第一象限中，在角的终边上任意取一点 D ，从 D 向 x 轴引垂线 DE ，垂

足为 E 。则定义：

$$\sin A = \frac{DE}{AD}, \quad \cos A = \frac{AE}{AD}, \quad \tan A = \frac{DE}{AE},$$

$$\cot A = \frac{AE}{DE}, \quad \sec A = \frac{AD}{AE}, \quad \csc A = \frac{AD}{DE}$$

利用相似三角形性质，所定义的各三角函数只与角有关，而与点 D 的选择无关。也有教科书用直角三角形来定义锐角三角函数。

接着，将角的终边依次旋转到第二、三、四象限，如图 7 所示。类似地，利用比值定义各三角函数。然后规定 x 轴上方 PN 为正， x 轴下方 PN 为负， y 轴右边 AN 为正， y 轴左边 AN 为负，确定各三角函数的正负。这与今天的终边定义法一致。

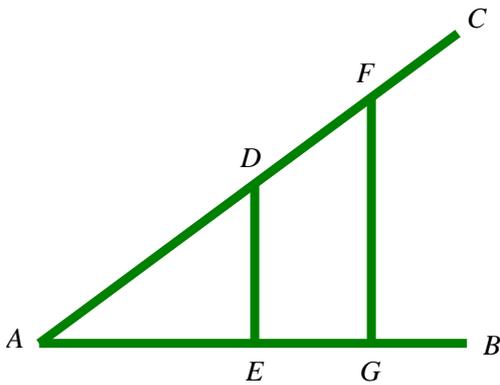


图 6 锐角的三角函数坐标定义

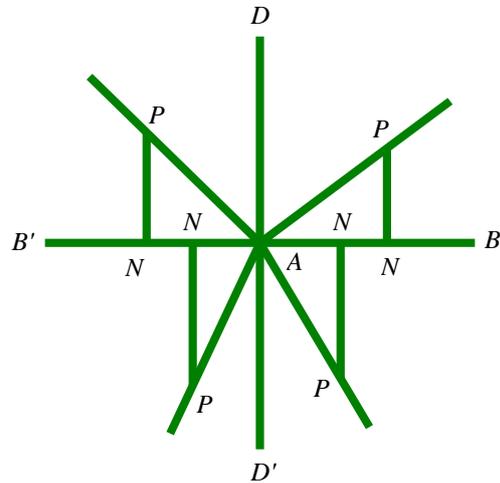


图 7 任意角的三角函数坐标定义

利用上述方法，英国数学家海麻士（J. Hymers）在《三角学理论》^[10]中还定义了负角的三角函数。

第 4 类：在单位圆中定义任意角的三角函数。

英国数学家杨（J. R. Young, 1799-1885）在其《平面与球面三角学基础》^[11]中采用了这类定义，基本就是我们今天的单位圆定义。与现在的三角函数线不同之处在于，用正弦，正切，正割等函数的余角定义了余弦，余切，余割。另外还有正矢和余矢。

图 8 给出了四类定义分布情况。

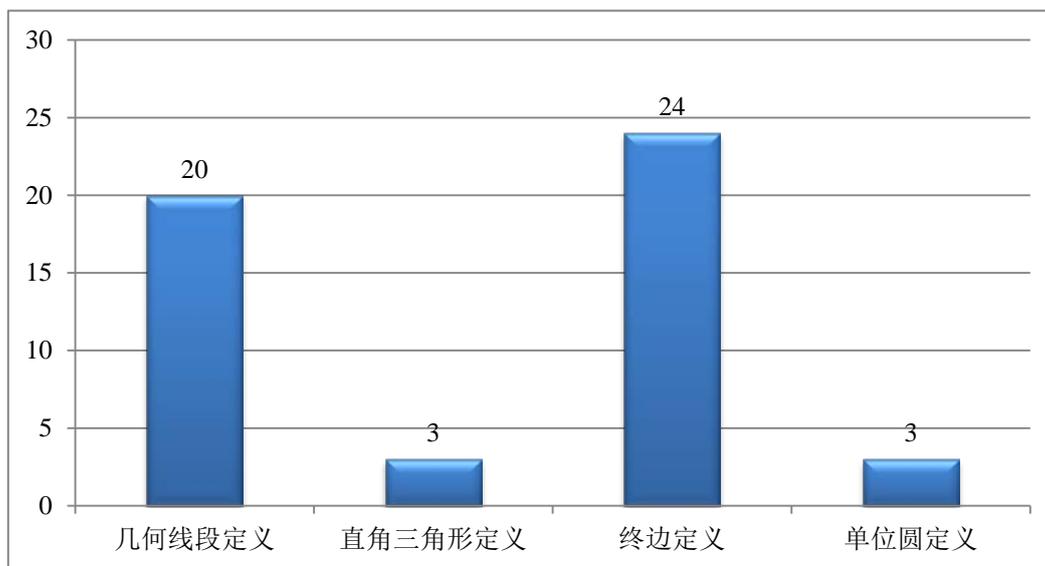


图 8 19 世纪三角函数四类定义分布情况

其中英国数学家威尔逊的《平面与球面三角学系统》^[12]中兼用了几何线段定义与终边定义。

可见，在 19 世纪的三角函数定义呈现多元化的态势。三角函数不再局限于 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的情形，而是向任意角拓展；同时，弧的三角函数逐渐为角的三角函数所取代。几何线段定义不再一统天下，基于直角坐标系的终边定义法逐渐占据上风。

我们还看到，函数观点开始萌芽。海麻士的《三角学理论》和柯伦索的《平面几何学》都用“三角比”的说法，而美国数学家威尔士（W. Wells）在《平面与球面三角学精要》^[12]中则将三角函数看作函数，并明确采用“三角函数”这一名称。美国数学家伍德（Wood）在其《平面和球面三角学解析》^[13]中首先强调了函数的概念，从而将三角函数明确归为特殊的函数。

5 三角函数定义的统一

20 世纪上叶的 33 种三角学教科书全部采用了任意角的三角函数概念，都是沿用了 19 世纪的终边定义法，其中，16 种教科书采用了从锐角到任意角的定义方式，17 种教科书直接定义任意角的三角函数，几何线段定义则完全销声匿迹。这个时期，三角函数的图像和性质（周期性）开始受到关注。

6 结语

以上我们看到,在 20 世纪中叶以前的三角学教科书中,三角函数概念经历了从弧到角、从线段到比值、从锐角到钝角再到任意角的演进过程。17-18 世纪,三角函数是用圆上的几何线段来定义的。到 19 世纪,先后出现几何线段定义、直角三角形定义、终边定义、单位圆定义,各种定义相互交织、相互影响,最终,基于直角坐标系的终边定义逐渐胜出。到了 20 世纪上半叶,函数观点下的终边定义独领风骚。

从三角函数的历史来看,雷提库斯出版于 1551 年的《三角学原理》最早将三角函数定义为角而非弧的函数,且将其看成直角三角形中的线段之比。但是,这一做法并未为 17-18 世纪的数学家所采用,只有到了 19 世纪,才有部分三角学教科书采用直角三角形定义。任意角的三角函数概念早在 18 世纪已为欧拉所采用,但直到 19 世纪才逐渐被人们接受。可见,历史上,三角函数概念从锐角到任意角、从线段到比值的演进过程中,人们遇到了很大的认识论障碍。今天,学生在学习三角函数知识时也必会遇到这种障碍,突破这种障碍,正是 HPM 视角下三角函数概念教学的重点之一。

参考文献

- [1] Smith, D. E. *History of Mathematics* (Vol. 2). Boston: Ginn & Company, 1925. 614-623
- [2] Snell, W. *Doctrinae Triangulorum Canonicae*. Lugduni Batavorum: Ioannis Maire, 1627.3-4
- [3] Ozanam, J. *Nouvelle Trigonométrie*. Paris: Jean Jombert, 1697.5
- [4] Wells, E. *The Young Gentleman's Trigonometry, Mechanicks, & Opticks*. London: James Knapton, 1714.3-5
- [5] Heynes, S. *A Treatise of Trigonometry, Plane & Spherical, Theoretical & Practical*. London: R. & W. Mount & T. Page, 1716.4-6
- [6] Simpson, T. *Trigonometry, Plane & Spherical*. London: F. Wingrave, 1799.3-5
- [7] Nichols, F. *A Treatise on Plane & Spherical Trigonometry*. Philadelphia: F. Nichols, 1811.5-9
- [8] Hassler, F. R. *Elements of Analytic Trigonometry, Plane & Spherical*. New York: James Bloomfield, 1826.14-15
- [9] Colenso, J. W. *Plane Trigonometry* (V.1). London: Longmans, Green, & Co., 1859.24、34

- [10] Hymers, J. *A Treatise on Trigonometry*. Cambridge: The University Press, 1841.5-6
- [11] Young, J. R. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry*. London: John Souter, 1833.4-6
- [12] Wells, W. *The Essentials of Plane & Spherical Trigonometry*. Boston & New York: Leach, Shewell & Sanborn, 1887.4、 15-17
- [13] Wood, D. V. *Trigonometry, Analytical, Plane & Spherical*. New York: John Wiley & Sons, 1885.14

20 世纪中叶前西方解析几何教科书中的“点到直线距离公式”*

杨懿荔 汪晓勤

(华东师范大学数学系 上海, 200241)

“点到直线的距离公式”是高中解析几何的重要知识点, 不同教科书所给出的推导方法互有不同。沪教版教科书首先求出已知点及其在已知直线上的射影所确定的向量, 利用该向量与已知直线的法向量平行, 求得点到直线的距离。人教版教科书则给出两种推导方法: 方法一为求出过已知点并与已知直线垂直的直线方程, 进而求出该直线与已知直线的交点坐标, 最后求出已知点与该交点之间的距离; 方法二为过已知点分别作 x 轴和 y 轴的平行线, 利用直角三角形面积公式求得点到直线的距离。

那么, 历史上还有哪些不同的推导方法? 这些方法对我们今天的教科书编写和课堂教学有何启示? 为了回答上述问题, 我们对 19 世纪初到 20 世纪中叶之前出版的 65 种西方解析几何教科书(限于篇幅, 参考文献中没有全部列出)进行考察。

在 65 种早期解析几何教科书中, 我们找到了距离公式的 8 种不同推导方法: 交点法、原点距离法、投影法、三角法、三角形面积法、坐标平移法、向量法、最值法。早期教科书大多采用了“有向距离”概念, 有些根据已知点和原点是否位于直线同侧来确定距离的正负, 有些则根据已知点位于直线的上方或下方来确定距离的正负。为统一起见, 我们采用今天的非负距离概念对各种方法进行整理。

1 点到直线距离公式的推导

1.1 交点法^[1]

设直线 l 的方程为 $Ax + By + C = 0$, 要求点 $P(x_0, y_0)$ 到 l 的距离。如图 1 所示, 过 P 作 l 的垂线 l' , 垂足为 $R(x_1, y_1)$, 则 l' 的方程为

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \quad (1)$$

联立 l 与 l' 的方程, 解得:

$$x_1 = \frac{B^2 x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2}, \quad y_1 = -\frac{AB x_0 - A^2 y_0 + BC}{A^2 + B^2}$$

利用两点间距离公式，得

$$d = \sqrt{\left(x_0 - \frac{B^2x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{ABx_0 - A^2y_0 + BC}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

整理得

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (2)$$

此法为人教版教科书的推导方法之一。

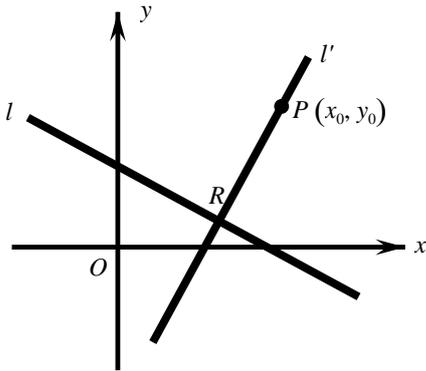


图 1 交点法

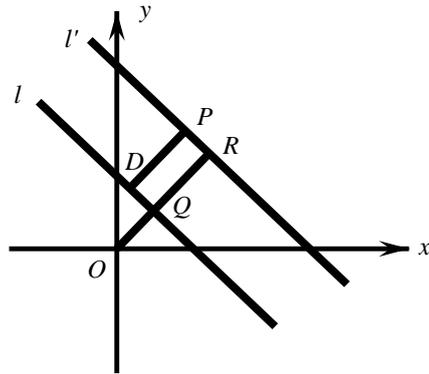


图 2 原点距离法

但绝大多数教科书都对上述推导方法作了一定的简化。将 l 的方程写成：

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = -(Ax_0 + By_0 + C) \quad (3)$$

联立方程 (1) 和 (3)，解出 $x - x_0$ 和 $y - y_0$ ，利用两点之间距离公式即得^{[2][3][4]}。或者，因点 R 同时位于 l 和 l' 上，故得^[5]

$$A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = -(Ax_0 + By_0 + C) \quad (4)$$

$$B(x_1 - x_0) - A(y_1 - y_0) = 0 \quad (5)$$

(4) 和 (5) 两边各平方，相加，即得公式 (2)。

或者将 (1) 写成

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} \quad (6)$$

并设比例常数为 λ ，将 $x = x_0 + \lambda A$ ， $y = y_0 + \lambda B$ 代入 l 的方程，解得 λ ，再利用两点之

间距离公式得 $d = \sqrt{A^2 + B^2} |\lambda|$ 。

1.2 原点距离法^[6]

如图 2 所示, 设直线 l 的方程为

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

其中 p 为原点到 l 的距离, α 为过原点且垂直于 l 的直线与 x 轴正方向之间的夹角, 其范围为 $[0, 2\pi)$ 。给定点 $P(x_0, y_0)$, 过 P 作 l 的垂线, 垂足为 D , 令 $PD = d$, 过 P 作 l 的平行线 l' 。过 O 作 l' 的垂线, 垂足为 R , 交 l 于 Q 。设 $OR = p'$, 则直线 l' 的方程为 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p' = 0$ 。因点 P 在 l' 上, 故有

$$p' = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha。$$

因此所求距离为

$$d = |p' - p| = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p| \quad (7)$$

若给定直线方程为一般式 $Ax + By + C = 0$, 则得

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (C < 0)$$

或

$$\frac{A}{-\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{-\sqrt{A^2 + B^2}}y = \frac{-C}{-\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (C > 0)$$

令

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}。$$

因此, 转换成一般式后, 即得距离公式 (2)。

1.3 投影法^[7]

如图 3, 设已知点 $P(x_0, y_0)$, 直线 l 的方程为 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ 。过原点作 l 的垂线 OR , 过 P 分别作 x 轴、直线 l 和 OR 的垂线, 垂足分别为 N 、 M 和 R 。根据向量的投影性质——两个向量在轴上的投影之和等于它们的和在轴上的投影, 可得

$$\text{Proj}_{OR} \overrightarrow{ON} + \text{Proj}_{OR} \overrightarrow{NP} = \text{Proj}_{OR} \overrightarrow{OP} = OR。$$

其中 $\text{Proj}_{OR} \overline{ON}$ 表示向量 \overline{ON} 在 OR 上的投影。

因 $OR = OQ + QR = p + d$ ， $\text{Proj}_{OR} \overline{ON} = x_0 \cos \alpha$ ， $\text{Proj}_{OR} \overline{NP} = y_0 \sin \alpha$ 。故有

$p + d = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha$ ，故得距离公式 (7)。

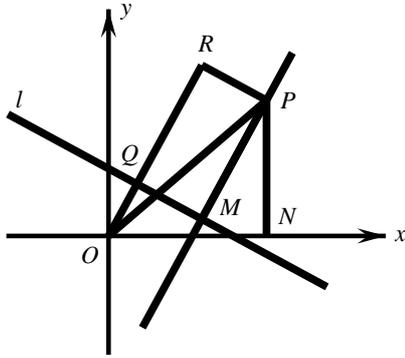


图3 投影法

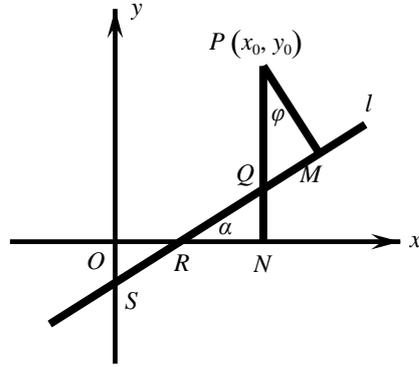


图4 三角法之一和二

1.4 三角法之一^[8]

设直线 l 的方程为 $Ax + By + C = 0$ ，要求点 $P(x_0, y_0)$ 到 l 的距离。如图4，过点 P 分别作 l 和 x 轴的垂线，垂足分别为 M 和 N ， PN 与 l 交于 Q 。设点 Q 的纵坐标为 y_Q ，因 Q

在 l 上，故 $Ax_0 + By_Q + C = 0$ ，于是得 $y_Q = -\frac{Ax_0 + C}{B}$ 。设 l 的倾斜角为 α ， $\angle MPQ = \varphi$ ，

则 $\varphi = \alpha$ ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) 或 $\pi - \alpha$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)。因 $\tan \alpha = -\frac{A}{B}$ ，故 $\tan \varphi = \left| \frac{A}{B} \right|$ ，

$\cos \varphi = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。于是有

$$PM = PQ \times \cos \varphi = \left| y_0 - y_Q \right| \cos \varphi = \left| y_0 + \frac{Ax_0 + C}{B} \right| \cos \varphi$$

故得

$$d = \left| y_0 + \frac{Ax_0 + C}{B} \right| \cdot \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

也有教科书直接利用三角形相似性来推导距离公式^[9]。如图4，因 $\text{Rt}\triangle PMQ$ 与 $\text{Rt}\triangle ROS$

相似，故 $\frac{PM}{PQ} = \frac{OR}{RS}$ ，其中 $OR = \left| \frac{C}{A} \right|$ ， $RS = \left| \frac{C}{AB} \right| \sqrt{A^2 + B^2}$ ，于是有

$$d = PM = \frac{OR}{RS} \times PQ = \frac{|B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \times \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{|B|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1.5 三角法之二^[10]

仍如图 4, 设点 M 的坐标为 (x_1, y_1) , 则

$$x_1 = x_0 \pm d \sin \alpha, y_1 = y_0 \mp d \cos \alpha,$$

其中的加减号取决于 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 。代入直线 l 的方程得

$$\pm d(A \sin \alpha - B \cos \alpha) = -(Ax_0 + By_0 + C) \quad (8)$$

但由 $\tan \alpha = -\frac{A}{B}$ 得

$$d(B \sin \alpha + A \cos \alpha) = 0 \quad (9)$$

(8) 和 (9) 两边各平方, 相加得

$$d^2(A^2 + B^2) = (Ax_0 + By_0 + C)^2 \quad (10)$$

故得公式 (2)。

1.6 三角法之三^[11]

直线 l 和点 P 同上。如图 5, 过点 P 作 l 的垂线, 垂足为 M , 又作 x 轴的平行线, 交 l 于 Q 。设点 Q 的横坐标为 x_Q , 因 Q 在 l 上, 故 $Ax_Q + By_0 + C = 0$, 于是得 $x_Q = -\frac{By_0 + C}{A}$ 。

设 l 的倾斜角为 α , $\angle PQM = \varphi$, 则 $\varphi = \alpha$ ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) 或 $\pi - \alpha$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), 且

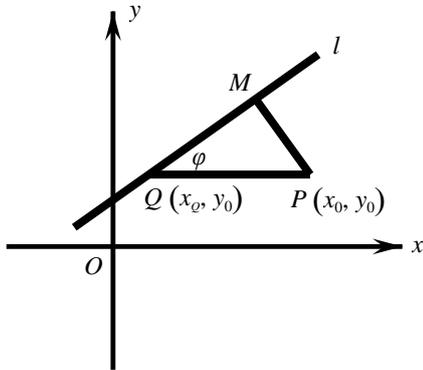


图 5 三角法之三

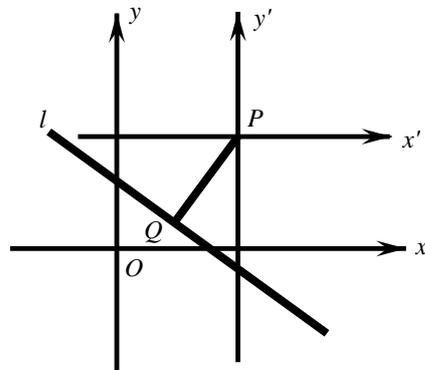


图 6 坐标平移法

$\sin \varphi = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 。故得：

$$PM = d = PQ \times \sin \varphi = \left| x_0 - x_Q \right| \sin \varphi = \left| x_0 + \frac{By_0 + C}{A} \right| \sin \varphi = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1.7 坐标平移法

有两种情形，一是由直线的一般方程入手，二是从标准方程入手。

(1) 基于一般方程^[12]

要求 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离。如图 6，以 P 为原点建立新的坐标系 $PX'Y'$ 。设 l 上一点在新、旧坐标系下的坐标分别为 (x', y') 和 (x, y) ，则有 $x = x_0 + x', y = y_0 + y'$ 。代入直线方程得：

$$A(x_0 + x') + B(y_0 + y') + C = 0,$$

即

$$Ax' + By' + Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

化成法线式，即为

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} x' + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} y' + \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

故得距离公式 (2)。

(2) 基于法线式方程^[13]

设直线方程为 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ 。类似建立新坐标系，并设 l 上一点在新、旧坐标系下的坐标分别为 (x', y') 和 (x, y) ，则有

$$(x_0 + x') \cos \alpha + (y_0 + y') \sin \alpha = p$$

即

$$x' \cos \alpha + y' \sin \alpha = p - x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha,$$

故得距离公式 (7)。

1.8 三角形面积法^[14]

仍设直线 l 的方程为 $Ax + By + C = 0$ ，要求点 $P(x_0, y_0)$ 到 l 的距离。如图 7， l 与 x

轴和 y 轴的交点分别为 $M\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ 和 $N\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ ，则有

$$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C}{B} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| \frac{C}{B}x_0 + \frac{C}{A}y_0 + \frac{C^2}{AB} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C}{AB}(Ax_0 + By_0 + C) \right|$$

因 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2}MN \times d$ ，而

$$MN = \sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)^2 + \left(-\frac{C}{B}\right)^2} = \left|\frac{C}{AB}\right| \sqrt{A^2 + B^2}$$

故得距离公式 (2)。

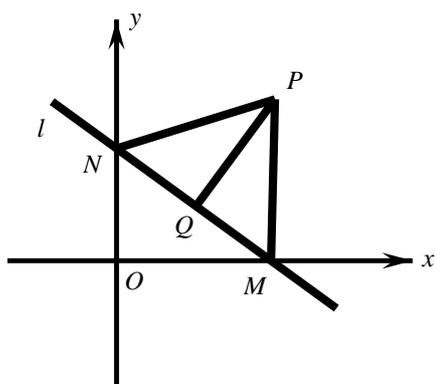


图 7 三角形面积法

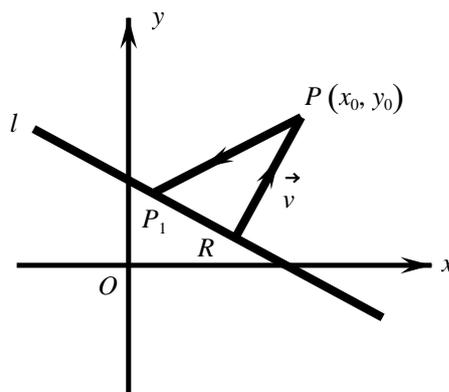


图 8 向量法

1.9 向量法^[15]

如图 8，设直线 l 的法向量为 $\vec{v} = (A, B)$ ，给定不在 l 上的点 $P(x_0, y_0)$ ，要求 P 到 l 的距离。任取 l 上一点 $P_1(x, y)$ ，则 $\overrightarrow{PP_1} = (x - x_0, y - y_0)$ 。因 $\vec{v} \cdot \overrightarrow{PP_1} = |\vec{v}| |\overrightarrow{PP_1}| \cos \theta$ ，故得点到直线的距离为

$$d = |\overrightarrow{PP_1}| |\cos \theta| = \frac{|\vec{v} \cdot \overrightarrow{PP_1}|}{|\vec{v}|} \quad (11)$$

(11) 与公式 (2) 等价。此法即为现行沪教版教材中的方法。

1.10 最值法^[16]

设直线 l 的方程为 $Ax + By + C = 0$ ，给定点 $P(x_0, y_0)$ ，直线上任一点为 (x, y) 。将直线方程变形为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = -(Ax_0 + By_0 + C)$$

点 P 到直线 l 的距离 d 即为 $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ 的最小值。利用柯西不等式，有

$$|A(x - x_0) + B(y - y_0)| \leq \sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

因此有

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \geq \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

故得距离公式 (2)。

2 各种方法的分布

图 9 给出了各种方法的分布情况。少数教科书同时采用了两种不同的推导方法。

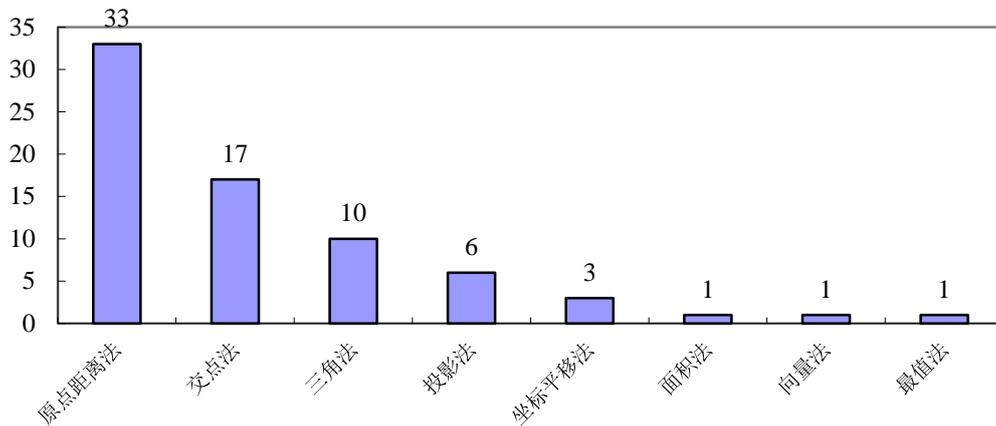


图 9 各种方法的分布情况

图 10 给出了各种方法在不同时期的分布情况。

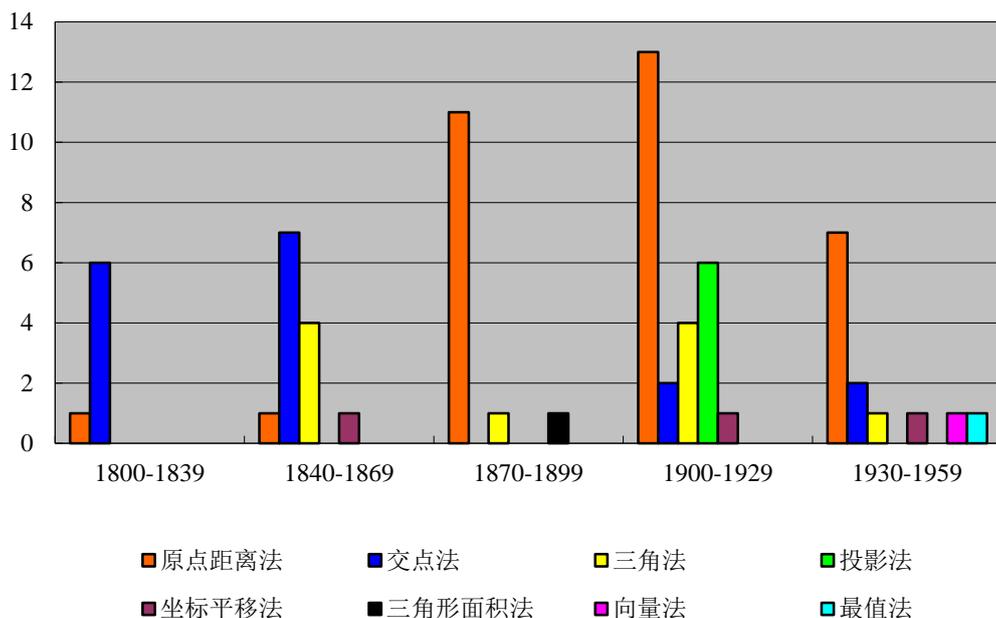


图 10 各种方法的年代分布

由图 9-10 可知，19 世纪上半叶之前的解析几何教科书（特别是法国的教科书）主要采用交点法来推导点到直线距离公式。这是一种十分清晰、自然的方法，并且教科书作者们通过简化，减少了其中的计算量。1870 年代之后，直线的法线式方程受到青睐，原点距离法几乎一统天下。投影法实际上与原点距离法一致。坐标平移法虽然比较巧妙，但由于很多教科书并不涉及坐标变换知识，因而用得并不多。

在给定一般方程的情况下，三角法的使用频率仅次于交点法。三角形面积法因为需要用到三角形面积的三阶行列式表达式，因而采用者很少。最值法则涉及二元函数，且柯西不等式在早期教科书中也不常用，因而也很少被教科书采用。

向量在教科书中的普遍使用，出现在 1940 年代前后，向量法也就是此时出现的，与原点距离法、交点法和三角法相比，这种方法不够切合学生的认知基础。

3 若干启示

美国早期解析几何教科书为我们呈现了“点到直线距离公式”丰富多彩的推导方法。综合上述方法，并将其与现行教科书中的方法对比，得到如下启示：

(1) 从历史上看，人们最容易想到、且早普遍使用的是交点法。历史是一面镜子，这种方法依然适合于今日的课堂教学，当然，需要适当简化。三角法利用直角三角形的边角关系以及有关三角公式，直观而简易，有一定的优势，在历史上较受人们的喜爱，因而也完全

可以运用于今日的教学之中。向量法出现得很迟,远远滞后于向量概念本身,可知不易想到,由于缺乏几何、代数或三角方面的知识基础,这种方法也易于遗忘。至少,我们在运用该方法的同时,也有必要介绍其他方法,以加深学生的理解和记忆。

(2) 基于法线式方程的原点距离法因为特别简便而受到早期教科书作者们的青睐,但由于今日教科书不用法线式方程,故该方法已无法搬用。但在 HPM 视角下的教学设计中,我们完全可以对其进行改编:首先,根据直线一般方程,求出直线在两条坐标轴上的截距以及直线被坐标轴所截得的线段长;然后,根据直角三角形面积公式,得到原点到已知直线的

距离公式 $d_0 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;接着,求出过 $P(x_0, y_0)$ 且与已知直线平行的直线方程

$Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$ 及其在 x 轴上的截距,利用比例关系即可导出距离公式(2)。

人教版教科书中的三角形面积方法是对历史上同类方法的改编,是推陈出新的范例。对原点距离方法的改编,同样值得尝试。

(3) 历史上点到直线距离公式的推导方法丰富多彩,反映了数学思维的多元性和灵活性以及不同知识领域之间的密切联系。在课堂上运用多种方法来推导该公式,可以拓宽学生的思维,为他们创造综合运用各种已学知识的机会;学生从中收获的将不仅仅是一个公式,还有其背后丰富多彩的思想方法。

参考文献

- [1] Purcell, E. J. *Analytic Geometry* [M]. New York: Appleton-Centruy-Crofts, 1958. 51-54
- [2] Lefrancois, F. *Essais de Géométrie Analytique* [M]. A Paris: Chez Courcier. 1804. 13-15
- [3] Young, J. R. *The Elements of Analytical Geometry* [M]. London: John Souter, 1830. 28-29
- [4] Cirodde, P. L. *Leçons de Géométrie Analytique*. Paris: L. Hachette et Cie, 1848. 202-206
- [5] Gibson, G. A., Pinkerton, P. *Elements of Analytical Geometry* [M]. London: Macmillan & Co., 1919. 53-54
- [6] Hardy A. S. *Elements of Analytic Geometry* [M]. Boston: Ginn & Company, 1891. 55-56
- [7] Harding, A. M., Mullins, G. W. *Analytic Geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1926. 90-92
- [8] Loomis, E. *The Elements of Analytical Geometry* [M]. New York: Harper & Brothers, 1877.

57-58

- [9] Crenshaw, B. H. & Killbrew, C. D. *Analytic Geometry and Calculus* [M]. New York: P. Blakiston's Son & Co, 1925. 21-23
- [10] O'Brien, M. *A Treatise on Plane Co-ordinate Geometry* [M]. Cambridge: Deightons, 1844. 27-28
- [11] Cell, J. W. *Analytic Geometry* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1951. 42-44
- [12] Riggs, N. C. *Analytic geometry* [M]. New York: The Macmillan Company, 1911. 83-85
- [13] Kells, L. M. & Stotz, H. C. *Analytic Geometry* [M]. New York: Prentice-Hall, 1949. 68-69
- [14] Johnston, W. J. *An Elementary Treatise on Analytical Geometry* [M]. Oxford: The Clarendon Press, 1893. 70-71
- [15] Murnaghan, F. D. *Analytic Geometry* [M]. New York: Prentice-Hall, 1946. 85-86
- [16] Taylor, A. E. *Calculus, with Analytic Geometry* [M]. New Jersey: Prentice- Hall, 1959.

“点到直线距离公式”的三角形面积推导法*

汪晓勤

(华东师范大学数学系, 上海, 200241)

“点到直线的距离公式”是高中解析几何的重要知识点, 不同教科书所给出的推导方法互有不同。人教版教科书给出的一种推导方法是: 过已知点分别作 x 轴和 y 轴的平行线, 利用直角三角形面积公式求得点到直线的距离。这种方法的计算量较大, 我们希望对其进行简化。为此, 我们对三角形面积法进行了探究。

在下面的讨论中, 我们假设已知直线 l 与两条坐标轴都不平行。

1 19 世纪的三角形面积法

19 世纪末英国的一本解析几何教科书已经采用了三角形面积法^[1]。设直线 l 的方程为 $Ax + By + C = 0$ ($AB \neq 0$), 要求点 $P(x_0, y_0)$ 到 l 的距离。如图 1, l 与 x 轴和 y 轴的交

点分别为 $M\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ 和 $N\left(0, -\frac{C}{B}\right)$, 则有

$$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C}{B} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| \frac{C}{B} x_0 + \frac{C}{A} y_0 + \frac{C^2}{AB} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C}{AB} (Ax_0 + By_0 + C) \right|.$$

因 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} MN \times d$, 而

$$MN = \sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)^2 + \left(-\frac{C}{B}\right)^2} = \left| \frac{C}{AB} \right| \sqrt{A^2 + B^2}$$

故得点到直线距离公式

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1)$$

* 人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”(课题批准号: KC2014—010) 系列论文之一。

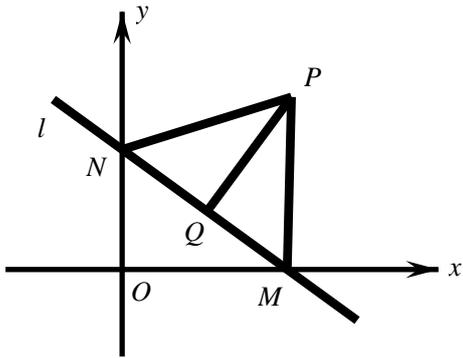


图1 三角形面积法

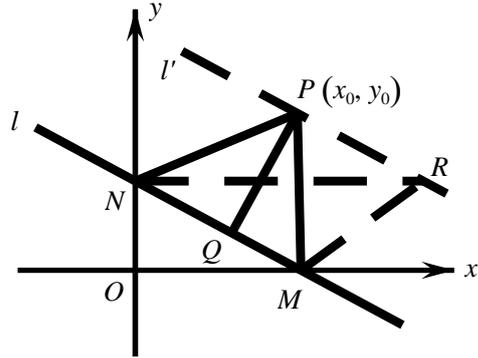


图2 等积变换法之一

上述方法用三阶行列式来表达三角形的面积，因而不能用于我们今天的高中课堂中。或许由于这一原因，人教版对其进行了改进，可惜计算量太大。我们希望避开行列式知识，直接用解析几何或平面几何知识来求 $\triangle PMN$ 的面积，从而导出点到直线距离公式。

2 等积变换法之一

如图2，过点 P 作 l 的的平行线 l' ，则 l' 的方程为 $Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$ 。过点 N 作 x 轴的平行线，交 l' 于点 R 。则点 R 的横坐标为 $x_R = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A}$ ，于是得

$$NR = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A} \right|。因此有$$

$$S_{\triangle PMN} = S_{\triangle RMN} = \frac{1}{2} NR \times ON = \frac{1}{2} \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A} \right| \left| -\frac{C}{B} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB} \right|。$$

故得距离公式(1)。

3 等积变换法之二

如图3，过点 P 作 l 的的平行线 l' ，过点 M 作 y 轴的平行线，交 l' 于点 R 。则点 R 的纵坐标为 $y_R = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{B}$ ，于是得 $MR = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{B} \right|$ 。因此有

$$S_{\triangle PMN} = S_{\triangle RMN} = \frac{1}{2} MR \times OM = \frac{1}{2} \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{B} \right| \left| -\frac{C}{A} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB} \right|。$$

4 等积变换之三

如图4, 过点 P 作直线 l 的平行线 l' , 交 y 轴于点 S , 则点 S 的纵坐标为 $y_s = \frac{Ax_0 + By_0}{B}$,

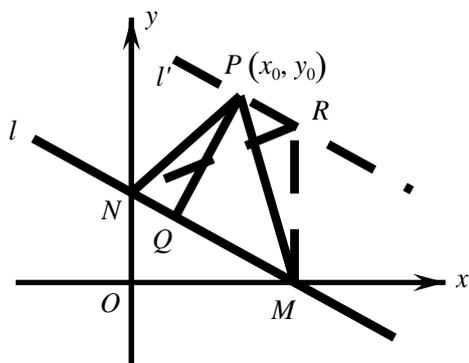


图3 等积变换之二

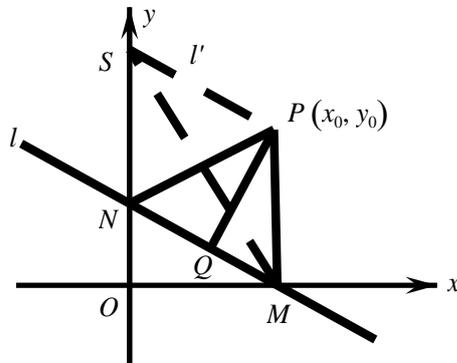


图4 等积变换之三

于是得 $NS = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{B} \right|$ 。因此有

$$S_{\triangle PMN} = S_{\triangle SMN} = \frac{1}{2} NS \times OM = \frac{1}{2} \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{B} \right| \left| -\frac{C}{A} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB} \right|.$$

5 等积变换之四

如图5, 过点 P 作直线 l 的平行线 l' , 交 x 轴于点 T , 则点 T 的横坐标为 $x_t = \frac{Ax_0 + By_0}{A}$,

于是得 $MT = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A} \right|$ 。因此有

$$S_{\triangle PMN} = S_{\triangle TMN} = \frac{1}{2} MT \times ON = \frac{1}{2} \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A} \right| \left| -\frac{C}{B} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB} \right|.$$

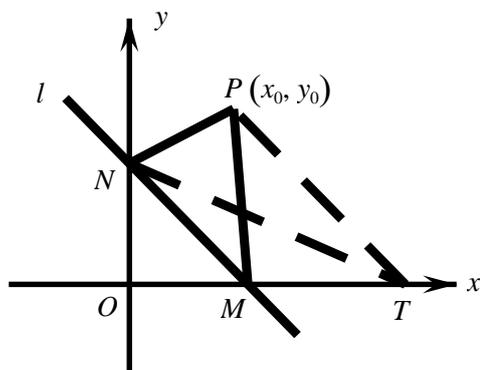


图5 等积变换之四

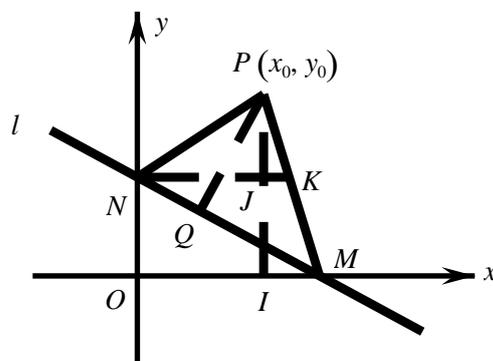


图6 分割法之一

6 分割法之一

如图 6, 过点 N 作 x 轴的平行线, 交 PM 于点 K 。若 P 在 x 轴上, 则 $y_0 = 0$,

$$S_{\Delta PMN} = \frac{1}{2} \left| x_0 + \frac{C}{A} \right| \left| -\frac{C}{B} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + C)}{AB} \right|。若 $y_0 \neq 0$, 则因 PM 的方程为 $\frac{y}{y_0} = \frac{x + \frac{C}{A}}{x_0 + \frac{C}{A}}$,$$

故得点 K 的横坐标为 $x_K = -\frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB y_0}$, 即 $NK = \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB y_0} \right|$, 于是, 不

失一般性, 我们有

$$\begin{aligned} S_{\Delta PMN} &= S_{\Delta PNK} + S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2} NK \times (PJ + JI) = \frac{1}{2} NK \times PI \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB y_0} \right| \cdot |y_0| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB} \right|. \end{aligned}$$

7 分割法之二

如图 7, 过点 M 作 y 轴的平行线, 交 PN 于点 L 。若 P 在 y 轴上, 则 $x_0 = 0$,

$$S_{\Delta PMN} = \frac{1}{2} \left| y_0 + \frac{C}{B} \right| \left| -\frac{C}{A} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(By_0 + C)}{AB} \right|。若 $x_0 \neq 0$, 则因 PN 的方程为 $\frac{y + \frac{C}{B}}{y_0 + \frac{C}{B}} = \frac{x}{x_0}$,$$

故得点 L 的横坐标为 $x_L = -\frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB x_0}$, 即 $ML = \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB x_0} \right|$ 。于是, 不

失一般性, 我们有

$$\begin{aligned} S_{\Delta PMN} &= S_{\Delta MNL} - S_{\Delta PML} = \frac{1}{2} ML \times (OM - IM) = \frac{1}{2} ML \times OI \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB x_0} \right| \cdot |x_0| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB} \right|. \end{aligned}$$

8 分割法之三

如图 8, 过点 P 作 y 轴的平行线, 交 l 于点 U , 则点 U 的纵坐标为 $y_U = -\frac{Ax_0 + C}{B}$,

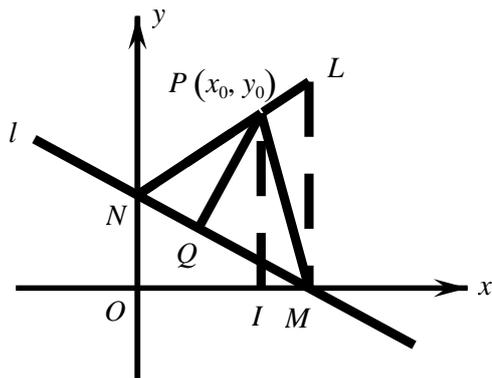


图7 分割法之二

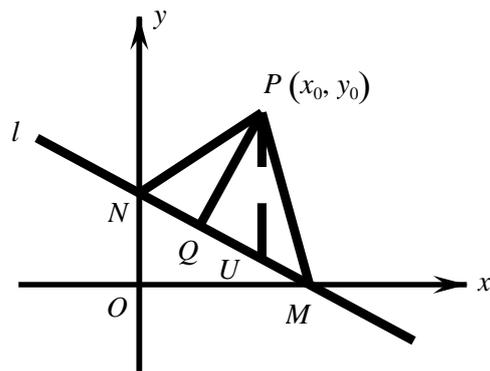


图8 分割法之三

于是得 $PQ = \left| y_0 + \frac{Ax_0 + C}{B} \right| = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{B} \right|$ 。不失一般性，我们有

$$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} PQ \times OM = \frac{1}{2} \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{B} \right| \left| -\frac{C}{A} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB} \right|.$$

9 分割法之四

如图9，过点P作x轴的平行线，交l于点V，则点V的横坐标为 $x_V = -\frac{By_0 + C}{A}$ ，于

是得 $PV = \left| x_0 + \frac{By_0 + C}{A} \right| = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A} \right|$ 。不失一般性，我们有

$$\begin{aligned} S_{\triangle PMN} &= S_{\triangle PMV} - S_{\triangle PNV} = \frac{1}{2} PV \times (OI - IN) = \frac{1}{2} PV \times ON \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A} \right| \left| -\frac{C}{B} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB} \right| \end{aligned}$$

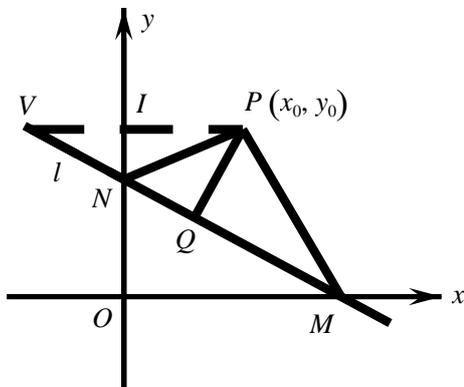


图9 分割法之四

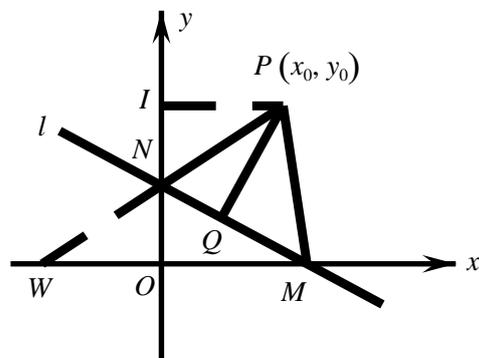


图10 面积差法之一

10 面积差法之一

如图 10, 假设点 P 不在 y 轴上。延长 (或反向延长) PN , 交 x 轴于点 W , 因直线 PN

的方程 $\frac{y + \frac{C}{B}}{y_0 + \frac{C}{B}} = \frac{x}{x_0}$, 故点 W 的横坐标为 $x_w = \frac{Cx_0}{By_0 + C}$, 于是得 $WM = \left| -\frac{C}{A} - \frac{Cx_0}{By_0 + C} \right|$

$= \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{A(By_0 + C)} \right|$, 不失一般性, 我们有

$$\begin{aligned} S_{\Delta PMN} &= S_{\Delta PWM} - S_{\Delta NWM} = \frac{1}{2} WM \times (OI - ON) = \frac{1}{2} WM \times NI \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{A(By_0 + C)} \right| \left| y_0 + \frac{C}{B} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB} \right|. \end{aligned}$$

11 面积差法之二

如图 11, 假设点 P 不在 x 轴上。延长 (或反向延长) PM , 交 y 轴于点 Z , 因直线 PM

的方程 $\frac{y}{y_0} = \frac{x + \frac{C}{A}}{x_0 + \frac{C}{A}}$, 故点 Z 的纵坐标为 $y_z = \frac{Cy_0}{Ax_0 + C}$, 于是得 $ZN = \left| -\frac{C}{B} - \frac{Cy_0}{Ax_0 + C} \right|$

$= \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{B(Ax_0 + C)} \right|$, 故有

$$\begin{aligned} S_{\Delta PMN} &= S_{\Delta ZMN} - S_{\Delta ZPN} = \frac{1}{2} ZN \times (OM - OJ) = \frac{1}{2} ZN \times JM \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{B(Ax_0 + C)} \right| \left| x_0 + \frac{C}{A} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{C(Ax_0 + By_0 + C)}{AB} \right|. \end{aligned}$$

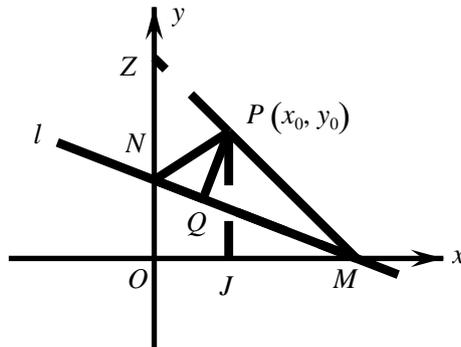


图 11 面积差法之二

12 结语

利用三角形面积公式来推导点到直线距离公式，思路清晰，过程简洁，符合学生的认知基础，不失为理想的方法。但仅仅根据已知点以及已知直线与坐标轴的交点坐标，在不能运用三阶行列式知识的情况下，要直接计算三角形面积（如用海伦公式）很不容易。但以上我们看到，通过等积变换、面积分割或面积之差诸方法，大大降低了求解的难度，显著减少了计算量。在课堂教学中，我们完全可以用这些方法来取代人教版的直角三角形面积法。

在对三角形面积法进行探究的过程中，我们深深感到，只要做一个有心人，在中学数学的每一个定理或公式背后，都能找到丰富多彩的思想方法，虽然这些思想方法不见于教科书，但它们拓宽了我们的思维，加深了我们对知识的理解，也激发了我们好奇心和进一步探究的兴趣。同时我们也看到，教科书上的方法不一定是最佳方法，我们完全可以对其进行改进。

参考文献

- [1] Johnston, W. J. *An Elementary Treatise on Analytical Geometry* [M]. Oxford: The Clarendon Press, 1893. 70-71

20 世纪中叶以前西方三角学教科书中的弧度制*

周杰^{1,2}

(1.重庆市第十八中学, 重庆, 400020; 2.华东师范大学数学系, 上海, 200241)

1 引言

古希腊天文学家在制作弦表时, 已经有了弧度制思想的萌芽. 但弧度制作为角的度量方式, 最早是由英国数学家柯茨 (R. Cotes, 1682-1716) 于 1714 年提出的, 柯茨意识到了这种度量角的方式的自然性及优点. 1869 年, 苏格兰数学家缪尔 (T. Muir, 1844-1934) 采用了这种度量角的方式, 不过, 他所用的名称在 rad、radial、radian 之间反复变动. 1873 年, “radian” 一词首次出现于贝尔法斯特女王学院的试卷上, 由爱尔兰物理学家汤姆森 (J. Thomson, 1822-1892) 所创用. 1874 年, 缪尔与汤姆森经过商议后, 决定使用 “radian” 一词.

今天, 弧度制是高中数学的教学难点之一, 由于课时数少, 多数教师把教学重点放在角度制与弧度制的相互转化上, 忽视了学生对弧度制这一重要概念本身的理解. 结果, 学生对弧度的概念不甚了了, 更不知引入弧度制的必要性. 事实上, 弧度制在数学上扮演着非常重要的角色, 就高中数学而言, 弧度制的引入为研究三角函数的性质提供了极大的便利.

近年来, HPM 视角下的数学教学日益受到数学教育界的关注, 越来越多的中学数学教师对 HPM 教学案例产生浓厚的兴趣. 为了开发 HPM 视角下的弧度制教学案例, 我们首先需要重构历史, 解决引入弧度制的必要性问题. 为此, 我们对 19-20 世纪 59 种西方三角学教科书 (限于篇幅, 其中绝大部分文献未在参考文献中列出) 进行考察, 希望从中获得思想的启迪. 59 种教科书的出版年份、出版国家分布如图 1 所示.

2 弧度制的引入方式

对 1877 年之后到 20 世纪中叶 59 种西方三角学教科书进行考察, 我们发现, 弧度制的引入方式共有四种: 直接引入、由类比角度制引入、由弧长公式引入、由三角函数作图引入.

* 人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”(课题批准号: KC2014—010) 系列论文之一.

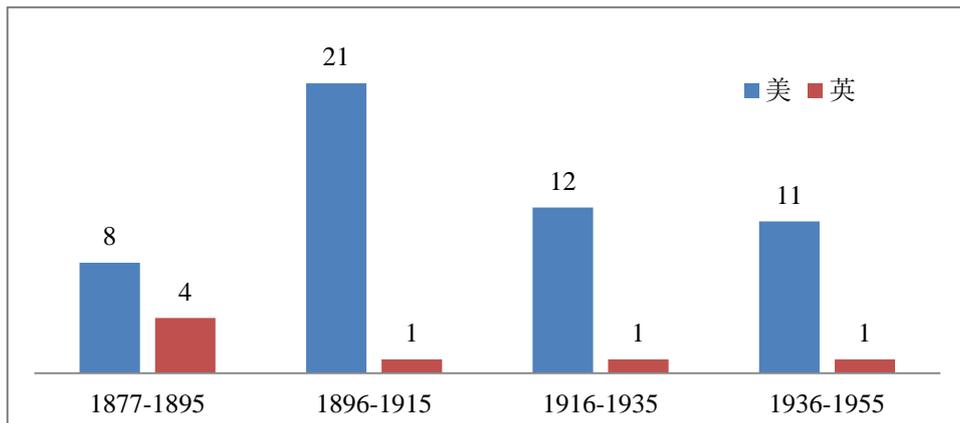


图 1

2.1 直接引入法

59 种教科书中有 46 种直接引入弧度制概念.

Newcomb(1883)首先指出, 可以将圆周任意等分, 取其中 1 份作为角的度量单位. 人们普遍将圆周 360 等分, 其中的 1 份称为 1 度, 但在数学研究中, 往往采用另一种度量方法——取半径为单位度量圆周, 即将圆周 2π 等分, 随后直接给出 1 弧度角的概念: 长度等于半径的弧所对的圆心角为 1 弧度的角^[1]. 然后进行角度与弧度的换算.

Lock(1885)指出, 度量角有两种常见的方法——角度制与弧度制, 介绍完角度制后, 直接给出 1 弧度角的概念, 然后证明了 1 弧度角规定的合理性、解决角度与弧度的换算问题^[2].

其它 44 本教科书采用与上述两种教科书类似的方法直接引入弧度制, 有的教材还介绍了角的其它度量单位 (如 grade).

2.2 角度制的类比

Richards (1878)采用如下方法引入弧度制^[3]. 首先提出问题: 在一个单位圆里, 如何度量任意角 (以度、分、秒为单位) 所对的弧长? 记圆的半径为 R , 周长为 C , 则 $C = 2\pi R$. 因半径为单位长, 故有 $C = 2\pi$, 即单位圆的周长为 2π . 因为整个圆周为 360° , 于是

$$1^\circ = \frac{1}{360} \times 2\pi = \frac{\pi}{180},$$

$$1' = \frac{1}{60} \times \frac{1}{360} \times 2\pi = \frac{\pi}{60 \times 180},$$

$$1'' = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{60 \times 180} = \frac{\pi}{60 \times 60 \times 180}.$$

记弧长为 a , 一般地, 在单位圆中, n° 的角所对弧长就可以表示为

$$a = \frac{n\pi}{180}.$$

在角度制中，单位角“1度”是一个直角的 $\frac{1}{90}$ ，弧长的单位长度是四分之一圆周长的 $\frac{1}{90}$ ；在弧度制中，单位角是弧长等于半径的圆弧所对的圆心角，弧长的单位长度是长度等于半径的圆弧。接着说明，长度等于半径的圆弧所对圆心角是一个常量，与圆的半径无关。

图2是一个以 B 为圆心、 AC 为直径的半圆，弧 AD 的长度等于半径，记圆的半径为 R ，则 \widehat{AD} 的长也为 R 。由圆的周长公式可得 \widehat{ADC} 的长度为 πR ，又因

$$\frac{\angle ABD}{180^\circ} = \frac{\widehat{AD}}{\widehat{ADC}} = \frac{R}{\pi R} = \frac{1}{\pi},$$

因此， $\angle ABD = \frac{180^\circ}{\pi}$ ，而 $\frac{180^\circ}{\pi}$ 与半径 R 无关，所以 $\angle ABD$ 是一个常量，也就是说长度等于半径的弧所对的圆心角是一个与半径无关的常量。

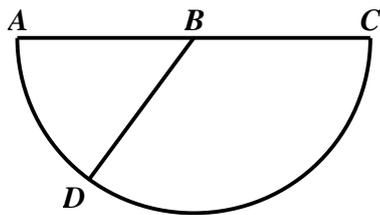


图 2

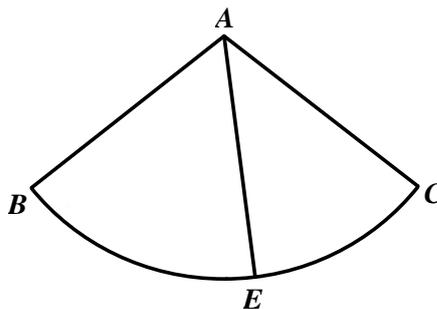


图 3

在图3中， $\angle BAC$ 是半径为 r 的圆中任意一个圆心角，记为 α （弧度制下的角），弧 BC 的长记为 l 。在弧 BC 上取一点 E ，满足 $\widehat{BE} = r$ ，因此 $\angle BAE$ 即为弧度制下的单位角，不妨记为 u ，于是有 $\frac{\alpha}{u} = \frac{l}{r}$ ，又由于 u 为单位角，所以

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

这表明，弧度制下的角可以表示为这个角所对的弧长与这个角所在圆的半径之比。如果令圆的半径 $r = 1$ （即我们今天所说的单位圆），那么在弧度制下圆中任意一个圆心角等于这个圆心角所对的弧长。

考虑整个圆周， 360° 的圆心角所对的弧长为 $2\pi r$ ，由上面的公式，有

$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi,$$

也就是说， 360° 的角用弧度制表示为 2π 。同理， 180° 的角在弧度制下为 π ， 90° 的角在

弧度制下为 $\frac{\pi}{2}$.

至此，角的度量就有了角度制和弧度制两种方式，那么如何进行角度值与弧度制之间的换算呢？给定一个角度制下为 n （度）的角，记它在弧度制下表示为 α （弧度），一般地，我们有

$$\alpha = \frac{n\pi}{180}.$$

需要指出的是，本书虽然给出了弧度制下的单位角，但并没有称它为“radian”，尽管作者所给定义与我们今天对 1 弧度角的定义并无差别。

之后的教科书，Wood (1885)^[4]、Crawley (1890)^[5]、Taylor (1904)^[6]等，都采用了类似的方法引入弧度制。

2.3 圆心角、弧长和半径之间的关系

Wheeler (1877)利用圆心角、弧长和半径之间的关系来引入弧度制^[7]，该方法也为今日我国中学数学教科书所普遍采用。

作者首先指出，我们已经有了用度、分、秒为单位来度量角，但我们还有另外一种度量角的方法称为弧度法（或者弧度制）。弧度制里，角可以用弧长和半径之比来表示。为了说明这种表示的合理性，我们需要证明任意两个角与它们所对应的弧长和半径的比值是成比例的。

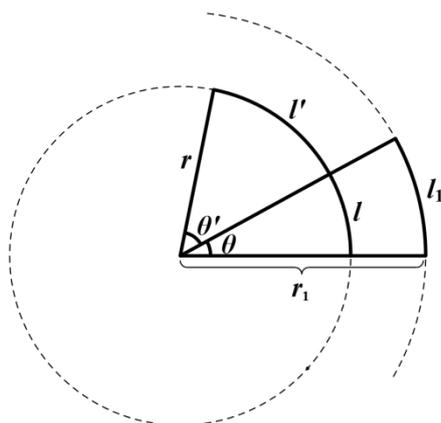


图 4

在任意一个圆里，任意两个角与它们所对的弧长是成比例的。如图 4，在半径为 r 的圆中，有

$$\theta : \theta' = l : l',$$

$$\therefore \theta : \theta' = \frac{l}{r} : \frac{l'}{r}$$

而在半径为 r_1 的圆中，有

$$\frac{l}{r} = \frac{l_1}{r_1},$$

也就是说，对同一个角而言，即使它所在圆的半径不同，但是所对弧长和相应半径之比是相同的。再由以上两个式子，可以得到

$$\theta : \theta' = \frac{l_1}{r_1} : \frac{l'}{r}$$

这样，我们就证明了任意两个角与它们所对应的弧长和半径之比是成比例的，于是我们就用弧长和半径之比来表示角，即 $\theta = \frac{l}{r}$ 。如果令 $l = r$ ，我们有 $\theta = 1$ ，因此弧度制下的单位角就是弧长等于半径的弧所对的圆心角。

接着，作者说明了弧度制下的单位角在角度制里大约是 57.3° ，同时角度制下的度量单位 1° 在弧度制下大约是 0.02 个弧度单位。然后给出了一些常用角的弧度数，如 $360^\circ = 2\pi$ 、 $180^\circ = \pi$ 、 $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ 、 $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ 。

之后的教科书，如 Oliver (1881)^[8]、Crockett (1896)^[9]、Whitaker(1898)^[10]、Lyman & Goddard (1900)^[11]、Moritz (1915)^[12]、Sprague (1942)^[13]等，也都采用上述方法来引入弧度制。

2.4 三角函数的作图

Wilczynski (1914)^[14]和 Dickson (1922)^[15]是通过三角函数作图来引入弧度制的。

Wilczynski (1914)考虑作正弦曲线 $y = \sin x$ ，可以在 x 轴上取任意线段代表 1° ，在 y 轴上取任意线段代表正弦值的单位，也就是 1。如果我们用毫米纸或米尺，用 1mm 代表 1° 、1dm 代表 1 会比较方便，尽管如此，这样的刻度也是比较大的，也许需要将好几张纸拼起来才能作出完整的曲线。通过列表、描点、连线，可以完成正弦曲线。

在作三角函数图象的过程中，学生或许已经察觉到坐标轴上自变量和因变量的单位长度取法不一，导致最终作出的曲线也不同，从本质上说，这是因为角度单位和实数单位不同。只要自变量和因变量的单位不同， x 轴和 y 轴的刻度选取就会相互独立互不影响。

为了解决这个问题，在任意一个圆内取一个 30° 的圆心角，我们将其所对的圆弧看作

30°的弧，由此，三角函数可以看作自变量为圆弧的函数。另一方面，以圆的半径为单位长度来度量圆弧，我们就可以统一圆弧和三角函数值的单位了。然后给出1弧度角的定义：“长度等于半径的弧所对的圆心角称为1弧度(radian)的角，它是弧度制的度量单位。”

记圆的半径为 r ，圆周长就是 $2\pi r$ ，那么一个圆周就相当于 2π 弧度，又因为一个周角是 360° ，所以

$$2\pi \text{ 弧度} = 360^\circ,$$

$$1 \text{ 弧度} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi},$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度}.$$

接着，就可以自然得到弧度制下的弧长公式 $l = \theta r$ （其中 θ 是用弧度制表示的角， l 为其所对的弧长）。作者总结：引入弧度制的一个优点便是统一弧和它的三角函数值的单位，这样便于我们作三角函数的图象。

3 结语

尽管弧度制思想萌芽于古希腊时期，但直到18世纪才为数学家所用；直到19世纪70年代末，西方三角形教科书才开始采用弧度制。20世纪中叶以前的59种西方三角学教科书中，大多数教科书都是直接给出1弧度的定义，然后阐述该定义的合理性；少数教科书采用类比角度值法、弧长公式法、三角函数作图法。可见，多数教科书编写者未能很好地处理引入弧度制的必要性问题。

弧度制的历史以及历史上三角学教科书中的弧度制呈现方式都告诉我们，弧度制必为教学难点，今日学生在学习弧度制时一定会遇到困难。另一方面，在高中三角学的教学中，如果我们在建立任意角的概念后先建立三角函数概念，然后再引出弧度制，势必能加深学生对弧度制的理解，同时也能让学生了解弧度制的历史以及引入弧度制所带来的好处。笔者将另文介绍HPM视角下弧度制概念的教学设计以及教师和学生设计的看法。

参考文献

- [1] Newcomb.S. Elements of Plane & Spherical Trigonometry[M]. New York: Henry Holt & Co., 1883.8-9

- [2] Lock, J. B. *A Treatise on Elementary Trigonometry* [M]. London: Macmillan & Co., 1885. 31-36
- [3] Richards, E. L. *Elements of Plane Trigonometry* [M]. New York: D. Appleton & Co., 1878. 86-91
- [4] Wood, De V. *Trigonometry: Analytical, Plane & Spherical* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1885. 3-4
- [5] Crawley, E. S. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. Philadelphia: J. B. Lippincott Company, 1890. 12-13
- [6] Taylor, J. M. *Plane Trigonometry* [M]. Boston: Ginn & Co., 1904. 95-98
- [7] Wheeler, H. N. *The Elements of Plane Trigonometry* [M]. Boston: Ginn & Heath, 1877. 5-7
- [8] Oliver, J. E., Wait, L. A. & Jones, G. W. *A Treatise on Trigonometry* [M]. Ithaca: Finch & Apgar, 1881. 3-4
- [9] Crockett, C. W. *Elements of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. New York: American Book Company, 1896. 8-10
- [10] Whitaker, H. C. *Elements of Trigonometry* [M]. Philadelphia: D. Anson Partridge. 1898. 149-150
- [11] Lyman, E. A. & Goddard, E. C. *Plane & Spherical Trigonometry* [M]. Boston & Chicago: Allyn & Bacon, 1900. 4-7
- [12] Moritz, R. E. *Elements of Plane Trigonometry* [M]. New York: John Wiley & Sons, 1915. 181-187
- [13] Sprague, A. H. *Essentials of Plane & Spherical Trigonometry* [M]. New York: Prentice-Hall, 1942. 100-102
- [14] Wilczynski, E. J. *Plane Trigonometry & Applications* [M]. Boston: Allyn & Bacon, 1914. 163-166
- [15] Dickson, L. E. *Plane Trigonometry with Practical Applications* [M]. Chicago: Benj H. Sanborn & Co., 1922. 158-160

HPM 视角下的三角形内角和教学*

唐秋飞

(上海市共富实验学校, 201906)

在沪教版初中数学教材中,“三角形内角和”是七年级第二学期“三角形”一章第二节的内容。教材对此的处理十分简洁:从三角形纸板的裁剪和拼合入手,猜想三角形内角和等于 180° ,然后,利用辅助平行线进行说理。

我们知道,三角形内角和定理有着悠久的历史^[1]。从历史上看,“破坏性的”剪拼三角形法并非证明该定理最自然的方法,且不说古人没有纸张,不可能使用此法,即使是在纸张普遍使用的时代,此法似乎也不见文献记载。法国数学家帕斯卡(B.Pascal,1623~1662)少年时代虽然用了类似的方法,但他所做的只是折纸,而不是撕纸。另一方面,尽管课本上采用了毕达哥拉斯的说理方法,但只字未提数学史,从而剥离了人的元素;辅助线的添加也是直接给出的,没有铺垫。此外,学生未能看到三角形内角和的丰富多彩的说理方法。

针对上述不足之处,我们从 HPM 的视角进行教学设计,所拟定的教学目标如下:

- (1) 理解和掌握三角形的内角和性质;
- (2) 通过经历操作、归纳、说理、论证的数学研究过程,初步感受数学探索、发现的科学历程;
- (3) 体会直观感知与理性思考的联系和区别,懂得直观结论需要说理证实的意义;
- (4) 让学生亲近数学,感受数学思维的灵活性和多样性,感受数学背后的人文精神。

1 历史材料及其运用

早在公元前 6 世纪,古希腊数学家泰勒斯(Thales)已经通过三角形的拼图发现了该定理。如图 1 所示,泰勒斯先是将六个同样的正三角形的各一个顶点置于同一点,恰好填满该点周围区域,因而六个内角之和等于四直角,三个内角之和等于二直角;接着,将六个同样

* 华东师范大学基础教育办公室与上海市宝山区教育局合作项目“HPM 与初中数学教师专业发展”系列教学案例之一。

的等腰三角形的不同顶点置于同一点，其中每个顶点出现两次，结果也恰好填满该点周围区域。因而六个内角之和等于四直角，三个内角之和等于二直角。最后，用六个同样的不等边三角形来拼图，也得出了

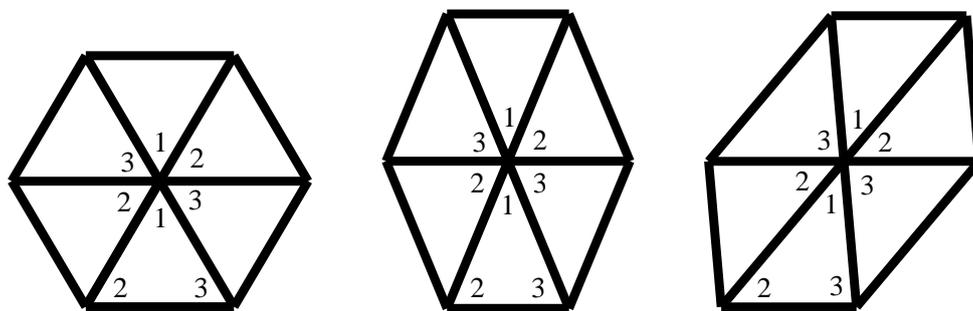


图 1

同样的结论。

或许受到泰勒斯拼图方法的启发，毕达哥拉斯学派利用辅助平行线证明了内角和定理，如图 2 所示。之后，欧几里得 (Euclid, 公元前 3 世纪) 也用类似的方法证明了该定理，如图 3 所示。

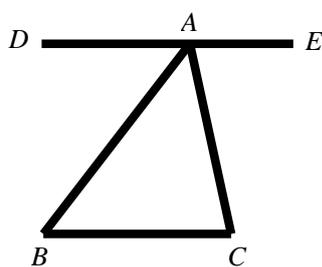


图 2

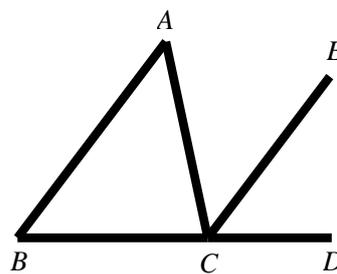


图 3

18 世纪，法国数学家克莱罗 (A.C.Clairaut, 1713~1765) 则通过将三角形三个内角化为一对同旁内角来证明。19 世纪末，部分美国几何教科书 (如教科书[2]) 设计了另一种证明方法，即通过辅助线，利用同位角和对顶角，将三角形的三个内角转化为平角。

据此，我们设计了“泰勒斯拼图”活动，再现三角形内角和的发现过程；又让学生从拼图中获得启示，添加辅助线，找到历史上数学家曾经给出过的各种证明方法。

三角形内角和定理出现于 19 世纪末和 20 世纪初的任何一本美国几何教科书中。围绕该定理，这些教科书都设计了丰富的练习题。我们选取了贝兹 (W. Betz) 和韦布 (H. E. Webb) 《平面几何》^[3]中的一个问题，并改编了贝曼 (W. W. Beman) 和史密斯 (D. E. Smith) 《新平面与立体几何》^[4]中的两个问题，目的是在课堂上为学生进一步创造机会，在掌握内角和应用的同时，能和百年前的数学学习者“对话”，增加学生的成就感；同时，也为后续有关

主题埋下伏笔。

于是，本节课通过附加式、复制式、顺应式和重构式，将数学史贯穿于整节课的始终。

2 教学设计与实施

2.1 三角形内角和的发现

首先让学生回顾三角形三条边之间的关系和三个角之间的关系。在学生回答“三角形的三个内角之和等于 180° ”之后，引入课题。

师：我们都是站在巨人的肩膀上看世界的，今天，老师将带领大家一起拉开历史的帷幕，看看古代数学家是如何发现和证明三角形内角和的。泰勒斯是公元前 6 世纪古希腊哲学家，有一次，他家装修房子，他从市场上买来等边三角形地砖。当他铺好地板，欣赏着漂亮的地板（PPT 出示图 4）时，他发现了一个非常有趣的事实：六块同样的正三角形地砖恰好铺满某一点的四周而不重叠、也不留任何缝隙（PPT 出示图 5）。这就表明，大小相同的六个角相加，恰好等于 360° 。所以，其中三个角相加等于 180° 。由于等边三角形的三个内角两两相等，因此，泰勒斯就发现，等边三角形的三个内角和等于 180° 。在作出这一重要发现之后，爱动脑筋的泰勒斯开始进一步思考：对于一般的等腰三角形和更一般的不等边三角形，是否也有同样的结果呢？泰勒斯同样通过拼图发现了同样的结果——无论是等腰三角形还是不等边三角形，三个内角的和都是 180° ！现在，请同学们以小组为单位，分别用六个同样的等腰三角形（黄色）和六个同样的不等边三角形（红色）来拼图，感受泰勒斯当年的探究和发现过程。

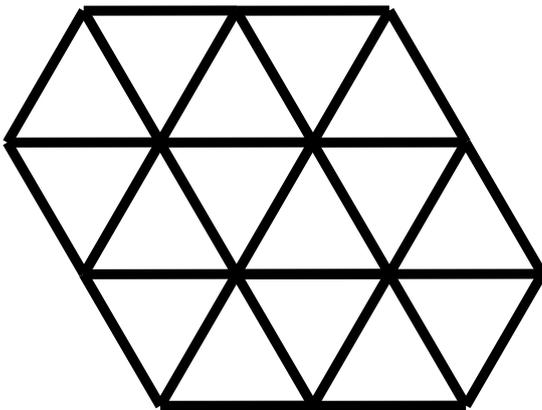


图 4

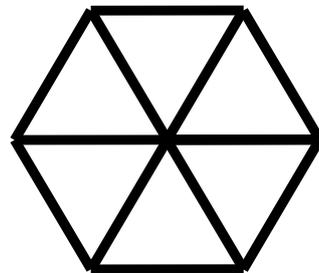


图 5

在等腰三角形和不等边三角形的情形中，学生各拼出两种图形，如图 6、图 7 所示。教师让两个组各派一名代表在黑板上展示他们的拼图，一组展示了等腰三角形拼图（图 6 左图），

另一组展示了不等边三角形拼图（图 7 右图）。教师引导学生从两种拼图方案中发现，具有共同顶点的六个角共为 360° ，而这六个角中， $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 和 $\angle 3$ 各出现两次，故知 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ，也就是说，无论是等腰三角形，还是不等边三角形，三个内角之和都是 180° 。教师总结：从等边三角形，到等腰三角形，最后再到不等边三角形，这是三角形内角和的自然发现顺序。

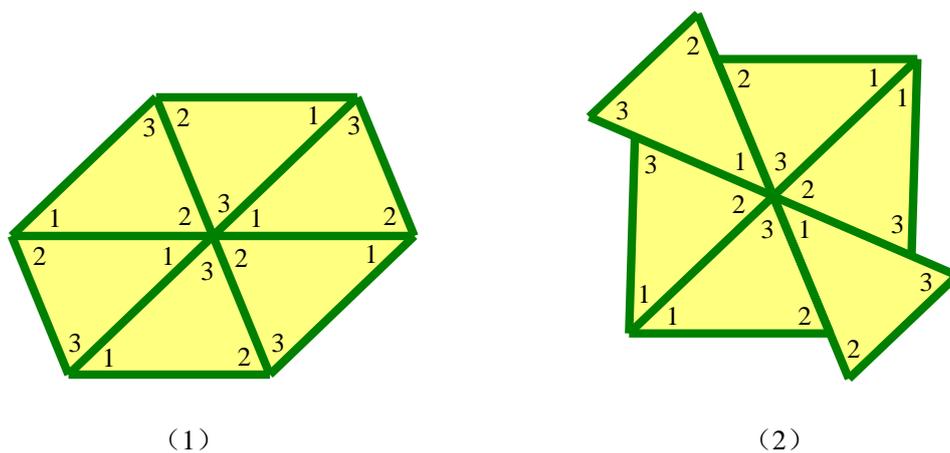


图 6

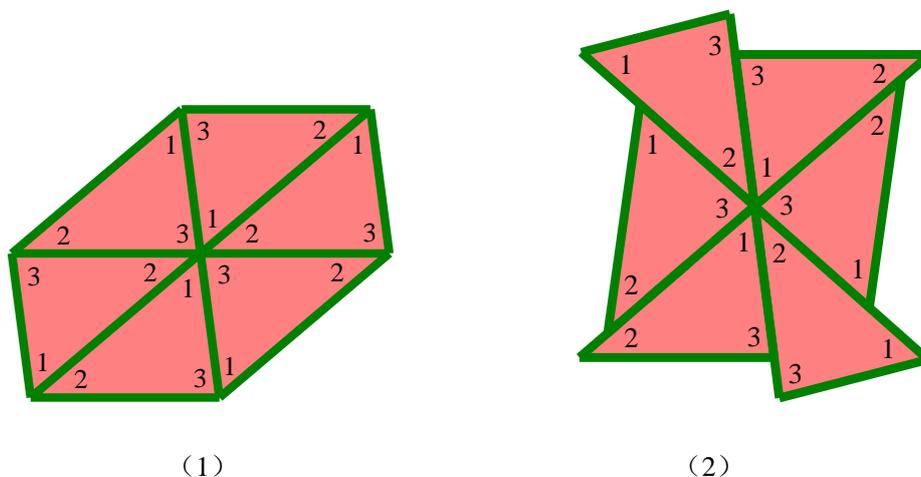


图 7

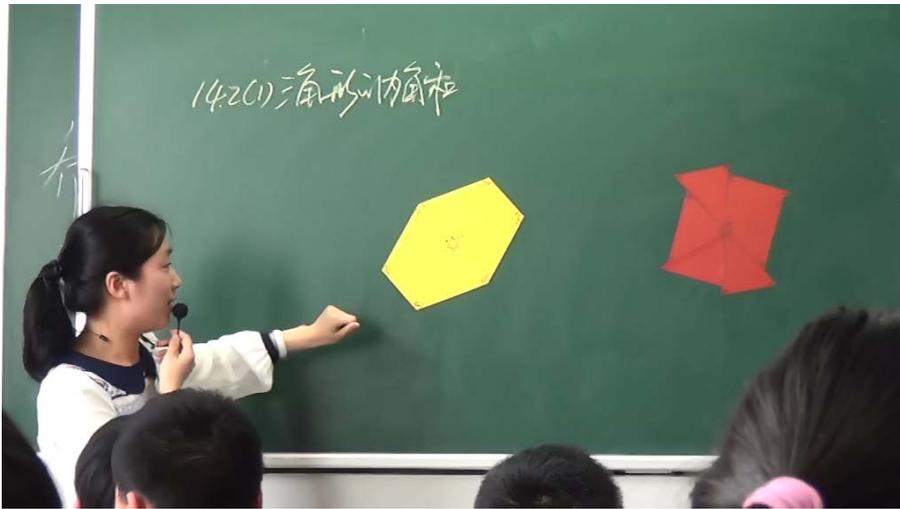
2.2 三角形内角和的说理

教师指出：泰勒斯通过拼图发现三角形内角和，这一发现只是实验性的，所以，我们还需要用严谨的方法去说理。

首先让学生回顾与 180° 有关的知识（平角；两直线平行，同旁内角互补）。然后，让学生在图 7 (1) 中锁定某一个三角形，通过添加辅助线来说理。按位置，六个三角形分别称

为上左、上中、上右、下左、下中和下右三角形。

各小组经过讨论之后，产生了多种方案。



第 1 组锁定下中三角形，过顶点 A 作边 BC 的平行线 DE ，利用两组内错角来说理，如图 8 所示。在板演整个说理过程之后，教师指出：这是古希腊哲学家毕达哥拉斯给出的证明，说明第一组同学的想法与他的想法是一样的。

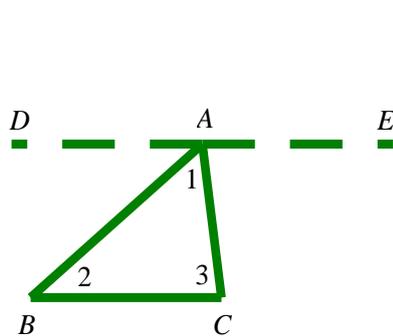


图 8

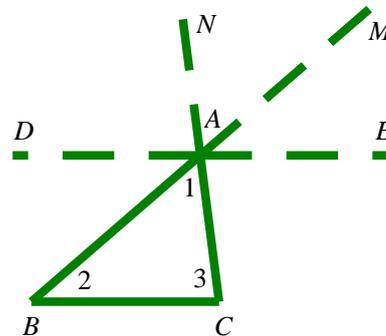


图 9

第 2 组仍锁定下中三角形，过顶点 A 作边 BC 的平行线 DE ，分别延长 BA 和 CA ，利用两组同位角 ($\angle MAE = \angle B$ ， $\angle NAD = \angle C$) 和一组对顶角 ($\angle BAC = \angle MAN$) 来说理，如图 9 所示。引导学生口述说理过程，教师指出：这种方法是 19 世纪末部分美国几何教科书给出的方法。

第 3 组仍锁定下中三角形，过顶点 A 作边 BC 的平行线 AE ，利用一组内错角，将三个内角转化为一组同旁内角进行说理，如图 10 所示。教师指出，这是 18 世纪法国数学家克莱罗的方法。

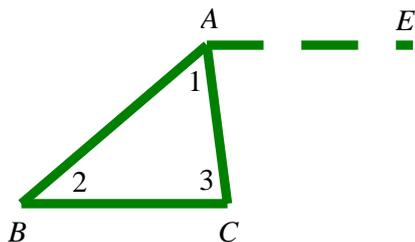


图 10

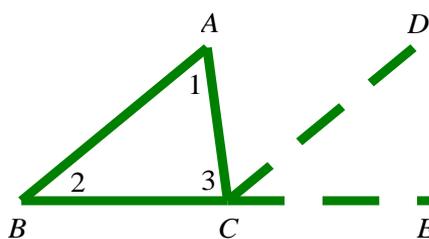


图 11

第 4 组锁定上左三角形，延长 BC ，过顶点 C 作 AB 的平行线 CD ，利用一组同位角 ($\angle DCE = \angle B$) 和一组内错角 ($\angle ACD = \angle A$) 进行说理，如图 11 所示。教师指出：这是古希腊数学家欧几里得的方法。

2.3 三角形内角和的应用

首先，指出三角形内角和性质在平面几何学中的重要性，接着，出示如下例题，并引导学生完成。

例 1. 三角形 ABC 中， $\angle A + \angle B = 70^\circ$ ， $\angle B + \angle C = 150^\circ$ ，求 $\angle A$ ， $\angle B$ 和 $\angle C$ 。

教师指出，这是 1912 年出版的美国几何教科书中的问题。从已知的两个方程中不能解出三个未知数，因此，需要结合隐藏的条件——三角形内角和来解决问题。

接下来，引导学生完成例 2 和例 3。

例 2. 在三角形 ABC 中， $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 1 : 2$ ，求 $\angle A$ ， $\angle B$ 和 $\angle C$ ，判断该三角形的形状。

例 3. 判断题。

(1) 下列说法不正确的是 ()

- A. 三角形三个内角中最多有一个钝角；
- B. 三角形三个内角中至少有两个锐角；
- C. 三角形三个内角中最多有一个直角；
- D. 钝角三角形内角和大于锐角三角形内角和。

(其中，选项 B 是教科书[4]中的一道证明题)

(2) 下列哪一组角不可能是同一个三角形的内角 ()

- A. 100° ， 50° ， 30°
- B. 45.5° ， 46.5° ， 88°

C. $40^\circ, 50^\circ, 90^\circ$

D. $60^\circ, 65^\circ, 70^\circ$

例 3 中的两道选择题的目的都是考察学生对内角和性质的掌握情况。对于第 (1) 题, 教师要求学生说出各个选项正确与否的理由, 学生在判断 A, C 时采用了反证法, 最终导出矛盾; 判断 B 时学生将三角形按角分类, 针对不同类的三角形举例说明该选项的正确性。

例 4. 如图 9, 在三角形 ABC 中, D 是 AB 上的一点, $\angle A = \angle ACD$, $\angle B = \angle BCD$, 求 $\angle ACB$ 。(改编自教科书[4])

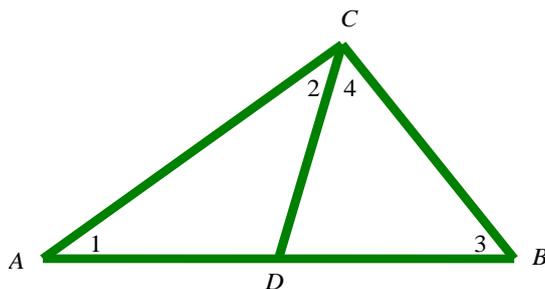


图 9 19 世纪末的美国几何教科书上的问题

该题不仅运用内角和性质来解决实际问题, 也为后面学习“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”这一定理埋下伏笔。在教学过程中以学生分析为主, 其中有学生设 $\angle A = \angle ACD = x^\circ$, $\angle B = \angle BCD = y^\circ$, 列出方程 $2x + 2y = 180$, 求得 $x + y = 90$ 。教师对该方法给予肯定, 并指出: 在求三角形内角的度数时, 我们经常采用设未知数列方程的思想来解决问题。

最后, 教师指出, 这是 1899 年出版的一本美国几何教科书中的问题, 在这节课中, 我们仿佛和一个世纪前的人们坐在同一个教室里一起解决三角形内角问题。

3 学生反馈

在小结环节, 教师让同学们谈谈学习本节课的收获——

生 1: 本节课中我认识了很多数学家, 学到了有关三角形内角和的许多历史知识。古代数学家勤于思考, 善于发现问题, 值得我们学习。

生 2: 我们学习几何, 要开动脑筋, 多方位地进行思考, 不能拘泥于一种方法。

生 3: 生活中, 我们要善于观察, 善于发现, 用多种方法去解决问题, 从中获得许多乐趣。

生 4: 这节课上, 我们找到的许多方法都是历史上数学家已经发现过的, 我非常敬佩数

学家的聪明才智。

课后，对全班 43 名学生做了问卷调查。关于“本节课上印象最深刻的内容”，18 人回答“探索古代数学家证明三角形内角和等于 180° 的方法”，认为“经历数学家解决问题的过程”让课堂充满乐趣；10 人回答“证明三角形内角和等于 180° 的不同方法”；8 人回答“通过小组合作交流、探索和发现定理”；5 人回答“拼三角形的活动环节”，认为从中“体会到了学习的乐趣和合作的快乐”；1 人回答“老师神采飞扬的讲课”，1 人回答“课外拓展部分”。

42 人表示很喜欢这节课，42 人表示完全理解这节课的内容，41 人表示对历史上数学家解决三角形内角和问题的思想和方法感兴趣，所有学生都表示愿意了解与课本内容相关的数学史知识。

4 结语

本节课将数学史融入课堂教学，再现古希腊数学家泰勒斯发现三角形内角和的过程，让学生感受到数学来源于生活，只要拥有一双善于发现的眼睛和勤于思考的大脑，数学就在身边；同时也拉近了学生与古代数学家的距离。学生在用 6 个同样的等腰三角形和 6 个同样的不等边三角形进行拼图的过程中，感受到从特殊到一般的数学探究过程，同时也获得了数学发现的成功体验。

从六边形拼图中锁定一个三角形，结合添加的辅助线得到多种不同的说理方法，而这些方法正是毕达哥拉斯、欧几里得、克莱罗以及 19 世纪末美国几何教科书作者曾经用过的。因此，在寻找辅助线、探求说理方法的过程中，学生得以穿越时空，与历史上的数学家进行“对话”。学生小结和问卷调查都表明，这样的“对话”让学生不知不觉中成了数学课堂的主人，给学生留下深刻的印象。

本节课有一些地方还值得进一步完善。

(1) 为了降低学生在拼图时的难度，笔者将三角形的内角标记为 1、2、3，但课堂中学生对于这些标记利用得不多。如果不做标记，充分发挥学生对泰勒斯地砖的理解自行完成从特殊到一般的探索，相信这样更能让他们获得成功的喜悦。

(2) 学生意外拼出了风车形状的图案（图 3（2）和图 4（2）），与笔者预设的六边形图案不符。虽然课上让学生将风车图案展示在黑板上，但课上所展示的证明都源于六边形拼图，风车图案没有发挥任何作用，留下了遗憾。

虽然，笔者已经多次参与 HPM 教学研讨活动，但自己真正尝试将数学史融入课堂教学

还是第一次。融入数学史的教学，不仅让学生感到数学原来可以这么学，也让我明白数学原来也可以这样教！作为一名青年教师，笔者深深感受到了 HPM 的魅力，也体验到了它对自己专业发展的重要帮助，期待自己能在 HPM 领域继续学习、实践、耕耘、收获。

参考文献

- [1] 汪晓勤.三角形内角和定理:从历史到课堂.中学数学月刊[J], 2012(6)
- [2] Milne,W.J.*Plane and Solid Geometry* [M]. New York: American Book Company, 1899
- [3] Betz,W.,Webb,H.E.*Plane Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1912
- [4] Beman,W.W.,Smith,D.E. *New Plane & Solid Geometry*[M]. Boston: Ginn & Company, 1899

HPM 视角下的“抛物线及其标准方程”教学*

徐超

(浙江省义乌市大成中学, 义乌 322002)

“抛物线及其标准方程”是人教版高中数学选修 2-1 第 2 章第 4 节的内容, 教科书以“二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像是一条抛物线”为切入口, 通过作图法简要说明了抛物线的几何性质, 然后引入抛物线的定义, 进而推导其标准方程。学生在学习中经常会问这样两个问题: (1) 椭圆、双曲线是由平面截圆锥得到的, 抛物线是否也可以这样得到? (2) 如果可以用平面截圆锥得到, 那么所得曲线一定是初中阶段所学的抛物线吗?

问题(1)是对“抛物线是否圆锥曲线的一种”的质疑, 而问题(2)实质上是对“抛物线是否具有统一的标准”的追问。这就要求我们在课程设计中必须理清抛物线的来龙去脉, 让学生充分理解抛物线的定义及其由来。

此外, 由于教科书对椭圆和双曲线并未采用焦点-准线定义, 使抛物线的定义显得突兀。那么, 抛物线的焦点和准线是怎么来的? 我们能否用一种更直接的方式把它们找出来, 从而帮助学生更好地认识抛物线?

一、圆锥曲线的历史对教学设计的启迪

公元前 4 世纪, 古希腊数学家梅内克缪斯 (Menaechmus) 用垂直于母线的平面去截顶角分别为锐角、钝角和直角的圆锥, 发现了三种圆锥曲线。之后, 数学家亚里士塔欧 (Aristaeus)、欧几里得 (Euclid) 等对圆锥曲线进行了深入研究。阿波罗尼斯 (Apollonius) 在前人工作的基础上, 对圆锥曲线进行了更为系统的研究, 写出了前无古人、后无来者的经典之作——《圆锥曲线论》, 阿波罗尼斯采用原始的截线定义, 他对圆锥曲线的焦点-准线性质一无所知, 甚至只字未提抛物线的焦点! 直到 3 世纪末, 帕普斯 (Pappus) 在其《数学汇编》中才首次证明: 与定点和定直线的距离成定比的点的轨迹是圆锥曲线, 定比小于、大于和等于 1 分别对应椭圆、双曲线和抛物线。

解析几何的创立, 使人们对圆锥曲线的研究进入了一个新阶段: 首先建立坐标系, 得出圆锥曲线的方程, 再利用方程研究圆锥曲线的性质, 以期摆脱几何直观而达到抽象化的目标。

*人教社课程与教材研究所十二五规划课题“数学史融入高中数学教材研究”(课题批准号: KC2014—010) 系列教学案例之一, 由浙江省义乌市王芳数学教育工作室实施。

历史告诉我们，古希腊人最先是从小圆锥的截面上发现圆锥曲线的，并直接采用了三种曲线的截线定义；圆锥曲线的焦点-准线性质的发现是相当滞后的。为了自然地呈现抛物线概念，我们在教学中需要让学生经历其发现过程，并呈现焦点和准线的来源；同时，应引导学生发现与定点和定直线的距离成定比的点的轨迹。

基于以上三点，我们对抛物线的历史进行重构，设计了以下三个关键环节。

环节一、“发现抛物线”：依据实物模型，用平面截圆锥得一条曲线，进行截面拟合，从而得到满足这条线上的点的某个方程： $y = \frac{1}{4}x^2$ 。

环节二、“探究抛物线上的动点满足的条件”：利用几何画板拟合所作曲线，研究曲线上的点满足什么条件。

环节三、“确定满足条件的动点是否在抛物线上”：利用几何画板作出满足条件的点，连点成线，得到完整的抛物线的定义。

二、教学过程

(一) 发现抛物线

师：我们最近研究的椭圆和双曲线的曲线是从哪里来的呢？

生：它们有统一名称叫圆锥曲线，是用平面截圆锥中得来的。

师：用平行于底面的平面截圆锥得到的是什么？如果用与底面成一定角度的平面去截圆锥，又会得到什么曲线呢？

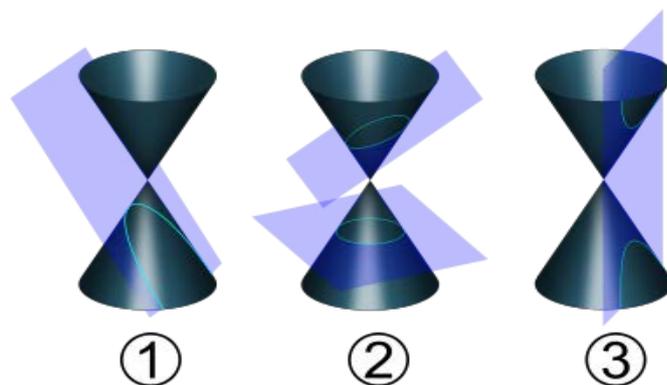


图 1

生：用平行于底面的平面去截是圆，如果角度较小可能是椭圆，如果与底面垂直的平面去截是双曲线，还有其它类型的曲线。（如图 1）

师：今天我们再来研究其他截法，我们可以看到这里有一条母线，如果我们用平行于母线的平面去截，得到一条曲线，那么这条曲线是什么呢？（如图 1(1)）请同学们思考一下，

我们研究曲线最基本的方法是什么？

生：建立坐标系、作图、列表、描点，再判断是什么曲线。

师：现在，作一平面使之与截面完全贴合，并将其置于坐标系中，请同学们观察，它经过哪些特殊点？

生：原点、 $(4, 4)$ 、 $(-4, 4)$ 、 $(8, 16)$ 、 $(-8, 16)$ ，左右两边是对称的。

师：找到这些特殊点以后，能猜出是什么样的图形呢？根据以前学过的知识，能不能试着写出方程呢？

生：猜测 $y = \frac{1}{4}x^2$ 。

师：这就是我们在初中时学过的二次函数，它是不是抛物线？

生：是的。

师：如果二次函数都是抛物线，那它为什么是抛物线呢？

生：……（回答不上来）

师：我们都知道，椭圆、双曲线都有严格的定义，那么，抛物线又是怎样定义的呢？

（二）探究抛物线上的动点所满足的条件

师：在古代举办奥运会时，都会进行一项神圣的仪式，就是火炬传递，比如中国举办2008年奥运会时，就传递经过了131个国家，那么奥运火炬最开始的时候是怎么取火的呢？

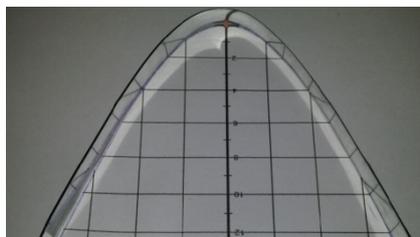


图 3

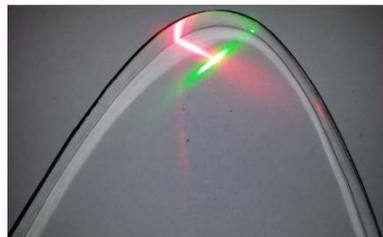


图 4

火的起源的故事：火的起源自普罗米修斯的神话，使之成为神圣的元素，希腊人在主神庙前燃烧着永不熄灭的火焰，火种是通过一个叫做 *skaphia* 的凹面镜将阳光集中采集而成的，太阳神赐予的神圣方式是圣火纯洁性的重要保证。

那么，凹面镜是如何把光聚集成火的呢？下面我们做一个实验：我们把这个截面曲线做成一个可以反射光线的小型曲面。（如图3）

师：（用激光笔，将光射入）请同学们观察这个截面，观察这些反射光线，观察光线的位置什么关系？平移这些光线，发现有光线汇聚的位置几乎是不变的。（如图4）

师：为了更好地展示这个现象，我们用几何画板来模拟一下刚才的实验。

刚才同学们猜测这个函数是 $y = \frac{1}{4}x^2$ ，我们首先作出它的图像。任作一条入射光线，经镜面反射之后，作出反射光线，平移入射光线，观察反射光线，同学们发现了什么？

生：都经过同一点。（如图 5）

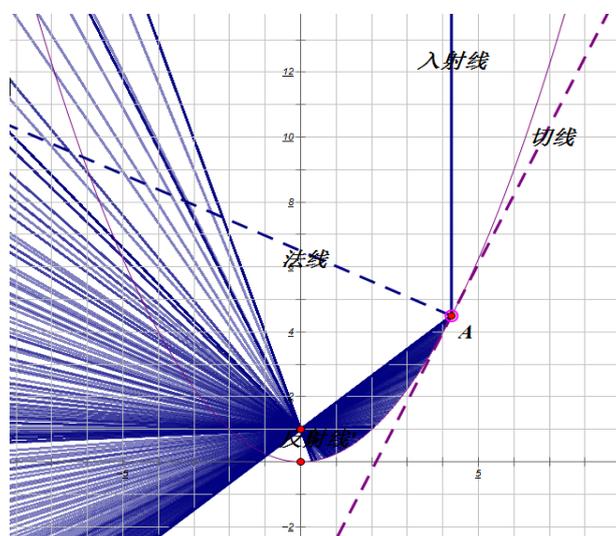


图 5

师：好。我们用 B 来表示这个点。我们知道，光线的传播路径是直线，并且光线是可逆的。如果在点 B 处放一个光源的话，那么这个光源就可以发出一些平行光线，根据这个原理，能做出一些东西，同学们都见过什么？

生：手电筒。

师：还有军事上有的探照灯、汽车的远光灯……可能都可以根据这个原理来制造。设想光线在曲线上的入射点处有一面镜子（与曲面贴合），那么 B 的虚像在什么地方呢？

作点 B 关于这条切线的对称点 B' ，则 B' 应该就是虚像所在的位置，连接 BB' ，很容易得到 $AB = AB'$ ，平移这些入射光线，发现这些虚像会形成一条直线。这条直线与哪一条坐标轴平行？

生： x 轴。（如图 6）

师：点 B 所形成的直线方程能写出来吗？

生： $y = -1$ 。

师：而 B 为定点 $(0,1)$ ，且 $AB = AB'$ ，因此，我们就可以得出结论，曲线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上的点，到定点 $B(0,1)$ 的距离与到定直线 $y = -1$ 的距离相等。

(三) 确定满足条件的动点是否在抛物线上

师：如果一个动点到定直线和定点的距离相等，那么，这个动点是否一定在抛物线上？
利用几何画板，我们如何做呢？

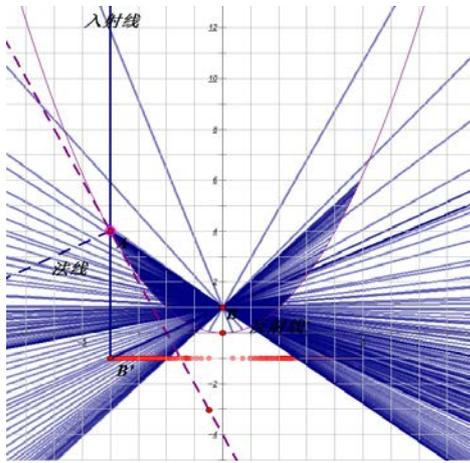


图 6

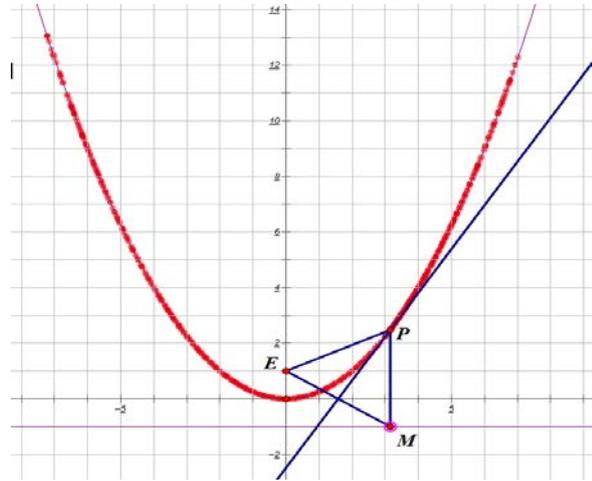


图 7

生：把线和点先画好。

师：对，作定直线 $y = -1$ 和定点 $E(0,1)$ ，如何确定到点和直线的距离相等的点呢？
先在 $y = -1$ 上取一点 M ，连接 EM ，作 EM 的中垂线，过点 M 作直线 $y = -1$ 的垂线，交 EM 的中垂线于点 P ，连接 PE ，则 $PE = PM$ 。点 P 是否在刚才的这条曲线上？（如图 7）

生：是的。

师：观察发现，点 P 确实落在这条曲线上。

师：我们来总结一下刚才的过程和结论。

生：到点 $(0,1)$ 和直线 $y = -1$ 的距离相等的点的轨迹方程是 $y = \frac{1}{4}x^2$ 。

师：曲线上的点到点 $(0,1)$ 和直线 $y = -1$ 的距离相等，并且到点 $(0,1)$ 和直线 $y = -1$ 距离相等的点的轨迹也是这条曲线。我们就把这样的曲线叫做抛物线。

师：现在能否总结出抛物线的定义呢？

生：平面内与一个定点 F 和到一条定直线 L 的距离相等的点轨迹叫做抛物线。

三、学生反馈

课后，我们采用问卷和访谈两种方式，就抛物线的取得、抛物线概念的生成和对抛物线定义的理解对全班 50 名学生进行了调查。

1. 关于抛物线的取得：92% 的学生反映由于有椭圆和双曲线作为铺垫，图形的取得自

然，贴合思维发展过程，与自己研究问题的方法基本一致。8%的学生认为图形的取得比较新奇，与自己探索问题的方向不大一致。

2. 关于抛物线概念的生成：86%的学生认为对利用几何画板作图取得抛物线的图形性质，特别是对焦点的生成留下了深刻的印象，另14%的学生认为基本能够理解抛物线的性质，对焦点有比较模糊的认识。

3. 关于抛物线的定义：96%的学生认为能够很好地理解抛物线的概念，根据所学的知识能够正确写出抛物线的焦点和准线。4%的学生认为能够较好地理解和接受抛物线的定义。

4. 学生对本节课的看法：调查结果显示，学生以前没有接触过 HPM 教学。82%的学生认为 HPM 视角下的教学对掌握课本上的基本概念和基础知识很有帮助，18%的学生认为有一定的帮助。

四、结语

古希腊数学家阿波罗尼斯采用截圆锥的方法来研究圆锥曲线，本节课以这一史实作为出发点，既符合教学目标，又尊重历史，使得知识有了源头，能让学生能更好地体会圆锥曲线知识的发生和发展过程。

就数学史的运用方式而言，本节课采用了重构式。重构式教学注重引发学生学习新知识的动机，本课通过寻求尽量多的承载抛物线本质意义而又直观具体的模型——圆锥切割模型、skaphia 凹面模型、截口模型，让学生经历从直观感知到抽象认识的过程：首先，通过光线反射实验，让学生直观感受抛物线的焦点；然后，利用几何画板模拟实验过程，让学生产生强烈的视觉冲突，从而对抛物线的性质产生深刻印象；再次，借助几何画板，验证“这条曲线上的点到定点和到定直线的距离相等”以及“到定直线和定点的距离相等的点是存在的，并且就是刚才所作的曲线”，最后引导学生归纳出抛物线的数学定义。

借鉴历史、重构历史，通过再创造的方式，让学生感悟和经历知识的发生过程，获得学习动力，促进思维发展，提高数学素养，并且培养他们勇于探索的精神。HPM 视角下的抛物线教学的目的正在于此。